

Vorlesungsmitschrift

# **AGLA II**

**Prof. Dr. Damaris Schindler**

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 21. Mai 2020

---

## **Disclaimer**

Nicht von Professor Schindler durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit ihrerseits.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Affine Geometrie</b>	<b>4</b>
1.1	Was ist ein affiner Raum? . . . . .	4
1.2	Affine Abbildungen . . . . .	9
1.3	Durchschnitt und Verbindung affiner Räume . . . . .	13
1.4	Parallelprojektionen . . . . .	18
1.5	Affine Koordinaten . . . . .	22
1.6	Das Teilverhältnis . . . . .	27
1.7	Affinkombinationen . . . . .	31
1.8	Affine Abbildungen und Matrizen, Fixpunkte . . . . .	32
1.9	Kollineationen . . . . .	35
1.10	Quadriken . . . . .	40
1.11	Euklidische affine Räume . . . . .	57

# Kapitel 1

## Affine Geometrie

### Vorlesung 1

Di 21.04. 10:15

#### §1.1 Was ist ein affiner Raum?

**Beispiel 1.1.1 (aus der AGLA I).**  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ . In diesen Räumen gibt es einen ausgezeichneten „Ursprung“.

**Frage.** Wie könne wir eine affine Ebene / affine Räume modellieren, wobei alle Punkte gleichberechtigt sind?

**Idee.** Verwende affine Unterräume.

**Beispiel 1.1.2.** Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $W \subseteq V$  ein Untervektorraum und  $v \in V$ . Wir nennen  $X = v + W$  einen affinen Unterraum von  $V$ .  $X$  ist im Allgemeinen selbst kein Vektorraum unter der Addition in  $V$ , aber  $W$  „operiert“ auf  $X$ .



Für  $w \in W$  definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned}\tau_w: X &\rightarrow X \\ p &\mapsto p + w.\end{aligned}$$



Sei

$$\text{Bij}(X) = \{ f: X \rightarrow X, f \text{ ist bijektiv} \}.$$

Dann ist  $\tau_w \in \text{Bij}(X)$  für alle  $w \in W$ .

**Bemerkung.**  $\text{Bij}(X)$  ist eine Gruppe unter Verkettung von Abbildung. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned}\tau: W &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ w &\mapsto \tau_w.\end{aligned}$$

**Lemma 1.1.1.** Die Abbildung  $\tau$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

*Beweis.* Seien  $w, w' \in W$  Dann

$$\begin{aligned}\tau_w \circ \tau_{w'}: X &\rightarrow X \\ p &\mapsto p + \underbrace{w' + w},\end{aligned}$$

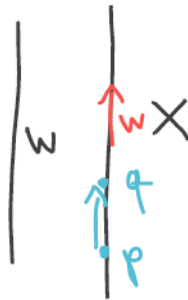
also

$$\tau(w) \circ \tau(w') = \tau_w \circ \tau_{w'} = \tau_{w+w'} = \tau(w + w').$$

□

Es gilt noch mehr:

für  $p, q \in X$  besteht genau ein  $w \in W$  mit  $\tau_w(p) = q$ .



## Gruppenoperationen

**Beispiel 1.1.3.** Betrachte ein gleichseitiges Dreieck  $D$  und Spiegelungen / Drehungen die  $D$  auf sich selbst abbilden.



Diese formen eine Gruppe (welche?) und „operieren“ auf  $D$ .

**Definition 1.1.1.** Sei  $X$  eine Menge und  $G$  eine Gruppe. Eine Operation von  $G$  auf  $X$  ist ein Homomorphismus von Gruppen

$$\begin{aligned}\tau: G &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ g &\mapsto \tau_g.\end{aligned}$$

**Bemerkung.**  $\tau$  ist ein Homomorphismus d. h.  $\forall g, g' \in G$

$$\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{gg'}.$$

Für  $x \in X$  nennen wir

$$G(x) = \{ \tau_g(x) \mid g \in G \}$$

die Bahn von  $x$  unter  $G$ .

**Beispiel 1.1.4.** i) Sei  $G$  eine Gruppe und  $X = G$  die Linkstranslation  $l: G \rightarrow \text{Bij}(G)$

$g \mapsto l_g$

mit  $l_g(x) = gx \quad \forall x \in G$  ist eine Gruppenoperation von  $G$  auf sich selbst.

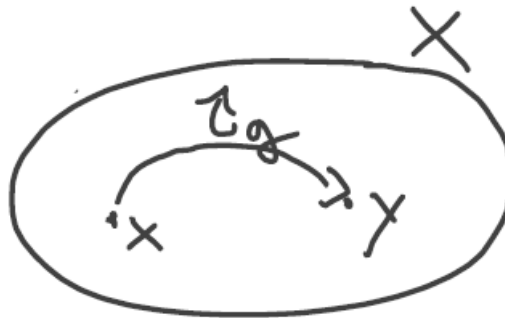
ii)

$$k: G \rightarrow \text{Bij}(G)$$

$$g \mapsto k_g$$

mit  $k_g(x) = gxg^{-1} \quad \forall x \in G$  ist eine Gruppenoperation.

**Frage.** Sei  $\tau: G \rightarrow \text{Bij}(X)$  eine Gruppenoperation,  $x, y \in X$ . Wann gibt es ein  $g \in G$  mit  $\tau_g(x) = y$ ?



**Definition.** Sei  $\tau: G \rightarrow \text{Bij}(X)$  eine Gruppenoperation von  $G$  auf  $X$ . Wir nennen  $\tau$  *einfach transitiv*, wenn  $\forall x, y \in X$  genau ein  $g \in G$  besteht mit

$$\tau_g(x) = y.$$

**Beispiel.** • Die Gruppenoperation aus Beispiel 1.1.3 ist *nicht* einfach transitiv



• Die Linkstranslation aus Beispiel 1.1.4 i) ist immer einfach transitiv.

Zurück zum Beispiel 1.1.2 ( $V$   $K$ -Vektorraum,  $W \subseteq V$  Untervektorraum,  $v \in V$ ,  $X = v + W$ )

Wir haben Translationen definiert

$$\begin{aligned}\tau: W &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ x &\mapsto \tau_w\end{aligned}$$

mit  $\tau_w: X \rightarrow X$ ,  $p \mapsto p + w$ .  $\tau$  ist eine einfach transitive Gruppenoperation von  $W$  auf  $X$ .



**Definition.** Sei  $K$  ein Körper. Ein affiner Raum über  $K$  ist ein Tripel  $(X, T(X), \tau)$  mit

- $X \neq \emptyset$  eine Menge
- $T(X)$  ein  $K$ -Vektorraum
- $\tau: T(X) \rightarrow \text{Bij}(X)$  eine einfach transitive Gruppenoperation

**Konvention.**  $X = \emptyset$  ohne Spezifikation von  $T(X)$ ,  $\tau$  nennen wir auch einen affinen Raum.



**Definition.** Sei  $(X, T(X), \tau)$  ein affiner Raum über einem Körper  $K$ . Dann nennen wir  $\dim_K T(X)$  die Dimension von  $X$ , schreiben auch  $\dim X$ .

Ist  $\dim X = 1$  bzw.  $\dim X = 2$ , dann nennen wir  $X$  eine affine Gerade bzw. affine Ebene.



Sei  $(X, T(X), \tau)$  in affiner Raum,  $p, q \in X$ . Dann  $\exists! t \in T(X)$  mit  $\tau_t(p) = q$ .

Schreibe  $\vec{pq} = t \in T(X)$  als  $\tau_{\vec{pq}}(p) = q$ .

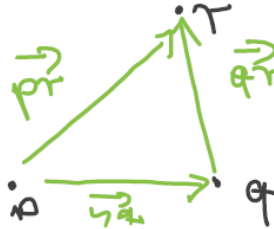


Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow T(X) \\ (p, q) &\mapsto \vec{pq}. \end{aligned}$$

**Frage.** Welche Eigenschaften hat die Abbildung  $(p, q) \mapsto \vec{pq}$  in einem allgemeinen affinen Raum?

**Lemma 1.1.2.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $p, q, r \in X$ . Dann gilt  $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$ .



*Beweis.*  $\tau: T(X) \rightarrow \text{Bij}(X)$  ist ein Homomorphismus. Also gilt  $\tau_{\vec{qr}} \circ \tau_{\vec{pq}} = \tau_{\vec{pq} + \vec{qr}}$ . Es gilt damit  $\tau_{\vec{pq} + \vec{qr}}(p) = r$ . Also  $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$ .  $\square$

## §1.2 Affine Abbildungen

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume. In der AGLA I: lineare Abbildungen

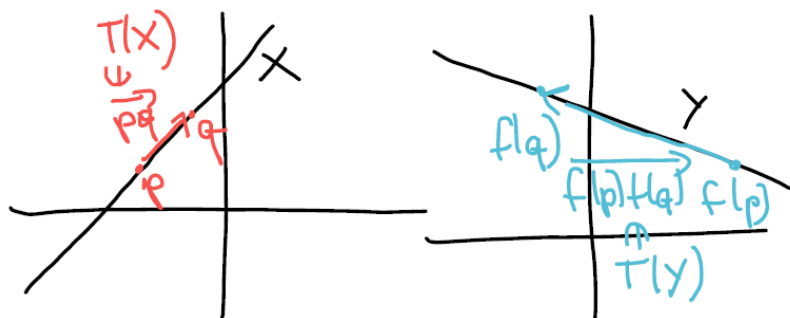
$$F: V \rightarrow W,$$

d. h.  $F$  respektiert die Vektorraum-Struktur

$$\begin{aligned} F(v_1 + v_2) &= F(v_1) + F(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \\ F(\lambda v) &= \lambda F(v) \quad \forall \lambda \in K \forall v \in V. \end{aligned}$$

**Frage.** Was sind natürliche Abbildungen zwischen affinen Räumen?

Seien  $X, Y$  affine Räume über einem Körper  $K$ .



$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{pq} & \rightsquigarrow & \overrightarrow{f(p)f(q)} \\ \cap & & \cap \\ T(X) & & T(Y) \end{array}$$

**Definition.** Wir nennen eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  affin, wenn es eine  $K$ -lineare Abbildung  $F: T(X) \rightarrow T(Y)$  gibt, sodass  $\forall p, q \in X$  gilt

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = F(\overrightarrow{pq}).$$

**Bemerkung.** i) Es gibt im Allgemeinen verschiedene affine Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$ , die zur gleichen linearen Abbildung  $F: T(X) \rightarrow T(Y)$  gehören.

ii) Sei  $p_0 \in X$  fest und  $f: X \rightarrow Y$  affin.

Für  $q \in X$  gilt

$$\begin{aligned} f(q) &= \tau_{\overrightarrow{f(p_0)f(q)}}(f(p_0)) \\ &= \tau_{F(\overrightarrow{p_0q})}(f(p_0)). \end{aligned}$$

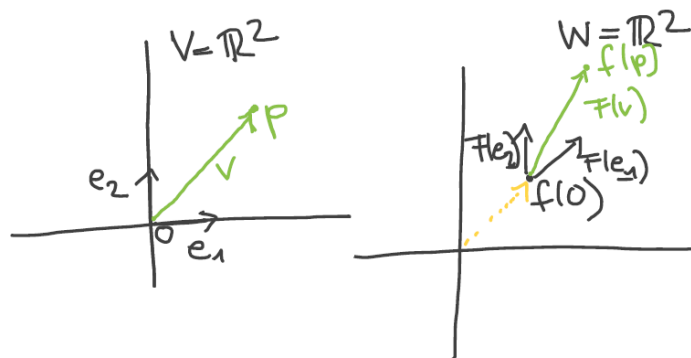
Also bestimmen  $f(p_0)$  und  $F$  zusammen die Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ .

**Beispiel.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume

$$X = (V, V, \tau), \quad Y = (W, W, \tau).$$

Eine affine Abbildung  $f: V \rightarrow W$  ist eindeutig bestimmt durch  $f(0)$  und eine lineare Abbildung  $F: V \rightarrow W$ . Es gilt

$$f(v) = f(0) + F(v) \quad \forall v \in V.$$

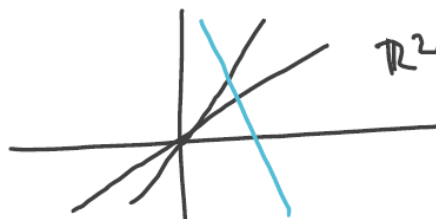


**Bemerkung / Übung.** Eine affine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, wenn die zugehörige Abbildung  $F: T(X) \rightarrow T(Y)$  es ist.

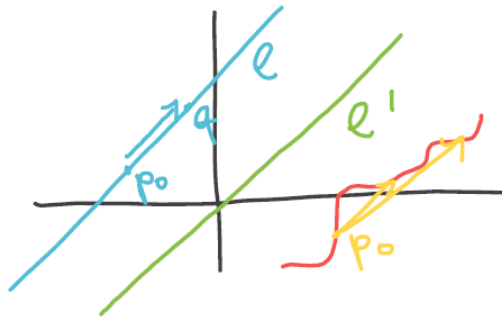
**Definition.** Wir nennen eine bijektive affine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine Affinität.

### Affine Unterräume

**Beispiel ( $\mathbb{R}^2$  als Vektorraum.).** Untervektorräume von  $\mathbb{R}^2$  sind  $\emptyset, \{0\}, \mathbb{R}^2$  und Geraden durch 0.



Betrachte nun  $\mathbb{R}^2$  als affinen Raum.



**Idee.** Wir wollen  $l$  und  $l'$  als affine Unterräume von  $\mathbb{R}^2$  definieren, da die Verschiebung von  $l, l'$  jeweils Untervektorräume von  $\mathbb{R}^2$  sind.

**Definition.** Sei  $(X, T(X), \tau)$  in affiner Raum und  $Y \subseteq X$ . Wenn es einen Punkt  $p_0 \in Y$  gibt, sodass

$$T(Y) := \{ \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \}$$

ein Untervektorraum von  $T(X)$  ist, dann nennen wir  $Y$  einen affinen Unterraum von  $X$ .

**Lemma 1.2.1.** Sei  $Y \subseteq X$  ein affiner Unterraum eines affinen Raumes  $(X, T(X), \tau)$ . Dann gilt

$$T(Y) = \{ \overrightarrow{p q} \in T(X), q \in Y \}$$

für jeden beliebigen Punkt  $p \in Y$ .

*Beweis.* Sei  $p_0 \in Y$  ein fester Punkt mit

$$T(Y) = \{ \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \}$$

Untervektorraum von  $T(X)$ . Dann gilt für  $p \in Y$

$$\{ \overrightarrow{p q} \mid q \in Y \} = \overrightarrow{p p_0} + \{ \overrightarrow{p_0 q} \mid q \in Y \} = \overrightarrow{p p_0} + \underbrace{T(Y)}_{T(Y)} = T(Y), \quad \square$$

da  $\overrightarrow{p p_0} = -\overrightarrow{p_0 p} \in T(Y)$ .

**Definition.** Sei  $Y \subseteq X$  ein affiner Unterraum. Wir nennen  $\dim_K T(Y)$  die Dimension von  $Y$  und schreiben

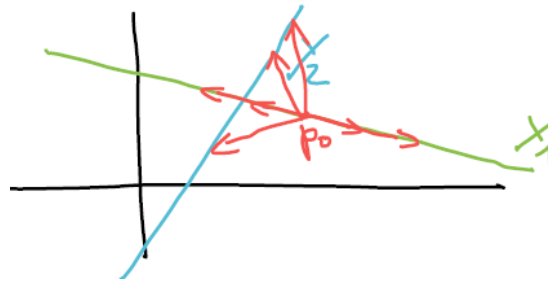
$$\dim Y = \dim_K T(Y).$$

## Vorlesung 2

Fr 24.10. 10:15

## §1.3 Durchschnitt und Verbindung affiner Räume

**Frage.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_1, Y_2$  affine Unterräume von  $X$ . Sind  $Y_1 \cap Y_2, Y_1 \cup Y_2$  auch affine Unterräume von  $X$ ?



$$X = \mathbb{R}^2$$

**Lemma 1.3.1.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_i, i \in I$ , eine Familie von affinen Unterräumen von  $X$ .

