Vorlesungsmitschrift

AGLA II

Prof. Dr. Damaris Schindler

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 29. April 2020

Disclaimer

Nicht von Professor Schindler durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit ihrerseits.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Affine Geometrie

Vorlesung 1

Di 21.04. 10:15

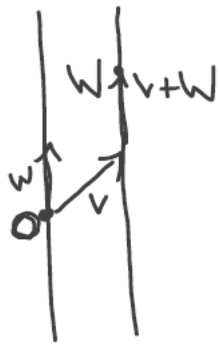
§1.1 Was ist ein affiner Raum?

Beispiel 1 (aus der AGLA I). $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. In diesen Räumen gibt es einen ausgezeichneten „Usprung“.

Frage. Wie könne wir eine affine Ebene / affine Räume modellieren, wobei alle Punkte gleichberechtigt sind?

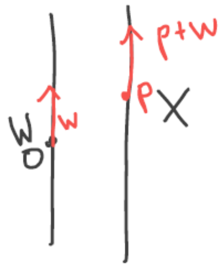
Idee. Verwende affine Unterräume.

Beispiel 2. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und $v \in V$. Wir nennen $X = v + W$ einen affinen Unterraum von V. X ist im Allgemeinen selbst kein Vektorraum unter der Addition in V, aber W „operiert“ auf X.



Für $w \in W$ definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau_w \colon X &\to X \\ p &\mapsto p + w. \end{aligned}$$



Sei

$$\mathrm{Bij}(X) = \{ f \colon X \to X, f \text{ ist bijektiv} \}.$$

Dann ist $\tau_w \in \mathrm{Bij}(X)$ für alle $w \in W$.

Bemerkung. $\mathrm{Bij}(X)$ ist eine Gruppe unter Verkettung von Abbildung. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \tau \colon W &\to \mathrm{Bij}(X) \\ w &\mapsto \tau_w. \end{aligned}$$

Lemma 1. Die Abbildung τ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Seien $w, w' \in W$ Dann

$$\begin{aligned} \tau_w \circ \tau_{w'} \colon X &\to X \\ p &\mapsto p + \underbrace{w' + w}_{}, \end{aligned}$$

also

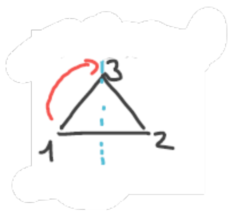
$$\tau(w) \circ \tau(w') = \tau_w \circ \tau_{w'} = \tau_{w+w'} = \tau(w + w'). \qquad \square$$

Es gilt noch mehr:

für $p, q \in X$ besteht genau ein $w \in W$ mit $\tau_w(p) = q$.

Gruppenoperationen

Beispiel 3. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck D und Spiegelungen / Drehungen die D auf sich selbst abbilden.



Diese formen eine Gruppe (welche?) und „operieren“ auf D.

Definition 1. Sei X eine Menge und G eine Gruppe. Eine Operation von G auf X ist ein Homomorphismus von Gruppen

$$\begin{aligned} \tau\colon G &\to \mathrm{Bij}(X) \\ g &\mapsto \tau_g. \end{aligned}$$

Bemerkung. τ ist ein Homomorphismus ð$\forall\ g, g' \in G$

$$\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{gg'}.$$

Für $x \in X$ nennen wir

$$G(x) = \{\, \tau_g(x) \mid g \in G \,\}$$

die Bahn von x unter G.

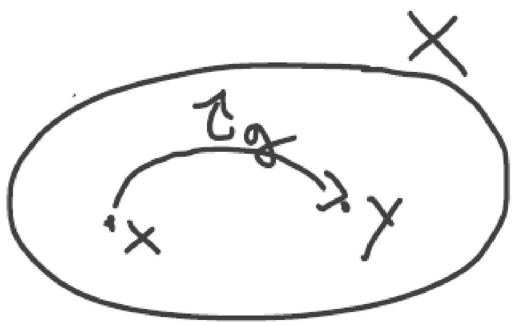
Beispiel 4. a) Sei G eine Gruppe und $X = G$ die Linkstranslation $l\colon G \to \mathrm{Bij}(G)$, $g \mapsto l_g$ mit $l_g(x) = gx \quad \forall\, x \in G$ ist eine Gruppenoperation von G auf sich selbst.

b)

$$\begin{aligned} k\colon G &\to \mathrm{Bij}(G) \\ g &\mapsto k_g \end{aligned}$$

mit $k_g(x) = gxg^{-1} \quad \forall\, x \in G$ ist eine Gruppenoperation.

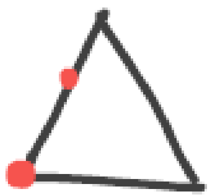
Frage. Sei $\tau\colon G \to \mathrm{Bij}(x)$ eine Gruppenoperation, $x, y \in X$. Wann gibt es ein $g \in G$ mit $\tau_g(x) = y$?



Definition. Sei $\tau\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$ eine Gruppenoperation von G auf X. Wir nennen τ *einfach transitiv*, wenn $\forall\, x, y \in X$ *genau ein* $g \in G$ besteht mit

$$\tau_g(x) = y.$$

Beispiel.
- Die Gruppenoperation aus Beispiel 3 ist *nicht* einfach transitiv



- Die Linkstranslation aus Beispiel 4 a) ist immer einfach transitiv.

Zurück zum Beispiel 2 (V K-Vektorraum, $W \subseteq V$ Untervektorraum, $v \in V$, $X = v + W$)

Wir haben Translationen definiert

$$\begin{aligned} \tau\colon W &\to \operatorname{Bij}(X) \\ x &\mapsto \tau_w \end{aligned}$$

mit $\tau_w\colon X \to X$, $p \mapsto p + w$. τ ist eine einfach transitive Gruppenoperation von W auf x.

Definition. Sei K ein Körper. Ein affiner Raum über K ist ein Tripel $(X, T(X), \tau)$ mit

- $X \neq \varnothing$ eine Menge
- $T(X)$ ein K-Vektorraum
- $\tau\colon T(x) \to \operatorname{Bij}(X)$ eine einfach transitive Gruppenoperation

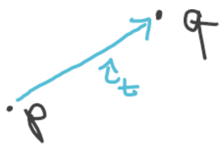
Konvention. $X = \varnothing$ ohne Spezifikation von $T(X)$, τ nennen wir auch einen affinen Raum.

Definition. Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum über einem Körper K. Dann nennen wir $\dim_K T(X)$ die Dimension von X, schreiben auch $\dim X$.

