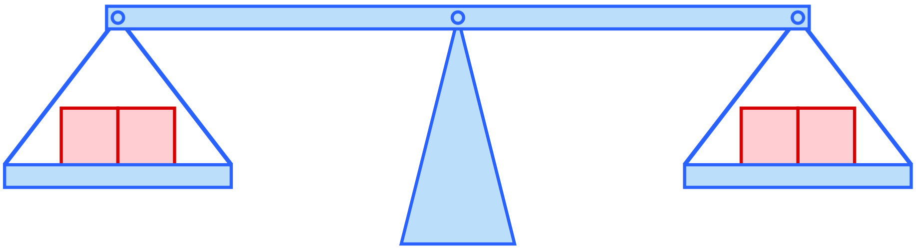
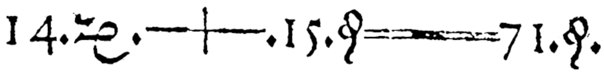
Gleichungen

Stefan Rothe
Laurenz Pantenburg

30.04.2025





Inhaltsverzeichnis

1 Begriffe

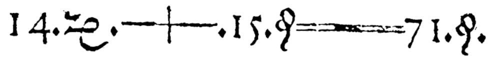
1.1 Definition

Formal gesehen besteht eine Gleichung aus zwei Termen, die mit einem Gleichheitszeichen verbunden werden:

$$\square = \square$$

1.2 Geschichte

Das Gleichheitszeichen, welches heute verwendet wird, wurde zum ersten Mal vom walisischen Mediziner und Mathematiker Robert Recorde um 1557 verwendet. Die Gleichung $14x + 15 = 71$ hatte er in seinem Buch für Arithmetik so geschrieben:



1.3 Aussagen

In der Mathematik ist eine **Aussage** eine Behauptung, die entweder **wahr** oder **falsch** ist.

Beispiel.
- *«Heute scheint die Sonne.»*
- *«Die Wurzel von 25 ist 3.»*
- *«Ich heisse Otto.»*

In der Formelsprache der Mathematik werden Aussagen als **Gleichungen** geschrieben, welche **keine Variablen** enthalten.

Beispiel.
- *Die Aussage* $\sqrt{25} = 3$ *ist falsch.*
- *Die Aussage* $1 + 1 = 2$ *ist wahr.*
- *Die Aussage* $1 + 2 = 4$ *ist falsch.*

In der Mathematik sind normalerweise nur **wahre** Aussagen interessant. Falsche Gleichungen können durch die Verwendung des Ungleichheitszeichens $\neq$ in eine wahren Aussage verwandelt werden.

Beispiel.
- *Die Aussage* $\sqrt{25} \neq 3$ *ist wahr.*
- *Die Aussage* $1 + 1 = 2$ *ist wahr.*
- *Die Aussage* $1 + 2 \neq 4$ *ist wahr.*

1.4 Aussageformen

Eine **Aussageform** ist eine Aussage, welche eine Lücke enthält. Ob die Aussage wahr oder falsch ist, hängt davon ab, was in die Lücke gesetzt wird.

Beispiel.
- *«Am _____ scheint die Sonne.»*
- *«Die Wurzel von _____ ist 3.»*
- *«Ich heisse _____.»*

In der Formelsprache der Mathematik werden Aussageformen als **Gleichungen** geschrieben, welche mindestens eine Variable enthalten. Ob diese wahr oder falsch sind, kann eigentlich erst beurteilt werden, wenn bestimmte Werte für die Variablen eingesetzt werden.

Beispiel. $\sqrt{x} = 3$

Wenn in einer Gleichung jede Variable durch eine Zahl ersetzt wird, entsteht eine Aussage, welche entweder wahr oder falsch ist:

Beispiel. *Die Aussage $\sqrt{16} = 3$ ist falsch. Die Aussage $\sqrt{9} = 3$ ist wahr.*

Es gibt aber auch Aussageformen, also Gleichungen mit Variablen, deren Wahrheitsgehalt für alle möglichen Werte der Variablen gleich ist.

Beispiel.
- *Die Gleichung $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist für alle Werte $a, b \in \mathbb{R}$ wahr.*
- *Die Gleichung $x = x + 1$ ist für alle Werte $x \in \mathbb{R}$ falsch.*

1.5 Definitionsmenge

Bei einer Aussageform müssen wir festlegen, welche Werte wir überhaupt in die Lücken einsetzen können, um eine sinnvolle Aussage zu erhalten. So macht die Aussage «Die Wurzel von Otto ist 3.» keinen Sinn.

Beispiel.
- *«Am _____ scheint die Sonne.» $\rightarrow$ Setze einen Tag ein.*
- *«Die Wurzel von _____ ist 3.» $\rightarrow$ Setze eine reelle Zahl ein.*
- *«Ich heisse _____.» $\rightarrow$ Setze einen Vornamen ein.*

Auch bei Gleichungen mit Variablen muss festgelegt werden, welche Zahlen überhaupt für die Variable eingesetzt werden dürfen. Wie bei den Termen heisst die Menge aller erlaubten Zahlen für eine Variable x die **Definitionsmenge** von x und wird mit $\mathbb{D}_x$ bezeichnet.