Dann ist  $Y := \bigcap_{i \in I} Y_i$  ein affiner Unterraum von  $X$ .

Wenn  $Y \neq \emptyset$ , dann gilt

$$T(Y) = \bigcap_{i \in I} T(Y_i).$$

*Beweis.* Falls  $Y = \emptyset$ : ✓

Wir nehmen also an  $Y \neq \emptyset$ . Sei  $p_0 \in Y$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} T(Y) &= \left\{ \overrightarrow{p_0 q}, q \in \bigcap_{i \in I} Y_i \right\} \\ &= \bigcap_{i \in I} \underbrace{\left\{ \overrightarrow{p_0 q}, q \in Y_i \right\}}_{=T(Y_i)} \\ &= \bigcap_{i \in I} T(Y_i). \end{aligned}$$

↑  
Untervektorräume von  $T(X)$

Also ist  $T(Y)$  ein Untervektorraum von  $T(X)$  und  $T(Y) = \bigcap_{i \in I} T(Y_i)$ . □

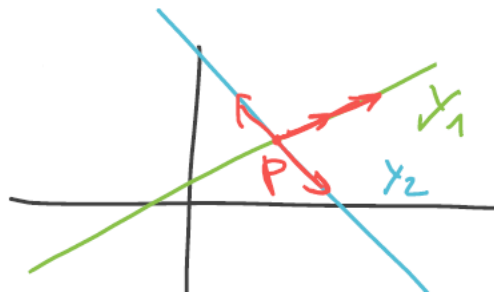
**Bemerkung.** In obiger Notation ist  $\bigcup_{i \in I} Y_i$  im Allgemeinen kein affiner Unterraum von  $X$ .

**Frage.** Finde den „kleinsten“ affinen Unterraum von  $X$ , der  $\bigcup_{i \in I} Y_i$  enthält! (z. B.  $X \supseteq \bigcup_{i \in I} Y_i$ , aber  $X$  ist im Allgemeinen nicht „minimal“).

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_i, i \in I$  affine Unterräume von  $X$ . Wir nennen

$$\bigcap_{\substack{Y \subseteq X \text{ aff. Unterraum} \\ \bigcup_{i \in I} Y_i \subseteq Y}} Y$$

den *Verbindungsraum* der affinen Unterräume  $Y_i, i \in I$ . Schreibe  $\bigvee_{i \in I} Y_i$ .



$$X = \mathbb{R}^2, Y_1 \vee Y_2 = X, Y = Y_1 \vee Y_2, T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

**Beispiel.**

**Frage.** Wie kann man im Allgemeinen  $T(Y_1 \vee Y_2)$  aus  $T(Y_1), T(Y_2)$  bestimmen?

**Lemma 1.3.2.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$  affine Unterräume von  $X$ .

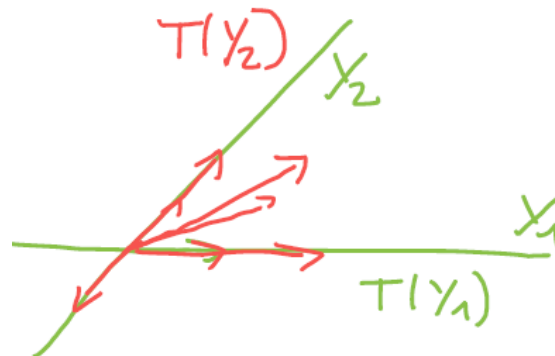
a) Sei  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

b) Sei  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, p_1 \in Y_1, p_2 \in Y_2$  und  $Y = p_1 \vee p_2$ .

Dann gilt:

$$T(Y_1 \vee Y_2) = (T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(Y).$$



*Beweis.* a) Sei  $p \in Y_1 \cap Y_2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} T(Y_1) \cup T(Y_2) &= \{ \vec{pq} \mid q \in Y_1 \cup Y_2 \} \\ &\subseteq T(Y_1 \vee Y_2), \end{aligned}$$

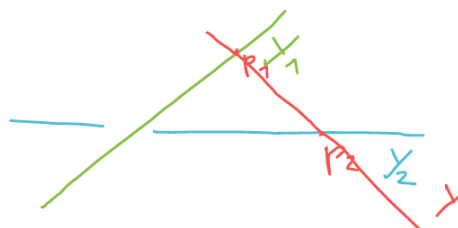
also  $T(Y_1) + T(Y_2) \subseteq T(Y_1 \vee Y_2)$ .

Sei  $Y = \{ \tau_t(p) \mid t \in T(Y_1) + T(Y_2) \}$ . Dann ist  $Y$  affiner Unterraum von  $X$  mit  $Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y$ , also  $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$ , also  $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$ . Also gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) \subseteq T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

Also  $T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2)$ .

b)  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ ,  $p_1 \in Y_1$ ,  $p_2 \in Y_2$ ,  $Y = p_1 \vee p_2$ .



Schreibe  $Y_1 \vee Y_2 = Y_1 \vee Y \vee Y_2$  (verwende dazu  $Y \subseteq Y_1 \vee Y_2$ ). Verwende a) und leite ab, dass gilt:

$$\begin{aligned} T(Y_1 \vee Y \vee Y_2) &= T(Y_1) + T(Y \vee Y_2) \\ &= T(Y_1) + T(Y) + T(Y_2) \\ &= (T(Y_1) + T(Y_2)) \overset{!}{\oplus} T(Y). \end{aligned}$$

Es gilt

$$T(Y) = \{ \lambda \overrightarrow{p_1 p_2} \mid \lambda \in K \}.$$

Wir wollen zeigen

$$(T(Y_1) + T(Y_2)) \cap T(Y) = \{ 0 \}.$$

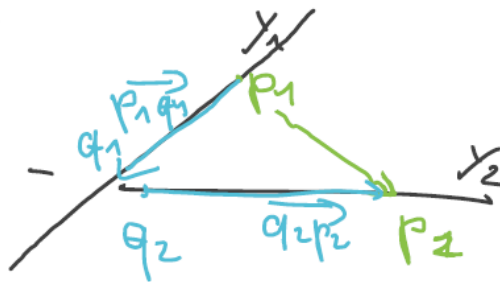
Es genügt zu zeigen

$$\overrightarrow{p_1 p_2} \notin T(Y_1) + T(Y_2).$$

Gegenannahme:

$$\overrightarrow{p_1 p_2} = \underbrace{\overrightarrow{p_1 q_1}}_{T(Y_1)} + \underbrace{\overrightarrow{q_1 p_2}}_{T(Y_2)}$$

mit  $q_1 \in Y_1, q_2 \in Y_2$ .



Dann gilt

$$\overrightarrow{q_1 q_2} = \overrightarrow{q_1 p_1} + \overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 q_2} = 0,$$

also  $q_1 = q_2$  und  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ . □

Als nächstes:  $\dim(Y_1 \vee Y_2)$  ist durch  $\dim_K T(Y_1 \vee Y_2)$  gegeben, also sollten wir aus Lemma 1.3.2 für  $Y_1 \vee Y_2$  ableiten können.

**Lemma 1.3.3.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$  affine Unterräume von  $X$ .

- a) Sei  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ . Dann gilt  $\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2)$ .
- b) Sei  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ . Dann gilt

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1.$$



*Beweis.* a) Aus Lemma 1.3.2 folgt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2),$$

aus der Dimensionsformel für Untervektorräume folgt

$$\begin{aligned} \dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2) \\ &= \dim(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) \\ &= \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim T(Y_1 \cap Y_2) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Lemma 1.3.1} \\ &= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 \cap Y_2. \end{aligned}$$

b)  $Y_1 \cap Y_2$ ,  $p_1 \in Y_1$ ,  $p_2 \in Y_2$ ,  $Y = p_1 \vee p_2$ .

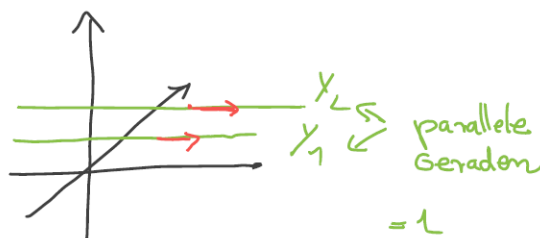
Dann ist

$$\dim Y = \dim T(Y) = 1.$$

Wir erhalten

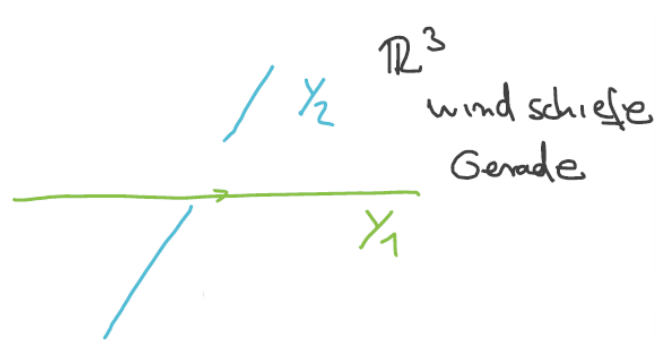
$$\begin{aligned} \dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2) \\ &= \dim((T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(Y)) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Lemma 1.3.2} \\ &= \dim(T(Y_1) + T(Y_2)) + \dim T(Y) \\ &\quad \quad \quad \parallel \\ &\quad \quad \quad 1 \\ &= \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 \\ &= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 \end{aligned}$$

□



**Beispiel** ( $X = \mathbb{R}^3$ ).

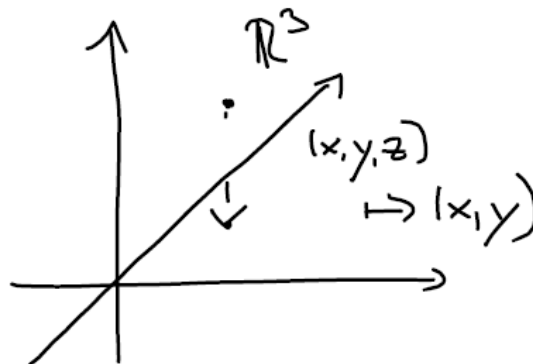
$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - \underbrace{\dim(T(Y_1) \cap T(Y_2))}_{=1} + 1 = 2$$



$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - 0 + 1 = 3$$

und  $Y_1 \vee Y_2 = X$ .

### §1.4 Parallelprojektionen



#### Wiederholung (Projektionen aus der AGLA I). Beispiel.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $W, W_1 \subset V$   $K$ -Untervektorräume mit  $V = W \oplus W_1$ . Schreibe  $v \in V$  in der Form  $v = w + w_1$  und mit  $w \in W$ ,  $w_1 \in W_1$ . Definiere

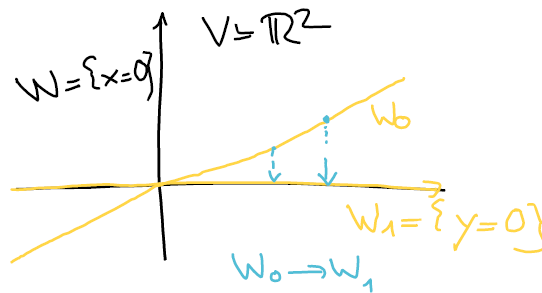
$$P_W: V \rightarrow W_1$$

$$\begin{array}{c} v \mapsto w_1. \\ \parallel \\ w + w_1 \end{array}$$

Ein paar Eigenschaften von  $P_W$ :

- $P_W: V \rightarrow W_1$  ist eine lineare Abbildung,
- $\text{Ker } P_W = W$ ,
- $P_W|_{W_1} = \text{Id}_{W_1}$ .

Als Nächstes: Wir schränken  $P_W$  ein auf einen Untervektorraum  $W_0$  von  $V$ .



**Lemma 1.4.1.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $W, W_0, W_1 \subseteq V$  Untervektorräume mit  $V = W \oplus W_0 = W \oplus W_1$ .

Dann ist  $P_W|_{W_0}: W_0 \rightarrow W_1$  ein Isomorphismus (Notation wie oben).

*Beweis.* Es gilt  $\dim W_0 = \dim W_1$  und es genügt zu zeigen, dass  $P_W|_{W_0}$  injektiv ist.

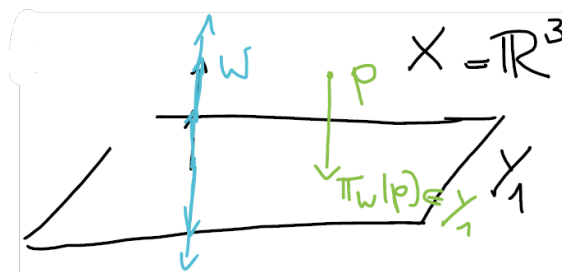
Sei  $P_W|_{w_0} = w_1$  für  $w_0 \in W_0, w_1 \in W_1$ . Dann ist  $w_0 = w + w_1$  mit  $w \in W, w_1 \in W_1$ , also

$$w_1 = \underbrace{w_0}_{\in W_0} - \underbrace{w}_{\in W}, \quad \square$$

und diese Zerlegung ist eindeutig.

### Parallelprojektionen für affine Räume

Sei  $X$  ein affiner Raum (über einem Körper  $K$ ),  $Y_1 \subseteq X$  ein affiner Unterraum



**Beispiel.**

Sei  $W \subseteq T(X)$  ein Untervektorraum mit  $T(X) = T(Y_1) \oplus W$ .

**Ziel.** Definiere eine Projektionsabbildung

$$\pi_W: X \rightarrow Y_1$$

„längs  $W$ “.

Für  $p \in X$  definiere

$$W(p) := \{ x \in X \mid \overrightarrow{px} \in W \}$$

**Lemma 1.4.2.** Notation wie oben. Für  $p \in X$  gilt

$$\#(Y_1 \cap W(p)) = 1.$$

*Beweis.* Wir berechnen

$$\dim(Y_1 \cap W(p)).$$

Sei  $x = \dim X$ , verwende Lemma 1.3.3 b). Falls  $Y_1 \cap W(p) = \emptyset$ , dann

$$\begin{aligned} \dim(Y_1 \vee W(p)) &= \dim Y_1 + \dim W(p) - \underbrace{\dim(T(Y_1) \cap W)}_{=\{0\}} + 1 \\ &= \dim T(Y_1) + \dim W + 1 \end{aligned}$$

⚡ zu  $Y_1 \vee W(p) \subseteq X$ , also ist  $Y_1 \cap W(p) \neq \{0\}$ , und nach Lemma 1.3.3 a) gilt Folgendes:

$$\underbrace{\dim(Y_1 \vee W(p))}_{\substack{\parallel \\ n}} = \dim Y_1 + \dim W(p) - \dim(Y_1 \cap W(p))$$

und nach Lemma 1.3.1

$$\begin{aligned} \dim Y_1 \vee W(p) &= \dim(T(Y_1) + W) \\ &= n, \end{aligned} \quad \square$$

also  $\dim(Y_1 \cap W(p)) = 0$ .

