**Vorlesungsmitschrift**

# AGLA II

**Prof. Dr. Damaris Schindler**

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 26. Mai 2020

**Disclaimer**

Nicht von Professor Schindler durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit ihrerseits.

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Affine Geometrie

### Vorlesung 1

Di 21.04. 10:15

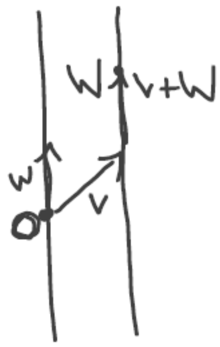
## §1.1 Was ist ein affiner Raum?

**Beispiel 1.1.1 (aus der AGLA I).** $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. In diesen Räumen gibt es einen ausgezeichneten „Usprung".

**Frage.** Wie könne wir eine affine Ebene / affine Räume modellieren, wobei alle Punkte gleichberechtigt sind?

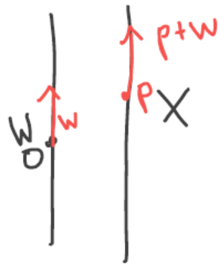
**Idee.** Verwende affine Unterräume.

**Beispiel 1.1.2.** Sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und $v \in V$. Wir nennen $X = v+W$ einen affinen Unterraum von $V$. $X$ ist im Allgemeinen selbst kein Vektorraum unter der Addition in $V$, aber $W$ „operiert" auf $X$.



Für $w \in W$ definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau_w \colon X &\to X \\ p &\mapsto p + w. \end{aligned}$$




Sei

$$\mathrm{Bij}(X) = \{\, f \colon X \to X, f \text{ ist bijektiv} \,\}\,.$$

Dann ist $\tau_w \in \mathrm{Bij}(X)$ für alle $w \in W$.

**Bemerkung.** $\mathrm{Bij}(X)$ ist eine Gruppe unter Verkettung von Abbildung. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \tau \colon W &\to \mathrm{Bij}(X) \\ w &\mapsto \tau_w. \end{aligned}$$

**Lemma 1.1.1.** Die Abbildung $\tau$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

*Beweis.* Seien $w, w' \in W$ Dann

$$\begin{aligned} \tau_w \circ \tau_{w'} \colon X &\to X \\ p &\mapsto p + \underbrace{w' + w}, \end{aligned}$$

also

$$\tau(w) \circ \tau(w') = \tau_w \circ \tau_{w'} = \tau_{w+w'} = \tau(w + w'). \qquad \square$$

Es gilt noch mehr:

für $p, q \in X$ besteht genau ein $w \in W$ mit $\tau_w(p) = q$.


## Gruppenoperationen

**Beispiel 1.1.3.** Betrachte ein gleichseitiges Dreieck $D$ und Spiegelungen / Drehungen die $D$ auf sich selbst abbilden.


Diese formen eine Gruppe (welche?) und „operieren“ auf $D$.

**Definition 1.1.1.** Sei $X$ eine Menge und $G$ eine Gruppe. Eine Operation von $G$ auf $X$ ist ein Homomorphismus von Gruppen

$$\begin{aligned} \tau\colon G &\to \operatorname{Bij}(X) \\ g &\mapsto \tau_g. \end{aligned}$$

**Bemerkung.** $\tau$ ist ein Homomorphismus d. h. $\forall\ g, g' \in G$

$$\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{gg'}.$$

Für $x \in X$ nennen wir

$$G(x) = \{\, \tau_g(x) \mid g \in G \,\}$$

die Bahn von $x$ unter $G$.