Beispiel. $\sqrt{x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_x = \mathbb{R}_0^+ \qquad \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_z = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1.6 Arten von Gleichungen

1.6.1 Identitäten

Identitäten sind Gleichungen, welche immer wahr sind, egal welche Zahlen aus der Definitionsmengen für die Variablen eingesetzt werden. Identitäten können bewiesen werden, indem die linke Seite der Gleichung mit Hilfe von bekannten Regeln in die rechte Seite umgeformt wird.

Beispiel. *Die folgenen Gleichungen sind Identitäten:*

- *Die erste binomische Formel* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *für* $a, b \in \mathbb{R}$.
- *Das erste Potenzgesetz* $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$ *für* $a \in \mathbb{R}, k, m \in \mathbb{Z}$.

Identitäten sind Hilfsmittel in der Mathematik. Sobald sie bewiesen sind, können wir sie einsetzen, um unsere eigenen Umformungen abzukürzen.

1.6.2 Definitionen

Mit einer Definition wird ein neuer Begriff eingeführt. Dabei bezieht sich die Definition auf schon Bekanntes. In der Mathematik und Wissenschaft können Definitionen als Gleichung geschrieben werden.

Beispiel. *Die Kreiszahl Pi* π *wird als Verhältnis des Umfang* U *eines Kreises zu seinem Durchmesser* d *definiert:*

$$\pi := \frac{U}{d}$$

In der Physik wird die Arbeit W *als die benötigte Kraft* F *mal der zurückgelegte Weg* s *definiert:*

$$W := F \cdot s$$

Dabei wird für den neuen Begriff ein Symbol definiert. Damit klar ersichtlich ist, welches das neu definierte Symbol ist, wird manchmal das Definitions-Gleichheitszeichen $:=$ verwendet. Auf der anderen Seite des Gleichheitszeichen steht ein Term, welcher angibt, wie der neue Wert aus bekannten Werten berechnet wird.

1.6.3 Bestimmungsgleichungen

Bestimmungsgleichungen sind Aussageformen, also Gleichungen mit mindestens einer Variable, welche nicht notwendigerweise für alle Werte aus der Definitionsmenge eine wahre Aussage ergeben.

Beispiel. *Die folgende Gleichung wird zu einer wahren Aussage, wenn wir für x der Wert 5 oder -5 eingesetzt wird:*

$$x^2 = 25$$

1.7 Gleichungen Lösen und Lösungsmenge

Das Bestimmen der Werte aus der Definitionsmenge, für welche eine Gleichung zu einer wahren Aussage wird, wird das **Lösen der Gleichung** genannt. Die Menge aller Werte, welche die Gleichung zu einer wahren Aussage machen, heisst **Lösungsmenge** und wird mit dem Zeichen $\mathbb{L}$ abgekürzt.

Beispiel. *Die Definitionsmenge ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} 2x = 10 \qquad &\Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \{5\} \\ x^2 = 25 \qquad &\Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \{-5; 5\} \\ x^4 = -4 \qquad &\Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \{\} \end{aligned}$$

Um eine Gleichung zu lösen, wird die Gleichung so umgeformt, dass eine Variable **isoliert** auf einer Seite der Gleichung steht. Das bedeutet, dass die Gleichung in die folgende Form gebracht wird:

$$x = \square$$

wobei $\square$ ein Term ist, der x nicht enthält. Dann kann die Lösung abgelesen werden, indem der Wert des Terms bestimmt wird.

2 Äquivalenzumformungen

2.1 Begriff

Zwei Gleichungen heissen **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben. Als Symbol für die Äquivalenz benutzten wir einen Doppelpfeil: $\Leftrightarrow$.

Beispiel. *Die folgenden drei Gleichungen sind zueinander äquivalent, da sie alle die selbe Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{2\}$ haben:*

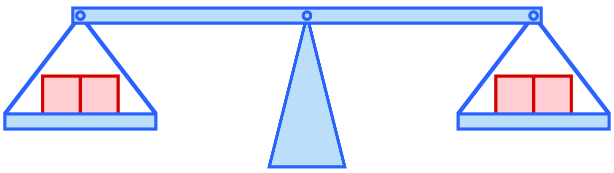
$$2x = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad -x = -2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2$$

*Hingegen hat die folgende Gleichung die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$ und ist damit **nicht** äquivalent zu den drei obigen.*

$$x^2 = 4$$

Beim Umformen einer Gleichung dürfen Sie nur solche Umformungen durchführen, welche die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändern. Solche Umformungen werden **Äquivalenzumformungen** genannt.

Eine Gleichung kann man sich als Balkenwaage vorstellen. Wenn die Gleichung eine wahre Aussage ist, sind die beiden Seiten ausbalanciert. Es sind nur solche Veränderungen erlaubt, welche die Balance der Waage erhalten.