Ist $\dim X = 1$ bzw. $\dim X = 2$, dann nennen wir X eine affine Gerade bzw. affine Ebene.

Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum, $p, q \in X$. Dann $\exists!\, t \in T(X)$ mit $\tau_t(p) = q$.

Schreibe $\overrightarrow{pq} = t \in T(X)$ als $\tau_{\overrightarrow{pq}}(p) = q$.

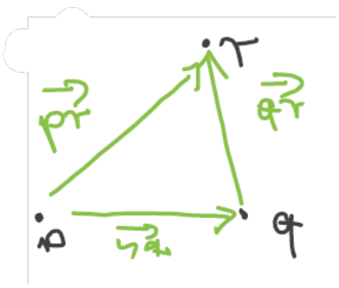


Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\to T(X) \\ (p, q) &\mapsto \overrightarrow{pq}. \end{aligned}$$

Frage. Welche Eigenschaften hat die Abbildung $(p, q) \mapsto \overrightarrow{pq}$ in einem allgemeinen affinen Raum?

Lemma 2. Sei X ein affiner Raum, $p, q, r \in X$. Dann gilt $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.



Beweis. $\tau \colon T(X) \to \mathrm{Bij}(X)$ ist ein Homomorphismus. Also gilt $\tau_{\overrightarrow{qr}} \circ \tau_{\overrightarrow{pq}} = \tau_{\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}}$. Es gilt damit $\tau_{\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}}(p) = r$. Also $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$. □

§1.2 Affine Abbildungen

Seien V, W K-Vektorräume. In der AGLA I: lineare Abbildungen

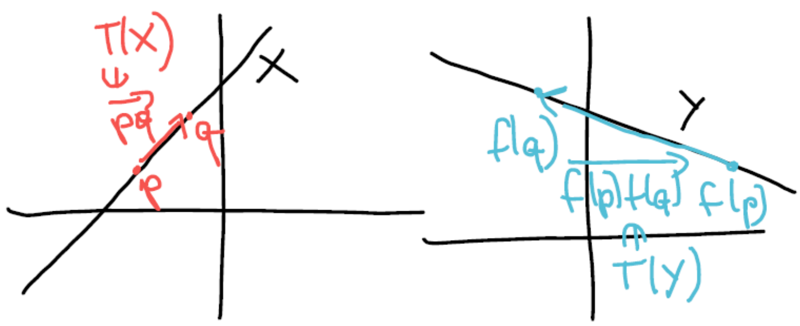
$$F \colon V \to W,$$

ðF respektiert die Vektorraum-Struktur

$$\begin{aligned} F(v_1 + v_2) &= F(v_1) + F(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V \\ F(\lambda v) &= \lambda F(v) \quad \forall\, \lambda \in K \,\forall\, v \in V. \end{aligned}$$

Frage. Was sind natürliche Abbildungen zwischen affinen Räumen?

Seien X, Y affine Räume über einem Körper K.



$$\underset{\substack{\cap \\ T(X)}}{\overrightarrow{pq}} \rightsquigarrow \underset{\substack{\cap \\ T(Y)}}{\overrightarrow{f(p)f(q)}}.$$

Definition. Wir nennen eine Abbildung $f\colon X \to Y$ affin, wenn es eine K-lineare Abbildung $F\colon T(X) \to T(Y)$ gibt, sodass $\forall\, p, q \in X$ gilt

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = F(\overrightarrow{pq}).$$

Bemerkung. a) Es gibt im Allgemeinen verschiedene affine Abbildungen $f\colon X \to Y$, die zur gleichen linearen Abbildung $F\colon T(X) \to T(Y)$ gehören.

b) Sei $p_0 \in X$ fest und $f\colon X \to Y$ affin.

Für $q \in X$ gilt

$$\begin{aligned} f(q) &= \tau_{\overrightarrow{f(p_0)f(q)}}(f(p0)) \\ &= \tau_{F(\overrightarrow{p_0 q})}(f(p0)). \end{aligned}$$

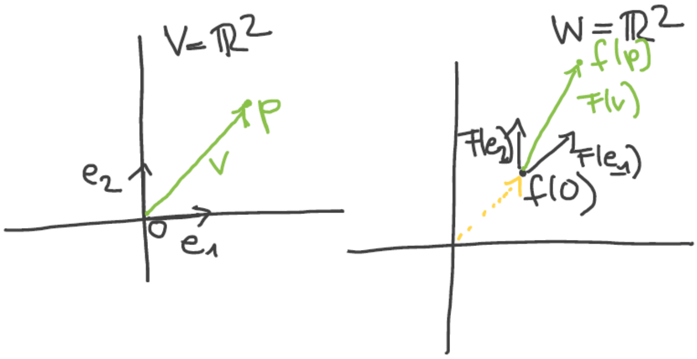
Also bestimmen $f(p_0)$ und F zusammen die Abbildung $f\colon X \to Y$.

Beispiel. Seien V, W K-Vektorräume

$$X = (V, V, \tau), \quad Y = (W, W, \tau).$$

Eine affine Abbildung $f \colon V \to W$ ist eindeutig bestimmt durch $f(0)$ und eine lineare Abbildung $F \colon V \to W$. Es gilt

$$f(v) = f(0) + F(v) \quad \forall v \in V.$$

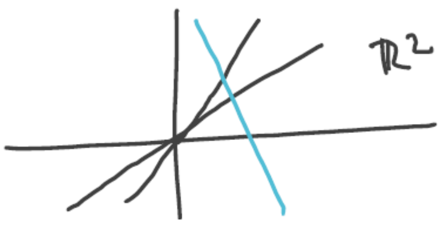


Bemerkung / Übung. Eine affine Abbildung $f \colon X \to Y$ ist genau dann injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, wenn die zugehörige Abbildung $F \colon T(X) \to T(Y)$ es ist.

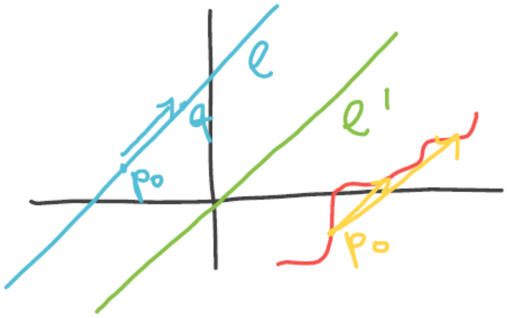
Definition. Wir nennen eine bijektive affine Abbildung $f \colon X \to Y$ eine Affinität.

