Vorlesungsmitschrift

AGLA II

Prof. Dr. Damaris Schindler

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 24. April 2020

Disclaimer

Nicht von Professor Schindler durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit ihrerseits.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Affine Geometrie

Vorlesung 1

Di 21.04. 10:15

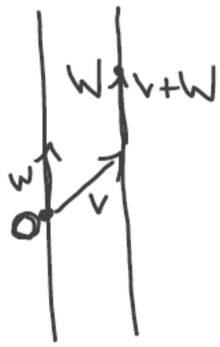
§1.1 Was ist ein affiner Raum?

Beispiel 1 (aus der AGLA I). $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. In diesen Räumen gibt es einen ausgezeichneten „Usprung“.

Frage. Wie könne wir eine affine Ebene / affine Räume modellieren, wobei alle Punkte gleichberechtigt sind?

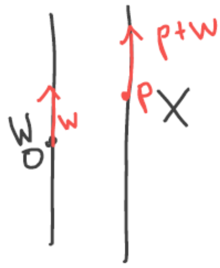
Idee. Verwende affine Unterräume.

Beispiel 2. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und $v \in V$. Wir nennen $X = v + W$ einen affinen Unterraum von V. X ist im Allgemeinen selbst kein Vektorraum unter der Addition in V, aber W „operiert“ auf X.



Für $w \in W$ definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau_w \colon X &\to X \\ p &\mapsto p + w. \end{aligned}$$



Sei

$$\operatorname{Bij}(X) = \{ f \colon X \to X, f \text{ ist bijektiv} \} .$$

Dann ist $\tau_w \in \operatorname{Bij}(X)$ für alle $w \in W$.

Bemerkung. $\operatorname{Bij}(X)$ ist eine Gruppe unter Verkettung von Abbildung. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \tau \colon W &\to \operatorname{Bij}(X) \\ w &\mapsto \tau_w. \end{aligned}$$

Lemma 1. Die Abbildung τ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Seien $w, w' \in W$ Dann

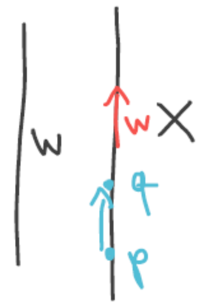
$$\begin{aligned} \tau_w \circ \tau_{w'} \colon X &\to X \\ p &\mapsto p + \underbrace{w' + w}, \end{aligned}$$

also

$$\tau(w) \circ \tau(w') = \tau_w \circ \tau_{w'} = \tau_{w+w'} = \tau(w + w').$$ $\square$

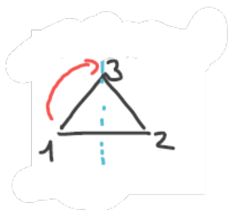
Es gilt noch mehr:

für $p, q \in X$ besteht genau ein $w \in W$ mit $\tau_w(p) = q$.



Gruppenoperationen

Beispiel 3. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck D und Spiegelungen / Drehungen die D auf sich selbst abbilden.



Diese formen eine Gruppe (welche?) und „operieren" auf D.

Definition 1. Sei X eine Menge und G eine Gruppe. Eine Operation von G auf X ist ein Homomorphismus von Gruppen

$$\begin{aligned} \tau\colon G &\to \operatorname{Bij}(X) \\ g &\mapsto \tau_g. \end{aligned}$$

Bemerkung. τ ist ein Homomorphismus ð$\forall\ g, g' \in G$

$$\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{gg'}.$$

Für $x \in X$ nennen wir

$$G(x) = \{\ \tau_g(x) \mid g \in G\ \}$$

die Bahn von x unter G.

Beispiel 4. a) Sei G eine Gruppe und $X = G$ die Linkstranslation

$$l\colon G \to \mathrm{Bij}(G), \quad g \mapsto l_g$$

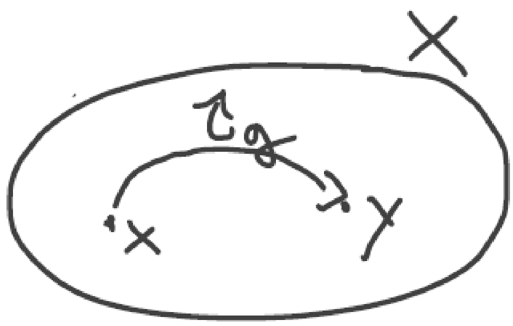
mit $l_g(x) = gx \quad \forall\, x \in G$ ist eine Gruppenoperation von G auf sich selbst.

b)

$$\begin{aligned} k\colon G &\to \mathrm{Bij}(G) \\ g &\mapsto k_g \end{aligned}$$

mit $k_g(x) = gxg^{-1} \quad \forall\, x \in G$ ist eine Gruppenoperation.