Anhand der Waage kann man sich überlegen, welche Änderungen erlaubt sind:

1. eine Seite umsortieren
2. auf beiden Seiten das Gleiche hinzufügen oder entfernen
3. beide Seiten verdoppeln oder halbieren
4. beide Seiten vertauschen

Genau so können auch Gleichungen umgeformt werden:

1. Die Terme auf jeder Seite der Gleichung dürfen umgeformt werden.
2. Auf beiden Seiten einer Gleichung kann der gleiche Term addiert oder subtrahiert werden.
3. Beide Seiten einer Gleichung können mit dem gleichen Term multipliziert oder dividiert werden. Dieser Term darf nicht Null sein.
4. Die beiden Seiten einer Gleichung dürfen vertauscht werden.

2.2 Ziel

Wir dürfen Gleichungen mit Hilfe von Äquivalenzumformungen *beliebig* umformen. Doch wozu ist das gut?

Wir wollen die Lösungsmenge bestimmen, d.h. eine Gleichung lösen. Um Gleichungen zu lösen, werden diese so umgeformt, dass die Variable, für deren Lösung wir uns interessieren, **isoliert** auf einer Seite der Gleichung steht. Das bedeutet, dass Gleichungen in die folgende Form gebracht werden:

$$x = \square$$

wobei $\square$ ein Term ist, der x nicht enthält. Dann kann die Lösung für x abgelesen werden, indem der Wert des Terms bestimmt wird.

2.3 Umformungsprotokoll

Damit die an einer Gleichung vorgenommen Umformungen nachvollzogen werden können, wird ein **Umformungsprotokoll** geführt. Dazu wird rechts der Gleichung, durch eine vertikale Linie abgetrennt, jeweils der Umformungsschritt angegeben.

$$\begin{array}{lrl|l} & 2x + 6 & = 0 & -6 \\ \Leftrightarrow & 2x & = -6 & :2 \\ \Leftrightarrow & x & = -\frac{6}{2} & \text{kürzen} \\ \Leftrightarrow & x & = -3 & \end{array}$$

Durch die Äquivalenzumformungen haben wir herausgefunden, dass alle diese Gleichungen die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-3\}$ haben.

2.4 Termumformungen

Die Reihenfolge bzw. die Form eines Terms darf verändert werden. Im Bild der Balkenwaage entspricht dies einer Veränderung der Anordnung der Gewichte.

Auf jeder Seite der Gleichung befindet sich ein Term. Diese dürfen (jeder für sich) mit den bekannten Regeln umgeformt werden.

Beispiel. *Hier werden die Terme auf beiden Seiten zunächst ausmultipliziert. Danach werden auf der linken Seite die Summanden zusammengefasst.*

$$\begin{array}{lrl|l} & (2x-1)(3+2x) & = 4x(x-5) & \textit{ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & 6x + 4x^2 - 3 - 2x & = 4x^2 - 20x & \textit{zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 4x - 3 & = 4x^2 - 20x & \end{array}$$

2.5 Addieren oder Subtrahieren eines Terms

Auf beiden Seiten der Gleichung darf der gleiche Term addiert oder subtrahiert werden. Im Bild der Balkenwaage entspricht dies dem Hinzufügen oder Wegnehmen von gleichen Gewichten auf jeder Seite.

Beispiel. *Hier wird auf beiden Seiten der Gleichung $4x^2$ und $4x$ subtrahiert. Damit wird x^2 vollständig aus der Gleichung entfernt und x auf die rechte Seite der Gleichung gebracht.*

$$
\begin{array}{lrl|l}
 & 4x^2+4x-3 & = 4x^2-20x & -4x^2-4x \\
\Leftrightarrow & 4x^2+4x-3-4x^2-4x & = 4x^2-20x-4x^2-4x & \textit{zusammenfassen} \\
\Leftrightarrow & -3 & = -24x &
\end{array}
$$

Im Beispiel ist es sehr sinnvoll, den quadratischen Term x^2 zu eleminieren und anschliessend x auf eine Seite der Gleichung zu bringen. Im letzten Schritt, kann durch -3 geteilt werden.

2.6 Multiplizieren oder Dividieren mit einem Term

Beide Seiten der Gleichung dürfen mit dem gleichen Term multipliziert oder dividiert werden. Im Bild der Balkenwaage entspricht dies dem Halbieren, Verdoppeln oder Vervielfachen beider Seiten.

Wichtig ist, dass der Term, mit dem multipliziert wird **ungleich Null** ist, sonst wird der Wahrheitswert der Gleichung verändert.

Der Term, mit dem multipliziert wird, wird jeweils mit dem gesamten Term beider Seiten multipliziert. Nach dem Distributivgesetz muss deshalb **jeder einzelne Summand** auf beiden Seiten der Gleichung mit dem Term multipliziert beziehungsweise durch ihn dividiert.