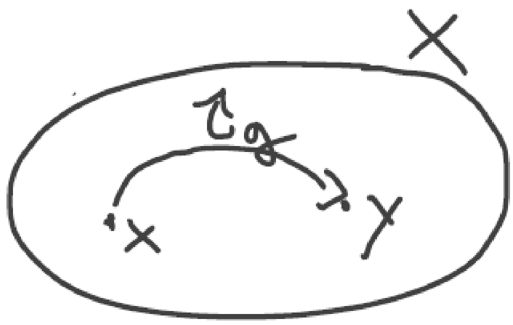
**Beispiel 1.1.4.** i) Sei $G$ eine Gruppe und $X = G$ die Linkstranslation $l\colon G \to \mathrm{Bij}(G)$, $g \mapsto l_g$ mit $l_g(x) = gx \quad \forall\, x \in G$ ist eine Gruppenoperation von $G$ auf sich selbst.

ii)

$$\begin{aligned} k\colon G &\to \mathrm{Bij}(G) \\ g &\mapsto k_g \end{aligned}$$

mit $k_g(x) = gxg^{-1} \quad \forall\, x \in G$ ist eine Gruppenoperation.

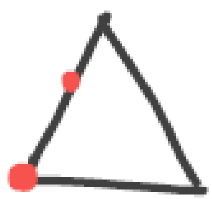
**Frage.** Sei $\tau\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$ eine Gruppenoperation, $x, y \in X$. Wann gibt es ein $g \in G$ mit $\tau_g(x) = y$?




**Definition.** Sei $\tau\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$ eine Gruppenoperation von $G$ auf $X$. Wir nennen $\tau$ *einfach transitiv*, wenn $\forall\ x, y \in X$ *genau ein* $g \in G$ besteht mit

$$\tau_g(x) = y.$$

**Beispiel.**
- Die Gruppenoperation aus Beispiel 1.1.3 ist *nicht* einfach transitiv



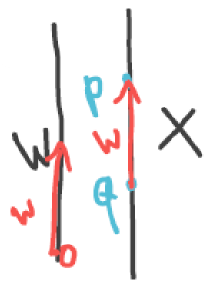
- Die Linkstranslation aus Beispiel 1.1.4 i) ist immer einfach transitiv.

Zurück zum Beispiel 1.1.2 ($V$ $K$-Vektorraum, $W \subseteq V$ Untervektorraum, $v \in V$, $X = v + W$)

Wir haben Translationen definiert

$$\begin{aligned} \tau\colon W &\to \mathrm{Bij}(X) \\ x &\mapsto \tau_w \end{aligned}$$

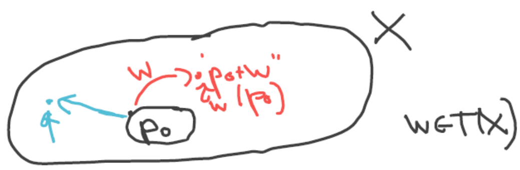
mit $\tau_w\colon X \to X$, $p \mapsto p + w$. $\tau$ ist eine einfach transitive Gruppenoperation von $W$ auf $x$.




**Definition.** Sei $K$ ein Körper. Ein affiner Raum über $K$ ist ein Tripel $(X, T(X), \tau)$ mit

- $X \neq \varnothing$ eine Menge
- $T(X)$ ein $K$-Vektorraum
- $\tau\colon T(x) \to \mathrm{Bij}(X)$ eine einfach transitive Gruppenoperation

**Konvention.** $X = \varnothing$ ohne Spezifikation von $T(X)$, $\tau$ nennen wir auch einen affinen Raum.

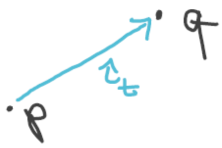



**Definition.** Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum über einem Körper $K$. Dann nennen wir $\dim_K T(X)$ die Dimension von $X$, schreiben auch $\dim X$.

Ist $\dim X = 1$ bzw. $\dim(X) = 2$, dann nennen wir $X$ eine affine Gerade bzw. affine Ebene.

Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum, $p, q \in X$. Dann $\exists!\, t \in T(X)$ mit $\tau_t(p) = q$.

Schreibe $\overrightarrow{pq} = t \in T(X)$ als $\tau_{\overrightarrow{pq}}(p) = q$.