Frage. Sei $\tau\colon G \to \mathrm{Bij}(x)$ eine Gruppenoperation, $x, y \in X$. Wann gibt es ein $g \in G$ mit $\tau_g(x) = y$?

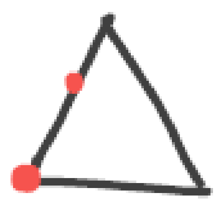


Definition. Sei $\tau\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$ eine Gruppenoperation von G auf X. Wir nennen τ *einfach transitiv*, wenn $\forall\, x, y \in X$ *genau ein* $g \in G$ besteht mit

$$\tau_g(x) = y.$$

Beispiel.

- Die Gruppenoperation aus Beispiel 3 ist *nicht* einfach transitiv



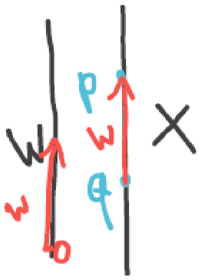
- Die Linkstranslation aus Beispiel 4 a) ist immer einfach transitiv.

Zurück zum Beispiel 2 (V K-Vektorraum, $W \subseteq V$ Untervektorraum, $v \in V$, $X = v + W$)

Wir haben Translationen definiert

$$\begin{aligned} \tau \colon W &\to \mathrm{Bij}(X) \\ x &\mapsto \tau_w \end{aligned}$$

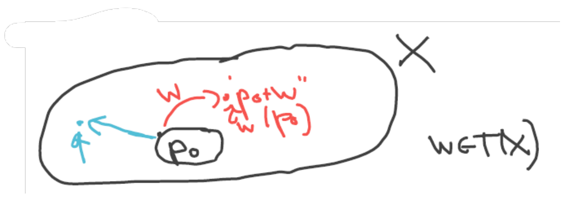
mit $\tau_w \colon X \to X$, $p \mapsto p + w$. τ ist eine einfach transitive Gruppenoperation von W auf x.



Definition. Sei K ein Körper. Ein affiner Raum über K ist ein Tripel $(X, T(X), \tau)$ mit

- $X \neq \varnothing$ eine Menge
- $T(X)$ ein K-Vektorraum
- $\tau \colon T(x) \to \mathrm{Bij}(X)$ eine einfach transitive Gruppenoperation

Konvention. $X = \varnothing$ ohne Spezifikation von $T(X)$, τ nennen wir auch einen affinen Raum.

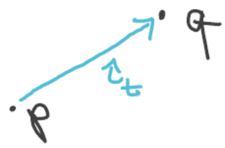


Definition. Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum über einem Körper K. Dann nennen wir $\dim_K T(X)$ die Dimension von X, schreiben auch $\dim X$.

Ist $\dim X = 1$ bzw. $\dim X = 2$, dann nennen wir X eine affine Gerade bzw. affine Ebene.

Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum, $p, q \in X$. Dann $\exists!\, t \in T(X)$ mit $\tau_t(p) = q$.

Schreibe $\overrightarrow{pq} = t \in T(X)$ als $\tau_{\overrightarrow{pq}}(p) = q$.

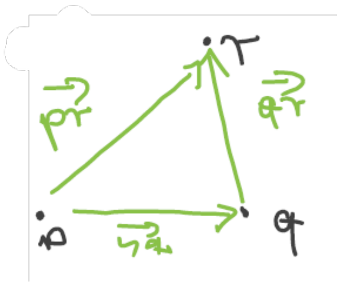


Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\to T(X) \\ (p, q) &\mapsto \overrightarrow{pq}. \end{aligned}$$

Frage. Welche Eigenschaften hat die Abbildung $(p, q) \mapsto \overrightarrow{pq}$ in einem allgemeinen affinen Raum?

Lemma 2. Sei X ein affiner Raum, $p, q, r \in X$. Dann gilt $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.