Beispiel. *Hier werden beide Seiten der Gleichung mit dem kgV der Nenner multipliziert, um Brüche zu entfernen.*

$$
\begin{array}{lrl|l}
 & \frac{x}{4}+\frac{1}{5} & = \frac{x}{2}+\frac{x}{6} & \cdot \text{kgV}(4,5,2,6)=60 \\
\Leftrightarrow & 60\cdot\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{5}\right) & = 60\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{6}\right) & \textit{Distributivgesetz} \\
\Leftrightarrow & \frac{60\cdot x}{4}+\frac{60\cdot 1}{5} & = \frac{60\cdot x}{2}+\frac{60\cdot x}{6} & \textit{kürzen} \\
\Leftrightarrow & 15x+12 & = 30x+10x & \textit{zusammenfassen} \\
\Leftrightarrow & 15x+12 & = 45x & -15x\ (x \textit{ auf eine Seite bringen}) \\
\Leftrightarrow & 12 & = 30x & :30 \\
\Leftrightarrow & \frac{12}{30} & = x & \textit{kürzen} \\
\Leftrightarrow & \frac{2}{5} & = x &
\end{array}
$$

Beispiel. *Hier werden beide Seiten der Gleichung mit -1 multipliziert, um die negativen Vorzeichen zu entfernen. Anschliessend werden beide Seiten der Gleichung durch 24 dividiert, um die Variable x vollständig zu isolieren.*

$$
\begin{array}{lrl|l}
 & -3 & = -24x & \cdot(-1) \\
\Leftrightarrow & (-1)\cdot(-3) & = (-1)\cdot(-24x) & \text{Klammern ausrechnen} \\
\Leftrightarrow & 3 & = 24x & : 24 \\
\Leftrightarrow & \frac{3}{24} & = x & \text{kürzen} \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{8} & = x &
\end{array}
$$

Warum ist es wichtig, dass der Faktor oder Divisor nicht Null ist? Schauen wir uns Beispiele an.

Beispiel. Multiplikation mit Null: *Die Gleichung $2 = 0$ ist eine falsche Aussage und hat dementsprechend die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\}$. Wir multiplizieren beide Seiten mit $x - 2$. Das ist aber nur erlaubt, wenn $x \neq 2$ ist, denn sonst multiplizieren wir mit 0.*

$$
\begin{array}{lrl|l}
 & 2 & = 0 & \mathbb{L} = \{2\}, \text{ wir multiplizieren mit } (x-2), \text{ aber nur für } x \neq 2 \\
\Leftrightarrow & (x-2)\cdot 2 & = (x-2)\cdot 0 & \\
\Leftrightarrow & 2x - 4 & = 0 & +4 \\
\Leftrightarrow & 2x & = 4 & : 2 \\
\Leftrightarrow & x & = 2 & \text{Lösungsmenge wäre } \mathbb{L} = \{2\}, \text{ aber } x \neq 2
\end{array}
$$

Beispiel. Division durch Null: *Die Gleichung $x^2 = 4$ hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$. Wir formen um*

$$
\begin{array}{lrl|l}
 & x^2 & = 4 & -4 \\
\Leftrightarrow & x^2 - 4 & = 0 & \\
\Leftrightarrow & (x-2)(x+2) & = 0 & : (x+2) \text{ für } x \neq -2 \\
\Leftrightarrow & x - 2 & = 0 & +2 \\
\Leftrightarrow & x & = 2 & \text{Lösungsmenge wäre } \mathbb{L} = \{2\}
\end{array}
$$

Die Lösungsmenge hat sich verändert, da $x = -2$ eine Lösung war. Aber wenn $x = -2$ ist, dann teilen wir bei $: (x+2)$ durch 0.

3 Polynome

3.1 Definition

Polynome sind eine spezielle Kategorie von Termen. Ein Polynom besteht aus einer Summe von Termen, die wiederum aus einer Zahl und einer natürlichen Potzenz einer bestimmten Variable bestehen. Die allgemeine Form eines Polynoms sieht so aus:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei ist a_k die Zahl, welche mit der k-ten Potenz der Variable multipliziert werden. Die Zahlen a_k werden **Koeffizienten** genannt. Die Summanden werden in absteigender Reihenfolge der Potenzen angeordnet. Summanden, bei welchen der Koeffizient gleich Null ist, werden weggelassen.

Beispiel. *Die folgenden Terme sind Polynome:*

$$5 \qquad k+3 \qquad 5x^2 - 3x + 25 \qquad z^4 - \frac{1}{2}$$

Diese Terme sind keine Polynome:

$$\frac{1}{x} \qquad \sqrt{k} \qquad x \cdot y$$

Polynome sind eine sehr wichtige Kategorie von Termen, welche später bei Gleichungen und Funktionen wieder auftreten.

3.2 Grad und spezielle Bezeichnungen

Der **Grad** eines Polynoms ist die höchste Potenz der Variable, welche im Polynom vorkommt.

Beispiel. $x^3 + 2x$ *ist ein Polynom dritten Grades,* $x^5 + x^4$ *ist ein Polynom fünften Grades.*

Für die Grade 0 bis 3 existieren spezielle Bezeichnungen:

Grad	**Bezeichnung**	**Beispiel**
0	konstant	42
1	linear	$7x - 23$
2	quadratisch	$-5x^2 + 45x - 92$
3	kubisch	$x^3 + x^2 - 50x - 34$

Wenn also beispielsweise von einem «quadratischen Term» oder einer «linearen Gleichung» die Rede ist, ist immer ein Polynom des entsprechenden Grades gemeint.