Wir definieren die Projektion längs  $W$

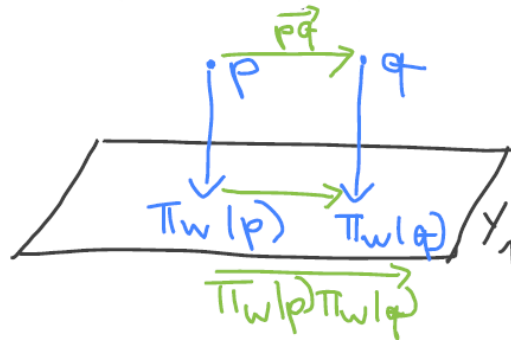
$$\pi_W: \underset{\substack{\subseteq \\ Y_0}}{X} \rightarrow Y_1, \quad p \mapsto W(p) \cap Y_1.$$

**Satz 1.4.3.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_1, Y_0 \subseteq X$  affine Unterräume,  $W \subseteq T(X)$  ein Untervektorraum mit

$$T(X) = W \oplus T(Y_0) = W \oplus T(Y_1).$$

Dann ist  $\pi_W: X \rightarrow Y_1$  eine surjektive affine Abbildung und  $\pi_W|_{Y_0}: Y_0 \rightarrow Y_1$  eine Affinität.

*Beweis.* Seien  $p, q \in X$ .



Dann gilt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pq} &= \overrightarrow{p\pi_W(p)} + \overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)} + \overrightarrow{\pi_W(q)q} + \overrightarrow{\pi_W(q)q} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{p\pi_W(p)} + \overrightarrow{\pi_W(q)q}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)}}_{\in T(Y_1)}, \end{aligned}$$

also  $\overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)} = P_W(\overrightarrow{pq})$ .

$P_W$  ist surjektiv, also ist  $\pi_W$  eine surjektive affine Abbildung.

Der zweite Teil folgt aus Lemma 1.4.1. □

**Vorlesung 3**

Di 28.04. 10:15

**§1.5 Affine Koordinaten**

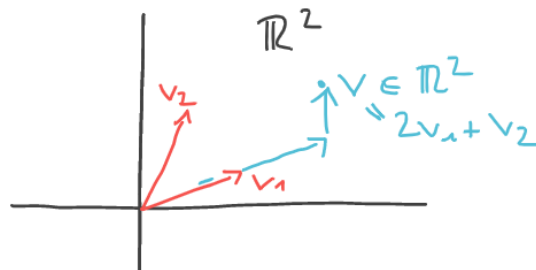
Koordinaten in einem  $K$ -Vektorraum  $V$ . Sei  $\dim V = n$  und  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi: K^n &\rightarrow V \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen. Jeder Punkt  $\underset{V}{v} = \sum_{i=1}^n x_i v_i$  ist eindeutig bestimmt durch seine „Koordinaten“

$$\inf \phi(v) = (x_1, \dots, x_n) \in K^n.$$

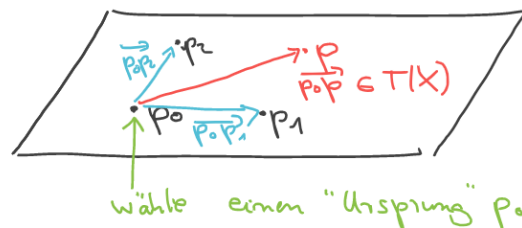
**Frage.** Sei  $X$  ein affiner Raum über einem Körper  $K$ . Können wir auch hier die Lage eines Punkte  $p \in X$  durch Angabe von „Koordinaten“ bezüglich einer „Basis“ beschreiben?



**Beispiel / Idee.**  $X = \mathbb{R}^2$  als affiner Raum und Punkte  $p_1, p_2 \in X$ , sodass  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2}$  eine Basis ist für  $T(X)$ . Dann können wir einen Punkt  $p \in X$  beschreiben durch

$$\begin{aligned} p &= \tau_{\overrightarrow{p_0 p}}(p_0) \\ &= \tau_{\lambda \overrightarrow{p_0 p_1} + \mu \overrightarrow{p_0 p_2}}(p_0), \end{aligned}$$

falls  $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1} + \mu \overrightarrow{p_0 p_2}$  mit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .



Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned}\phi: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow X \\ (\lambda, \mu) &\mapsto \tau_{\lambda \overrightarrow{p_0 p_1} + \mu \overrightarrow{p_0 p_2}}(p_0),\end{aligned}$$

die eine Affinität ist.

Wir formalisieren diese Konzepte für allgemeine affine Räume.

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum und  $p_0, \dots, p_n \in X$ . Wir nennen  $(p_0, \dots, p_n)$  *affin unabhängig* bzw. eine *affine Basis*, wenn die Vektoren  $(\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n})$  in  $T(x)$  *linear unabhängig* sind bzw. eine *Basis* bilden.

**Beispiele.** i) In  $X = \mathbb{R}^n$  ist  $(0, e_1, \dots, e_n)$  eine affine Basis.

ii)  $X = \mathbb{R}^n$  als affiner Raum,  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängig,  $v_0 = 0$ . Dann ist das Tupel  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  affin unabhängig.

**Frage.** Kann man hier  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  beliebig nehmen?

iii)  $X = \mathbb{R}^2$  als affiner Raum. Dann gilt, dass für  $v, w \in \mathbb{R}^2$  das Tupel  $(v, w)$  affin unabhängig ist gdw  $v \neq w$ .

iv)  $X$  affiner Raum,  $p_0 \in X$ ,  $(t_1, \dots, t_n)$  Basis von  $T(X)$ . Dann ist

$$(p_0, \tau_{t_1}(p_0), \dots, \tau_{t_n}(p_0))$$

eine affine Basis von  $X$ .

**Lemma 1.5.1.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $p_0, \dots, p_n \in X$  und  $(p_0, \dots, p_n)$  affin unabhängig. Sei  $\sigma \in S_{n+1}$  eine Permutation von  $\{0, \dots, n\}$ . Dann ist

$$(p_{\sigma(0)}, p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n)})$$

affin unabhängig.

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass unter den Annahmen des Lemmas, die Vektoren

$$\overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(1)}}, \dots, \overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(n)}} \in T(X)$$

linear unabhängig sind.

Sei  $\sigma(0) = i \in \{0, \dots, n\}$ .

Dann müssen wir also zeigen, dass die Vektoren

$$\overrightarrow{p_i p_0}, \overrightarrow{p_i p_1}, \dots, \overrightarrow{p_i p_{i-1}}, \overrightarrow{p_i p_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{p_i p_n}$$

linear unabhängig sind.

Seien  $\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in K$  mit

$$\lambda_0 \overrightarrow{p_i p_0} + \lambda_1 \overrightarrow{p_i p_1} + \dots + \lambda_{i-1} \overrightarrow{p_i p_{i-1}} + \lambda_{i+1} \overrightarrow{p_i p_{i+1}} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{p_i p_n} = 0.$$

Schreibe

$$\overrightarrow{p_i p_j} = \overrightarrow{p_i p_0} + \overrightarrow{p_0 p_j} = \overrightarrow{p_0 p_j} - \overrightarrow{p_0 p_i}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \lambda_{i-1} \overrightarrow{p_0 p_{i-1}} + \lambda_{i+1} \overrightarrow{p_0 p_{i+1}} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{p_0 p_n} \\ & - (\lambda_0 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n) \overrightarrow{p_0 p_i} = 0 \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}$  folgt

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

und

$$\underbrace{\lambda_0 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n}_{=0} = 0$$

□

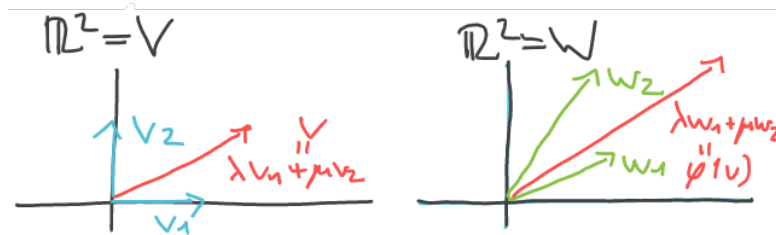
## Affine Basen und affine Abbildungen

Aus der AGLA I:

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume,  $v_1, \dots, v_n \in V$  eine Basis von  $V$  und  $w_1, \dots, w_n \in W$ . Dann gibt es genau eine  $K$ -lineare Abbildung  $\phi: V \rightarrow W$  mit

$$\phi(v_i) = w_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$





**Frage.** Inwiefern sind affine Abbildungen zwischen affinen Räumen durch die Bilder einer affinen Basis bestimmt?

**Satz 1.5.2.** Seien  $X, Y$  affine Räume,  $(p_0, \dots, p_n)$  eine affine Basis von  $X$  und  $q_0, \dots, q_n \in Y$ . Dann gibt es genau eine affine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit

$$f(p_i) = q_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Die Abbildung  $f$  ist *injektiv* bzw. *eine Affinität* gdw das Tupel  $(q_0, \dots, q_n)$  *affin unabhängig* bzw. *eine affine Basis* von  $Y$  ist.

*Beweis.* Eine affine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist gegeben durch  $f(p_0)$  für ein  $p_0 \in X$  und eine lineare Abbildung

$$F: T(X) \rightarrow T(Y) \\ \overrightarrow{pq} \mapsto \overrightarrow{f(p)f(q)}.$$

Wir definieren  $F$  durch

$$F(\overrightarrow{p_0 p_i}) = \overrightarrow{q_0 q_i} \quad 1 \leq i \leq n. \quad (*)$$

$\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}$  ist eine Basis von  $T(X)$ , also gibt es genau eine lineare Abbildung

$$F: T(X) \rightarrow T(Y)$$

mit (\*). Es gilt dann

$$\begin{aligned} f(p_i) &= \tau_{\overrightarrow{f(p_0)f(p_i)}} f(p_0) \\ &= \tau_{F(\overrightarrow{p_0 p_i})} f(p_0) \\ &= \tau_{\overrightarrow{q_0 q_i}} q_0 = q_i \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad \square$$

$f$  ist injektiv gdw  $F$  injektiv ist.  $F$  ist injektiv gdw  $\overrightarrow{q_0 q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0 q_n}$  linear unabhängig sind.

$\rightarrow f$  ist eine Affinität gdw  $F$  bijektiv ist.  $F$  ist bijektiv gdw  $\overrightarrow{q_0 q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0 q_n}$  eine Basis von  $T(Y)$  ist.

### Affine Koordinatensysteme

Sei  $X$  ein affiner Raum über einem Körper  $K$ ,  $(p_0, p_1, \dots, p_n)$  eine affine Basis von  $X$ .

Nach Satz 1.5.2 gibt es genau eine Affinität

$$\phi: K^n \rightarrow X$$

mit  $\phi(0) = p_0, \phi(e_1) = p_1, \dots, \phi(e_n) = p_n$  und zugehörige lineare Abbildung  $\Phi: K^n \rightarrow T(X)$ .

Einen Punkt  $p \in X$  können wir dann beschreiben durch

$$p = \tau_{\overrightarrow{p_0 p}}(p_0).$$

Sei  $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{p_0 p_n}$  mit  $\lambda_i \in K, 1 \leq i \leq n$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} p &= \tau_{\lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{p_0 p_n}}(p_0) \\ &= \tau_{\lambda_1 \Phi(e_1) + \dots + \lambda_n \Phi(e_n)}(p_0) \\ &= \tau_{\Phi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)}(p_0), \end{aligned}$$

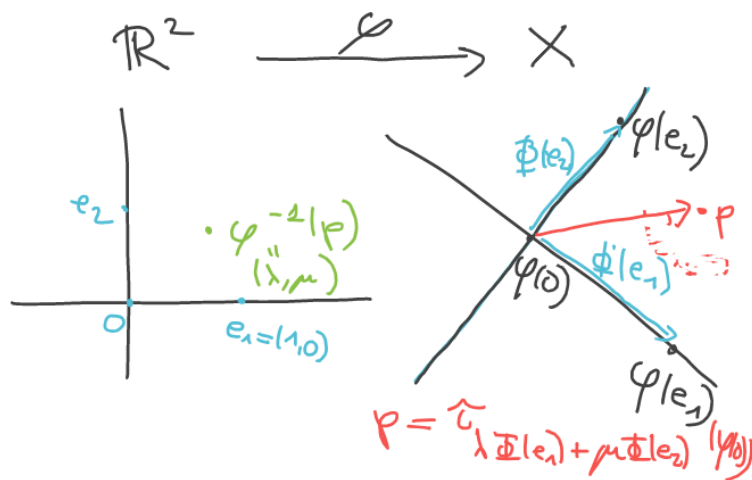
oder  $p = \phi((\lambda_1, \dots, \lambda_n))$ .

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum über einem Körper  $K$ . Wir nennen eine Affinität  $\phi: K^n \rightarrow X$  ein affines Koordinatensystem in  $X$ . Sei  $p_0 = \phi(0), p_1 = \phi(e_1), \dots, p_n = \phi(e_n)$ . Dann ist  $(p_0, \dots, p_n)$  eine affine Basis von  $X$ .

Für  $p \in X$  nennen wir

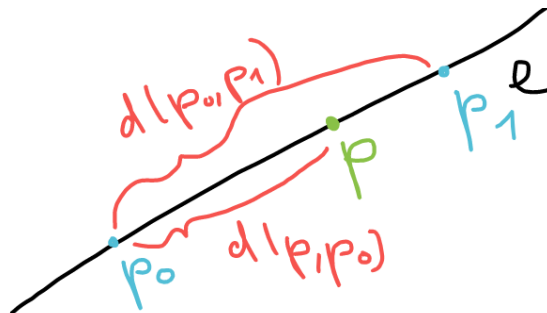
$$\phi^{-1}(p) = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$$

den Koordinatenvektor von  $p$  bezüglich der affinen Basis  $(p_0, \dots, p_n)$  und  $(x_1, \dots, x_n)$  die Koordinaten von  $p$  bezüglich  $(p_0, \dots, p_n)$ .



## §1.6 Das Teilverhältnis

**Idee.** Seien 3 Punkte  $p_0, p_1, p$  auf einer Gerade  $l$  (z. B. im  $\mathbb{R}^3$ ) gegeben,  $p_0 \neq p_1$ .



Sei  $\lambda = \frac{d(p, p_0)}{d(p_1, p_0)}$ , mit  $d$  dem euklidischen Abstand, dann können wir die Lage von  $p$  auf  $l$  durch  $\lambda$  (und der Information, ob  $p$  „rechts oder links“ von  $p_0$  liegt) bestimmen.

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum über  $K$ ,  $Y \subseteq X$  eine affine Gerade,  $p_0, p_1, p \in Y$  und  $p_0 \neq p_1$ . Dann nennen wir das eindeutig bestimmte Element  $\lambda \in K$  mit  $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1}$  das Teilverhältnis von  $p_0, p_1, p$ . Schreibe  $\lambda = \text{TV}(p_0, p_1, p)$ . In  $\text{char}(K) \neq 2$  nennen wir  $p$  Mittelpunkt von  $p_0, p_1$  wenn  $\text{TV}(p_0, p_1, p) = \frac{1}{2}$ .

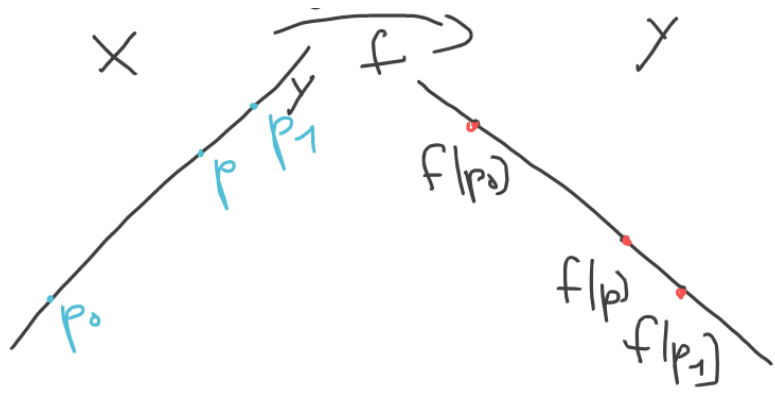
**Bemerkungen.** i) Es gilt  $T(Y) = K \overrightarrow{p_0 p_1}$ . Damit ist  $\lambda$  wohldefiniert und existiert.

ii)  $p_0, p_1$  ist eine affine Basis von  $Y$ . Damit existiert ein Koordinatensystem

$$\begin{aligned}\phi: K &\rightarrow Y, \quad \phi(0) = p_0 \\ \phi(1) &= p_1\end{aligned}$$

und es gilt  $\text{TV}(p_0, p_1, p) = \phi(p)^{-1}$ .