Beweis. $\tau \colon T(X) \to \mathrm{Bij}(X)$ ist ein Homomorphismus. Also gilt $\tau_{\overrightarrow{qr}} \circ \tau_{\overrightarrow{pq}} = \tau_{\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}}$. Es gilt damit $\tau_{\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}}(p) = r$. Also $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$. □

§1.2 Affine Abbildungen

Seien V, W K-Vektorräume. In der AGLA I: lineare Abbildungen

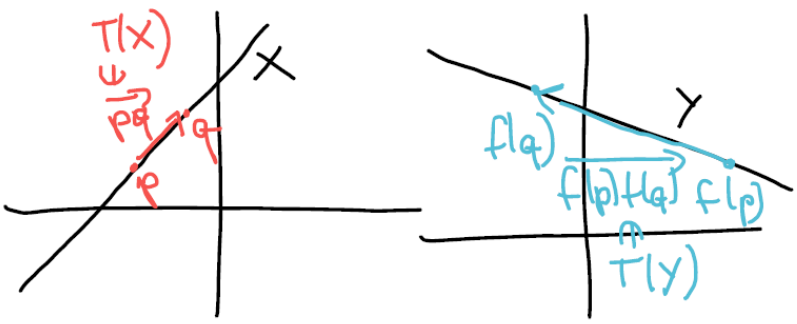
$$F \colon V \to W,$$

ðF respektiert die Vektorraum-Struktur

$$\begin{aligned} F(v_1 + v_2) &= F(v_1) + F(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V \\ F(\lambda v) &= \lambda F(v) \quad \forall\, \lambda \in K \,\forall\, v \in V. \end{aligned}$$

Frage. Was sind natürliche Abbildungen zwischen affinen Räumen?

Seien X, Y affine Räume über einem Körper K.



$$\underset{\substack{\cap \\ T(X)}}{\overrightarrow{pq}} \rightsquigarrow \underset{\substack{\cap \\ T(Y)}}{\overrightarrow{f(p)f(q)}}.$$

Definition. Wir nennen eine Abbildung $f\colon X \to Y$ affin, wenn es eine K-lineare Abbildung $F\colon T(X) \to T(Y)$ gibt, sodass $\forall\, p, q \in X$ gilt

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = F(\overrightarrow{pq}).$$

Bemerkung. a) Es gibt im Allgemeinen verschiedene affine Abbildungen $f\colon X \to Y$, die zur gleichen linearen Abbildung $F\colon T(X) \to T(Y)$ gehören.

b) Sei $p_0 \in X$ fest und $f\colon X \to Y$ affin.

Für $q \in X$ gilt

$$\begin{aligned} f(q) &= \tau_{\overrightarrow{f(p_0)f(q)}}(f(p0)) \\ &= \tau_{F(\overrightarrow{p_0 q})}(f(p0)). \end{aligned}$$

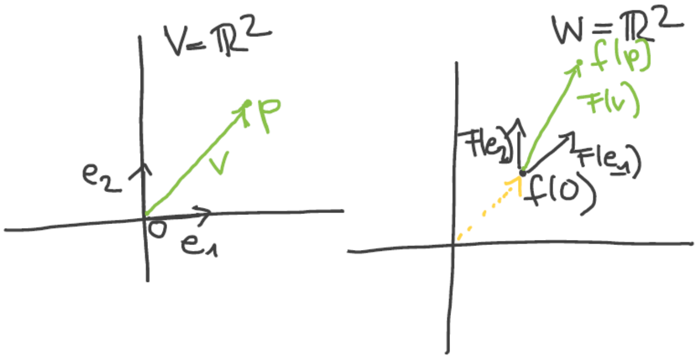
Also bestimmen $f(p_0)$ und F zusammen die Abbildung $f\colon X \to Y$.

Beispiel. Seien V, W K-Vektorräume

$$X = (V, V, \tau), \quad Y = (W, W, \tau).$$

Eine affine Abbildung $f\colon V \to W$ ist eindeutig bestimmt durch $f(0)$ und eine lineare Abbildung $F\colon V \to W$. Es gilt

$$f(v) = f(0) + F(v) \quad \forall v \in V.$$

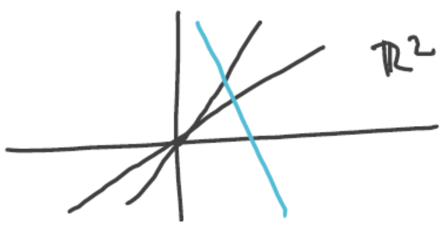


Bemerkung / Übung. Eine affine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, wenn die zugehörige Abbildung $F\colon T(X) \to T(Y)$ es ist.