3.3 Polynomgleichungen

Eine Polynomgleichung ist eine Gleichung, bei welcher auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens ein Polynom steht.

Eine Polynomgleichung kann so umgeformt werden, dass auf der einen Seite nur die Null steht:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

3.4 Fundamentalsatz der Algebra

Über die Anzahl Lösungen von Polynomgleichungen gibt es einen wichtigen Satz, also eine bewiesene Aussage:

Fundamentalsatz der Algebra. Eine Polynomgleichung n-ten Grades ($n > 0$) hat in den reellen Zahlen maximal n Lösungen.

In den nächsten Kapiteln wird das Lösen von linearen und quadratischen Polynomgleichungen ausführlich betrachtet.

4 Lineare Gleichungen

Um eine einfache Gleichung mit einer Variable zu lösen, formen wir die Gleichung mit Äquivalenzumformungen um, bis die Variable isoliert auf einer Seite der Gleichung steht:

$$x = \square$$

In dieser Situation können wir auf der anderen Seite den Wert der Variable ablesen. Nun müssen wir noch überprüfen, ob der Wert auch in der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ enthalten ist.

Das **Vorgehen für das Lösen einer Gleichung** ist also:

1. Grundmenge $\mathbb{G}$ festlegen.
2. Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ermitteln und angeben.
3. Gleichung nach der Variable auflösen.
4. Überprüfen, ob der ermittelte Wert in der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ liegt.
5. Lösungsmenge $\mathbb{L}$ angeben.

4.1 Lösungsstrategie

4.1.1 Ausmultiplizieren

Wenn die Terme auf der linken oder rechten Seite der Gleichung als **Faktoren** vorliegen, sollten diese zunächst **ausmultipliziert** werden..

Beispiel.

$$\begin{array}{rrl|l} & (x+1)(x+6) &= (x+3)^2 & \textit{ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & x^2+6x+x+6 &= x^2+6x+9 & \end{array}$$

4.1.2 Quadrate eliminieren

Wenn auf beiden Seiten der Gleichung die Variable im Quadrat vorliegt, kann dies auf beiden Seiten der Gleichung subtrahiert werden.

Beispiel.

$$\begin{array}{rrl|l} & x^2+6x+x+6 &= x^2+6x+9 & -x^2 \\ \Leftrightarrow & 6x+x+6 &= 6x+9 & \end{array}$$

Falls das Quadrat der Variable nicht wegfällt, liegt eine **quadratische Gleichung** vor. Wie solche Gleichungen gelöst werden, schauen wir später an.

4.1.3 Terme vereinfachen

Durch Auflösen von Klammern und zusammenfassen einzelner Summanden können die Terme auf beiden Seiten der Gleichung so vereinfacht werden, dass nur noch je ein Summand mit x und ein Summand als reine Zahl vorliegt:

Beispiel.

$$\begin{array}{rrl|l} & 3x+(1-2x) & =10-(3x+5) & \textit{vereinfachen} \\ \Leftrightarrow & x+1 & =-3x+5 & \end{array}$$

4.1.4 Variable isolieren

Durch das Addieren eines geschickt gewählten Terms kann die Variable auf die eine und die Zahl auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden.

Beispiel.

$$\begin{array}{rrl|l} & x+1 & =-3x+5 & +3x-1 \\ \Leftrightarrow & 4x & =4 & \end{array}$$

Anschliessend kann die Gleichung durch den Faktor vor der Variable dividiert werden:

Beispiel.

$$\begin{array}{rrl|l} & 4x & =4 & :4 \\ \Leftrightarrow & x & =1 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\{1\}$.

Nun liegt die Gleichung in der gewünschten Form vor und die mögliche Lösung kann abgelesen werden.

4.2 Spezialfälle

Wir treffen auch Gleichungen an, welche nicht in die oben angegebene Form gebracht werden können. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn die Variable auf beiden Seiten der Gleichung wegfällt.

Dann erhalten wir eine Gleichung ohne Variable, also eine Aussage, welche wahr oder falsch ist.

Wenn die Aussage wahr ist, wissen wir, dass wir sämtliche Werte der Definitionsmenge in die Gleichung einsetzen können. Somit ist die **Lösungsmenge** gleich der **Definitionsmenge**.

Beispiel. *Hier fällt der Term $3x$ auf beiden Seiten der Gleichung weg. Die resultierende Aussage ist richtig. Somit ist die Lösungsmenge gleich der Definitionsmenge.*

$$\begin{array}{lrl|l} & 3x-2 & = 3x-2 & -3x \\ \Leftrightarrow & -2 & = -2 & \end{array}$$

Die Definitionsmenge ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Wenn die Aussage falsch ist, dann kann es auch kein Wert für die Variable geben, welcher die Gleichung wahr machen würde. In diesem Fall ist die **Lösungsmenge** die **leere Menge**.