Affine Unterräume

Beispiel ($\mathbb{R}^2$ als Vektorraum.). Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind $\varnothing$, $\{ 0 \}$, $\mathbb{R}^2$ und Geraden durch 0.



Betrachte nun $\mathbb{R}^2$ als affinen Raum.



Idee. Wir wollen l und l' als affine Unterräume von $\mathbb{R}^2$ definieren, da die Verschiebung von l, l' jeweils Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind.

Definition. Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum und $Y \subseteq X$. Wenn es einen Punkt $p_0 \in Y$ gibt, sodass

$$T(Y) := \{\, \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \,\}$$

ein Untervektorraum von $T(X)$ ist, dann nennen wir Y einen affinen Unterraum von X.

Lemma 3. Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum eines affinen Raumes $(X, T(X), \tau)$. Dann gilt

$$T(Y) = \{\, \overrightarrow{pq} \in T(X), q \in Y \,\}$$

für jeden beliebigen Punkt $p \in Y$.

Beweis. Sei $p_0 \in Y$ ein fester Punkt mit

$$T(Y) = \{\, \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \,\}$$

Untervektorraum von $T(X)$. Dann gilt für $p \in Y$

$$\{\, \overrightarrow{pq} \mid q \in Y \,\} = \overrightarrow{pp_0} + \{\, \overrightarrow{p_0 q} \mid q \in Y \,\} = \underset{\substack{\cap \\ T(Y)}}{\overrightarrow{pp_0}} + T(Y) = T(Y), \qquad \square$$

da $\overrightarrow{pp_0} = -\overrightarrow{p_0 p} \in T(Y)$.

Definition. Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum. Wir nennen $\dim_K T(Y)$ die Dimension von Y und schreiben

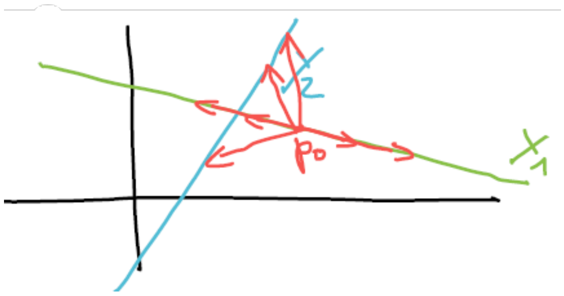
$$\dim Y = \dim_K T(Y).$$

Vorlesung 2

Fr 24.10. 10:15

§1.3 Durchschnitt und Verbindung affiner Räume

Frage. Sei X ein affiner Raum, Y_1, Y_2 affine Unterräume von X. Sind $Y_1 \cap Y_2, Y_1 \cup Y_2$ auch affine Unterräume von X?



$$X = \mathbb{R}^2$$

Lemma 1. Sei X ein affiner Raum, Y_i, $i \in I$, eine Familie von affinen Unterräumen von X.

Dann ist $Y := \bigcap_{i \in I} Y_i$ ein affiner Unterraum von X.

Wenn $Y \neq \varnothing$, dann gilt

$$T(Y) = \bigcap_{i \in I} T(Y_i).$$

Beweis. Falls $Y = \varnothing$: ✓

Wir nehmen also an $Y \neq \varnothing$. Sei $p_0 \in Y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} T(Y) &= \left\{ \underset{\substack{\Cap \\ T(X)}}{\overrightarrow{p_0 q}}, q \in \bigcap_{i \in I} Y_i \right\} \\ &= \bigcap_{i \in I} \underbrace{\{ \overrightarrow{p_0 q}, q \in Y_i \}}_{= T(Y_i)} \\ &= \bigcap_{i \in I} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Untervektorräume von } T(X)}}{T(Y_i)}. \end{aligned}$$

Also ist $T(Y)$ ein Untervektorraum von $T(X)$ und $T(Y) = \bigcap_{i \in I} T(Y_i)$. □

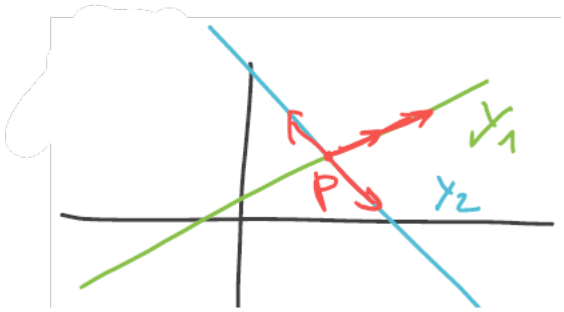
Bemerkung. In obiger Notation ist $\bigcup_{i \in I} Y_i$ im Allgemeinen kein affiner Unterraum von X.

Frage. Finde den „kleinsten“ affinen Unterraum von X, der $\bigcup_{i \in I} Y_i$ enthält! (z. B. $X \supseteq \bigcup_{i \in I} Y_i$, aber X ist im Allgemeinen nicht „minimal“).

Definition. Sei X ein affiner Raum, Y_i, $i \in I$ affine Unterräume von X. Wir nennen

$$\bigcap_{\substack{Y \subseteq X \text{ aff. Unterraum} \\ \bigcup_{i \in I} Y_i \subseteq Y}} Y$$

den *Verbindungsraum* der affinen Unterräume Y_i, $i \in I$. Schreibe $\bigvee_{i \in I} Y_i$.



$X = \mathbb{R}^2$, $Y_1 \vee Y_2 = X$, $Y = Y_1 \vee Y_2$, $T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2)$.

Beispiel.

Frage. Wie kann man im Allgemeinen $T(Y_1 \vee Y_2)$ aus $T(Y_1), T(Y_2)$ bestimmen?

Lemma 2. Sei X ein affiner Raum, $Y_1, Y_2 \neq \varnothing$ affine Unterräume von X.

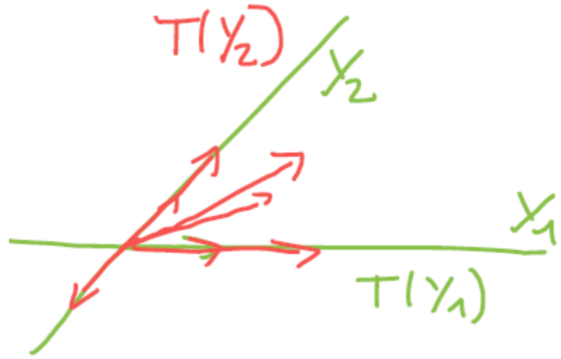
a) Sei $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$. Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

b) Sei $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, $p_1 \in Y_1, p_2 \in Y_2$ und $Y = p_1 \vee p_2$.