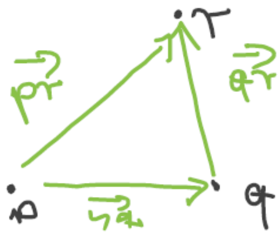



Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\to T(X) \\ (p, q) &\mapsto \overrightarrow{pq}. \end{aligned}$$

**Frage.** Welche Eigenschaften hat die Abbildung $(p, q) \mapsto \overrightarrow{pq}$ in einem allgemeinen affinen Raum?

**Lemma 1.1.2.** Sei $X$ ein affiner Raum, $p, q, r \in X$. Dann gilt $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.




*Beweis.* $\tau \colon T(X) \to \mathrm{Bij}(X)$ ist ein Homomorphismus. Also gilt $\tau_{\overrightarrow{qr}} \circ \tau_{\overrightarrow{pq}} = \tau_{\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}}$. Es gilt damit $\tau_{\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}}(p) = r$. Also $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$. □

## §1.2 Affine Abbildungen

Seien $V, W$ $K$-Vektorräume. In der AGLA I: lineare Abbildungen

$$F \colon V \to W,$$

d. h. $F$ respektiert die Vektorraum-Struktur

$$\begin{aligned} F(v_1 + v_2) &= F(v_1) + F(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V \\ F(\lambda v) &= \lambda F(v) \quad \forall\, \lambda \in K\, \forall\, v \in V. \end{aligned}$$

**Frage.** Was sind natürliche Abbildungen zwischen affinen Räumen?

Seien $X, Y$ affine Räume über einem Körper $K$.


$$\underset{\substack{\cap \\ T(X)}}{\overrightarrow{pq}} \rightsquigarrow \underset{\substack{\cap \\ T(Y)}}{\overrightarrow{f(p)f(q)}}.$$

**Definition.** Wir nennen eine Abbildung $f\colon X \to Y$ affin, wenn es eine $K$-lineare Abbildung $F\colon T(X) \to T(Y)$ gibt, sodass $\forall\, p, q \in X$ gilt

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = F(\overrightarrow{pq}).$$

**Bemerkung.** i) Es gibt im Allgemeinen verschiedene affine Abbildungen $f\colon X \to Y$, die zur gleichen linearen Abbildung $F\colon T(X) \to T(Y)$ gehören.

ii) Sei $p_0 \in X$ fest und $f\colon X \to Y$ affin.

Für $q \in X$ gilt

$$\begin{aligned} f(q) &= \tau_{\overrightarrow{f(p_0)f(q)}}(f(p0)) \\ &= \tau_{F(\overrightarrow{p_0q})}(f(p0)). \end{aligned}$$

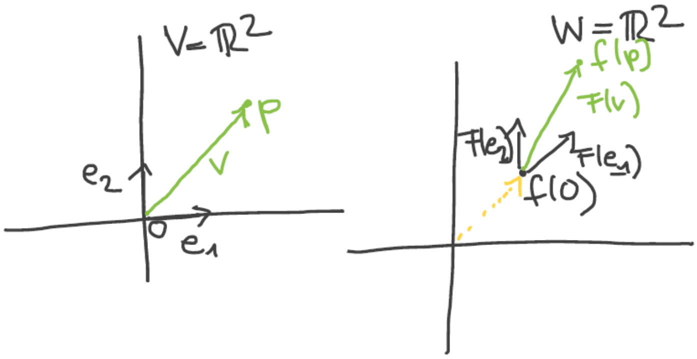
Also bestimmen $f(p_0)$ und $F$ zusammen die Abbildung $f\colon X \to Y$.

**Beispiel.** Seien $V, W$ $K$-Vektorräume

$$X = (V, V, \tau), \quad Y = (W, W, \tau).$$

Eine affine Abbildung $f\colon V \to W$ ist eindeutig bestimmt durch $f(0)$ und eine lineare Abbildung $F\colon V \to W$. Es gilt

$$f(v) = f(0) + F(v) \quad \forall v \in V.$$

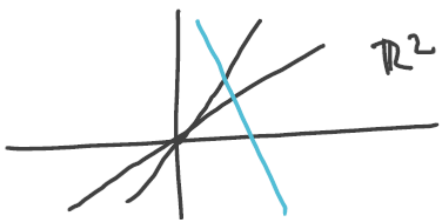



**Bemerkung / Übung.** Eine affine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, wenn die zugehörige Abbildung $F\colon T(X) \to T(Y)$ es ist.