Beispiel. *Hier fällt der Term $3x$ auf beiden Seiten der Gleichung weg. Die resultierende Aussage ist falsch. Somit gibt es keine Lösungen.*

$$\begin{array}{lrl|l} & 3x+4 & = 3x+1 & -3x \\ \Leftrightarrow & 4 & = 1 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{\}$.

5 Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung, also eine Polynomgleichung zweiten Grades, hat die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Die Koeffizienten quadratischer Gleichungen werden üblicherweise mit a, b und c bezeichnet anstelle von a_2, a_1 und a_0.

5.1 Quadratische Gleichungen mit $c = 0$

Wenn bei einer quadratischen Gleichung der Parameter $c = 0$ ist, so hat sie die folgende Form:

$$ax^2 + bx = 0$$

Hier kann der Faktor x ausgeklammert werden, damit hat die Gleichung folgende Form:

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

Um bei dieser Gleichung die Lösungen zu bestimmen, wird der Satz des Nullprodukts benötigt:

Satz des Nullprodukts. Wenn ein Produkt zweier Faktoren a und b gleich Null ist, dann muss einer der beiden Faktoren Null sein.

$$a \cdot b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0$$

Aus diesem Satz folgt, dass die Gleichung $x \cdot (ax + b) = 0$ wahr wird, wenn entweder der Faktor x oder der Faktor $xa + b$ gleich Null ist. Für diese beiden Varianten wird eine **Fallunterscheidung** gemacht.

Fall $x = 0$. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass $x = 0$ ist. Dieser Fall ist trivial, da der Wert für x schon feststeht.

Fall $ax + b = 0$. In diesem Fall liegt eine lineare Gleichung vor. Es ist bereits bekannt, wie eine solche Gleichung gelöst wird:

$$\begin{array}{lrl|l} & ax + b &= 0 & -b \\ \Leftrightarrow & ax &= -b & :a \\ \Leftrightarrow & x &= -\dfrac{b}{a} & \end{array}$$

Somit ist die Lösungsmenge einer solchen quadratischen Gleichung

$$\mathbb{L} = \left\{0; -\frac{b}{a}\right\}$$

Beispiel.

$$\begin{array}{rrl|l} & 3x^2+6x &= 0 & \text{ausklammern} \\ \Leftrightarrow & x(3x+6) &= 0 & \end{array}$$

Fall 1: $x = 0$*: trivial.*

Fall 2: $(3x+6) = 0$*:*

$$\begin{array}{rrl|l} & 3x+6 &= 0 & -6 \\ \Leftrightarrow & 3x &= -6 & :3 \\ \Leftrightarrow & x &= -2 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-2; 0\}$.

5.2 Quadratische Gleichungen mit $b = 0$

Wenn bei einer quadratischen Gleichung der Parameter $c = 0$ ist, so hat sie die folgende Form:

$$ax^2 + c = 0$$

Hier kann der Faktor c subtrahiert werden, damit hat die Gleichung folgende Form:

$$ax^2 = -c$$

Teilen wir jetzt auf beiden Seiten durch a, erhalten wir:

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

Um bei dieser Gleichung die Lösungen zu bestimmen, müssen wir die Gleichung **radizieren** (die Wurzel ziehen).

$$\begin{array}{rrl|l} & x^2 &= -\frac{c}{a} & \sqrt{} \\ \Leftrightarrow & x &= \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} & \end{array}$$

5.2.1 Radizieren einer Gleichung

Das Radizieren (Wurzelziehen) ist im allgemeinen **keine** Äquivalenzumformung. Wir benötigen deshalb eine **Fallunterscheidung**.

Beispiel. *Die Gleichungen*

$$x^2 = -4 \qquad x^2 = -25 \qquad x^2 = -100$$

*haben **keine** Lösung, da es keine Zahl x gibt, die mit sich selbst multipliziert eine negative Zahl ergibt. Ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel, erhalten wir:*

$$x = \sqrt{-4} \qquad x = \sqrt{-25} \qquad x = \sqrt{-100}$$

*und die Wurzel einer negativen Zahl ist **nicht definiert**. Entsprechend gib es keine Lösung.*

Haben wir eine Gleichung der allgemeinen Form

$$x^2 = D,$$

so hat die Gleichung **keine Lösung**, wenn $D < 0$ ist. Die Lösungsmenge ist dann die leere Menge $\mathbb{L} = \{\}$.

Beispiel. *Die Gleichung*

$$x^2 = 0$$

*hat **eine** Lösung, nämlich die Zahl 0. Ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel, erhalten wir:*

$$x = \sqrt{0} = 0$$

Haben wir eine Gleichung der allgemeinen Form

$$x^2 = D,$$

so hat die Gleichung **eine Lösung**, wenn $D = 0$ ist. Die Lösungsmenge ist dann die leere Menge $\mathbb{L} = \{0\}$.