Dann gilt:

$$T(Y_1 \vee Y_2) = (T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(Y).$$



Beweis. a) Sei $p \in Y_1 \cap Y_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(Y_1) \cup T(Y_2) &= \{ \vec{pq} \mid q \in Y_1 \cup Y_2 \} \\ &\subseteq T(Y_1 \vee Y_2), \end{aligned}$$

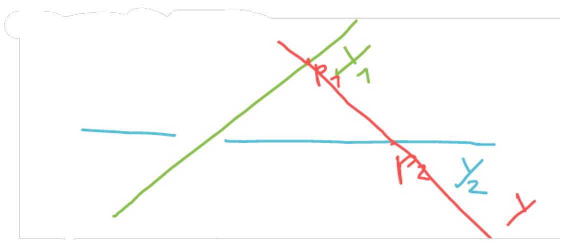
also $T(Y_1) + T(Y_2) \subseteq T(Y_1 \vee Y_2)$.

Sei $Y = \{ \tau_t(p) \mid t \in T(Y_1) + T(Y_2) \}$. Dann ist Y affiner Unterraum von X mit $Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y$, also $Y_1 \vee Y_2 \subset Y$, also $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$. Also gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) \subseteq T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

Also $T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2)$.

b) $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, $p_1 \in Y_1$, $p_2 \in Y_2$, $Y = p_1 \vee p_2$.



Schreibe $Y_1 \vee Y_2 = Y_1 \vee Y \vee Y_2$ (verwende dazu $Y \subseteq Y_1 \vee Y_2$). Verwende a) und leite ab, dass gilt:

$$\begin{aligned} T(Y_1 \vee Y \vee Y_2) &= T(Y_1) + T(Y \vee Y_2) \\ &= T(Y_1) + T(Y) + T(Y_2) \\ &= (T(Y_1) + T(Y_2)) \overset{!}{\oplus} T(Y). \end{aligned}$$

Es gilt

$$T(Y) = \{ \lambda \overrightarrow{p_1p_2} \mid \lambda \in K \}.$$

Wir wollen zeigen

$$(T(Y_1) + T(Y_2)) \cap T(Y) = \{ 0 \}.$$

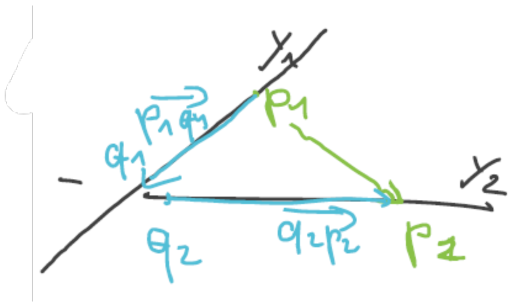
Es genügt zu zeigen

$$\overrightarrow{p_1p_2} \notin T(Y_1) + T(Y_2).$$

Gegenannahme:

$$\overrightarrow{p_1p_2} = \underset{\substack{\pitchfork \\ T(Y_1)}}{\overrightarrow{p_1y_1}} + \underset{\substack{\pitchfork \\ T(Y_2)}}{\overrightarrow{q_2p_2}}$$

mit $q_1 \in Y_1$, $q_2 \in Y_2$.



Dann gilt

$$\overrightarrow{q_1q_2} = \overrightarrow{q_1p_1} + \overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2q_2} = 0,$$

also $q_1 = q_2$ und $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$ $\lightning$. $\square$

Als nächstes: $\dim(Y_1 \vee Y_2)$ ist durch $\dim_K T(Y_1 \vee Y_2)$ gegeben, also sollten wir aus Lemma 2 für $Y_1 \vee Y_2$ ableiten können.

Lemma 3. Sei X ein affiner Raum, $Y_1, Y_2 \neq \varnothing$ affine Unterräume von X.

a) Sei $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$. Dann gilt $\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2)$.

b) Sei $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. Dann gilt

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1.$$

Beweis. a) Aus Lemma 2 folgt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2),$$

aus der Dimensionsformel für Untervektorräume folgt

$$\begin{aligned}
\dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2) \\
&= \dim(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Lemma 1}}}{=} \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim T(Y_1 \cap Y_2) \\
&= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 \cap Y_2.
\end{aligned}$$

b) $Y_1 \cap Y_2$, $p_1 \in Y_1$, $p_2 \in Y_2$, $Y = p_1 \vee p_2$.

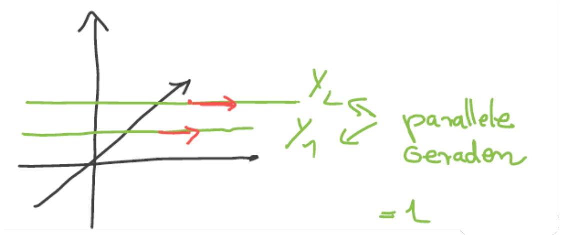
Dann ist

$$\dim Y = \dim T(Y) = 1.$$

Wir erhalten

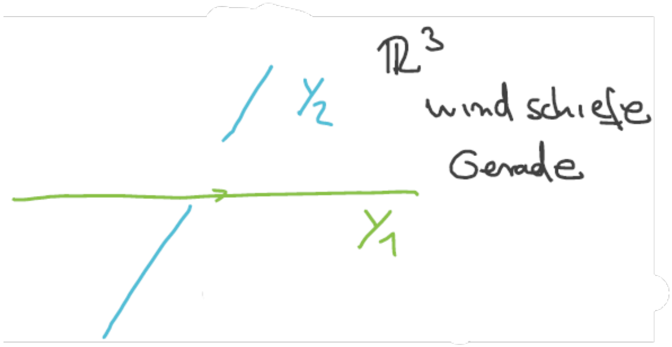
$$\begin{aligned}
\dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Lemma 2}}}{=} \dim((T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(Y)) \\
&= \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) + \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\dim T(Y)} \\
&= \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 \\
&= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1
\end{aligned}$$

□



Beispiel ($X = \mathbb{R}^3$).

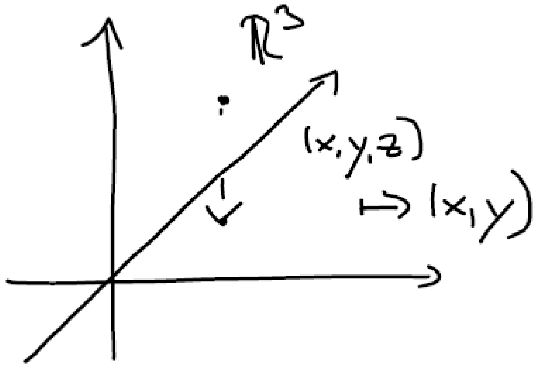
$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - \underbrace{\dim(T(Y_1) \cap T(Y_2))}_{=1} + 1 = 2$$



$$\dim(Y_1 \vee Y_2) 1 + 1 - 0 + 1 = 3$$

und $Y_1 \vee Y_2 = X$.