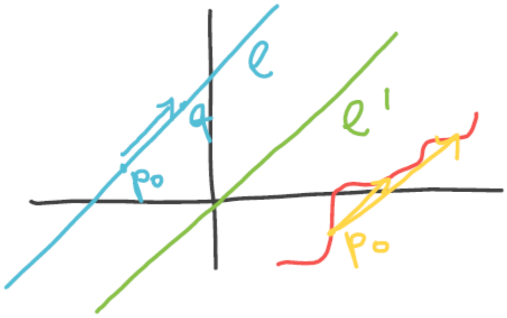
**Definition.** Wir nennen eine bijektive affine Abbildung $f\colon X \to Y$ eine Affinität.

### Affine Unterräume

**Beispiel ($\mathbb{R}^2$ als Vektorraum.).** Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind $\varnothing$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ und Geraden durch 0.




Betrachte nun $\mathbb{R}^2$ als affinen Raum.




**Idee.** Wir wollen $l$ und $l'$ als affine Unterräume von $\mathbb{R}^2$ definieren, da die Verschiebung von $l, l'$ jeweils Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind.

**Definition.** Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum und $Y \subseteq X$. Wenn es einen Punkt $p_0 \in Y$ gibt, sodass

$$T(Y) := \{ \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \}$$

ein Untervektorraum von $T(X)$ ist, dann nennen wir $Y$ einen affinen Unterraum von $X$.

**Lemma 1.2.1.** Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum eines affinen Raumes $(X, T(X), \tau)$. Dann gilt

$$T(Y) = \{ \overrightarrow{pq} \in T(X), q \in Y \}$$

für jeden beliebigen Punkt $p \in Y$.

*Beweis.* Sei $p_0 \in Y$ ein fester Punkt mit

$$T(Y) = \{ \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \}$$

Untervektorraum von $T(X)$. Dann gilt für $p \in Y$

$$\{ \overrightarrow{pq} \mid q \in Y \} = \overrightarrow{pp_0} + \{ \overrightarrow{p_0 q} \mid q \in Y \} = \underset{\substack{\cap \\ T(Y)}}{\overrightarrow{pp_0}} + T(Y) = T(Y), \qquad \square$$

da $\overrightarrow{pp_0} = -\overrightarrow{p_0 p} \in T(Y)$.

**Definition.** Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum. Wir nennen $\dim_K T(Y)$ die Dimension von $Y$ und schreiben

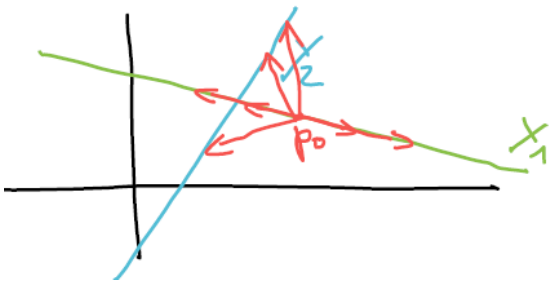
$$\dim Y = \dim_K T(Y).$$

### Vorlesung 2

Fr 24.10. 10:15

## §1.3 Durchschnitt und Verbindung affiner Räume

**Frage.** Sei $X$ ein affiner Raum, $Y_1, Y_2$ affine Unterräume von $X$. Sind $Y_1 \cap Y_2, Y_1 \cup Y_2$ auch affine Unterräume von $X$?




$$X = \mathbb{R}^2$$

**Lemma 1.3.1.** Sei $X$ ein affiner Raum, $Y_i$, $i \in I$, eine Familie von affinen Unterräumen von $X$.

Dann ist $Y \coloneqq \bigcap_{i\in I} Y_i$ ein affiner Unterraum von $X$.