**Frage.** Wie verhält sich das Teilverhältnis unter affinen Abbildungen?



**Vorlesung 4**

Di 05.05. 10:15

**Lemma 1.6.1.** Seien  $X, Y$  affine Räume und  $f: X \rightarrow Y$  eine affine Abbildung, seien  $p_0, p_1, p$  Punkte in  $X$ , die auf einer Geraden liegen und  $f(p_0) \neq f(p_1)$ . Dann gilt

$$\text{TV}(f(p_0), f(p_1), f(p)) = \text{TV}(p_0, p_1, p).$$

*Beweis.* Sei  $\lambda = \text{TV}(p_0, p_1, p)$ , also  $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1}$ . Sei  $F: T(X) \rightarrow T(Y)$  die zu  $f$  gehörige lineare Abbildung. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(p_0) f(p)} &= F(\overrightarrow{p_0 p}) \\ &= F(\lambda \overrightarrow{p_0 p_1}) \\ &= \lambda F(\overrightarrow{p_0 p_1}) \\ &= \lambda \overrightarrow{f(p_0) f(p_1)} \end{aligned} \quad \square$$

**Anwendung (Strahlensatz).** Sei  $X$  ein affiner Raum über  $K$ ,  $p_0, p_1, p_2 \in X$  affin unabhängig. Sei

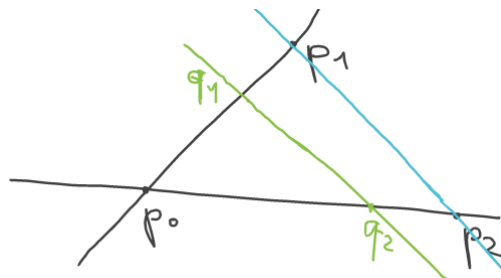
$$\begin{aligned} q_1 &\in p_0 \vee p_1, \quad q_1 \neq p_0 \\ q_2 &\in p_0 \vee p_2, \quad q_2 \neq p_0. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass  $p_1 \vee p_2$  und  $q_1 \vee q_2$  parallel sind in dem Sinn, dass

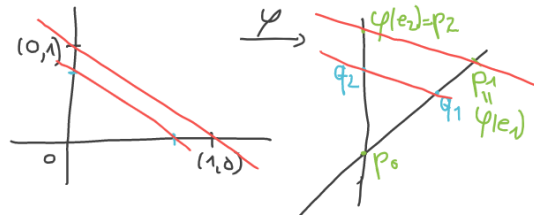
$$T(p_1 \vee p_2) = T(q_1 \vee q_2) \text{ in } T(X).$$

Dann gilt

$$\text{TV}(p_0, p_1, q_1) = \text{TV}(p_0, p_2, q_2).$$



*Beweis.* Sei  $Y$  die durch  $p_0, p_1, p_2$  aufgespannte Ebene. Dann gibt es ein affines Koordinatensystem  $\phi: K^2 \rightarrow Y$  mit  $\phi(0) = p_0, \phi(e_1) = p_1, \phi(e_2) = p_2$ .



Sei

$$(\lambda, 0) = \phi^{-1}(q_1)$$

$$(0, \mu) = \phi^{-1}(q_2).$$

**Behauptung.**  $l_1 = \phi^{-1}(q_1) \vee \phi^{-1}(q_2)$  und  $l_2 = \phi^{-1}(p_1) \vee \phi^{-1}(p_2)$  sind parallel.

**Denn:**

$$T(l_1) = K \overrightarrow{\phi^{-1}(q_1) \phi^{-1}(q_2)}$$

$$T(l_2) = K \overrightarrow{\phi^{-1}(p_1) \phi^{-1}(p_2)}.$$

Es ist  $K \overrightarrow{p_1 p_2} = K \overrightarrow{q_1 q_2}$  und daher

$$K \Phi^{-1}(\overrightarrow{p_1 p_2}) = K \Phi^{-1}(\overrightarrow{q_1 q_2}).$$

$$\parallel \overrightarrow{K \phi^{-1}(q_1) \phi^{-1}(q_2)} \parallel \overrightarrow{K \phi^{-1}(p_1) \phi^{-1}(p_2)}$$

Aus der Parallelität von  $l_1, l_2$  folgt  $\lambda = \mu$ .

Also

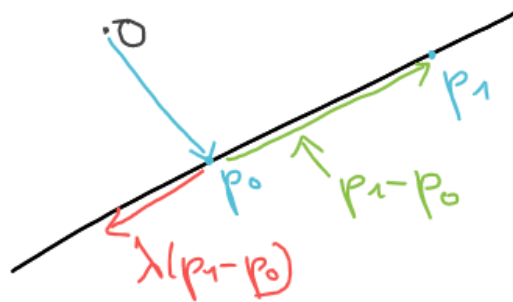
$$\begin{aligned} \text{TV}(\phi^{-1}(p_0), \phi^{-1}(p_1), \phi^{-1}(q_1)) &= \lambda \\ &= \mu = \text{TV}(\phi^{-1}(p_0), \phi^{-1}(p_2), \phi^{-1}(q_2)) \end{aligned}$$

und der Strahlensatz folgt aus Lemma 1.6.1. □

## §1.7 Affinkombinationen

**Beispiel.** Seien  $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$ ,  $p_0 \neq p_1$ . Ziel: Beschreibe den affinen Unterraum  $p_0 \vee p_1$  als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $p \in p_0 \vee p_1$ . Dann  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1}$  und als Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  gilt  $p = p_0 + \lambda(p_1 - p_0)$ . Es gilt

$$p_0 \vee p_1 = \{ (1 - \lambda)p_0 + \lambda p_1, \lambda \in \mathbb{R} \}.$$



**Frage.** Verallgemeinerung zu höherdimensionalen Räumen?

**Definition.** Seien  $p_0, \dots, p_k \in K^n$ . Wir nennen eine Linearkombination

$$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m$$

mit  $\lambda_i \in K$ ,  $0 \leq i \leq m$  eine Affinkombination oder affin falls gilt  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ .

**Satz 1.7.1.** Seien  $p_0, \dots, p_m \in K^n$ . Dann gilt

$$p_0 \vee \dots \vee p_m = \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i \in K^n \mid \lambda_0, \dots, \lambda_m \in K, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

*Beweis.* Sei  $Y = p_0 \vee \dots \vee p_m \in K^n$ . Es gilt

$$\begin{aligned} T(Y) &= \underbrace{T(p_m)}_{=0} + T(p_0 \vee \dots \vee p_{m-1}) + \underbrace{K\overrightarrow{p_0 p_m}}_{=T(p_0 \vee p_m)} \\ &= K\overrightarrow{p_0 p_m} + T(p_0 \vee \dots \vee p_{m-1}) \\ &= K\overrightarrow{p_0 p_m} + \dots + K\overrightarrow{p_0 p_1} \\ &\vdots \\ &= K\overrightarrow{p_0 p_m} + \dots + K\overrightarrow{p_0 p_1} \\ &= (\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_m}). \end{aligned}$$

Sei  $p \in K^n$ . Dann ist  $p \in Y$  genau dann, wenn  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  mit

$$\overrightarrow{p_0 p} = \lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{p_0 p_m}.$$

Im  $K^n$  gilt dann also

$$p - p_0 = \lambda_1(p_1 - p_0) + \dots + \lambda_m(p_m - p_0)$$

oder

$$p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m$$

mit  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_m$ , d. h.  $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ . □

## §1.8 Affine Abbildungen und Matrizen, Fixpunkte

**Motivation.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume,  $F: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Wenn wir für  $V$  und  $W$  Basen wählen, dann können wir die Abbildung  $F$  eindeutig durch eine Matrix beschreiben.

**Frage.** Inwiefern können wir affin Abbildung zwischen affinen Räumen durch Matrizen beschreiben?

Wahl von Basen in Vektorräumen  $\leftrightarrow$  Wahl von Koordinaten in affinen Räumen.

Seien  $X, Y$  affine Räume über  $K$ ,  $f: X \rightarrow Y$  eine affine Abbildung. Wähle affine Koordinatensysteme  $\phi: K^n \rightarrow X$  und  $\psi: K^m \rightarrow Y$ .

Wir haben das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{\phi} & X \\ \downarrow g & \circlearrowleft & \downarrow f \\ K^m & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

mit  $g = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$  affin.  $g$  ist affin, also besteht eine affine Abbildung  $G: K^n \rightarrow K^m$  mit

$$g(x) - g(0) = G(x) \quad \forall x \in K^n.$$

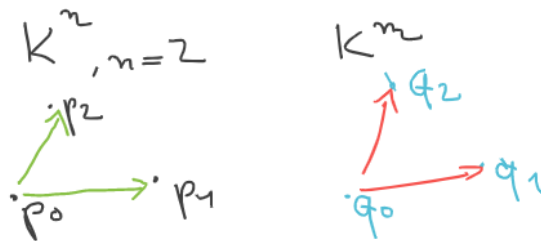
$G$  ist linear, also können wir  $G$  durch eine Matrix  $A$  ausdrücken.

$$g(x) = Ax + b \quad \forall x \in K^n.$$

mit  $b = g(0)$ .



**Frage.** Wie können wir  $A$  berechnen gegeben eine affine Basis  $(p_0, \dots, p_n)$  von  $K^n$  und  $g(p_i)$ ,  $0 \leq i \leq n$ ?



Wir betrachten die Matrizen  $B \in M_{m \times n}(K)$  bestehend aus den Spaltenvektoren  $\overrightarrow{q_0 q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0 q_n}$  und  $S \in M_{n \times n}(K)$  bestehend aus den Spaltenvektoren  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}$ . Dann gilt  $A = B \cdot S^{-1}$  und  $g(x) - g(p_0) = A(x - p_0)$ , also  $g(x) = Ax + b$  mit  $b = g(p_0) - Ap_0$ .

**Bemerkung.** Wählen wir für  $p_0, \dots, p_m$  die affine Basis  $0, e_1, \dots, e_n$ , dann  $S = \text{Id}_{n \times n}$  und  $A = B$ .

## Fixpunkte

**Beispiel 1.8.1.** Betrachte die affine Abbildung  $f: K \rightarrow K$ ,  $K$  ein Körper, in der Matrixdarstellung gegeben durch  $f(x) = 2x + 1 \stackrel{?}{=} x$ .



Dann gibt es genau ein  $x \in K$  mit  $f(x) = x$ , nämlich  $x = -1$ .

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum  $f: X \rightarrow X$  eine affine Abbildung. Wir nennen

$$\text{Fix}(f) := \{ x \in X \mid f(x) = x \}$$

die Menge der Fixpunkte von  $f$ .

**Frage.** Welche Struktur hat  $\text{Fix}(f)$ .

**Beispiel 1.8.2.**  $X$  affiner Raum.

$$\begin{aligned} \text{Id}: X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

dann  $\text{Fix}(\text{Id}) = X$ .

**Beispiel 1.8.3.**  $f: K^n \rightarrow K^n$ ,  $x \mapsto \underbrace{x + p_0}_{\substack{? \\ x}}$  mit  $p_0 \in K^n \setminus \{0\}$ , dann  $\text{Fix}(f) = \emptyset$ .

**Beispiel 1.8.4. Frage.** Was sind die Fixpunkte einer Projektion?

**Lemma 1.8.1.**  $\text{Fix}(f) \subseteq X$  ist ein affiner Unterraum.

*Beweis.* Falls  $\text{Fix}(f) = \emptyset$  dann  $\checkmark$ . Sei also  $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$  und  $p \in \text{Fix}(f)$ ,  $F$  die zu  $f$  gehörende lineare Abbildung.

Für  $x \in \text{Fix}(f)$  gilt

$$\overrightarrow{px} = \overrightarrow{f(p)f(x)} = F(\overrightarrow{px}).$$

Umgekehrt folgt aus

$$\overrightarrow{px} = F(\overrightarrow{px}) = \overrightarrow{pf(x)},$$

dass  $x = f(x)$ , also  $x \in \text{Fix}(f)$ .

Damit gilt

$$\{ \overrightarrow{px} \in T(X) \mid x \in \text{Fix}(f) \} = \{ \overrightarrow{px} \in T(X) \mid \overrightarrow{px} = F(\overrightarrow{px}) \}$$

und wir erkennen diese Menge als  $K$ -Untervektorraum von  $X$ . □

**Frage.** Bestimmung von  $\text{Fix}(f)$  für eine beliebige affine Abbildung  $f: X \rightarrow X$ ?

Nach Wahl eines Koordinatensystems können wir auf den Fall  $X = K^n$  reduzieren und annehmen, dass  $f$  in Matrizendarstellung gegeben ist.

Sei also

$$\begin{aligned} f: K^n &\rightarrow K^n \\ x &\mapsto \underbrace{Ax + b}_{=x=\text{Id}_n x}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\text{Fix}(f) = \{ x \in K^n \mid (A - \underset{\uparrow}{\text{Id}_n})x = -b \}$$

Einheitsmatrix der Dimension  $n$ :  $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Wir haben das Problem also reduziert auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems.

**Bemerkung.** Daraus kann man auch Lemma 1.8.1 ableiten.

**Beispiel 1.8.5.**

$$\begin{aligned} f: K^n &\rightarrow K^n \\ x &\mapsto \lambda \operatorname{Id}_n x + b \end{aligned}$$

mit  $\lambda \in K$ .

Dann

$$\operatorname{Fix}(f) = \{ x \in K^n \mid (\lambda - 1)x = -b \}.$$

Falls  $\lambda - 1$  invertierbar ist ( $\lambda \neq 1$ ), gibt es genau einen Fixpunkt.

**Definition.** Sei  $f: X \rightarrow X$  eine affine Abbildung mit zugehöriger linearer Abbildung  $F: T(X) \rightarrow T(X)$ . Wir nennen  $f$  eine *Dilatation* mit *Faktor*  $\lambda$ , falls gilt

$$F = \lambda \cdot \operatorname{Id}_{T(X)} \quad \lambda \in K.$$

Im Fall  $\lambda = 1$  nennen wir  $f$  eine Translation.

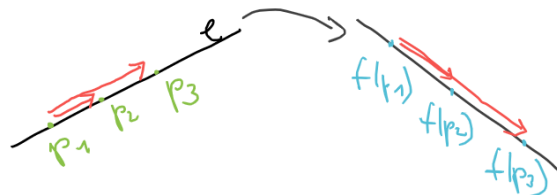
**Lemma 1.8.2.** Sei  $f: X \rightarrow X$  eine Dilatation mit Faktor  $\lambda \neq 1$ . Dann gilt

$$\# \operatorname{Fix}(f) = 1.$$

*Beweis.* Nach Wahl eines Koordinatensystems reduzieren wir das Problem auf Beispiel 1.8.5. □

## §1.9 Kollineationen

Sei  $f: X \rightarrow X$  eine affine Abbildung eines affinen Raumes  $X$ , z. B. eine Affinität. Seien  $p_1, p_2, p_3 \subset X$  in einer Geraden  $\ell \subseteq X$  enthalten.



Dann liegen auch  $f(p_1), f(p_2), f(p_3)$  auf einer Geraden.