§1.4 Parallelprojektionen



Wiederholung (Projektionen aus der AGLA I). Beispiel.

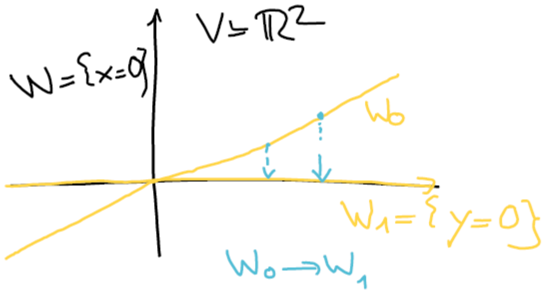
Sei V ein K-Vektorraum, $W, W_1 \subset V$ K-Untervektorräume mit $V = W \oplus W_1$. Schreibe $v \in V$ in der Form $v = w + w_1$ und mit $w \in W$, $w_1 \in W_1$. Definiere

$$\begin{aligned} P_W \colon V &\to W_1 \\ \underset{w+w_1}{\overset{\shortparallel}{v}} &\mapsto w_1. \end{aligned}$$

Ein paar Eigenschaften von P_W:

- $P_W : V \to W_1$ ist eine lineare Abbildung,
- $\operatorname{Ker} P_W = W$,
- $P_W|_{W_1} = \mathrm{Id}_{W_1}$.

Als Nächstes: Wir schränken P_W ein auf einen Untervektorraum W_0 von V.



Lemma 4. Sei V ein K-Vektorraum, $W, W_0, W_1 \subseteq V$ Untervektorräume mit $V = W \oplus W_0 = W \oplus W_1$.

Dann ist $P_W|_{W_0} : W_0 \to W_1$ ein Isomorphismus (Notation wie oben).

Beweis. Es gilt $\dim W_0 = \dim W_1$ und es genügt zu zeigen, dass $P_W|_{W_0}$ injektiv ist.

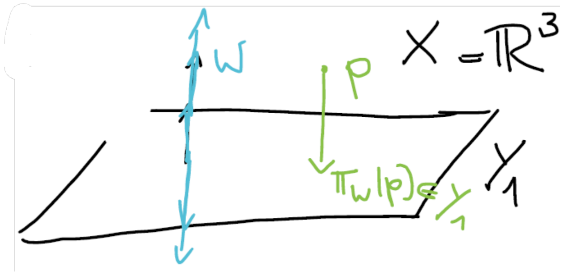
Sei $P_W|_{w_0} = w_1$ für $w_0 \in W_0$, $w_1 \in W_1$. Dann ist $w_0 = w + w_1$ mit $w \in W$, $w_1 \in W_1$, also

$$w_1 = \underset{\substack{\cap \\ W_0}}{w_0} - \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} \in W_0 \oplus W, \qquad \square$$

und diese Zerlegung ist eindeutig.

Parallelprojektionen für affine Räume

Sei X ein affiner Raum (über einem Körper K), $Y_1 \subseteq X$ ein affiner Unterraum



Beispiel.

Sei $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit $T(X) = T(Y_1) \oplus W$.

Ziel. Definiere eine Projektionsabbildung

$$\pi_W : X \to Y_1$$

„längs W“.

Für $p \in X$ definiere

$$W(p) := \{\, x \in X \mid \overrightarrow{px} \in W \,\}$$

Lemma 5. Notation wie oben. Für $p \in X$ gilt

$$\#(Y_1 \cap W(p)) = 1.$$

Beweis. Wir berechnen

$$\dim(Y_1 \cap W(p)).$$

Sei $x = \dim X$, verwende Lemma 3 b). Falls $Y_1 \cap W(p) = \varnothing$, dann

$$\begin{aligned}\dim(Y_1 \vee W(p)) &= \dim Y_1 + \dim W(p) - \dim(\underbrace{T(Y_1) \cap W}_{=\{\,0\,\}}) + 1 \\ &= \dim T(Y_1) + \dim W + 1\end{aligned}$$

$\lightning$ zu $Y_1 \vee W(p) \subseteq X$, also ist $Y_1 \cap W(p) \neq \{\,0\,\}$, und nach Lemma 3 a) gilt Folgendes:

$$\begin{aligned}\underbrace{\dim(Y_1 \vee W(p))}_{\overset{\shortparallel}{n}} &= \dim Y_1 + \dim W(p) - \dim(Y_1 \cap W(p)) \\ &= n - \dim(Y_1 \cap W(p))\end{aligned}$$

und nach Lemma 1

$$\begin{aligned}\dim Y_1 \vee W(p) &= \dim(T(Y_1) + W) \\ &= n,\end{aligned} \qquad \square$$

also $\dim(Y_1 \cap W(p)) = 0$.

Wir definieren die Projektion längs W

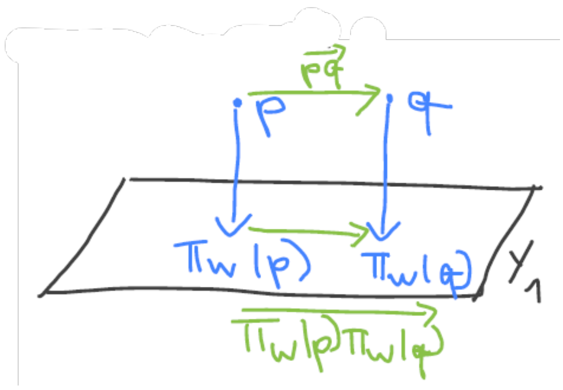
$$\pi_W \colon \underset{\underset{Y_0}{\subseteq}}{X} \to Y_1, \ \ p \mapsto W(p) \cap Y_1.$$

Satz 6. Sei X ein affiner Raum, $Y_1, Y_0 \subseteq X$ affine Unterräume, $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit

$$T(X) = W \oplus T(Y_0) = W \oplus T(Y_1).$$

Dann ist $\pi_W \colon X \to Y_1$ eine surjektive affine Abbildung und $\pi_w|_{Y_0} : Y_0 \to Y_1$ eine Affinität.

Beweis. Seien $p, q \in X$.