Wenn $Y \neq \varnothing$, dann gilt

$$T(Y) = \bigcap_{i\in I} T(Y_i).$$

*Beweis.* Falls $Y = \varnothing$: ✓

Wir nehmen also an $Y \neq \varnothing$. Sei $p_0 \in Y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} T(Y) &= \left\{ \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ T(X)}}{\overrightarrow{p_0 q}}, q \in \bigcap_{i\in I} Y_i \right\} \\ &= \bigcap_{i\in I} \underbrace{\{ \overrightarrow{p_0 q}, q \in Y_i \}}_{=T(Y_i)} \\ &= \bigcap_{i\in I} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Untervektorräume von } T(X)}}{T(Y_i)}. \end{aligned}$$

Also ist $T(Y)$ ein Untervektorraum von $T(X)$ und $T(Y) = \bigcap_{i\in I} T(Y_i)$. $\square$

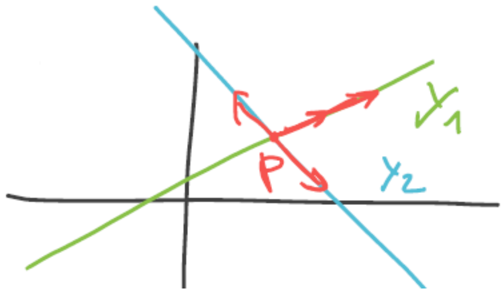
**Bemerkung.** In obiger Notation ist $\bigcup_{i\in I} Y_i$ im Allgemeinen kein affiner Unterraum von $X$.

**Frage.** Finde den „kleinsten“ affinen Unterraum von $X$, der $\bigcup_{i\in I} Y_i$ enthält! (z. B. $X \supseteq \bigcup_{i\in I} Y_i$, aber $X$ ist im Allgemeinen nicht „minimal“).

**Definition.** Sei $X$ ein affiner Raum, $Y_i$, $i \in I$ affine Unterräume von $X$. Wir nennen

$$\bigcap_{\substack{Y\subseteq X \text{ aff. Unterraum} \\ \bigcup_{i\in I} Y_i \subseteq Y}} Y$$

den *Verbindungsraum* der affinen Unterräume $Y_i$, $i \in I$. Schreibe $\bigvee_{i\in I} Y_i$.




$X = \mathbb{R}^2$, $Y_1 \vee Y_2 = X$, $Y = Y_1 \vee Y_2$, $T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2)$.

**Beispiel.**

**Frage.** Wie kann man im Allgemeinen $T(Y_1 \vee Y_2)$ aus $T(Y_1), T(Y_2)$ bestimmen?

**Lemma 1.3.2.** Sei $X$ ein affiner Raum, $Y_1, Y_2 \neq \varnothing$ affine Unterräume von $X$.

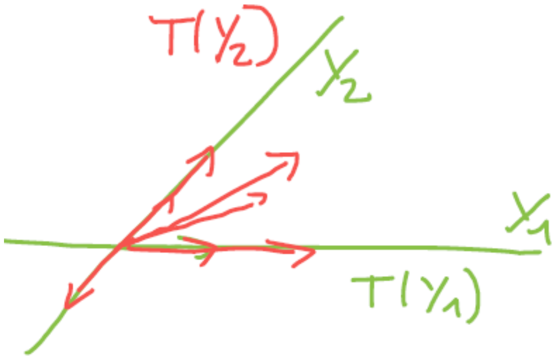
a) Sei $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$. Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

b) Sei $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, $p_1 \in Y_1, p_2 \in Y_2$ und $Y = p_1 \vee p_2$.

Dann gilt:

$$T(Y_1 \vee Y_2) = (T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(Y).$$




*Beweis.* a) Sei $p \in Y_1 \cap Y_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(Y_1) \cup T(Y_2) &= \{ \overrightarrow{pq} \mid q \in Y_1 \cup Y_2 \} \\ &\subseteq T(Y_1 \vee Y_2), \end{aligned}$$

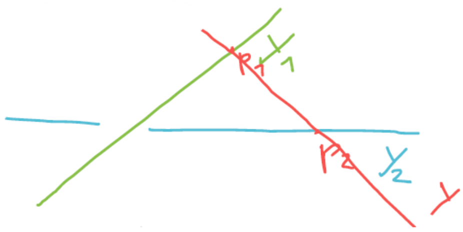
also $T(Y_1) + T(Y_2) \subseteq T(Y_1 \vee Y_2)$.