Der *Normalfall* ist der Folgende:

Beispiel. *Die Gleichungen*

$$x^2 = 4 \qquad x^2 = 25 \qquad x^2 = 100$$

*haben **zwei** Lösungen, da es zwei Zahlen $\pm x$ gibt, welche die Gleichung erfüllen. Ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel, erhalten wir:*

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \qquad x = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \qquad x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$$

*Das $x = \pm 2$ ist eine Kurzschreibweise für $x = 2$ **oder** $x = -2$, denn beide Zahlen lösen die Gleichung $x^2 = 4$. Das sind die beiden Fälle, die wir unterscheiden müssen:*

$$\begin{array}{rrl|l} & x^2 & = 4 & \sqrt{\square} \\ \Leftrightarrow & \Leftrightarrow x & = 2 \text{ oder } x = -2 & \end{array}$$

Haben wir eine Gleichung der allgemeinen Form

$$x^2 = D,$$

so hat die Gleichung **zwei Lösungen**, wenn $D > 0$ ist. Die Lösungsmenge ist dann die leere Menge $\mathbb{L} = \{-\sqrt{D}, \sqrt{D}\}$.

Bemerkung: Das Radizieren einer Gleichung ist genau dann eine Äquivalenzumformung, wenn eine Fallunterscheidung für $\pm\sqrt{\square}$ gemacht wird **und** jeweils der **gesamte Term** einer Seite radiziert wird.

$$\begin{array}{rrl|l} & \text{Term 1} & = \text{Term 2} & \sqrt{} \\ \Leftrightarrow & \Leftrightarrow \sqrt{\text{Term 1}} & = \pm\sqrt{\text{Term 2}} & \end{array}$$

Die obige Bemerkung ist auch der Grund, warum Sie Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ für $b \neq 0$ durch einfaches Wurzelziehen **nicht** lösen können. Betrachten wir das folgende Beispiel:

Beispiel.

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \pm\sqrt{0}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2x - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-2x - 1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x} = \pm\sqrt{-1}$$

Egal, was wir versuchen: Wir können die Wurzel nicht aus einer Summer ziehen!

Zusammenfassung: Für Gleichungen der Form

$$\begin{array}{rrl|l} & x^2 & = D & \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2} & = \pm\sqrt{D} & \end{array}$$

gibt es unterschiedlich viele Lösungen, je nachdem welche Zahl unter der Wurzel steht:

- $D > 0$: Ist D grösser als Null, so hat die Gleichung wie oben erläutert die zwei Lösungen $\pm\sqrt{D}$, also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-\sqrt{D}; \sqrt{D}\}$.
- $D = 0$: Ist D gleich Null so hat die Gleichung nur eine Lösung da $-0 = +0$, also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{0\}$.
- $D < 0$: Ist D kleiner als Null, so hat die Gleichung keine Lösung, da die Wurzel einer negativen Zahl nicht definiert ist, also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\}$.

Der Term D wird **Diskriminante** genannt (diskriminieren bedeutet unterscheiden).

Beispiel.

$$\begin{array}{rrl|l} & 3x^2 - 48 & = 0 & +48 \\ \Leftrightarrow & 3x^2 & = 48 & :3 \\ \Leftrightarrow & x^2 & = 16 & \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow & x & = \pm\sqrt{16} & \end{array}$$

$D = 16 > 0$*, also gibt es zwei Lösungen. Die Lösungsmenge ist* $\mathbb{L} = \{-4; 4\}$.

$$\begin{array}{rrl|l} & 3x^2 & = 0 & :3 \\ \Leftrightarrow & x^2 & = 0 & \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow & x & = \pm\sqrt{0} & \end{array}$$

$D = 0$*, also gibt es eine Lösung. Die Lösungsmenge ist* $\mathbb{L} = \{0\}$.

$$\begin{array}{rrl|l} & 3x^2 + 48 & = 0 & -48 \\ \Leftrightarrow & 3x^2 & = -48 & :3 \\ \Leftrightarrow & x^2 & = -16 & \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow & x & = \pm\sqrt{-16} & \end{array}$$

$D = -16 < 0$*, also gibt es keine Lösung. Die Lösungsmenge ist* $\mathbb{L} = \{\}$.

5.3 Lösen mit binomischen Formeln

Beispiel.

$$\begin{aligned} x^2+4x+4 &= 16 && \text{Faktorisieren 1. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 &= 16 && \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad x+2 &= \pm\sqrt{16} && -2 \\ \Leftrightarrow \quad x &= -2 \pm 4 && \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet $\mathbb{L} = \{-6; 4\}$.

$$\begin{aligned} x^2-2x+1 &= 25 && \text{Faktorisieren 2. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 &= 25 && \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad x-1 &= \pm\sqrt{25} && +1 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 1 \pm 5 && \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet $\mathbb{L} = \{-4; 6\}$.

$$\begin{aligned} x^2-81 &= 0 && \text{Faktorisieren 3. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow \quad (x+9)(x-9) &= 0 && \text{Nullprodukt} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \pm 9 && \end{aligned}$$

Nach dem Satz über das Nullprodukt ist entweder $x+9=0$ *oder* $x-9=0$. *Die Lösungsmenge lautet* $\mathbb{L} = \{-9; 9\}$.