**Frage.** Welche bijektiven Abbildungen  $f: X \rightarrow X$  haben diese Eigenschaft?

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum und  $p_1, p_2, p_3 \in X$ . Wir nennen  $p_1, p_2, p_3$  *kollinear*, wenn  $p_1, p_2, p_3$  auf einer Geraden  $\ell \subset X$  liegen. Wir nennen eine bijektive Abbildung  $f: X \rightarrow X$  eine Kollineation, falls jede Gerade  $\ell \subset X$  auf eine Gerade  $f(\ell) \subset X$  abgebildet wird.

**Beispiel 1.9.1.** Affinitäten

**Beispiel 1.9.2.** Ist  $\dim X = 1$  und  $f: X \rightarrow X$  bijektiv, dann ist  $f$  eine Kollineation.

**Beispiel 1.9.3.** Sei  $X = \mathbb{C}^2$  als affiner Raum über  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\overline{x}, \overline{y}). \end{aligned}$$

$\uparrow$   
 komplexe Konjugation

Dann ist  $f$  eine Kollineation. Das Bild einer Geraden

$$(x_0, y_0) + \mathbb{C}(x_1, y_1)$$

ist gegeben durch die Gerade

$$(\overline{x_0}, \overline{y_0}) + \mathbb{C}(\overline{x_1}, \overline{y_1}),$$

aber  $f$  ist *keine Affinität*!

**Bemerkung.** Die komplexe Konjugation

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \overline{x} \end{aligned}$$

ist ein Automorphismus von dem Körper  $\mathbb{C}$ .

**Vorlesung 5**

Fr 08.05. 10:15

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper. Wir nennen eine Bijektion  $\alpha: K \rightarrow K$  einen Automorphismus von  $K$  falls gilt

$$\alpha(\lambda + \mu) = \alpha(\lambda) + \alpha(\mu) \quad \forall \lambda, \mu \in K$$

und

$$\alpha(\lambda \cdot \mu) = \alpha(\lambda) \cdot \alpha(\mu) \quad \forall \lambda, \mu \in K$$

**Beispiel 1.9.4.**

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

ist ein Körper und

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &\rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ x + y\sqrt{2} &\mapsto x - y\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Satz 1.9.1.** Sei  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Automorphismus von  $\mathbb{R}$ . Dann gilt  $\alpha = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

*Beweis.* Sei  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Automorphismus.

1. Dann gilt

$$\alpha(0) = \alpha(0 + 0) = \alpha(0) + \alpha(0),$$

also  $\alpha(0) = 0$ .

2. Dann gilt

$$0 = \alpha(0) = \alpha(\lambda - \lambda) = \alpha(\lambda) + \alpha(-\lambda),$$

also  $\alpha(-\lambda) = -\alpha(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

3. Dann gilt

$$\alpha(1) = \alpha(1 \cdot 1) = \alpha(1)\alpha(1),$$

also  $\alpha(1) = 1$  und daher

$$\alpha(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

z. B.

$$\alpha(2) = \alpha(1 + 1) = \alpha(1) + \alpha(1) = 1 + 1 = 2.$$

4. Sei  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , dann gilt

$$q\alpha\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha(q)\alpha\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha\left(q\frac{p}{q}\right) = \alpha(p) = p,$$

also  $\alpha\left(\frac{p}{q} = \frac{p}{q}\right)$  oder  $\alpha(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{Q}$ .

5. Sei  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dann  $\exists \mu \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda = \mu^2$  und

$$\alpha(\lambda) = \alpha(\mu^2) = \alpha(\mu) \cdot \alpha(\mu) > 0,$$

also

$$\alpha(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Wir zeigen nun  $\alpha(\lambda) = \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

### Gegenannahme

Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha(\lambda) \neq \lambda$ . Wir diskutieren den Fall  $\alpha(\lambda) < \lambda$  ( $\alpha(\lambda) > \lambda$  geht genauso).

Wähle  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  mit

$$\alpha(\lambda) < \frac{p}{q} < \lambda.$$

Dann gilt

$$\alpha\left(\lambda - \frac{p}{q}\right) = \alpha(\lambda) - \frac{p}{q} < 0$$

⚡ zu  $\lambda - \frac{p}{q} > 0$ .

□

### Eine Familie von Kollineationen

**Idee.** Wir verallgemeinern Beispiel 1.9.3, um eine größere Klasse an Kollineationen zu erhalten als Affinitäten.

#### Beispiel 1.9.5.

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

respektiert Addition, d. h.

$$f(z + z') = f(z) + f(z') \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}^2,$$

und hat die Eigenschaft

$$f(\lambda z) = \bar{\lambda} f(z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C}^2.$$

→ Wir nennen  $f$  semilinear.

**Definition.** Seien  $V, W$  Vektorräume über einem Körper  $K$ . Wir nennen eine Abbildung  $F: V \rightarrow W$  *semilinear*, wenn es einen Automorphismus  $\alpha$  von  $K$  gibt, sodass gilt

- $F(v + v') = F(v) + F(v') \quad \forall v, v' \in V$
- $F(\lambda v) = \alpha(\lambda)F(v) \quad \forall \lambda \in K \quad \forall v \in V.$

**Definition.** Seien  $X, Y$  affine Räume über einem Körper  $K$ . Wir nennen eine Abbildung

$$f: X \rightarrow Y$$

*semiaffin*, wenn es eine *semilineare Abbildung*  $F: T(X) \rightarrow T(Y)$  gibt mit

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = F(\overrightarrow{pq}) \quad \forall p, q \in X.$$

Falls  $f$  außerdem bijektiv ist, dann nennen wir  $f$  eine Semiaffinität.

**Lemma 1.9.2.** Sei  $f: X \rightarrow X$  eine Semiaffinität eines affinen Raumes  $X$ . Dann ist  $f$  eine Kollineation.

*Beweisidee.* Sei  $\ell \subseteq X$  eine Gerade,  $p_0 \in \ell$ . Dann ist

$$T(\ell) = \{ \overrightarrow{p_0 x}, x \in \ell \} \subseteq T(X)$$

ein  $K$ -Untervektorraum mit

$$\dim_K T(\ell) = 1.$$

Sei  $F: T(X) \rightarrow T(X)$  die zu  $f$  gehörige semilineare Abbildung.

Wir betrachten

$$\begin{aligned} T(f(\ell)) &= \{ \overrightarrow{f(p_0)f(x)}, x \in \ell \} \\ &= \{ F(\overrightarrow{p_0 x}), x \in \ell \} = F(T(\ell)). \end{aligned}$$

Dann ist auch  $F(T(\ell)) \subseteq T(X)$  ein  $K$ -Untervektorraum der Dimension 1, also

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Übung} \\ f(\ell) \subseteq X \end{array}$$

eine Gerade. □

**Frage.** Gibt es Kollineationen, die keine Semiaffinität sind?

→ Ja, z. B. für  $\dim X = 1$ .

### Hauptsatz der affinen Geometrie

Sei  $K$  ein Körper mit  $\#K \geq 3$ ,  $X$  ein affiner Raum über  $K$  mit  $\dim X \geq 2$  und  $f: X \rightarrow X$  eine Kollineation. Dann ist  $f$  eine Semiaffinität.

**Bemerkung.** Aus Satz 1.9.1 folgt, dass über  $\mathbb{R}$  jede semilineare Abbildung linear ist.

**Korollar.** Sei  $X$  ein affiner Raum über  $\mathbb{R}$  mit  $\dim X \geq 2$ ,  $f: X \rightarrow X$  eine Kollineation. Dann ist  $f$  eine Affinität.

## §1.10 Quadriken

**Motivation.** Affine Unterräume der  $\mathbb{R}^n$  sind gegeben durch *lineare* Gleichungssysteme.

**Jetzt:**

Betrachte den Unterraum im  $\mathbb{R}^n$ , der entsteht als Lösungsmenge einer *quadratischen* Gleichung.

**Beispiele (im  $\mathbb{R}^2$ ).** i) der Kreis

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

ii) Ellipsen,  $a, b > 0$

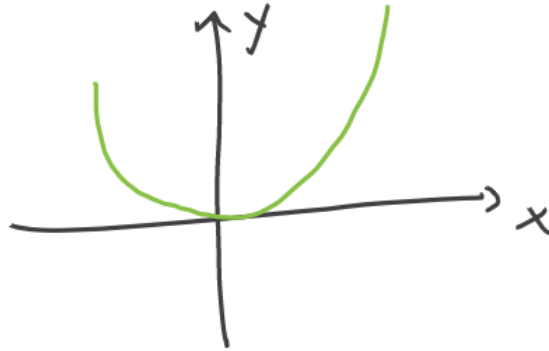
$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + by^2 = 1 \right\}$$



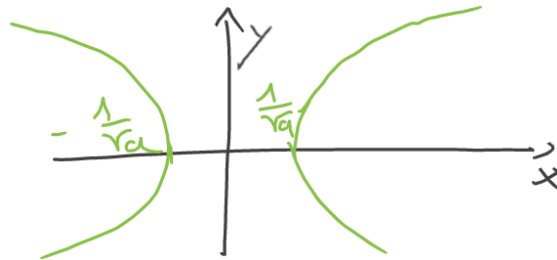
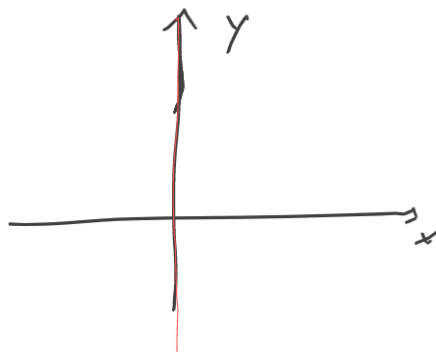


iii) Parabel

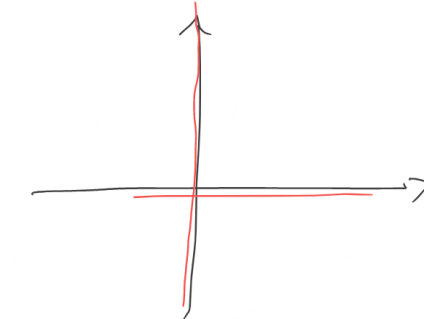
$$y = ax^2$$

iv) Hyperbeln,  $a, b > 0$ 

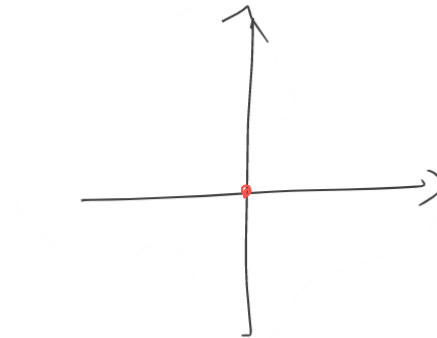
$$ax^2 - by^2 = 1$$

v)  $x^2 = 0$ 

vi)  $xy = 0$



vii)  $x^2 + y^2 = 0$



Der Ursprung

**Beispiele.** Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 = 0.$$

Erster Schritt: Entferne den „gemischten“ Term  $x_1x_2$ .

$$(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 2x_1 = 0.$$

Nach der Koordinatentransformation

$$y_1 = x_1 + x_2 \quad y_2 = x_2$$

ist  $Q$  gegeben durch

$$y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 \cdot 1 - 2y_2 \cdot 1 = 0.$$

**Bemerkung.** Wir können die obigen Gleichungen auch über anderen Körpern  $K$  betrachten, die Lösungsmenge hängt im Allgemeinen wesentlich von  $K$  ab, z. B.  $x^2 + y^2 = 0$ .

**Frage.** Was passiert hier über  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  für  $p$  prim?

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper. Ein quadratisches Polynom über  $K$  in den Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$  ist ein Ausdruck der Form

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{0i} x_i + \alpha_{00}.$$

mit  $\alpha_{ij}, \alpha_{0i}, \alpha_{00} \in K \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$ .

**Bemerkung.** Aus einem quadratischen Polynom  $P$  über  $K$  erhält man eine Abbildung

$$\begin{aligned} K^n &\rightarrow K \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto P(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

**Achtung.** Zwei unterschiedliche Polynome  $P_1, P_2$  müssen nicht notwendigerweise identisch sein, um dieselbe Abbildung zu induzieren.

**Beispiel.**  $K = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Körper mit  $p$  Elementen mit  $p$  prim,  $n = 1$ .

$$\begin{aligned} P_1 &= x \\ P_2 &= x^p. \end{aligned}$$

Nach Fermats kleinem Satz gilt

$$t \equiv t^p \pmod{p} \quad \forall t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Für  $p = 2$  sind  $P_1, P_2$  quadratische Polynome nach obiger Definition.

**Definition.** Wir nennen eine Teilmenge  $Q \subseteq K^n$  eine *Quadrik*, falls  $Q$  definiert ist durch

$$Q = \{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0 \}$$

für ein quadratisches Polynom  $P$  über  $K$ .

**Beispiele.** •  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$  über  $\mathbb{R}$  ergibt den Ursprung.

•  $a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 1$ ,  $a_1, \dots, a_n > 0$  über  $\mathbb{R}$  ergibt einen Ellipsoid.

•  $K = \mathbb{R}$ ,  $P = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 5x_2^2$ . Dann ist

$$Q = \left\{ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{P(x_1, x_2)} = 0 \right\}.$$

**Frage.** Wie können wir im Allgemeinen Quadriken in Matrizenschreibweise ausdrücken?

**Vorlesung 6**

Di 12.05. 10:15

**Idee.** Sei

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{0i} x_i \cdot 1 + \alpha_{00} \cdot 1^2.$$

Wir schreiben

$$x' = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1}.$$

und (sei im Folgenden  $\text{char } K \neq 2$ )

$$A = \left( \begin{array}{c|cccc} a_{00} & a_{01} & \cdots & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array} \right)$$

mit  $a_{ii} = \alpha_{ii} \quad \forall 0 \leq i \leq n$ .

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2} \alpha_{ij} \text{ für } 0 \leq i < j \leq n.$$

Es gilt dann

$$P(x_1, \dots, x_n) = {}^t x' A' x'$$

und

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

**Bemerkung.** Die Matrix  $A'$  ist symmetrisch (nach Konstruktion).**Definition.** In obiger Notation nennen wir  $A'$  die erweiterte Matrix zu  $P$  und  $x'$  den erweiterten Spaltenvektor zu  $x$ . Wir sagen, dass  $A' \in M_{(n+1) \times (n+1)}(K)$  die Quadrik  $Q$  beschreibt, wenn gilt

$$Q = \left\{ x \in K^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

**Notation.** Für  $P$  wie oben schreiben wir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für den „rein quadratischen“ Anteil von  $P$ .

**Bemerkung.** Sei  $Q \subseteq K^n$  eine Quadrik. Dann gibt es im Allgemeinen nicht nur eine erweiterte Matrix  $A'$  die  $Q$  beschreibt. Ist

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\},$$

dann beschreibt auch  $\lambda A'$  mit  $\lambda \in K \setminus \{0\}$  die Quadrik  $Q$ .

**Frage.** Wie verhalten sich Quadriken unter Koordinatentransformationen / Affinitäten?

**Beispiel.**  $K = \mathbb{Q}$ .  $P(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ P(x_1, x_2) &= (y_1 + y_2)^2 + (y_2 + 1)^2 \\ &= y_1^2 + 2y_1 y_2 + 2y_2^2 + 2y_2 + 1 \end{aligned}$$

ist wieder ein quadratisches Polynom.

**Lemma 1.10.1.** Sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char } K \neq 2$ ,  $Q \subseteq K^n$  eine Quadrik und  $f: K^n \rightarrow K^n$  eine Affinität. Dann ist auch  $f(Q) \subseteq K^n$  eine Quadrik.