Dann gilt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{pq} &= \overrightarrow{p\pi_W(p)} + \overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)} + \overrightarrow{\pi_W(q)q} + \overrightarrow{\pi_W(q)q} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{p\pi_W(p)} + \overrightarrow{\pi_W(q)q}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)}}_{\in T(Y_1)},\end{aligned}$$

also $\overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)} = P_W(\overrightarrow{pq})$.

P_W ist surjektiv, also ist π_W eine surjektive affine Abbildung.

Der zweite Teil folgt aus Lemma 4. $\square$

Vorlesung 3

Di 28.04. 10:15

§1.5 Affine Koordinaten

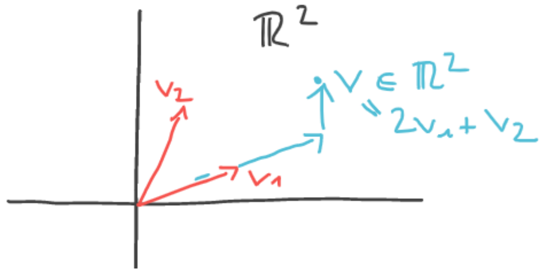
Koordinaten in einem K-Vektorraum V. Sei $\dim V = n$ und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi\colon \qquad K^n &\to V \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. Jeder Punkt $\underset{V}{\underset{\ni}{v}} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ ist eindeutig bestimmt durch seine „Koordinaten“

$$\inf \phi(v) = (x_1, \dots, x_n) \in K^n.$$

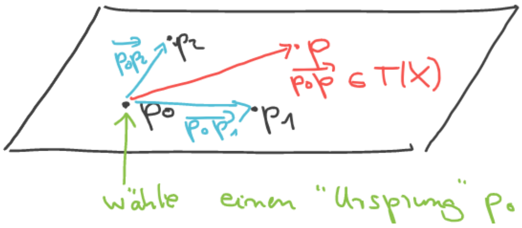
Frage. Sei X ein affiner Raum über einem Körper K. Können wir auch hier die Lage eines Punkte $p \in X$ durch Angabe von „Koordinaten“ bezüglich einer „Basis“ beschreibe?



Beispiel / Idee. $X = \mathbb{R}^2$ als affiner Raum und Punkte $p_1, p_2 \in X$, sodass $\overrightarrow{p_0p_1}$, $\overrightarrow{p_0p_2}$ eine Basis ist für $T(X)$. Dann können wir einen Punkt $p \in X$ beschreiben durch

$$\begin{aligned} p &= \tau_{\overrightarrow{p_0p}}(p_0) \\ &= \tau_{\lambda\overrightarrow{p_0p_1} + \mu\overrightarrow{p_0p_2}}(p_0), \end{aligned}$$

falls $\overrightarrow{p_0p} = \lambda\overrightarrow{p_0p_1} + \mu\overrightarrow{p_0p_2}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.



Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \phi\colon \quad \mathbb{R}^2 &\to X \\ (\lambda, \mu) &\mapsto \tau_{\lambda\overrightarrow{p_0p_1}+\mu\overrightarrow{p_0p_2}}(p_0), \end{aligned}$$

die eine Affinität ist.

Wir formalisieren diese Konzepte für allgemeine affine Räume.

Definition. Sei X ein affiner Raum und $p_0, \dots, p_n \in X$. Wir nennen $(p_0, \dots, p_n)$ *affin unabhängig* bzw. eine *affine Basis*, wenn die Vektoren $(\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})$ in $T(x)$ *linear unabhängig sind* bzw. *eine Basis bilden.*

Beispiele. a) In $X = \mathbb{R}^n$ ist $(0, e_1, \dots, e_n)$ eine affine Basis.

b) $X = \mathbb{R}^n$ als affiner Raum, $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, $v_0 = 0$. Dann ist das Tupel $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ affin unabhängig.

   Frage. Kann man hier $v_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig nehmen?

c) $X = \mathbb{R}^2$ als affiner Raum. Dann gilt, dass für $v, w \in \mathbb{R}^2$ das Tupel (v, w) affin unabhängig ist gdw $v \neq w$.

d) X affiner Raum, $p_0 \in X$, $(t_1, \dots, t_n)$ Basis von $T(X)$. Dann ist

$$(p_0, \tau_{t_1}(p_0), \dots, \tau_{t_n}(p_0))$$

   eine affine Basis von X.

Lemma 1. Sei X ein affiner Raum, $p_0, \dots, p_n \in X$ und $(p_0, \dots, p_n)$ affin unabhängig. Sei $\sigma \in S_{n+1}$ eine Permutation von $\{ 0, \dots, n \}$. Dann ist

$$(p_{\sigma(0)}, p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n)})$$

affin unabhängig.

Beweis. Wir wollen zeigen, dass unter den Annahmen des Lemmas, die Vektoren

$$\overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(1)}}, \dots, \overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(n)}} \in T(X)$$

linear unabhängig sind.

Sei $\sigma(0) = i \in \{ 0, \dots, n \}$.

Dann müssen wir also zeigen, dass die Vektoren

$$\overrightarrow{p_ip_0}, \overrightarrow{p_ip_1}, \dots, \overrightarrow{p_ip_{i-1}}, \overrightarrow{p_ip_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{p_ip_n}$$

linear unabhängig sind.

Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$\lambda_0\overrightarrow{p_ip_0} + \lambda_1\overrightarrow{p_ip_1} + \dots + \lambda_{i-1}\overrightarrow{p_ip_{i-1}} + \lambda_{i+1}\overrightarrow{p_ip_{i+1}} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{p_ip_n} = 0.$$

Schreibe

$$\overrightarrow{p_ip_j} = \overrightarrow{p_ip_0} + \overrightarrow{p_0p_j} = \overrightarrow{p_0p_j} - \overrightarrow{p_0p_i}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_1\overrightarrow{p_0p_1} + \dots + \lambda_{i-1}\overrightarrow{p_0p_{i-1}} + \lambda_{i+1}\overrightarrow{p_0p_{i+1}} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{p_0p_n} \\ -(\lambda_0 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n)\overrightarrow{p_0p_i} = 0 \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$ folgt

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \lambda_n = 0$$

und

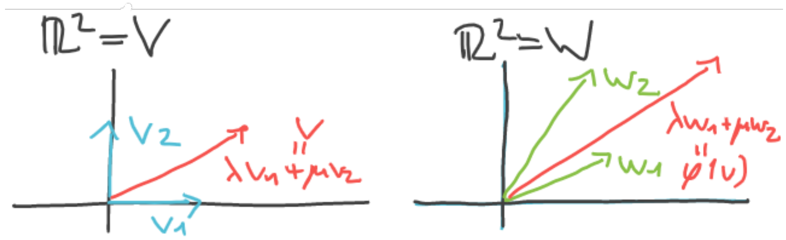
$$\underset{\lambda_0=0}{\underset{\uparrow}{+}} \underbrace{\lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n}_{=0} = 0$$

□

Affine Basen und affine Abbildungen

Aus der AGLA I:
Seien V, W K-Vektorräume, $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Basis von V und $w_1, \dots, w_n \in W$. Dann gibt es genau eine K-lineare Abbildung $\phi \colon V \to W$ mit

$$\phi(v_i) = w_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$



Frage. Inwiefern sind affine Abbildungen zwischen affinen Räumen durch die Bilder einer affinen Basis bestimmt?