Sei $Y = \{ \tau_t(p) \mid t \in T(Y_1) + T(Y_2) \}$. Dann ist $Y$ affiner Unterraum von $X$ mit $Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y$, also $Y_1 \vee Y_2 \subset Y$, also $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$. Also gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) \subseteq T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

Also $T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2)$.

b) $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, $p_1 \in Y_1$, $p_2 \in Y_2$, $Y = p_1 \vee p_2$.




Schreibe $Y_1 \vee Y_2 = Y_1 \vee Y \vee Y_2$ (verwende dazu $Y \subseteq Y_1 \vee Y_2$). Verwende a) und leite ab, dass gilt:

$$\begin{aligned} T(Y_1 \vee Y \vee Y_2) &= T(Y_1) + T(Y \vee Y_2) \\ &= T(Y_1) + T(Y) + T(Y_2) \\ &= (T(Y_1) + T(Y_2)) \overset{!}{\oplus} T(Y). \end{aligned}$$

Es gilt

$$T(Y) = \{\, \lambda\overrightarrow{p_1p_2} \mid \lambda \in K \,\}.$$

Wir wollen zeigen

$$(T(Y_1) + T(Y_2)) \cap T(Y) = \{\, 0 \,\}.$$

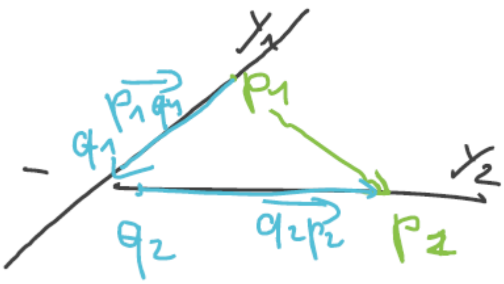
Es genügt zu zeigen

$$\overrightarrow{p_1p_2} \notin T(Y_1) + T(Y_2).$$

Gegenannahme:

$$\overrightarrow{p_1p_2} = \underset{\underset{T(Y_1)}{\Cap}}{\overrightarrow{p_1y_1}} + \underset{\underset{T(Y_2)}{\Cap}}{\overrightarrow{q_2p_2}}$$

mit $q_1 \in Y_1$, $q_2 \in Y_2$.




Dann gilt

$$\overrightarrow{q_1q_2} = \overrightarrow{q_1p_1} + \overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2q_2} = 0,$$

also $q_1 = q_2$ und $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$ ↯. $\square$

Als nächstes: $\dim(Y_1 \vee Y_2)$ ist durch $\dim_K T(Y_1 \vee Y_2)$ gegeben, also sollten wir aus Lemma 1.3.2 für $Y_1 \vee Y_2$ ableiten können.

**Lemma 1.3.3.** Sei $X$ ein affiner Raum, $Y_1, Y_2 \neq \varnothing$ affine Unterräume von $X$.

a) Sei $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$. Dann gilt $\dim_{(}(Y)_1 \vee Y_2) = \dim_{(}(Y)_1) + \dim_{(}(Y)_2) - \dim_{(}(Y)_1 \cap Y_2)$.

b) Sei $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. Dann gilt

$$\dim_{(}(Y)_1 \vee Y_2) = \dim_{(}(Y)_1) + \dim_{(}(Y)_2) - \dim_{(}(T)(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1.$$

*Beweis.* a) Aus Lemma 1.3.2 folgt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2),$$

aus der Dimensionsformel für Untervektorräume folgt

$$\begin{aligned}\dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim T(Y_1 \vee Y_2)\\ &= \dim(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2))\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 1.3.1}}}{=} \dim T(Y_1) + \dim T(Y_2) - \dim T(Y_1 \cap Y_2)\\ &= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 \cap Y_2.\end{aligned}$$