*Beweis.* Sei  $Q$  gegeben durch das quadratische Polynom  $P(x_1, \dots, x_n)$ , also

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0 \right\}.$$

Sei  $A'$  die erweiterte Matrix zu  $P$  und  $x'$  der erweiterte Spaltenvektor zu  $x$ . Dann gilt

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

Als nächstes beschreibe den durch  $f$  gegebenen Koordinatenwechsel.  $f$  ist eine Affinität, also  $\exists b \in K^n$  und  $S \in \text{GL}_n(K)$  mit

$$\begin{aligned} f: K^n &\rightarrow K^n \\ x &\mapsto Sx + b. \end{aligned}$$

Sei  $y = f(x)$ , schreibe  $y' = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ,

$$S' = \left( \begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ \vdots & & & \\ b_n & & & \end{array} \right).$$

Dann gilt  $y' = S'x'$ .

**Bemerkung.**  $S'$  ist invertierbar mit inverser Matrix

$$T' = (S')^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline -S^{-1}b & S^{-1} \end{array} \right),$$

d. h.  $x' = T'y'$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} f(Q) &= \{ f((x_1, \dots, x_n)) \in K^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0 \} \\ &= \left\{ y \in K^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in K^n \mid {}^t (T'y') A' (T'y') = 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in K^n \mid {}^t y' \underbrace{{}^t T' A' T'}_{\text{symmetrische Matrix}} y' = 0 \right\}, \end{aligned}$$

also ist  $f(Q)$  eine Quadrik mit

$$P'(y_1, \dots, y_n) = {}^t y' ({}^t T' A' T') y'.$$

□

**Bemerkung.** Der Beweis von Lemma 1.10.1 zeigt wie sich eine beschreibende Matrix  $A'$  unter einer Koordinatentransformation ändert.

**Frage.** Sei  $Q$  eine Quadrik beschrieben durch eine erweiterte Matrix  $A'$ . Find eine Koordinatentransformation  $f$  der  $K^n$ , sodass  $f(Q)$  möglichst „einfach“ beschrieben werden kann.

### zweiter Schritt

Entferne lineare Terme

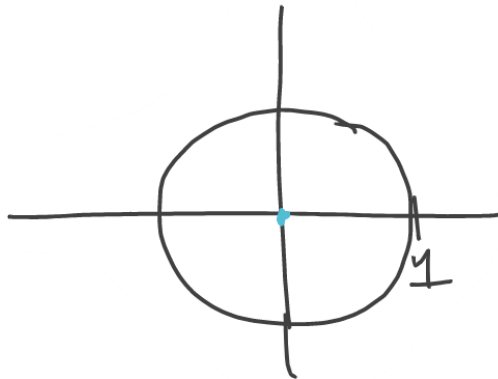
$$(y_1 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2 - 2 = 0.$$

Nach der Koordinatentransformation

$$z_1 = y_1 + 1 \quad z_2 = y_2 - 1$$

erhalten wir  $z_1^2 + z_2^2 = 2$ , oder nach skalieren mit  $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{2}w_1 &= z_1 & \sqrt{2}w_2 &= z_2 \\ w_1^2 + w_2^2 &= 1\end{aligned}$$



**Satz 1.10.2 (affine Hauptachsentransformation von reellen Quadriken).** Sei  $A' \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix und die Quadrik  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  gegeben durch

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

Sei  $A$  der rein quadratische Anteil von  $A'$ ,  $m = \text{rang } A$  und  $m' = \text{rang } A'$ . Dann gibt es eine Affinität  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $f(Q)$  beschrieben wird durch eine der folgenden Gleichungen:

a)  $m = m'$ :

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_m^2 = 0$$

für ein  $0 \leq j \leq m$ .

b)  $m + 1 = m'$ :

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_m^2 = 1$$

für ein  $0 \leq k \leq m$ .

c)  $m + 2 = m'$ :

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_m^2 + 2y_{m+1} = 0$$

für ein  $0 \leq k \leq m$ .

**Frage / Übung 1.10.1.** Warum gilt immer  $m \leq m' \leq m + 2$ ?

*Beweis zu Satz 1.10.2.* Sei

$$A' = \left( \begin{array}{c|cccc} a_{00} & a_{01} & \cdots & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n0} & & & & \end{array} \middle| \begin{array}{c} \\ \\ \\ A \\ \\ \end{array} \right).$$

mit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

Schritt 1 Entferne gemischte Terme.

**Idee.** Wollen  $A$  in Diagonalgestalt bringen.

AGLA I: Orthogonalisierungssatz für reelle symmetrische Matrizen.

Wir erhalten eine invertierbare Matrix  $T_1 \in GL_n(\mathbb{R})$  mit

$${}^tT_1 A T_1 = \left( \begin{array}{c|cc} I_k & 0 & 0 \\ 0 & -I_{m-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$I_l$  Einheitsmatrix der Dimension  $l$ ,  $m = \text{rang } A$ ,  $k$  Zahl der positiven Eigenwerte von  $A$  (mit Vielfachheit).

Sei

$$T'_1 = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \middle| \begin{array}{c} \\ T_1 \\ \\ \end{array} \right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} A'_1 &:= {}^tT'_1 A' T'_1 \\ &= \left( \begin{array}{c|cccc} c_{00} & c_{01} & \cdots & \cdots & c_{0n} \\ c_{10} & I_k & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & -I_{m-k} & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ c_{n0} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

für  $c_{00}, c_{01}, \dots, c_{0n}, c_{10}, \dots, c_{n0} \in \mathbb{R}$  mit  $c_{i0} = c_{0i} \forall i$ . Die durch  $A'$  bestimmte Quadrik ist gegeben durch

$$y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_m^2 + 2(c_{01}y_1 + \cdots + c_{0n}y_n) + c_{00} = 0.$$



Schritt 2 Reduzieren der linearen Terme. Sei

$$T'_2 = \left( \begin{array}{c|cccccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline -c_{10} & 1 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & & & \\ -c_{k0} & & \ddots & & & & & 0 \\ c_{(k+1)0} & & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & \\ c_{m0} & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & 1 \end{array} \right)$$

entsprechend dem Basiswechsel

$$y_i = \begin{cases} z_i - c_{i0} & 1 \leq i \leq k \\ z_i + c_{i0} & k < i \leq m \\ z_i & i > m. \end{cases}$$

Sei

$$A'_2 := {}^t T'_2 A'_1 T'_2 = \left( \begin{array}{c|cc|c} d_{00} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{0(m+1)} & \dots & c_{0n} \\ \hline 0 & \ddots & & & & & & & \\ \vdots & & I_k & & & 0 & & & \\ \vdots & & & & & & & & 0 \\ 0 & & 0 & & & -I_{m-k} & & & \\ \hline c_{(m+1)0} & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ c_{n0} & & & & & 0 & & & 0 \end{array} \right).$$

Nach der durch  $T'_1 T'_2$  beschriebenen Koordinatentransformation ist  $Q$  gegeben durch

$$z_1^2 + \dots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \dots - z_m^2 + 2(c_{(m+1)0}z_{m+1} + \dots + c_{n0}z_n) + d_{00}.$$

### Fallunterscheidung

a)  $d_{00} = c_{(m+1)0} = \dots = c_{n0} = 0.$

- b)  $d_{00} \neq 0$ ,  $c_{(m+1)0} = \dots = c_{n0} = 0$ . Nach eventuellem Multiplizieren der Matrix  $A'$  mit  $(-1)$  und Umordnen der Variablen  $z_i$ , können wir  $d_{00} < 0$  annehmen.

Sei  $\lambda = \sqrt{|d_{00}|}$  und definiere

$$T'_3 = \left( \begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & \lambda I_n & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right).$$

Wir berechnen

$$A'_3 := {}^t T'_3 A'_2 T'_3.$$

Dann ist

$$A'_3 = \left( \begin{array}{c|cccc} -\lambda^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \lambda^2 I_k & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & 0 & & -\lambda^2 I_{m-k} & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nach der zu  $T'_1 t'_2 t'_3$  gehörigen Affinität und Division durch  $\lambda^2$  wird  $Q$  gegeben durch

$$u_1^2 + \dots + u_k^2 - u_{k+1}^2 - \dots - u_m^2 = 1.$$

- c)  $c_{i0} \neq 0$  für mindestens ein  $m+1 \leq i \leq n$ . Nach Umordnen der Variablen  $z_i$ ,  $m+1 \leq i \leq n$  können wir annehmen, dass  $c_{(m+1)0} \neq 0$  gilt. Betrachte die Koordinatentransformation  $u_i = z_i$ ,  $i \neq m+1$ ,

$$2u_{m+1} = 2(c_{(m+1)0}z_{m+1} + \dots + c_{n0}z_n) + d_{00}.$$

Nach dieser Affinität wird  $Q$  beschrieben durch

$$u_1^2 + \dots + u_k^2 - u_{k+1}^2 - \dots - u_m^2 + 2u_{m+1} = 0.$$

□

**Vorlesung 7**

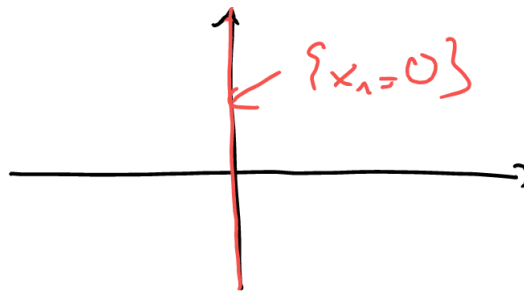
Do 14.05. 10:15

Resultate der affinen Hauptachsentransformation im  $\mathbb{R}^2$ :  $m = \text{rang } A$ ,  $m' = \text{rang } A'$ .

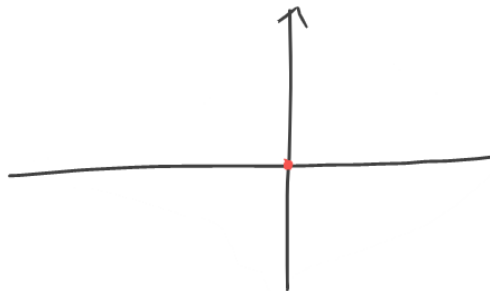
a)  $m = m'$ :

$m = m' = 0$ :  $Q$  gegeben durch  $0 = 0 \rightarrow$  Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

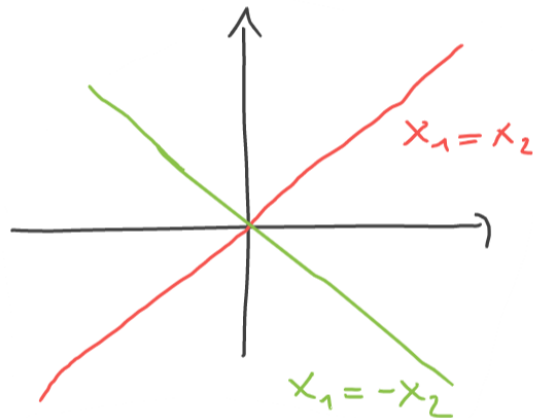
$m = m' = 1$   $x_1^2 = 0 \rightarrow$  „doppelte“ Gerade.



$m = m' = 2$   $x_1^2 + x_2^2 = 0 \rightarrow$  Punkt.



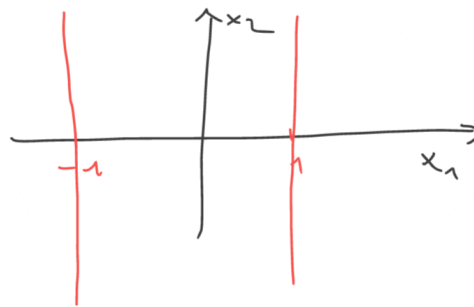
$x_1^2 - x_2^2 = 0 \rightarrow 2$  Geraden.  
 $\parallel$   
 $(x_1+x_2)(x_1-x_2)$



b)  $m' = m + 1$ .

$m = 0 \rightarrow 0 = 1 \rightarrow$ leere Menge.

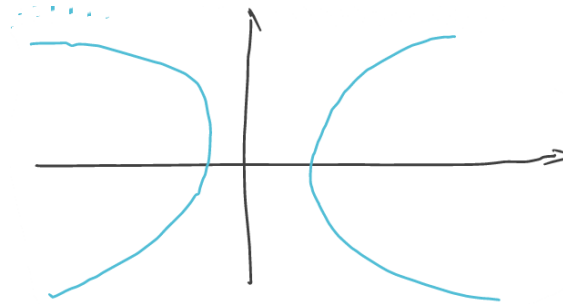
$m = 1 \quad x_1^2 = 1 \rightarrow 2$  parallele Geraden



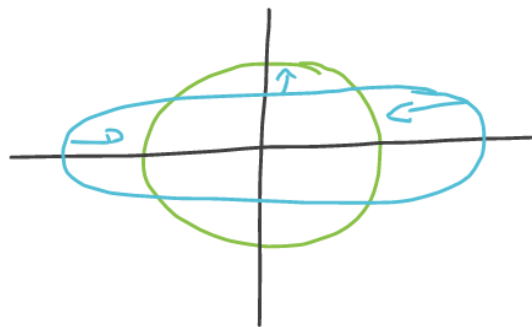
$-x_1^2 = 1 \rightarrow$ leere Menge.

$m = 2 \quad -x_1^2 - x_2^2 = 1 \rightarrow \emptyset$ .

$x_1^2 - x_2^2 = 1 \rightarrow$ Hyperbel.



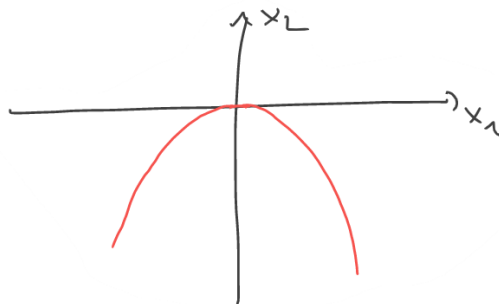
$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \rightarrow \text{Kreis.}$$



$$m' = m + 2.$$

$$m = 0 \quad 2x_1 = 0 \rightarrow \text{Gerade.}$$

$$m = 1 \quad x_1^2 + 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Parabel.}$$



**Bemerkung.** Verschiedene dieser quadratischen Formen können als *Menge* die gleiche Quadrik  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  beschreiben.

**Beispiel.**

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 = 0 \right\} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 = 0 \right\}.$$

**Definition.** Wir nennen zwei Quadriken  $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  *geometrisch äquivalent* wenn es eine Affinität  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt mit  $f(Q_1) = Q_2$ .

**Frage.** Klassifikation aller Quadriken über  $\mathbb{R}$  bis auf geometrische Äquivalenz?

Für eine Matrix  $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  sei  $\text{sign}(B) = \#$  positive Eigenwerte von  $B$   $-$   $\#$  negative Eigenwerte von  $B$  die Signatur von  $B$ .

**Satz 1.10.3 (Geometrischer Klassifikationssatz (ohne Beweis)).** Seien  $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$  nichtleere Quadriken, die beschrieben werden durch erweiterte Matrizen  $A'_1, A'_2$  mit rein quadratischen Anteilen  $A_1, A_2$ . Seien  $Q_1, Q_2$  nicht gleich an Hyperebenen.

