

Vorlesungsmitschrift

AGLA II

Prof. Dr. Damaris Schindler

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 25. April 2020

Disclaimer

Nicht von Professor Schindler durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit ihrerseits.

Inhaltsverzeichnis

1	Affine Geometrie	4
1.1	Was ist ein affiner Raum?	4
1.2	Affine Abbildungen	9
1.3	Durchschnitt und Verbindung affiner Räume	13
1.4	Parallelprojektionen	18

Kapitel 1

Affine Geometrie

Vorlesung 1

Di 21.04. 10:15

§1.1 Was ist ein affiner Raum?

Beispiel 1 (aus der AGLA I). $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. In diesen Räumen gibt es einen ausgezeichneten „Ursprung“.

Frage. Wie können wir eine affine Ebene / affine Räume modellieren, wobei alle Punkte gleichberechtigt sind?

Idee. Verwende affine Unterräume.

Beispiel 2. Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und $v \in V$. Wir nennen $X = v + W$ einen affinen Unterraum von V . X ist im Allgemeinen selbst kein Vektorraum unter der Addition in V , aber W „operiert“ auf X .



Für $w \in W$ definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned}\tau_w: X &\rightarrow X \\ p &\mapsto p + w.\end{aligned}$$



Sei

$$\text{Bij}(X) = \{ f: X \rightarrow X, f \text{ ist bijektiv} \}.$$

Dann ist $\tau_w \in \text{Bij}(X)$ für alle $w \in W$.

Bemerkung. $\text{Bij}(X)$ ist eine Gruppe unter Verkettung von Abbildung. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned}\tau: W &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ w &\mapsto \tau_w.\end{aligned}$$

Lemma 1. Die Abbildung τ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Seien $w, w' \in W$ Dann

$$\begin{aligned}\tau_w \circ \tau_{w'}: X &\rightarrow X \\ p &\mapsto p + \underbrace{w' + w},\end{aligned}$$

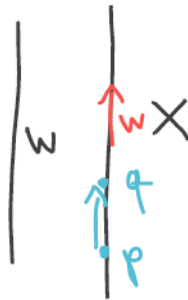
also

$$\tau(w) \circ \tau(w') = \tau_w \circ \tau_{w'} = \tau_{w+w'} = \tau(w + w').$$

□

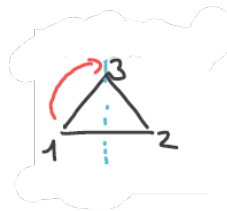
Es gilt noch mehr:

für $p, q \in X$ besteht genau ein $w \in W$ mit $\tau_w(p) = q$.



Gruppenoperationen

Beispiel 3. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck D und Spiegelungen / Drehungen die D auf sich selbst abbilden.



Diese formen eine Gruppe (welche?) und „operieren“ auf D .

Definition 1. Sei X eine Menge und G eine Gruppe. Eine Operation von G auf X ist ein Homomorphismus von Gruppen

$$\begin{aligned}\tau: G &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ g &\mapsto \tau_g.\end{aligned}$$

Bemerkung. τ ist ein Homomorphismus $\forall g, g' \in G$

$$\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{gg'}.$$

Für $x \in X$ nennen wir

$$G(x) = \{ \tau_g(x) \mid g \in G \}$$

die Bahn von x unter G .

Beispiel 4. a) Sei G eine Gruppe und $X = G$ die Linkstranslation $l: G \rightarrow \text{Bij}(G)$

$g \mapsto l_g$

mit $l_g(x) = gx \quad \forall x \in G$ ist eine Gruppenoperation von G auf sich selbst.