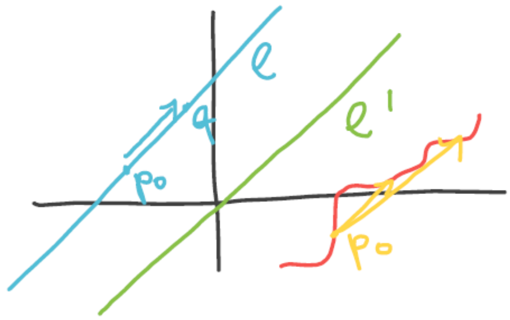
Definition. Wir nennen eine bijektive affine Abbildung $f\colon X \to Y$ eine Affinität.

Affine Unterräume

Beispiel ($\mathbb{R}^2$ als Vektorraum.). Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind $\varnothing$, $\{ 0 \}$, $\mathbb{R}^2$ und Geraden durch 0.



Betrachte nun $\mathbb{R}^2$ als affinen Raum.



Idee. Wir wollen l und l' als affine Unterräume von $\mathbb{R}^2$ definieren, da die Verschiebung von l, l' jeweils Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind.

Definition. Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum und $Y \subseteq X$. Wenn es einen Punkt $p_0 \in Y$ gibt, sodass

$$T(Y) := \{\, \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \,\}$$

ein Untervektorraum von $T(X)$ ist, dann nennen wir Y einen affinen Unterraum von X.

Lemma 3. Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum eines affinen Raumes $(X, T(X), \tau)$. Dann gilt

$$T(Y) = \{\, \overrightarrow{pq} \in T(X), q \in Y \,\}$$

für jeden beliebigen Punkt $p \in Y$.

Beweis. Sei $p_0 \in Y$ ein fester Punkt mit

$$T(Y) = \{\, \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \,\}$$

Untervektorraum von $T(X)$. Dann gilt für $p \in Y$

$$\{\, \overrightarrow{pq} \mid q \in Y \,\} = \overrightarrow{pp_0} + \{\, \overrightarrow{p_0 q} \mid q \in Y \,\} = \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ T(Y)}}{\overrightarrow{pp_0}} + T(Y) = T(Y), \qquad \square$$

da $\overrightarrow{pp_0} = -\overrightarrow{p_0 p} \in T(Y)$.

Definition. Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum. Wir nennen $\dim_K T(Y)$ die Dimension von Y und schreiben

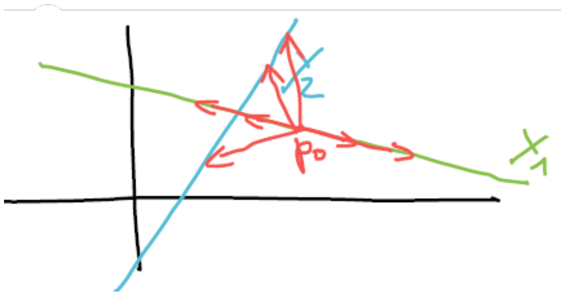
$$\dim Y = \dim_K T(Y).$$

Vorlesung 2

Fr 24.10. 10:15

§1.3 Durchschnitt und Verbindung affiner Räume

Frage. Sei X ein affiner Raum, Y_1, Y_2 affine Unterräume von X. Sind $Y_1 \cap Y_2, Y_1 \cup Y_2$ auch affine Unterräume von X?



$$X = \mathbb{R}^2$$

Lemma 1. Sei X ein affiner Raum, Y_i, $i \in I$, eine Familie von affinen Unterräumen von X.

Dann ist $Y := \bigcap_{i \in I} Y_i$ ein affiner Unterraum von X.