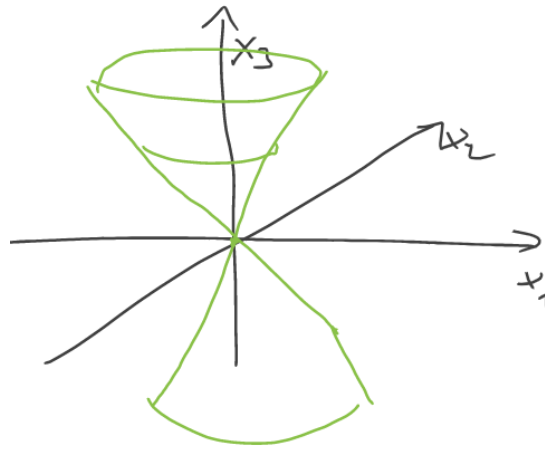
Dann sind  $Q_1$  und  $Q_2$  *geometrisch äquivalent* gdw gilt

$$\begin{aligned} \text{rang } A_1 &= \text{rang } A_2, \\ \text{rang } A'_1 &= \text{rang } A'_2, \\ |\text{sign } A_1| &= |\text{sign } A_2| \text{ und} \\ |\text{sign } A'_1| &= |\text{sign } A'_2|. \end{aligned}$$

**Folgerung 1.10.1.** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  eine nichtleere Quadrik. Dann ist  $Q$  geometrisch äquivalent zu genau einer der folgenden Quadriken.

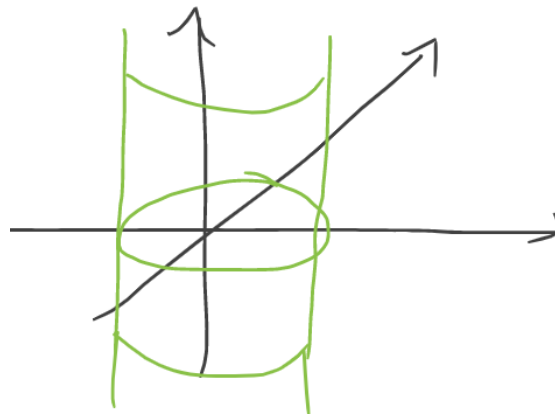
- a)  $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 = 0, 0 \leq k \leq m, 2k - m \geq 0.$
- b)  $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 = 1, 1 \leq k \leq m.$
- c)  $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 + 2x_{m+1} = 0, 1 \leq k \leq m \text{ und } 2k - m \geq 0.$

**Beispiele (Quadriken im  $\mathbb{R}^3$ ).** **Typ a)**  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$



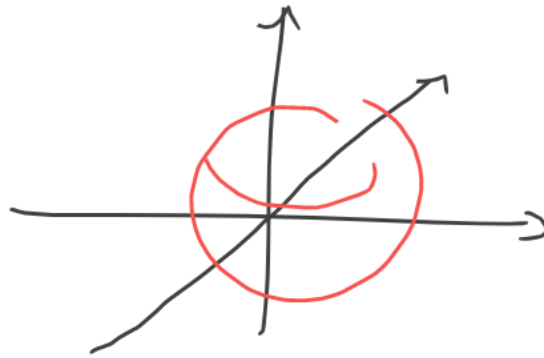
Kegel

**Typ b)** •  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .



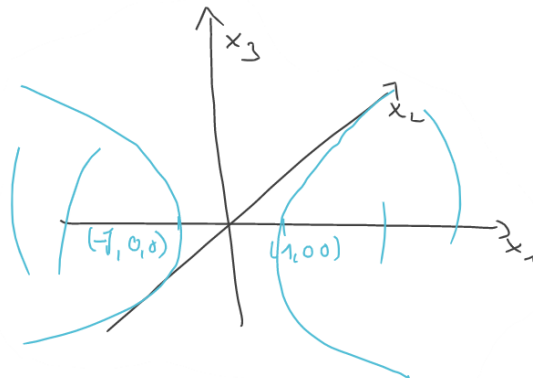
Kreiszyylinder

•  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ .



Kugel

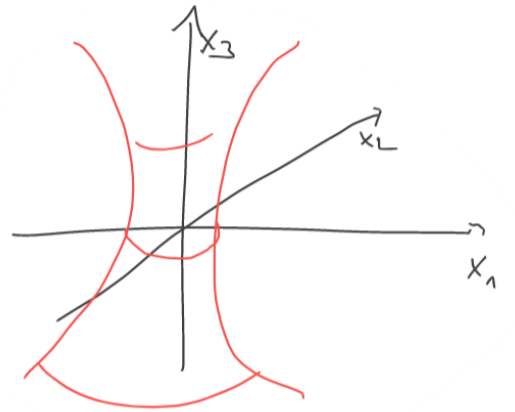
- $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1.$



Zweischaliges Hyperboloid

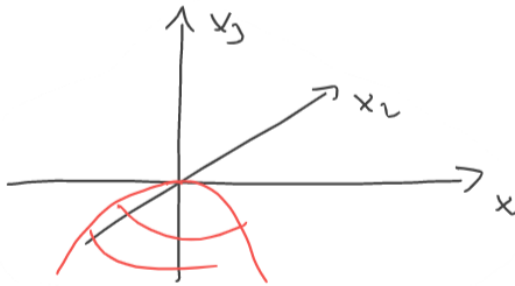
- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$





Einschaliges Hyperboloid

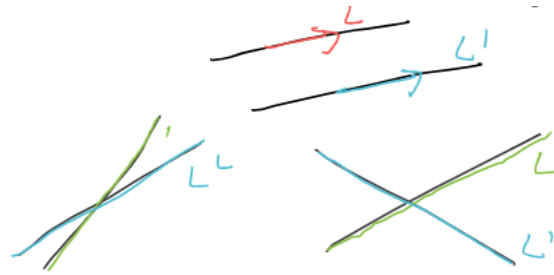
**Typ c)**  $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$ .



Elliptisches Paraboloid

## §1.11 Euklidische affine Räume

In einem allgemeinen affinen Raum  $X$  haben wir den Begriff von Gerade und parallelen Geraden (Sind  $L, L' \subset X$  Geraden, dann sagen wir, dass  $L$  und  $L'$  parallel sind, falls  $T(L) = T(L')$ ).



**Frage.** Können wir auch „Winkel“ messen zwischen zwei sich schneidenden Geraden?

**Erinnerung.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf  $V$  ist eine *positiv-definite symmetrische Bilinearform*

$$S: V \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Definition.** Ein euklidischer affiner Raum ist ein reeller affiner Raum  $(X, T(X), \tau)$  zusammen mit einem Skalarprodukt

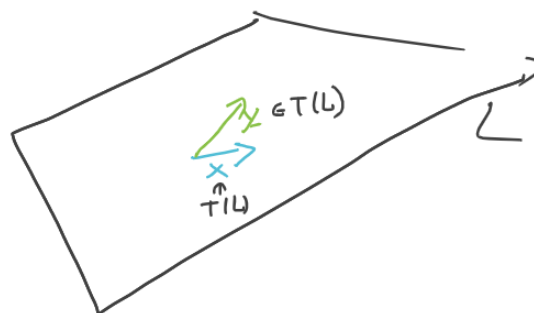
$$\langle \cdot, \cdot \rangle: T(X) \times T(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

auf dem Translationsvektorraum  $T(X)$ .

**Beispiel 1.11.1.** Der  $\mathbb{R}^n$  als reeller affiner Raum mit dem Standard-Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: T(X) \times T(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \mathbb{R}^n \end{array} & \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \mathbb{R}^n \end{array} \\ (x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned}$$

**Beispiel 1.11.2.** Die Lösungsmenge  $L$  im  $\mathbb{R}^n$  eines Systems von linearen Gleichungen  $Ax = b$ ,  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$



mit dem aus dem  $\mathbb{R}^n$  induzierten Standard-Skalarprodukt auf  $T(L) \stackrel{\uparrow}{\leq} \mathbb{R}^n$   
 Untervektorraum

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : T(L) \times T(L) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

**Frage.** Definition von Abständen / Winkeln in einem euklidischen affinen Raum?

**Definition 1.11.1.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum. Wir definieren eine Normabbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : T(X) &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ t &\mapsto \|t\| := \sqrt{\langle t, t \rangle} \end{aligned}$$

und eine Metrik

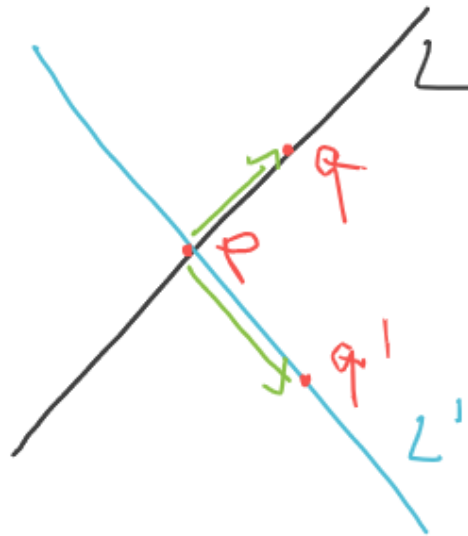
$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (p, q) &\mapsto d(p, q) := \|\vec{pq}\|. \end{aligned}$$



**Bemerkung.**  $\|\cdot\|$  ist eine Norm, da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt ist. Man kann nachrechnen, dass  $d$  tatsächlich eine Metrik auf  $X$  ist, z. B.

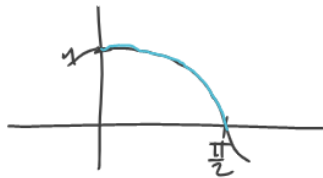
$$d(p, q) = \|\vec{pq}\| = \|-\vec{qp}\| = |-1| \cdot \|\vec{qp}\| = d(q, p).$$

**Definition.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum,  $p, q, q' \in X$  mit  $p \neq q, q'$ ,  $L = p \vee q$ ,  $L' = p \vee q'$ .



Wir definieren den Winkel  $\sphericalangle(L, L')$  zwischen den Geraden  $L, L'$  durch

$$\sphericalangle(L, L') = \arccos \frac{|\langle \vec{pq}, \vec{pq'} \rangle|}{\|\vec{pq}\| \cdot \|\vec{pq'}\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$



**Bemerkung.** Die Definition des Winkels  $\sphericalangle(L, L')$  ist unabhängig von der Wahl der Elemente  $q, q'$  (solange  $p \neq q, q'$ ).

## Vorlesung 8

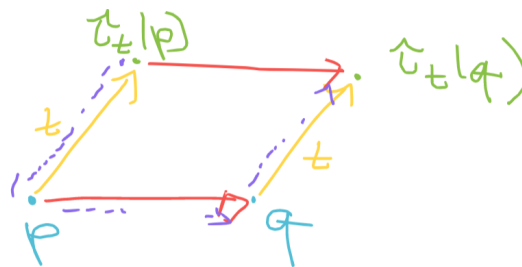
Di 19.05. 10:15

**Lemma 1.11.1.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum,  $t \in T(X)$  und  $\tau_t: X \rightarrow X$  die Translation um  $t$ . Seien  $q, q' \in X$  und  $L, L' \subseteq X$  Geraden mit  $L \cap L' \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$d(\tau_t(p), \tau_t(q)) = d(p, q) \text{ und} \\ \sphericalangle(\tau_t(L), \tau_t(L')) = \sphericalangle(L, L').$$

*Beweisidee.* Verwende

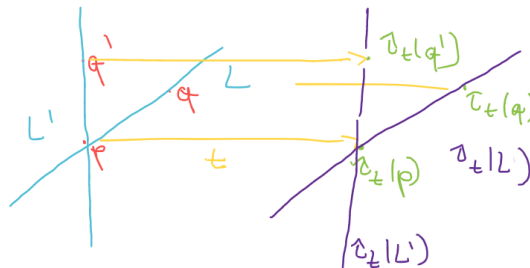
$$\overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q)} \stackrel{!}{=} \overrightarrow{pq},$$



also

$$d(\tau_t(p), \tau_t(q)) = \|\overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q)}\| = \|\overrightarrow{pq}\| = d(p, q)$$

für beliebige Punkte  $p, q \in X$  und  $t \in T(X)$ .



Winkel zwischen Geraden  $L, L'$

$$\sphericalangle(L, L') = \arccos \frac{\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq'} \rangle}{\|\overrightarrow{pq}\| \|\overrightarrow{pq'}\|}.$$

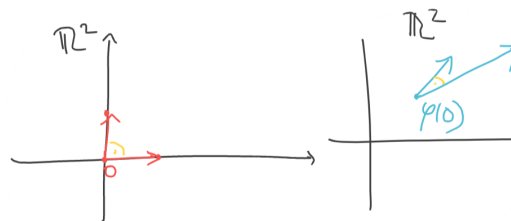
$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \|\overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q)}\| \\ \uparrow \\ \|\overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q)}\| \end{array}$$

□

**also:**

Translation um ein Element  $t \in T(X)$  erhält Abstände und Winkel.

Nicht alle affinen Abbildungen haben diese Eigenschaft, z. B.  $X = \mathbb{R}^2$  mit Standardskalarprodukt.



$$\phi: X \rightarrow X$$

**Frage.** Welche Abbildungen zwischen euklidischen affinen Räumen erhalten Abstände?

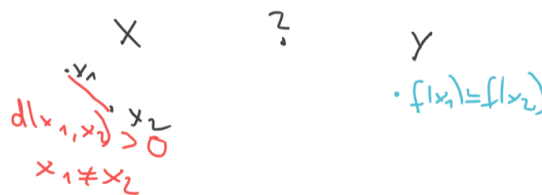
**Definition.** Seien  $X, X'$  metrische Räume mit Metriken  $d, d'$  und  $f: X \rightarrow X'$  eine Abbildung. Wir nennen  $f$  eine *Isometrie*, falls  $\forall p, q \in X$  gilt

$$d'(f(p), f(q)) = d(p, q).$$

**Frage.** Welche *Abbildungen* zwischen euklidischen affinen Räumen erhalten Abstände?

→ Wir können die Frage auf *affine Abbildungen* reduzieren.

**Satz 1.11.2.** Seien  $X, Y$  euklidische affine Räume  $f: X \rightarrow Y$  eine Isometrie. Dann ist  $f$  *affin* und injektiv.



*Beweis.* Sei  $f: X \rightarrow X$  eine Isometrie und  $p \in X$ . Betrachte die Abbildung (mit  $T(X), T(Y)$  Vektorräumen mit Skalarprodukt)

$$F: T(X) \rightarrow T(Y)$$

$$\overrightarrow{px} \mapsto \overrightarrow{f(p)f(x)}.$$

**Behauptung 1.**  $F$  ist eine Isometrie. ■

Seien  $x_1, x_2 \in X$ .

$$\begin{aligned}
 \|F(\overrightarrow{px_1}) - F(\overrightarrow{px_2})\| &= \|\overrightarrow{f(p)f(x_1)} - \underbrace{\overrightarrow{f(p)f(x_2)}}_{=\overrightarrow{f(x_2)f(p)}}\|_{T(Y)} \\
 &= \|\overrightarrow{f(p)f(x_1)} + \overrightarrow{f(x_2)f(p)}\|_{T(Y)} \\
 &= \|\overrightarrow{f(x_2)f(x_1)}\|_{T(Y)} \\
 &= \|\overrightarrow{f(x_2)f(x_1)}\|_{T(Y)} \\
 &= d_Y(f(x_2), f(x_1)) \\
 &= d_X(x_2, x_1) = \overrightarrow{x_2x_1}_{T(X)} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad f \text{ ist Isometrie} \\
 &= \|\overrightarrow{px_1} - \overrightarrow{px_2}\|_{T(X)}.
 \end{aligned}$$

**Behauptung 2.** Ist  $F$  linear, dann ist  $f$  affin. Seien  $x_1, x_2 \in X$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 F(\overrightarrow{x_1x_2}) &= F(\overrightarrow{x_1p} + \overrightarrow{px_2}) \\
 &= F(-\overrightarrow{px_1} + \overrightarrow{px_2}) \\
 &= -F(\overrightarrow{px_1}) + F(\overrightarrow{px_2}) \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad F \text{ ist linear} \\
 &= -\overrightarrow{f(p)f(x_1)} + \overrightarrow{f(p)f(x_2)} \\
 &= \overrightarrow{f(x_1)f(x_2)}.
 \end{aligned}$$

Also ist Abbildung

$$\overrightarrow{x_1x_2} \mapsto \overrightarrow{f(x_1)f(x_2)}$$

linear! ■

Es genügt also folgendes Lemma zu beweisen

**Lemma 1.11.3.** Seien  $V, W$  euklidisch Vektorräume,  $F: V \rightarrow W$  eine Isometrie mit  $F(0) = 0$ . Dann ist  $F$  linear und injektiv.