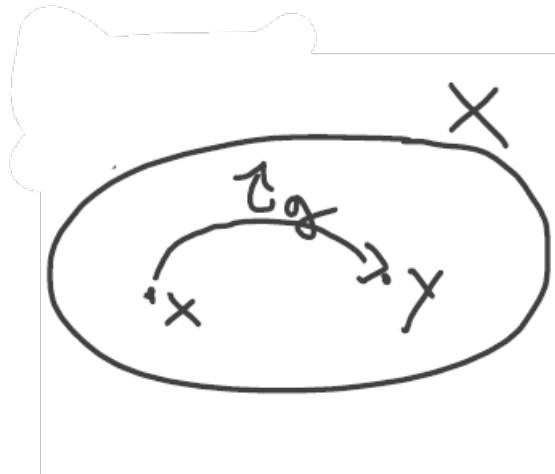
b)

$$k: G \rightarrow \text{Bij}(G)$$

$$g \mapsto k_g$$

mit $k_g(x) = gxg^{-1} \quad \forall x \in G$ ist eine Gruppenoperation.

Frage. Sei $\tau: G \rightarrow \text{Bij}(X)$ eine Gruppenoperation, $x, y \in X$. Wann gibt es ein $g \in G$ mit $\tau_g(x) = y$?



Definition. Sei $\tau: G \rightarrow \text{Bij}(X)$ eine Gruppenoperation von G auf X . Wir nennen τ *einfach transitiv*, wenn $\forall x, y \in X$ genau ein $g \in G$ besteht mit

$$\tau_g(x) = y.$$

Beispiel. • Die Gruppenoperation aus [Beispiel 3](#) ist *nicht* einfach transitiv



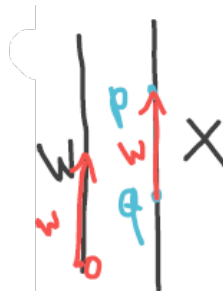
- Die Linkstranslation aus [Beispiel 4 a\)](#) ist immer einfach transitiv.

Zurück zum [Beispiel 2](#) (V K -Vektorraum, $W \subseteq V$ Untervektorraum, $v \in V$, $X = v + W$)

Wir haben Translationen definiert

$$\begin{aligned} \tau: W &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ x &\mapsto \tau_w \end{aligned}$$

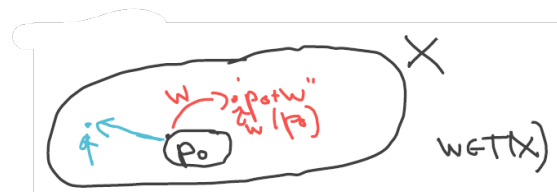
mit $\tau_w: X \rightarrow X$, $p \mapsto p + w$. τ ist eine einfach transitive Gruppenoperation von W auf X .



Definition. Sei K ein Körper. Ein affiner Raum über K ist ein Tripel $(X, T(X), \tau)$ mit

- $X \neq \emptyset$ eine Menge
- $T(X)$ ein K -Vektorraum
- $\tau: T(X) \rightarrow \text{Bij}(X)$ eine einfach transitive Gruppenoperation

Konvention. $X \neq \emptyset$ ohne Spezifikation von $T(X)$, τ nennen wir auch einen affinen Raum.



Definition. Sei $(X, T(X), \tau)$ ein affiner Raum über einem Körper K . Dann nennen wir $\dim_K T(X)$ die Dimension von X , schreiben auch $\dim X$.

Ist $\dim X = 1$ bzw. $\dim X = 2$, dann nennen wir X eine affine Gerade bzw. affine Ebene.

Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum, $p, q \in X$. Dann $\exists! t \in T(X)$ mit $\tau_t(p) = q$.

Schreibe $\vec{pq} = t \in T(X)$ als $\tau_{\vec{pq}}(p) = q$.

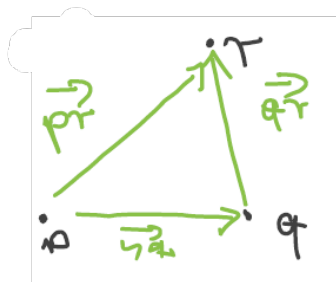


Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow T(X) \\ (p, q) &\mapsto \vec{pq}. \end{aligned}$$

Frage. Welche Eigenschaften hat die Abbildung $(p, q) \mapsto \vec{pq}$ in einem allgemeinen affinen Raum?

Lemma 2. Sei X ein affiner Raum, $p, q, r \in X$. Dann gilt $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$.