Wenn $Y \neq \varnothing$, dann gilt

$$T(Y) = \bigcap_{i \in I} T(Y_i).$$

Beweis. Falls $Y = \varnothing$: ✓

Wir nehmen also an $Y \neq \varnothing$. Sei $p_0 \in Y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} T(Y) &= \left\{ \underset{\substack{\cap \\ T(X)}}{\overrightarrow{p_0 q}}, q \in \bigcap_{i \in I} Y_i \right\} \\ &= \bigcap_{i \in I} \underbrace{\{ \overrightarrow{p_0 q}, q \in Y_i \}}_{= T(Y_i)} \\ &= \bigcup_{i \in I} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Untervektorräume von } T(X)}}{T(Y_i)}. \end{aligned}$$

Also ist $T(Y)$ ein Untervektorraum von $T(X)$ und $T(Y) = \bigcap_{i \in I} T(Y_i)$. □

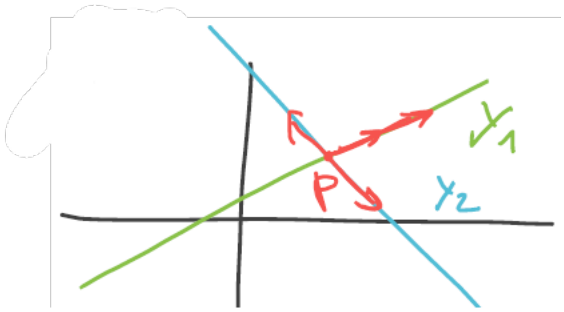
Bemerkung. In obiger Notation ist $\bigcup_{i\in I} Y_i$ im Allgemeinen kein affiner Unterraum von X.

Frage. Finde den „kleinsten" affinen Unterraum von X, der $\bigcup_{i\in I} Y_i$ enthält! (z. B. $X \supseteq \bigcup_{i\in I} Y_i$, aber X ist im Allgemeinen nicht „minimal").

Definition. Sei X ein affiner Raum, Y_i, $i \in I$ affine Unterräume von X. Wir nennen

$$\bigcap_{\substack{Y\subseteq X \text{ aff. Unterraum} \\ \bigcup_{i\in I} Y_i \subseteq Y}} Y$$

den *Verbindungsraum* der affinen Unterräume Y_i, $i \in I$. Schreibe $\bigvee_{i\in I} Y_i$.



$X = \mathbb{R}^2$, $Y_1 \vee Y_2 = X$, $Y = Y_1 \vee Y_2$, $T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2)$.

Beispiel.

Frage. Wie kann man im Allgemeinen $T(Y_1 \vee Y_2)$ aus $T(Y_1), T(Y_2)$ bestimmen?

Lemma 2. Sei X ein affiner Raum, $Y_1, Y_2 \neq \varnothing$ affine Unterräume von X.

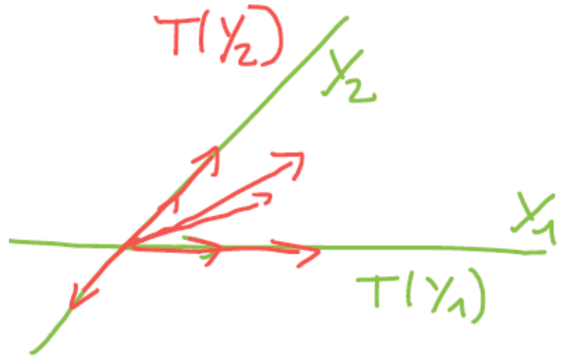
a) Sei $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$. Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

b) Sei $Y_1 \cap Y_2 = \{ 0 \}$, $p_1 \in Y_1, p_2 \in Y_2$ und $Y = p_1 \vee p_2$.

Dann gilt:

$$T(Y_1 \vee Y_2) = (T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(Y).$$



Beweis. a) Sei $p \in Y_1 \cap Y_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(Y_1) \cup T(Y_2) &= \{ \vec{pq} \mid q \in Y_1 \cup Y_2 \} \\ &\subseteq T(Y_1 \vee Y_2), \end{aligned}$$

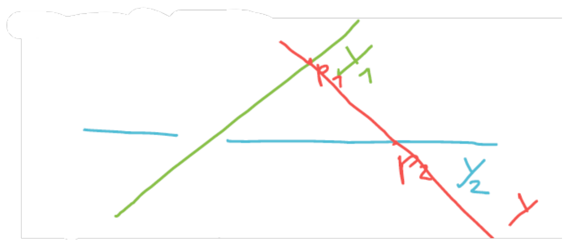
also $T(Y_1) + T(Y_2) \subseteq T(Y_1 \vee Y_2)$.