*Beweis von Lemma 1.11.3.*  $F$  ist injektiv: Sei  $v', v \in V$  mit  $F(v) = F(v')$ . Dann

$$0 = d_W(F(v), F(v')) = d_V(v, v'),$$

$\uparrow$   
 $f$  Isometrie

also  $v = v'$ .

Zur Linearität von  $F$ :  $F$  ist Isometrie, also gilt  $\forall v_1, v_2 \in V$

$$\underbrace{\|F(v_1) - F(v_2)\|}_{d_W(F(v_1), F(v_2))} = \underbrace{\|v_1 - v_2\|}_{d_V(v_1, v_2)}.$$

Aus  $F(0) = 0$  folgt

$$\|F(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V$$

Berechne für  $v_1, v_2 \in V$ :

$$\|v_1 - v_2\|^2 = \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2\langle v_1, v_2 \rangle.$$

Es gilt auch

$$\underbrace{\|F(v_1) - F(v_2)\|^2}_{\|v_1 - v_2\|^2} = \underbrace{\|F(v_1)\|^2}_{\|v_1\|^2} + \underbrace{\|F(v_2)\|^2}_{\|v_2\|^2} - 2\langle F(v_1), F(v_2) \rangle.$$

Also folgt

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle F(v_1), F(v_2) \rangle \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Seien  $v, v' \in V$ .

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle F(v + v') - F(v) - F(v'), F(v + v') - F(v) - F(v') \rangle}_{\stackrel{?}{=} 0} &= \langle F(v + v'), F(v + v') \rangle - \langle F(v + v'), F(v) \rangle - \dots \\ &= \langle v + v', v + v' \rangle - \langle v + v', v \rangle - \dots + \langle v', v' \rangle \\ &= \langle v + v' - v - v', v + v' - v - v' \rangle \quad \forall v, v' \in V. \end{aligned}$$

Multiplikation mit Skalaren. Sei  $v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \langle F(\lambda v) - \lambda F(v), F(\lambda v) - \lambda F(v) \rangle &= \langle F(\lambda v), F(\lambda v) \rangle - 2\langle F(\lambda v), \lambda F(v) \rangle + \langle \lambda F(v), \lambda F(v) \rangle \\ &= \langle F(\lambda v), F(\lambda v) \rangle - 2\lambda \langle F(\lambda v), F(v) \rangle + \lambda^2 \langle F(v), F(v) \rangle \\ &= \langle \lambda v, \lambda v \rangle - 2\lambda \langle \lambda v, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle = (\lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2) \langle v, v \rangle \\ &= 0, \end{aligned} \quad \square$$

also  $F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V. \quad \square$

**Definition.** Eine Isometrie  $f: X \rightarrow X$  eines euklidischen affinen Raumes  $X$  nennen wir *Kongruenz* (also nach Satz 1.11.2 immer eine Affinität).

**Lemma 1.11.4.** Sei  $f: X \rightarrow X$  eine Affinität eines euklidischen affinen Raumes  $X$ . Dann ist  $f$  eine *Kongruenz* genau dann, wenn die zugehörige lineare Abbildung  $F: T(X) \rightarrow T(X)$  *orthogonal* ist.



*Beweis.*  $f$  ist Isometrie gdw

$$d(f(p), f(q)) = d(p, q) \quad \forall p, q \in X,$$

d. h. gdw

$$\|f(p)f(q)\| = \underbrace{\|\vec{pq}\|}_{\|F(\vec{pq})\|} \quad \forall p, q \in X.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass  $F$  orthogonal ist (also das Skalarprodukt erhält)  $\square$

**Definition.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum,  $f: X \rightarrow X$  eine Abbildung. Sei  $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ . Wir nennen  $f$  eine *Ähnlichkeit* mit (Ähnlichkeits-) Faktor  $\rho$  wenn  $\forall p, q \in X$  gilt

$$d(f(p), f(q)) = \rho \cdot d(p, q).$$

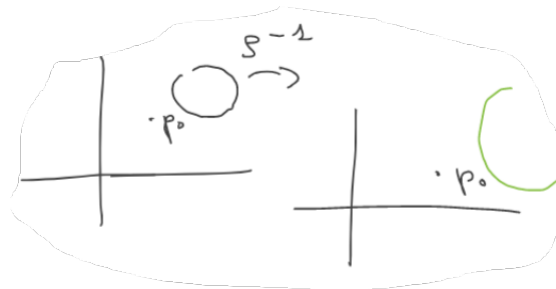
**Korollar (aus Satz 1.11.2).** Eine Ähnlichkeit  $f: X \rightarrow X$  eines euklidischen affinen Raumes  $X$  ist eine Affinität.

*Beweis.* Sei  $p_0 \in X$ . Wir definieren eine Affinität

$$\rho^{-1}: X \rightarrow X$$

durch  $\rho^{-1}(p_0) = p_0$  und

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}: T(X) &\rightarrow T(X) \\ T(X) \ni v &\mapsto \rho^{-1}v. \end{aligned}$$



Wir betrachten die Abbildung

$$\rho^{-1} \circ f: X \rightarrow X.$$

**Behauptung.**  $\rho^{-1} \circ f$  ist eine Isometrie.

Seien  $p, q \in X$ . Dann gilt

$$d(\rho^{-1} \circ f(p), \rho^{-1}(f(q))) = \|\overrightarrow{\rho^{-1} \circ f(p) \rho^{-1} \circ f(q)}\|$$

also

$$\begin{aligned} d(\rho^{-1} \circ f(p), \rho^{-1}(f(q))) &= \|\overrightarrow{\rho^{-1} f(p) f(q)}\| \\ &= \rho^{-1} \|\overrightarrow{f(p) f(q)}\| \\ &= d(p, q), \end{aligned}$$

$\uparrow$   
 $f$  ist Ähnlichkeit mit Faktor  $\rho$

also ist nach Satz 1.11.2  $\rho^{-1} \circ f$  injektiv und affin. Damit ist auch  $f$  Affinität.  $\square$

**Vorlesung 9**

Fr 21.05. 10:15

Eine Weitere Eigenschaft von Ähnlichkeiten:

**Satz 1.11.5.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum und  $f: X \rightarrow X$  eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor  $\rho \neq 1$ . Dann besitzt  $f$  genau einen Fixpunkt.

*Beweisidee.* Nach obigem Korollar ist  $f$  eine Affinität. Sei  $F: T(X) \rightarrow T(X)$  die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist  $\frac{1}{\rho}F$  orthogonal, also haben alle Eigenwerte von  $F$  Betrag  $\rho$ .

Nach Wahl eines Koordinatensystem wird  $f$  beschrieben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \underbrace{Ax + b}_{\stackrel{?}{=}x}. \end{aligned}$$

mit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  und Fixpunkten beschrieben durch

$$Ax + b = x,$$

also  $(A - I_n)x = -b$ , da 1 kein Eigenwert von  $A$  ist, gilt  $\det(A - I_n) \neq 0$ . □

Ähnlichkeiten erhalten Winkel. Gibt es noch weitere Affinitäten eines euklidischen affinen Raumes, die Winkel erhalten?

**Definition.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum,  $L, L' \subseteq X$  Geraden mit  $L \cap L' \neq \emptyset$ . Wir nennen  $L$  und  $L'$  orthogonal, wenn gilt

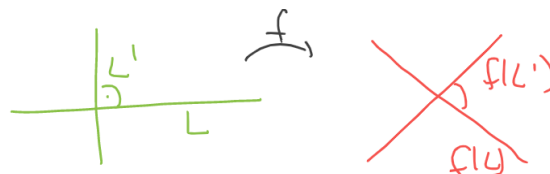
$$\sphericalangle(L, L') = \frac{\pi}{2}.$$

Schreibe auch  $L \perp L'$ .

**Satz 1.11.6.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum und  $f: X \rightarrow X$  eine Affinität mit der Eigenschaft, dass für alle Geraden  $L, L'$  mit  $L \cap L' \neq \emptyset$  und  $L \perp L'$  gilt, dass

$$f(L) \perp f(L').$$

Dann ist  $F$  eine Ähnlichkeit.



*Beweis.* Sei  $F: T(X) \rightarrow T(X)$  die zugehörige bijektive lineare Abbildung. Seien  $p, q, q' \in X$  mit  $p \vee q = L$ ,  $p \vee q' = L'$  und  $L \perp L'$ . Dann gilt  $\angle(L, L') = \frac{\pi}{2}$ , also

$$\arccos \frac{|\langle \vec{pq}, \vec{pq'} \rangle|}{\|\vec{pq}\| \|\vec{pq'}\|} = \frac{\pi}{2}$$

d. h.  $\langle \vec{pq}, \vec{pq'} \rangle = 0$ .



Die Geraden  $f(L)$  und  $f(L')$  sind gegeben durch

$$f(p) \vee f(q) = f(L) \quad f(p) \vee f(q') = f(L')$$

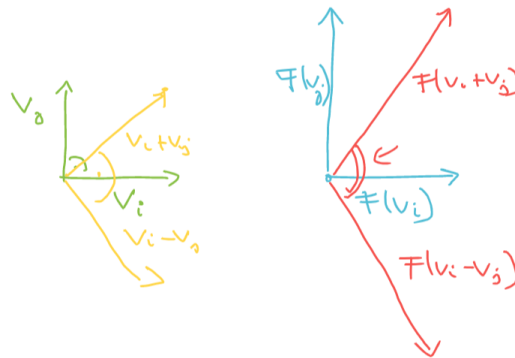
und wir können annehmen (wegen  $f(L) \perp f(L')$ ), dass

$$\underbrace{\langle \overrightarrow{f(p)f(q)}, \overrightarrow{f(p)f(q')} \rangle}_{\langle \underbrace{\overrightarrow{f(p)f(q)}}_{\substack{\uparrow \\ T(X)}}, \underbrace{\overrightarrow{f(p)f(q')}}_{\substack{\uparrow \\ T(X)}} \rangle} = 0.$$

Es gilt also, dass für alle  $v, w \in T(X)$  mit  $\langle v, w \rangle = 0$  gilt  $\langle F(v), F(w) \rangle = 0$ . Wir haben den Beweis von Satz 1.11.6 auf folgendes Lemma reduziert.  $\square$

**Lemma 1.11.7.** Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum,  $F: V \rightarrow V$  ein Isomorphismus mit  $F(v) \perp F(w)$  für alle  $v, w \in V$  mit  $v \perp w$ . Dann existiert  $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$  s. d.  $\frac{1}{\rho} \cdot F$  orthogonal ist.

*Beweis.* Sei  $n = \dim V$  und  $v_1, \dots, v_n$  eine Orthonormal von  $V$ , d. h.  $\|v_i\| = 1$ ,  $1 \leq i \leq n$  und  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  für  $i \neq j$ . Sei  $\rho_i := \|F(v_i)\|$ ,  $1 \leq i \leq n$ .



Für  $j \neq i$  gilt

$$\langle v_i + v_j, v_i - v_j \rangle = \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\|v_i\|^2} + \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{\|v_j\|^2} = 0,$$

also  $v_i + v_j \perp v_i - v_j$ . Nach Annahme gilt dann auch

$$\langle F(v_i), F(v_i) \rangle + \underbrace{\langle F(v_j), F(v_i) \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle F(v_i), F(v_j) \rangle}_{=0} - \langle F(v_j), F(v_j) \rangle = \langle F(v_i + v_j), F(v_i - v_j) \rangle = 0.$$

Also gilt

$$\underbrace{\|F(v_i)\|^2}_{\rho_i^2} = \underbrace{\|F(v_j)\|^2}_{\rho_j^2} \quad \forall i, j$$

und damit  $\rho_i = \rho_j \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$ . Schreibe  $\rho = \rho_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$  für den gemeinsamen Wert. Dann ist die Abbildung  $\frac{1}{\rho}F$  orthogonal, da  $v_1, \dots, v_n$  auf die Orthonormalbasis  $\frac{1}{\rho}F(v_1), \dots, \frac{1}{\rho}F(v_n)$  abgebildet wird.  $\square$

Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Affinität gegeben durch

$$x \mapsto Ax + b \quad A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{R}^n.$$

Im Obigen haben wir gesehen, dass gilt:  $f$  ist Kongruenz  $\iff A$  ist orthogonal,  $f$  ist Ähnlichkeit  $\iff \frac{1}{\rho}A$  ist orthogonal für ein  $\rho \geq 0$ .

**Frage.** Wie können wir  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  für eine allgemeine Affinität  $f$  mit Hilfe von / bis auf eine orthogonale Matrix möglichst einfach ausdrücken?

Betrachte  $\mathbb{R}^n$  als euklidischen affinen Raum mit Standard-skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_n) & \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned}$$

**Satz 1.11.8 (Hauptachsentransformation von Affinitäten).** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Affinität gegeben durch  $x \mapsto Ax+b$  mit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Dann gibt es orthogonale Matrizen  $S, T \in \text{O}(n)$  und eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

mit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ , s. d.

$$A = SDT$$

d. h.

$$f(x) = SDTx + f(0).$$

*Beweis.* Wir bilden die Matrix  $C = {}^tAA$ .

- $C$  ist symmetrisch da

$${}^tC = {}^t({}^tAA) = {}^tA {}^t{}^tA = {}^tAA = C.$$

- $C$  ist positiv definit, denn  $I_n$  ist positiv definit und daher nach dem Sylvester'schen Trägheitsgesetz auch  $C$ . Aus der Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen (AGLA I) folgt, dass es eine Matrix  $T \in \text{O}(n)$  mit

$$TC {}^tT = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n \end{pmatrix},$$

$\beta_1, \dots, \beta_n > 0$ . Wir definieren  $\alpha_i = \sqrt{\beta_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$  und

$$D := \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

Dann gilt

$$T \underbrace{{}^tC}_{{}^tAA} {}^tT = D^2 = {}^tDD,$$

also

$$I_n = \underbrace{{}^tA^{-1} {}^tT^t D}_{S} \underbrace{DT A^{-1}}_{{}^tS}.$$

Sei  $S := {}^tA^{-1} {}^tT^t D$ . Dann gilt  ${}^tSS = I_n$  und  $S \in \text{O}(n)$  ist orthogonal. Wir erhalten  ${}^tS = DTA^{-1}$  und  $A = SDT$ .  $\square$

**Korollar.** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Isomorphismus des Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$ . Dann gibt es eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ , s.d. die Vektoren  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  eine Orthogonalbasis bilden.

*Beweis.* Sei  $F$  bezüglich der Standardbasis der  $\mathbb{R}^n$  gegeben durch die Matrix  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Aus Satz 1.11.8 folgt, dass es orthogonale Matrizen  $S, T \in \text{O}(n)$  gibt mit  $A = SDT$  und

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$  einer Diagonalmatrix. Sei  $v_i = {}^t T e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .  $T$  ist orthogonal, also auch  ${}^t T$  und damit ist  $v_1, \dots, v_n$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Es gilt

$$\begin{aligned} F(v_i) &= A {}^t T e_i \\ &= SD \underbrace{{}^t T T}_{I_n} e_i \\ &= S D e_i = S(\alpha_i e_i) \\ &= \alpha_i S e_i. \end{aligned}$$

Die Matrix  $S$  ist orthogonal, also sind die Vektoren  $S e_1, \dots, S e_n$  eine Orthonormalbasis. Da  $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ , bilden  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  eine orthogonale Basis der  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Beispiel.**