Beweis. $\tau: T(X) \rightarrow \text{Bij}(X)$ ist ein Homomorphismus. Also gilt $\tau_{\vec{qr}} \circ \tau_{\vec{pq}} = \tau_{\vec{pq} + \vec{qr}}$. Es gilt damit $\tau_{\vec{pq} + \vec{qr}}(p) = r$. Also $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$. \square

§1.2 Affine Abbildungen

Seien V, W K -Vektorräume. In der AGLA I: lineare Abbildungen

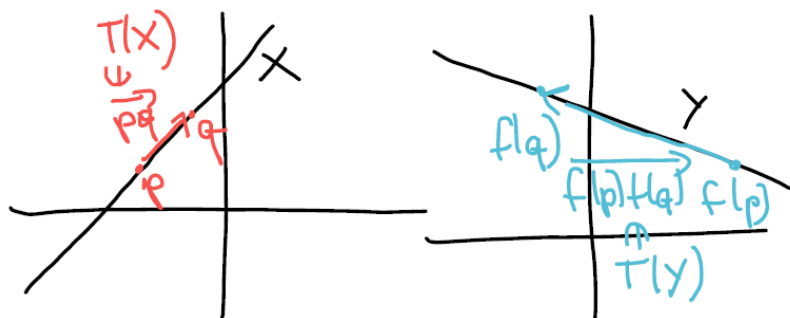
$$F: V \rightarrow W,$$

δF respektiert die Vektorraum-Struktur

$$\begin{aligned} F(v_1 + v_2) &= F(v_1) + F(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \\ F(\lambda v) &= \lambda F(v) \quad \forall \lambda \in K \forall v \in V. \end{aligned}$$

Frage. Was sind natürliche Abbildungen zwischen affinen Räumen?

Seien X, Y affine Räume über einem Körper K .



$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{pq} & \rightsquigarrow & \overrightarrow{f(p)f(q)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ T(X) & & T(Y) \end{array}$$

Definition. Wir nennen eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ affin, wenn es eine K -lineare Abbildung $F: T(X) \rightarrow T(Y)$ gibt, sodass $\forall p, q \in X$ gilt

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = F(\overrightarrow{pq}).$$

Bemerkung. a) Es gibt im Allgemeinen verschiedene affine Abbildungen $f: X \rightarrow Y$, die zur gleichen linearen Abbildung $F: T(X) \rightarrow T(Y)$ gehören.

b) Sei $p_0 \in X$ fest und $f: X \rightarrow Y$ affin.

Für $q \in X$ gilt

$$\begin{aligned} f(q) &= \tau_{\overrightarrow{f(p_0)f(q)}}(f(p_0)) \\ &= \tau_{F(\overrightarrow{p_0q})}(f(p_0)). \end{aligned}$$

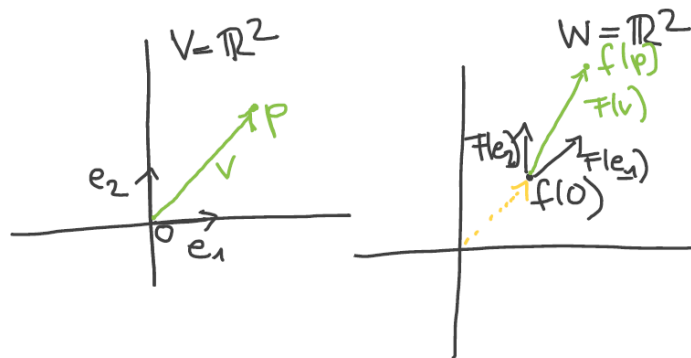
Also bestimmen $f(p_0)$ und F zusammen die Abbildung $f: X \rightarrow Y$.

Beispiel. Seien V, W K -Vektorräume

$$X = (V, V, \tau), \quad Y = (W, W, \tau).$$

Eine affine Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist eindeutig bestimmt durch $f(0)$ und eine lineare Abbildung $F: V \rightarrow W$. Es gilt

$$f(v) = f(0) + F(v) \quad \forall v \in V.$$

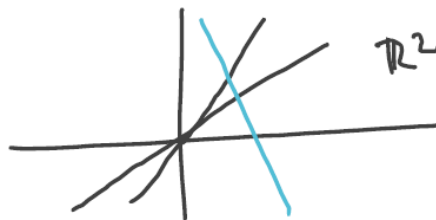


Bemerkung / Übung. Eine affine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, wenn die zugehörige Abbildung $F: T(X) \rightarrow T(Y)$ es ist.