Sei $Y = \{ \tau_t(p) \mid t \in T(Y_1) + T(Y_2) \}$. Dann ist Y affiner Unterraum von X mit $Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y$, also $Y_1 \vee Y_2 \subset Y$, also $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$. Also gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) \subseteq T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

Also $T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2)$.

b) $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, $p_1 \in Y_1$, $p_2 \in Y_2$, $Y = p_1 \vee p_2$.



Schreibe $Y_1 \vee Y_2 = Y_1 \vee Y \vee Y_2$ (verwende dazu $Y \subseteq Y_1 \vee Y_2$). Verwende a) und leite ab, dass gilt:

$$\begin{aligned} T(Y_1 \vee Y \vee Y_2) &= T(Y_1) + T(Y \vee Y_2) \\ &= T(Y_1) + T(Y) + T(Y_2) \\ &= (T(Y_1) + T(Y_2)) \overset{!}{\oplus} T(Y). \end{aligned}$$

Es gilt

$$T(Y) = \{\, \lambda\overrightarrow{p_1p_2} \mid \lambda \in K \,\}.$$

Wir wollen zeigen

$$(T(Y_1) + T(Y_2)) \cap T(Y) = \{\, 0 \,\}.$$

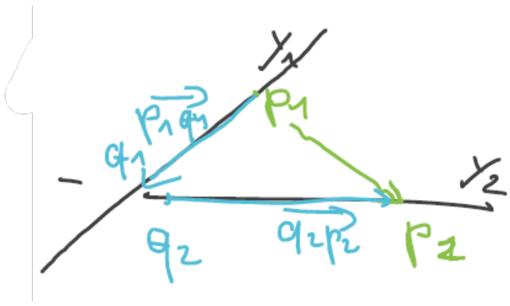
Es genügt zu zeigen

$$\overrightarrow{p_1p_2} \notin T(Y_1) + T(Y_2).$$

Gegenannahme:

$$\overrightarrow{p_1p_2} = \underset{\substack{\cap \\ T(Y_1)}}{\overrightarrow{p_1y_1}} + \underset{\substack{\cap \\ T(Y_2)}}{\overrightarrow{q_2p_2}}$$

mit $q_1 \in Y_1$, $q_2 \in Y_2$.



Dann gilt

$$\overrightarrow{q_1q_2} = \overrightarrow{q_1p_1} + \overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2q_2} = 0,$$

also $q_1 = q_2$ und $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$ ↯. □

Als nächstes: $\dim(Y_1 \vee Y_2)$ ist durch $\dim_K T(Y_1 \vee Y_2)$ gegeben, also sollten wir aus Lemma 2 für $Y_1 \vee Y_2$ ableiten können.

Lemma 3. Sei X ein affiner Raum, $Y_1, Y_2 \neq \varnothing$ affine Unterräume von X.

a) Sei $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$. Dann gilt $\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2)$.

b) Sei $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. Dann gilt

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1.$$

Beweis. a) Aus Lemma 2 folgt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + (Y_2),$$

aus der Dimensionsformel für Untervektorräume folgt

$$\begin{aligned}
\dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2) \\
&= \dim(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Lemma 1}}}{=} \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim T(Y_1 \cap Y_2) \\
&= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 \cap Y_2.
\end{aligned}$$

b) $Y_1 \cap Y_2$, $p_1 \in Y_1$, $p_2 \in Y_2$, $Y = p_1 \vee p_2$.