Satz 2. Seien X, Y affine Räume, $(p_0, \dots, p_n)$ eine affine Basis von X und $q_0, \dots, q_n \in Y$. Dann gibt es genau eine affine Abbildung $f\colon X \to Y$ mit

$$f(p_i) = q_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Die Abbildung f ist *injektiv* bzw. *eine Affinität* gdw das Tupel $(q_0, \dots, q_n)$ *affin unabhängig* bzw. *eine affine Basis* von Y ist.

Beweis. Eine affine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist gegeben durch $f(p_0)$ für ein $p_0 \in X$ und eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon T(X) &\to T(Y) \\ \overrightarrow{pq} &\mapsto \overrightarrow{f(p)f(q)}. \end{aligned}$$

Wir definieren F durch

$$F(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{q_0q_i} \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{*}$$

$\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$ ist eine Basis von $T(X)$, also gibt es genau ein lineare Abbildung

$$F\colon T(X) \to T(Y)$$

mit (*). Es gilt dann

$$\begin{aligned} f(p_i) &= \tau_{\overrightarrow{f(p_0)f(p_i)}} f(p_0) \\ &= \tau_{F(\overrightarrow{p_0p_i})} f(p_0) \\ &= \tau_{\overrightarrow{q_0q_i}} q_0 = q_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$ □

f ist injektiv gdw F injektiv ist. F ist injektiv gdw $\overrightarrow{q_0q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0q_n}$ linear unabhängig sind.

$\to f$ ist eine Affinität gdw F bijektiv ist. F ist bijektiv gdw $\overrightarrow{q_0q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0q_n}$ eine Basis von $T(Y)$ ist.

Affine Koordinatensysteme

Sei X ein affiner Raum über einem Körper K, $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ eine affine Basis von X.

Nach Satz 2 gibt es genau eine Affinität

$$\phi \colon K^n \to X$$

mit $\phi(0) = p_0, \phi(e_1) = p_1, \dots, \phi(e_n) = p_n$ und zugehörige lineare Abbildung $\Phi \colon K^n \to T(X)$.

Einen Punkt $p \in X$ können wir dann beschreiben durch

$$p = \tau_{\overrightarrow{p_0 p}}(p_0).$$

Sei $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{p_0 p_n}$ mit $\lambda_i \in K$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Dann ist

$$\begin{aligned} p &= \tau_{\lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{p_0 p_n}}(p_0) \\ &= \tau_{\lambda_1 \Phi(e_1) + \dots + \lambda_n \Phi(e_n)}(p_0) \\ &= \tau_{\Phi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)}(p_0), \end{aligned}$$

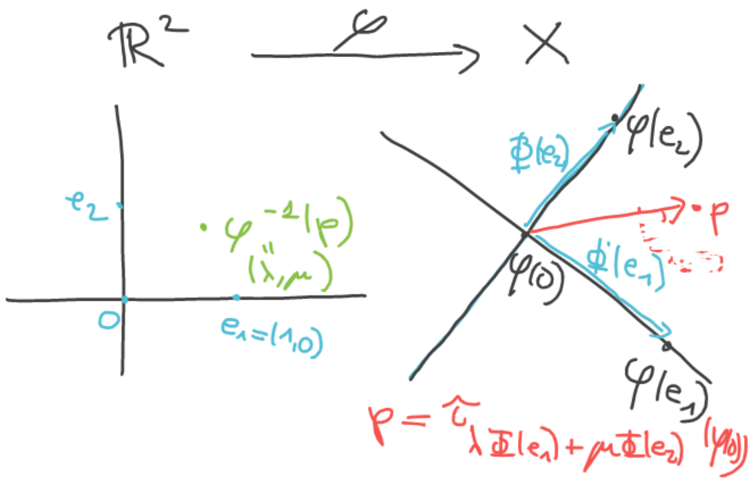
oder $p = \phi((\lambda_1, \dots, \lambda_n))$.

Definition. Sei X ein affiner Raum über einem Körper K. Wir nennen eine Affinität $\phi \colon K^n \to X$ ein affines Koordinatensystem in X. Seu $p_0 = \phi(0), p_1 = \phi(e_1), \dots, p_n = \phi(e_n)$. Dann ist $(p_0, \dots, p_n)$ eine affine Basis von X.

Für $p \in X$ nennen wir

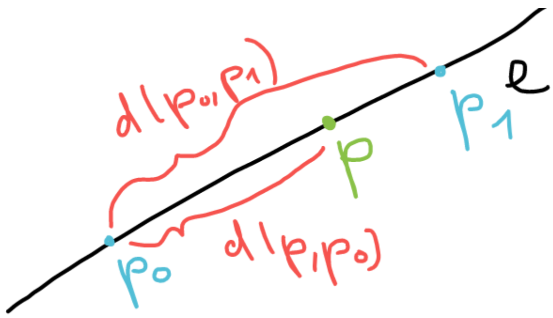
$$\phi^{-1}(p) = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$$

den Koordinatenvektor von p bezüglich der affinen Basis $(p_0, \dots, p_n)$ und $(x_1, \dots, x_n)$ die Koordinaten von p bezüglich $(p_0, \dots, p_n)$.



§1.6 Das Teilverhältnis

Idee. Seien 3 Punkte p_0, p_1, p auf einer Gerade l (z. B. im $\mathbb{R}^3$) gegeben, $p_0 \neq p_1$.



Sei $\lambda = \frac{d(p,p_0)}{d(p_1,p_0)}$, mit d dem euklidischen Abstand, dann können wir die Lage von p auf l durch λ (und der Information, ob p „rechts oder links" von p liegt) bestimmen.