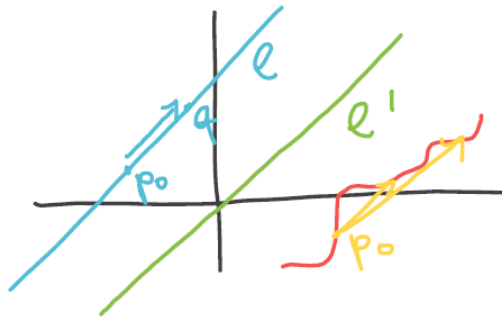
Definition. Wir nennen eine bijektive affine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine Affinität.

Affine Unterräume

Beispiel (\mathbb{R}^2 als Vektorraum.). Untervektorräume von \mathbb{R}^2 sind \emptyset , $\{0\}$, \mathbb{R}^2 und Geraden durch 0.



Betrachte nun \mathbb{R}^2 als affinen Raum.



Idee. Wir wollen l und l' als affine Unterräume von \mathbb{R}^2 definieren, da die Verschiebung von l, l' jeweils Untervektorräume von \mathbb{R}^2 sind.

Definition. Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum und $Y \subseteq X$. Wenn es einen Punkt $p_0 \in Y$ gibt, sodass

$$T(Y) := \{ \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \}$$

ein Untervektorraum von $T(X)$ ist, dann nennen wir Y einen affinen Unterraum von X .

Lemma 3. Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum eines affinen Raumes $(X, T(X), \tau)$. Dann gilt

$$T(Y) = \{ \overrightarrow{p q} \in T(X), q \in Y \}$$

für jeden beliebigen Punkt $p \in Y$.

Beweis. Sei $p_0 \in Y$ ein fester Punkt mit

$$T(Y) = \{ \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \}$$

Untervektorraum von $T(X)$. Dann gilt für $p \in Y$

$$\{ \overrightarrow{p q} \mid q \in Y \} = \overrightarrow{p p_0} + \{ \overrightarrow{p_0 q} \mid q \in Y \} = \underbrace{\overrightarrow{p p_0}}_{T(Y)} + T(Y) = T(Y), \quad \square$$

da $\overrightarrow{p p_0} = -\overrightarrow{p_0 p} \in T(Y)$.

Definition. Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum. Wir nennen $\dim_K T(Y)$ die Dimension von Y und schreiben

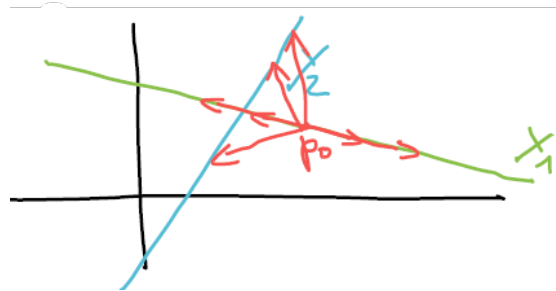
$$\dim Y = \dim_K T(Y).$$

Vorlesung 2

Fr 24.10. 10:15

§1.3 Durchschnitt und Verbindung affiner Räume

Frage. Sei X ein affiner Raum, Y_1, Y_2 affine Unterräume von X . Sind $Y_1 \cap Y_2, Y_1 \cup Y_2$ auch affine Unterräume von X ?



$$X = \mathbb{R}^2$$

Lemma 1. Sei X ein affiner Raum, $Y_i, i \in I$, eine Familie von affinen Unterräumen von X .

Dann ist $Y := \bigcap_{i \in I} Y_i$ ein affiner Unterraum von X .