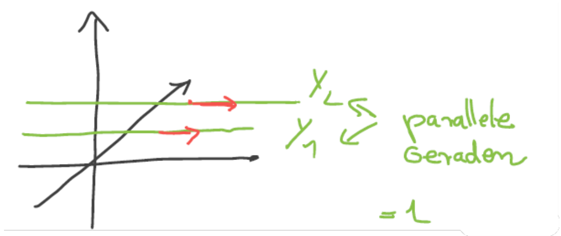
Dann ist

$$\dim Y = \dim T(Y) = 1.$$

Wir erhalten

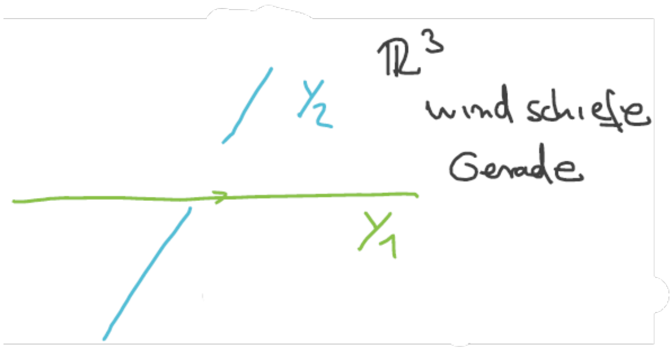
$$\begin{aligned}
\dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Lemma 2}}}{=} \dim((T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(Y)) \\
&= \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) + \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\dim T(Y)} \\
&= \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 \\
&= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1
\end{aligned}$$

$\square$



Beispiel ($X = \mathbb{R}^3$).

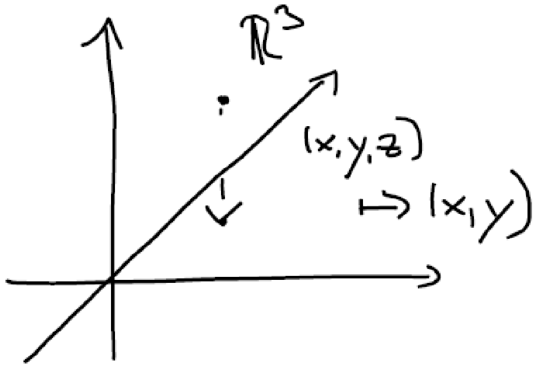
$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - \underbrace{\dim(T(Y_1) \cap T(Y_2))}_{=1} + 1 = 2$$



$$\dim(Y_1 \vee Y_2)1 + 1 - 0 + 1 = 3$$

und $Y_1 \vee Y_2 = X$.

§1.4 Parallelprojektionen



Wiederholung (Projektionen aus der AGLA I). Beispiel.

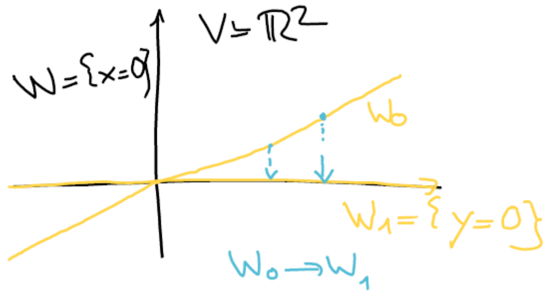
Sei V ein K-Vektorraum, $W, W_1 \subset V$ K-Untervektorräume mit $V = W \oplus W_1$. Schreibe $v \in V$ in der Form $v = w + w_1$ und mit $w \in W$, $w_1 \in W_1$. Definiere

$$\begin{aligned} P_W \colon V &\to W_1 \\ \underset{w+w_1}{\overset{\shortparallel}{v}} &\mapsto w_1. \end{aligned}$$

Ein paar Eigenschaften von P_W:

- $P_W : V \to W_1$ ist eine lineare Abbildung,
- $\operatorname{Ker} P_W = W$,
- $P_W|_{W_1} = \mathrm{Id}_{W_1}$.

Als Nächstes: Wir schränken P_W ein auf einen Untervektorraum W_0 von V.



Lemma 4. Sei V ein K-Vektorraum, $W, W_0, W_1 \subseteq V$ Untervektorräume mit $V = W \oplus W_0 = W \oplus W_1$.

Dann ist $P_W|_{W_0} : W_0 \to W_1$ ein Isomorphismus (Notation wie oben).

Beweis. Es gilt $\dim W_0 = \dim W_1$ und es genügt zu zeigen, dass $P_W|_{W_0}$ injektiv ist.

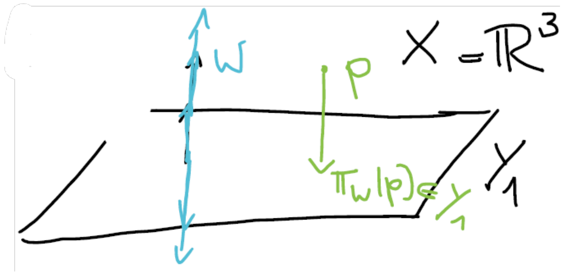
Sei $P_W|_{w_0} = w_1$ für $w_0 \in W_0$, $w_1 \in W_1$. Dann ist $w_0 = w + w_1$ mit $w \in W$, $w_1 \in W_1$, also

$$w_1 = \underset{\substack{\cap \\ W_0}}{w_0} - \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} \in W_0 \oplus W, \qquad \square$$

und diese Zerlegung ist eindeutig.