Definition. Sei X ein affiner Raum über K, $Y \subseteq X$ eine affine Gerade, $p_0, p_1, p \in Y$ und $p_0 \neq p_1$. Dann nennen wir das eindeutig bestimmte Element $\lambda \in K$ mit $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1}$ das Teilverhältnis von p_0, p_1, p. Schreibe $\lambda = \mathrm{TV}(p_0, p_1, p)$. In $\mathrm{char}(K) \neq 2$ nennen wir p Mittelpunkt von p_0, p_2 wenn $\mathrm{TV}(p_0, p_1, p) = \frac{1}{2}$.

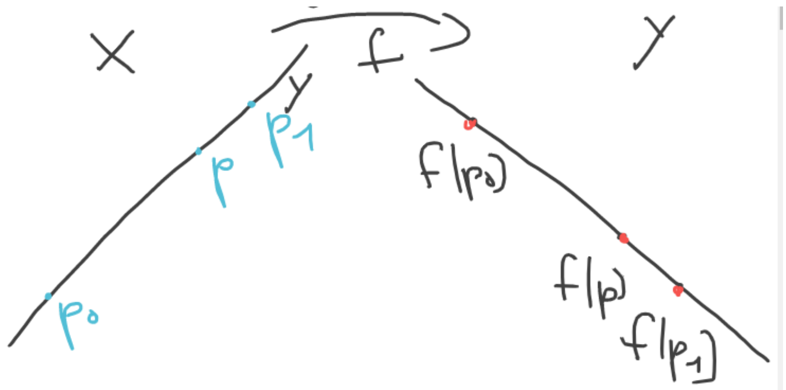
Bemerkungen. a) Es gilt $T(Y) = K\overrightarrow{p_0 p_1}$. Damit ist λ wohldefiniert und existiert.

b) p_0, p_1 ist eine affine Basis von Y. Damit existiert ein Koordinatensystem

$$\phi\colon K \to Y, \quad \begin{aligned} \phi(0) &= p_0 \\ \phi(1) &= p_1 \end{aligned}$$

und es gilt $\mathrm{TV}(p_0, p_1, p) = \phi(p)^{-1}$.

Frage. Wie verhält sich das Teilverhältnis unter affinen Abbildungen?



Lemma 3. Seien X, Y affine Räume und $f\colon X \to Y$ eine affine Abbildung, seien $p_0, p1, p$ Punkte in X, die auf einer Geraden liegen und $f(p_0) \neq f(p_1)$. Dann gilt

$$\mathrm{TV}(f(p_0), f(p_1), f(p)) = \mathrm{TV}(p_0, p_1, p).$$

Beweis. Sei $\lambda = \mathrm{TV}(p_0, p_1, p)$, also $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1}$. Si $F\colon T(X) \to T(Y)$ die zu f gehörige lineare Abbildung. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(p_0)f(p)} &= F(\overrightarrow{p_0 p}) \\ &= F(\lambda p_0 p_1) \\ &= \lambda F(p_0 p_1) \\ &= \lambda \overrightarrow{f(p_0)f(p_1)} \end{aligned}$$ □

Anwendung (Strahlensatz). Sei X ein affiner Raum über K, $p_0, p_1, p_2 \in X$ affin unabhängig. Sei

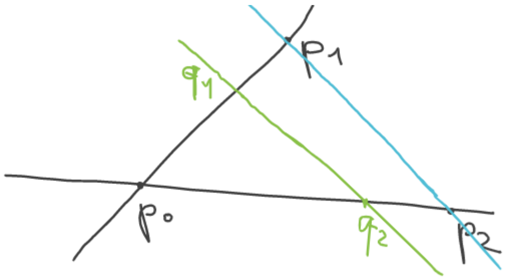
$$\begin{aligned} q_1 &\in p_0 \vee p_1, \quad q_1 \neq p_0 \\ q_2 &\in p_0 \vee p_2, \quad q_2 \neq p_0. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass $p_1 \vee p_2$ und $q_1 \vee q_2$ parallel sind in dem Sinn, dass

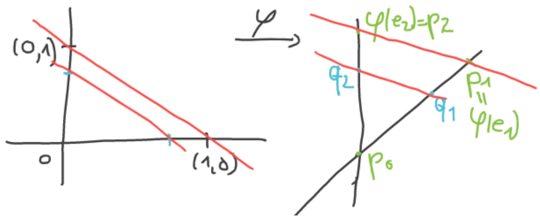
$$T(p_1 \vee p_2) = T(q_1 \vee q_2) \text{ in } T(X).$$

Dann gilt

$$\mathrm{TV}(p_0, p_1, q_1) = \mathrm{TV}(p_0, p_2, q_2).$$



Beweis. Sei Y diedurch p_0, p_1, p_2 aufgespannte Ebene. Dann gibt es ein affines Koordinatensystem $\phi \colon K^2 \to Y$ mit $\phi(0) = p_0, \phi(e_1) = p_1, \phi(e_2) = p_2$.



Sei

$$(\lambda, 0) = \phi^{-1}(q_1)$$
$$(0, \mu) = \phi^{-1}(q_2).$$

Behauptung. $l_1 = \phi^{-1}(q_1) \vee \phi^{-1}(q_2)$ und $l_2 = \phi^{-1}(p_1) \vee \phi^{-1}(p_2)$ sind parallel.

Denn:

$$T(l_1) = K\overrightarrow{\phi^{-1}(q_1)\phi^{-1}(q_2)}$$
$$T(l_2) = K\overrightarrow{\phi^{-1}(p_1)\phi^{-1}(p_2)}.$$

Es ist $K\overrightarrow{p_1p_2} = K\overrightarrow{q_1q_2}$ und daher

$$\underset{\underset{K\overrightarrow{\phi^{-1}(q_1)\phi^{-1}(q_2)}}{\parallel}}{K\Phi^{-1}(\overrightarrow{p_1p_2})} = \underset{\underset{K\overrightarrow{\phi^{-1}(p_1)\phi^{-1}(p_2)}}{\parallel}}{K\Phi^{-1}(\overrightarrow{q_1q_2})}.$$

Aus der Parallelität von l_1, l_2 folgt $\lambda = \mu$.

Also

$$\begin{aligned} \mathrm{TV}(\phi^{-1}(p_0), \phi^{-1}(p_1), \phi^{-1}(q_1)) = \lambda \\ = \mu = \mathrm{TV}(\phi^{-1}(p_0), \phi^{-1}(p_2), \phi^{-1}(q_2)) \end{aligned}$$

und der Strahlensatz folgt aus Lemma 3. $\square$