Wenn $Y \neq \emptyset$, dann gilt

$$T(Y) = \bigcap_{i \in I} T(Y_i).$$

Beweis. Falls $Y = \emptyset$: ✓

Wir nehmen also an $Y \neq \emptyset$. Sei $p_0 \in Y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} T(Y) &= \left\{ \overrightarrow{p_0 q}, q \in \bigcap_{i \in I} Y_i \right\} \\ &= \bigcap_{i \in I} \underbrace{\left\{ \overrightarrow{p_0 q}, q \in Y_i \right\}}_{=T(Y_i)} \\ &= \bigcap_{i \in I} T(Y_i). \end{aligned}$$

↑
Untervektorräume von $T(X)$

Also ist $T(Y)$ ein Untervektorraum von $T(X)$ und $T(Y) = \bigcap_{i \in I} T(Y_i)$. □

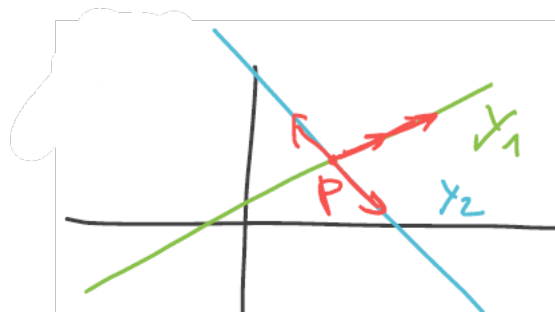
Bemerkung. In obiger Notation ist $\bigcup_{i \in I} Y_i$ im Allgemeinen kein affiner Unterraum von X .

Frage. Finde den „kleinsten“ affinen Unterraum von X , der $\bigcup_{i \in I} Y_i$ enthält! (z. B. $X \supseteq \bigcup_{i \in I} Y_i$, aber X ist im Allgemeinen nicht „minimal“).

Definition. Sei X ein affiner Raum, $Y_i, i \in I$ affine Unterräume von X . Wir nennen

$$\bigcap_{\substack{Y \subseteq X \text{ aff. Unterraum} \\ \bigcup_{i \in I} Y_i \subseteq Y}} Y$$

den *Verbindungsraum* der affinen Unterräume $Y_i, i \in I$. Schreibe $\bigvee_{i \in I} Y_i$.



$$X = \mathbb{R}^2, Y_1 \vee Y_2 = X, Y = Y_1 \vee Y_2, T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

Beispiel.

Frage. Wie kann man im Allgemeinen $T(Y_1 \vee Y_2)$ aus $T(Y_1), T(Y_2)$ bestimmen?

Lemma 2. Sei X ein affiner Raum, $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$ affine Unterräume von X .

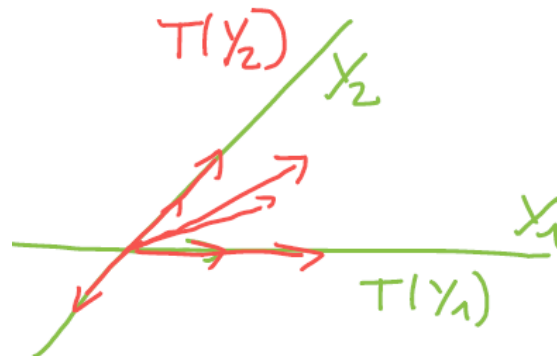
a) Sei $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

b) Sei $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, p_1 \in Y_1, p_2 \in Y_2$ und $Y = p_1 \vee p_2$.

Dann gilt:

$$T(Y_1 \vee Y_2) = (T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(Y).$$



Beweis. a) Sei $p \in Y_1 \cap Y_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(Y_1) \cup T(Y_2) &= \{ \vec{pq} \mid q \in Y_1 \cup Y_2 \} \\ &\subseteq T(Y_1 \vee Y_2), \end{aligned}$$

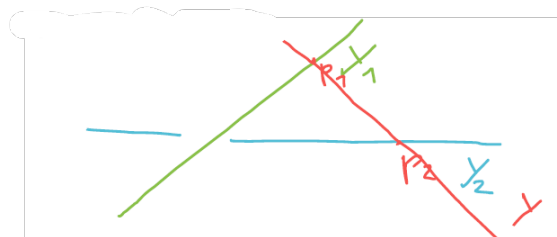
also $T(Y_1) + T(Y_2) \subseteq T(Y_1 \vee Y_2)$.