Die binomischen Formeln können dabei helfen, quadratische Gleichungen zu lösen. Wenn eine quadratische Gleichung durch ein Binom dargestellt werden kann, so kann sie ebenfalls durch radizieren gelöst werden:

$$\begin{aligned} (x+k)^2 &= D && \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad x+k &= \pm\sqrt{D} && -k \\ \Leftrightarrow \quad x &= -k \pm \sqrt{D} && \end{aligned}$$

Damit kann abhängig von D die Lösungsmenge angegeben werden:

- $D > 0$: zwei Lösungen $-k \pm \sqrt{D}$, also $\mathbb{L} = \left\{-k-\sqrt{D}; -k+\sqrt{D}\right\}$
- $D = 0$: eine Lösung $-k$, also $\mathbb{L} = \{-k\}$
- $D < 0$: keine Lösung, also $\mathbb{L} = \{\}$

5.4 Quadratische Ergänzung

Mit Hilfe eines Tricks kann jede quadratische Gleichung in ein Binom umgewandelt werden. Dieser Trick wird quadratische Ergänzung genannt.

Beispiel. $2x^2 + 12x + 2 = 0$ *Zunächst liegt keine binomische Formel vor. Betrachten Sie das Beispiel und beschreiben Sie in eigenen Worten, wie der Trick funktioniert.*

$$
\begin{array}{rrl|l}
 & 2x^2 + 12x + 2 & = 0 & : 2 \\
\Leftrightarrow & x^2 + 6x + 1 & = 0 & -1 \\
\Leftrightarrow & x^2 + 6x & = -1 & +9 \\
\Leftrightarrow & x^2 + 6x + 9 & = -1 + 9 & \textit{zusammenfassen} \\
\Leftrightarrow & x^2 + 6x + 9 & = 8 & \textit{Binom} \\
\Leftrightarrow & (x+3)^2 & = 8 & \sqrt{} \\
\Leftrightarrow & x + 3 & = \pm\sqrt{8} & -3 \\
\Leftrightarrow & x & = -3 \pm \sqrt{8} &
\end{array}
$$

5.5 Allgemeine Lösungsformel

Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung kann die allgemeine quadratische Gleichung gelöst werden. Diese hat folgende Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Die Gleichung wird zunächst durch a dividiert und dann mit Hilfe der quadratischen Ergänzung in die Binom-Form gebracht und radiziert:

$$
\begin{array}{rrl|l}
 & ax^2 + bx + c & = 0 & : a \\
\Leftrightarrow & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} & = 0 & -\frac{c}{a} \\
\Leftrightarrow & x^2 + \frac{b}{a}x & = -\frac{c}{a} & + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \\
\Leftrightarrow & x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 & = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 & \text{links mit Binom faktorisieren} \\
\Leftrightarrow & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 & = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 & \text{rechts vereinfachen} \\
\Leftrightarrow & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 & = -\frac{c \cdot 4a}{a \cdot 4a} + \frac{b^2}{4a^2} & \text{rechts Brüche addieren} \\
\Leftrightarrow & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 & = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} & \sqrt{} \\
\Leftrightarrow & x + \frac{b}{2a} & = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} & \text{Wurzel vereinfachen} \\
\Leftrightarrow & x + \frac{b}{2a} & = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} & -\frac{b}{2a} \\
\Leftrightarrow & x & = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{Brüche addieren} \\
\Leftrightarrow & x & = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &
\end{array}
$$

Der Term unter der Wurzel gibt an, wie viele Lösungen die Gleichung hat und wird **Diskriminante** D genannt.

$$D = b^2 - 4ac$$

Damit ist die quadratische Gleichung allgemein gelöst!

Lösungen der quadratischen Gleichung. Für die allgemeine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gibt die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ an, wie viele Lösungen vorhanden sind:

- $D > 0$ Die Gleichung hat zwei Lösungen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \mathbb{L} = \{x_1, x_2\}$$

- $D = 0$ Die Gleichung hat eine Lösung:

$$x = -\frac{b}{2a} \qquad \mathbb{L} = \{x\}$$

- $D < 0$ Die Gleichung hat keine Lösung. $\mathbb{L} = \{\}$

5.6 Lösen durch Faktorisieren

Gelingt es uns, den Term $ax^2 + bx + c$ zu faktorisieren, können wir dank dem Satz über das Nullprodukt die Lösungen ziemlich schnell ablesen. Dazu müssen wir lediglich schauen, wann die Faktoren Null sind. Es lohnt sich oft, kurz nach einer Faktorisierung zu suchen, bevor man die allgemeine Lösungsformel anwendet.

Beispiel. *(a)*

$$\begin{aligned}
& x^2 - x - 12 &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-4)(x+3) &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x - 4 &&= 0 \textit{ oder } x + 3 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbb{L} = \{-3; 4\}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
& 2^2 + 7x + 6 &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (2x+3)(x+2) &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2x + 3 &&= 0 \textit{ oder } x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbb{L} = \left\{-2; \frac{-3}{2}\right\}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} && x^2 - 9x - 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow && \Leftrightarrow (x-4)(x-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow && \Leftrightarrow x-4 &= 0 \text{ oder } x-5=0 \\ \Leftrightarrow && \mathbb{L} = \{4;5\} & \end{aligned}$$