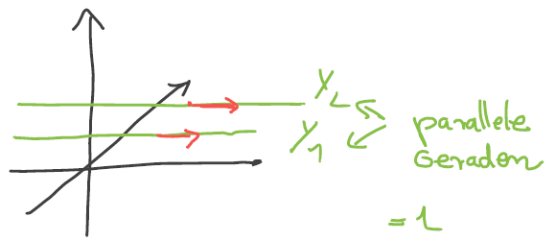
b) $Y_1 \cap Y_2$, $p_1 \in Y_1$, $p_2 \in Y_2$, $Y = p_1 \vee p_2$.

Dann ist

$$\dim Y = \dim T(Y) = 1.$$

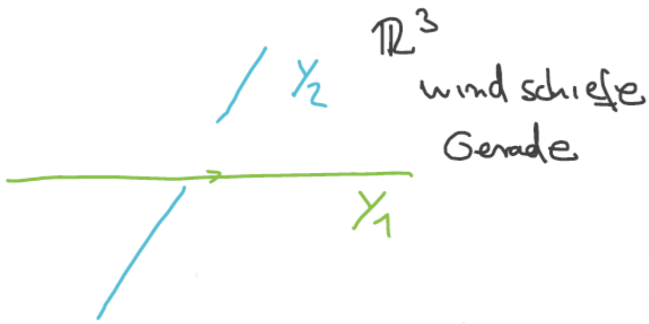
Wir erhalten

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1$$ □




**Beispiel ($X = \mathbb{R}^3$).**

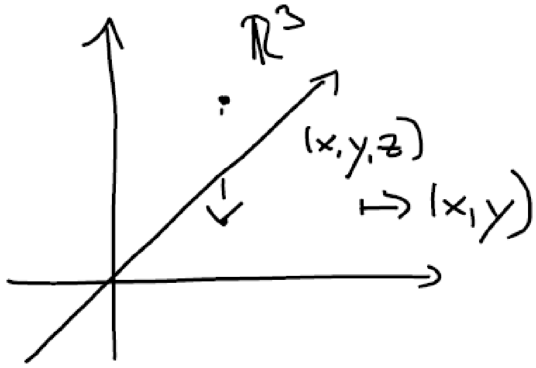
$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - \underbrace{\dim(T(Y_1) \cap T(Y_2))}_{=1} + 1 = 2$$



$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - 0 + 1 = 3$$

und $Y_1 \vee Y_2 = X$.

## §1.4 Parallelprojektionen




**Wiederholung (Projektionen aus der AGLA I). Beispiel.**

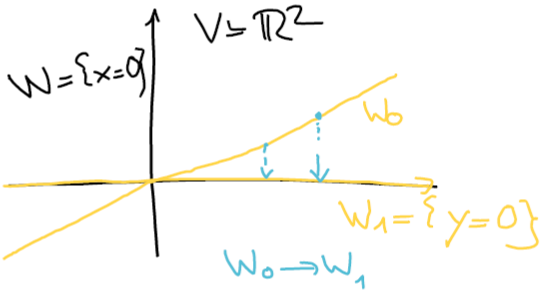
Sei $V$ ein $K$-Vektorraum, $W, W_1 \subset V$ $K$-Untervektorräume mit $V = W \oplus W_1$. Schreibe $v \in V$ in der Form $v = w + w_1$ und mit $w \in W$, $w_1 \in W_1$. Definiere

$$\begin{aligned} P_W \colon V &\to W_1 \\ \underset{\underset{w+w_1}{\parallel}}{v} &\mapsto w_1. \end{aligned}$$

Ein paar Eigenschaften von $P_W$:

- $P_W \colon V \to W_1$ ist eine lineare Abbildung,
- $\operatorname{Ker} P_W = W$,
- $P_W|_{W_1} = \mathrm{Id}_{W_1}$.

Als Nächstes: Wir schränken $P_W$ ein auf einen Untervektorraum $W_0$ von $V$.