Sei $Y = \{ \tau_t(p) \mid t \in T(Y_1) + T(Y_2) \}$. Dann ist Y affiner Unterraum von X mit $Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y$, also $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$, also $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$. Also gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) \subseteq T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

Also $T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2)$.

b) $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $p_1 \in Y_1$, $p_2 \in Y_2$, $Y = p_1 \vee p_2$.



Schreibe $Y_1 \vee Y_2 = Y_1 \vee Y \vee Y_2$ (verwende dazu $Y \subseteq Y_1 \vee Y_2$). Verwende a) und leite ab, dass gilt:

$$\begin{aligned} T(Y_1 \vee Y \vee Y_2) &= T(Y_1) + T(Y \vee Y_2) \\ &= T(Y_1) + T(Y) + T(Y_2) \\ &= (T(Y_1) + T(Y_2)) \overset{!}{\oplus} T(Y). \end{aligned}$$

Es gilt

$$T(Y) = \{ \lambda \overrightarrow{p_1 p_2} \mid \lambda \in K \}.$$

Wir wollen zeigen

$$(T(Y_1) + T(Y_2)) \cap T(Y) = \{ 0 \}.$$

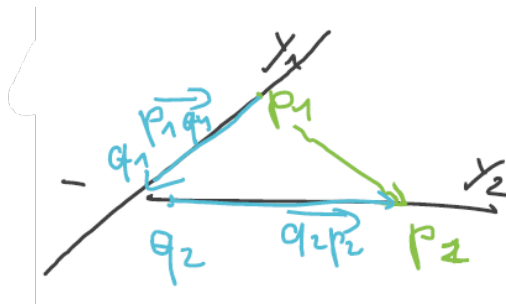
Es genügt zu zeigen

$$\overrightarrow{p_1 p_2} \notin T(Y_1) + T(Y_2).$$

Gegenannahme:

$$\overrightarrow{p_1 p_2} = \underbrace{\overrightarrow{p_1 q_1}}_{T(Y_1)} + \underbrace{\overrightarrow{q_1 p_2}}_{T(Y_2)}$$

mit $q_1 \in Y_1, q_2 \in Y_2$.



Dann gilt

$$\overrightarrow{q_1 q_2} = \overrightarrow{q_1 p_1} + \overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 q_2} = 0,$$

also $q_1 = q_2$ und $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ \nmid .

□

Als nächstes: $\dim(Y_1 \vee Y_2)$ ist durch $\dim_K T(Y_1 \vee Y_2)$ gegeben, also sollten wir aus [Lemma 2](#) für $Y_1 \vee Y_2$ ableiten können.

Lemma 3. Sei X ein affiner Raum, $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$ affine Unterräume von X .

- a) Sei $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. Dann gilt $\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2)$.
- b) Sei $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Dann gilt

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1.$$

Beweis. a) Aus Lemma 2 folgt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2),$$

aus der Dimensionsformel für Untervektorräume folgt

$$\begin{aligned} \dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2) \\ &= \dim(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) \\ &= \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim T(Y_1 \cap Y_2) \\ &\quad \uparrow \\ &\text{Lemma 1} \\ &= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 \cap Y_2. \end{aligned}$$

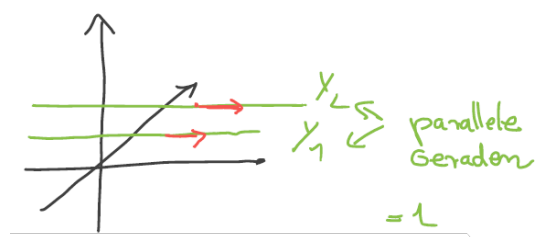
b) $Y_1 \cap Y_2, p_1 \in Y_1, p_2 \in Y_2, Y = p_1 \vee p_2$.