Parallelprojektionen für affine Räume

Sei X ein affiner Raum (über einem Körper K), $Y_1 \subseteq X$ ein affiner Unterraum



Beispiel.

Sei $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit $T(X) = T(Y_1) \oplus W$.

Ziel. Definiere eine Projektionsabbildung

$$\Pi_W \colon X \to Y_1$$

„längs W“.

Für $p \in X$ definiere

$$W(p) \coloneqq \{\, x \in X \mid \overrightarrow{px} \in W \,\}$$

Lemma 5. Notation wie oben. Für $p \in X$ gilt

$$\#(Y_1 \cap W(p)) = 1.$$

Beweis. Wir berechnen

$$\dim(Y_1 \cap W(p)).$$

Sei $x = \dim X$, verwende Lemma 3 b). Falls $Y_1 \cap W(p) = \varnothing$, dann

$$\begin{aligned}\dim(Y_1 \vee W(p)) &= \dim Y_1 + \dim W(p) - \dim(\underbrace{T(Y_1) \cap W}_{=\{\,0\,\}}) + 1\\ &= \dim T(Y_1) + \dim W + 1\end{aligned}$$

$\lightning$ zu $Y_1 \vee W(p) \subseteq X$, also ist $Y_1 \cap W(p) \neq \{\,0\,\}$, und nach Lemma 3 a) gilt Folgendes:

$$\begin{aligned}\underbrace{\dim(Y_1 \vee W(p))}_{\substack{\shortparallel\\ n}} &= \dim Y_1 + \dim W(p) - \dim(Y_1 \cap W(p))\\ &= n - \dim(Y_1 \cap W(p))\end{aligned}$$

und nach Lemma 1

$$\begin{aligned}\dim Y_1 \vee W(p) &= \dim(T(Y_1) + W)\\ &= n,\end{aligned}$$ □

also $\dim(Y_1 \cap W(p)) = 0$.

Wir definieren die Projektion längs W

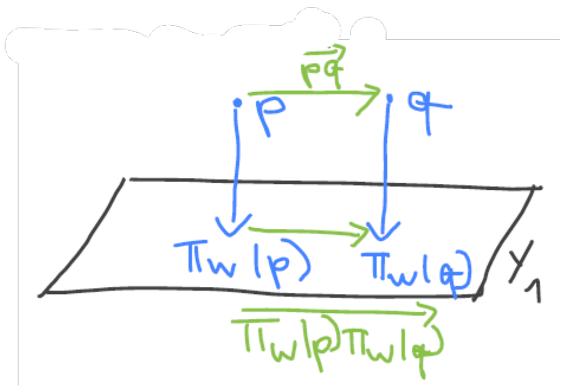
$$\Pi_W \colon \underset{\underset{Y_0}{\subseteq}}{X} \to Y_1, \;\; p \mapsto W(p) \cap Y_1.$$

Satz 6. Sei X ein affiner Raum, $Y_1, Y_0 \subseteq X$ affine Unterräume, $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit

$$T(X) = W \oplus T(Y_0) = W \oplus T(Y_1).$$

Dann ist $\Pi_W \colon X \to Y_1$ eine surjektive affine Abbildung und $\Pi_w|_{Y_0} : Y_0 \to Y_1$ eine Affinität.

Beweis. Seien $p, q \in X$.



Dann gilt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{pq} &= \overrightarrow{p\Pi_W(p)} + \overrightarrow{\Pi_W(p)\Pi_W(q)} + \overrightarrow{\Pi_W(q)q} + \overrightarrow{\Pi_W(q)q}\\ &= \underbrace{\overrightarrow{p\Pi_W(p)} + \overrightarrow{\Pi_W(q)q}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{\Pi_W(p)\Pi_W(q)}}_{\in T(Y_1)},\end{aligned}$$

also $\overrightarrow{\Pi_W(p)\Pi_W(q)} = P_W(\overrightarrow{pq})$.

P_W ist surjektiv, also ist Π_W eine surjektive affine Abbildung.

Der zweite Teil folgt aus Lemma 4. □