Dann ist

$$\dim Y = \dim T(Y) = 1.$$

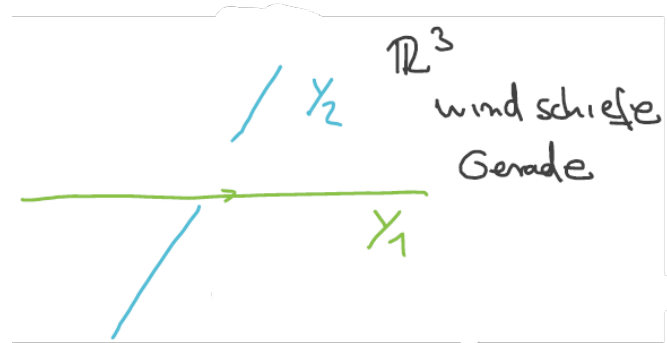
Wir erhalten

$$\begin{aligned} \dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2) \\ &= \dim((T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(Y)) \\ &\quad \uparrow \\ &\text{Lemma 2} \\ &= \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) + \dim T(Y) \\ &\quad \parallel \\ &\quad 1 \\ &= \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 \\ &= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 \end{aligned} \quad \square$$



Beispiel ($X = \mathbb{R}^3$).

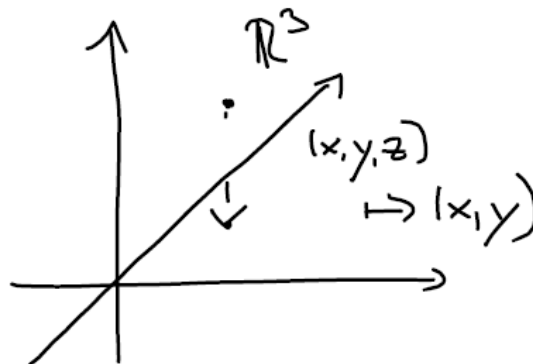
$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - \underbrace{\dim(T(Y_1) \cap T(Y_2))}_{=1} + 1 = 2$$



$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - 0 + 1 = 3$$

und $Y_1 \vee Y_2 = X$.

§1.4 Parallelprojektionen



Wiederholung (Projektionen aus der AGLA I). Beispiel.

Sei V ein K -Vektorraum, $W, W_1 \subset V$ K -Untervektorräume mit $V = W \oplus W_1$. Schreibe $v \in V$ in der Form $v = w + w_1$ und mit $w \in W, w_1 \in W_1$. Definiere

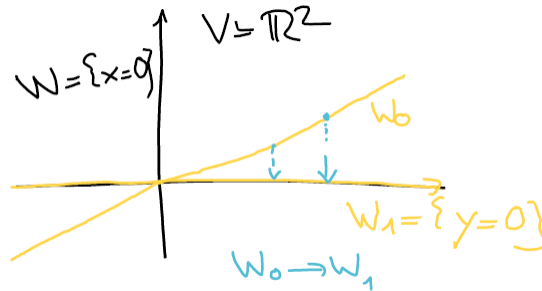
$$P_W: V \rightarrow W_1$$

$$\begin{array}{c} v \mapsto w_1. \\ \parallel \\ w + w_1 \end{array}$$

Ein paar Eigenschaften von P_W :

- $P_W: V \rightarrow W_1$ ist eine lineare Abbildung,
- $\text{Ker } P_W = W$,
- $P_W|_{W_1} = \text{Id}_{W_1}$.

Als Nächstes: Wir schränken P_W ein auf einen Untervektorraum W_0 von V .



Lemma 4. Sei V ein K -Vektorraum, $W, W_0, W_1 \subseteq V$ Untervektorräume mit $V = W \oplus W_0 = W \oplus W_1$.

Dann ist $P_W|_{W_0}: W_0 \rightarrow W_1$ ein Isomorphismus (Notation wie oben).

Beweis. Es gilt $\dim W_0 = \dim W_1$ und es genügt zu zeigen, dass $P_W|_{W_0}$ injektiv ist.

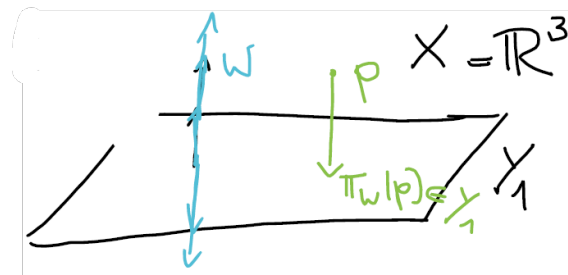
Sei $P_W|_{w_0} = w_1$ für $w_0 \in W_0, w_1 \in W_1$. Dann ist $w_0 = w + w_1$ mit $w \in W, w_1 \in W_1$, also

$$w_1 = \underbrace{w_0}_{\in W_0} - \underbrace{w}_{\in W} \in W_0 \oplus W, \quad \square$$

und diese Zerlegung ist eindeutig.

Parallelprojektionen für affine Räume

Sei X ein affiner Raum (über einem Körper K), $Y_1 \subseteq X$ ein affiner Unterraum


Beispiel.

Sei $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit $T(X) = T(Y_1) \oplus W$.

Ziel. Definiere eine Projektionsabbildung

$$\pi_W: X \rightarrow Y_1$$

„längs W “.

Für $p \in X$ definiere

$$W(p) := \{ x \in X \mid \overrightarrow{px} \in W \}$$

Lemma 5. Notation wie oben. Für $p \in X$ gilt

$$\#(Y_1 \cap W(p)) = 1.$$

Beweis. Wir berechnen

$$\dim(Y_1 \cap W(p)).$$

Sei $x = \dim X$, verwende [Lemma 3 b\)](#). Falls $Y_1 \cap W(p) = \emptyset$, dann

$$\begin{aligned} \dim(Y_1 \vee W(p)) &= \dim Y_1 + \dim W(p) - \underbrace{\dim(T(Y_1) \cap W)}_{=\{0\}} + 1 \\ &= \dim T(Y_1) + \dim W + 1 \end{aligned}$$

⚡ zu $Y_1 \vee W(p) \subseteq X$, also ist $Y_1 \cap W(p) \neq \{0\}$, und nach [Lemma 3 a\)](#) gilt Folgendes:

$$\underbrace{\dim(Y_1 \vee W(p))}_{\parallel n} = \dim Y_1 + \dim W(p) - \dim(Y_1 \cap W(p)) = n - \dim(Y_1 \cap W(p))$$

und nach [Lemma 1](#)

$$\begin{aligned} \dim Y_1 \vee W(p) &= \dim(T(Y_1) + W) \\ &= n, \end{aligned} \quad \square$$

also $\dim(Y_1 \cap W(p)) = 0$.

Wir definieren die Projektion längs W

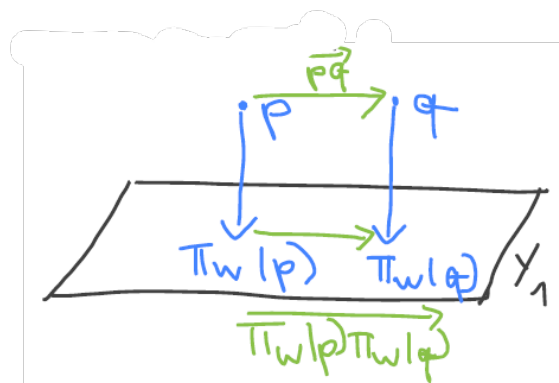
$$\pi_W: \underset{Y_0}{X} \rightarrow Y_1, \quad p \mapsto W(p) \cap Y_1.$$

Satz 6. Sei X ein affiner Raum, $Y_1, Y_0 \subseteq X$ affine Unterräume, $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit

$$T(X) = W \oplus T(Y_0) = W \oplus T(Y_1).$$

Dann ist $\pi_W: X \rightarrow Y_1$ eine surjektive affine Abbildung und $\pi_W|_{Y_0}: Y_0 \rightarrow Y_1$ eine Affinität.

Beweis. Seien $p, q \in X$.



Dann gilt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pq} &= \overrightarrow{p\pi_W(p)} + \overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)} + \overrightarrow{\pi_W(q)q} + \overrightarrow{\pi_W(q)q} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{p\pi_W(p)} + \overrightarrow{\pi_W(q)q}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)}}_{\in T(Y_1)}, \end{aligned}$$

also $\overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)} = P_W(\overrightarrow{pq})$.

P_W ist surjektiv, also ist π_W eine surjektive affine Abbildung.

Der zweite Teil folgt aus [Lemma 4](#). □