**Lemma 1.4.1.** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum, $W, W_0, W_1 \subseteq V$ Untervektorräume mit $V = W \oplus W_0 = W \oplus W_1$.

Dann ist $P_W|_{W_0} \colon W_0 \to W_1$ ein Isomorphismus (Notation wie oben).

*Beweis.* Es gilt $\dim W_0 = \dim W_1$ und es genügt zu zeigen, dass $P_W|_{W_0}$ injektiv ist.

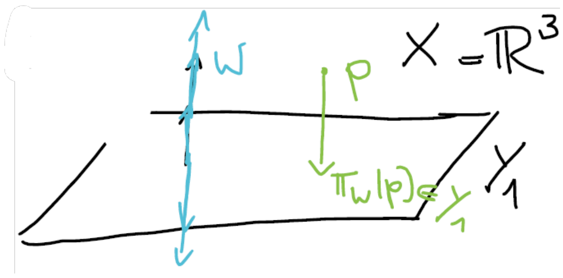
Sei $P_W|_{w_0} = w_1$ für $w_0 \in W_0$, $w_1 \in W_1$. Dann ist $w_0 = w + w_1$ mit $w \in W$, $w_1 \in W_1$, also

$$w_1 = \underset{\substack{\cap \\ W_0}}{w_0} - \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} \in W_0 \oplus W, \qquad \square$$

und diese Zerlegung ist eindeutig.

## Parallelprojektionen für affine Räume

Sei $X$ ein affiner Raum (über einem Körper $K$), $Y_1 \subseteq X$ ein affiner Unterraum




**Beispiel.**

Sei $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit $T(X) = T(Y_1) \oplus W$.

**Ziel.** Definiere eine Projektionsabbildung

$$\pi_W : X \to Y_1$$

„längs $W$“.

Für $p \in X$ definiere

$$W(p) := \{ x \in X \mid \overrightarrow{px} \in W \}$$

**Lemma 1.4.2.** Notation wie oben. Für $p \in X$ gilt

$$\#(Y_1 \cap W(p)) = 1.$$

*Beweis.* Wir berechnen

$$\dim Y_1 \cap W(p).$$

Sei $x = \dim X$, verwende Lemma 1.3.3 b). Falls $Y_1 \cap W(p) = \varnothing$, dann

$$\begin{aligned}\dim Y_1 \vee W(p) &= \dim Y_1 + \dim W(p) - \dim(\underbrace{T(Y_1) \cap W}_{=\{0\}}) + 1\\ &= \dim T(Y_1) + \dim W + 1\end{aligned}$$

$\lightning$ zu $Y_1 \vee W(p) \subseteq X$, also ist $Y_1 \cap W(p) \neq \{ 0 \}$, und nach Lemma 1.3.3 a) gilt Folgendes:

$$\begin{aligned}\underbrace{\dim(Y_1 \vee W(p))}_{\substack{\parallel\\ n}} &= \dim Y_1 + \dim W(p) - \dim(Y_1 \cap W(p))\\ &= n - \dim(Y_1 \cap W(p))\end{aligned}$$

und nach Lemma 1.3.1

$$\begin{aligned}\dim Y_1 \vee W(p) &= \dim(T(Y_1) + W)\\ &= n,\end{aligned}$$ □

also $\dim(Y_1 \cap W(p)) = 0$.

Wir definieren die Projektion längs $W$

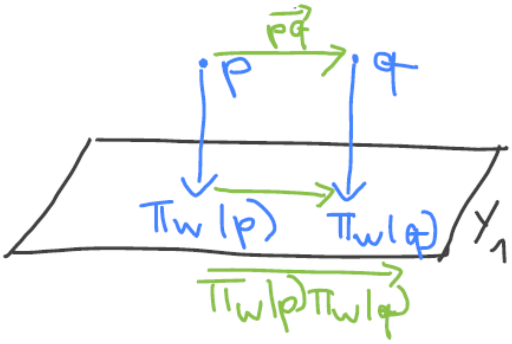
$$\pi_W : \underset{\substack{\subseteq\\ Y_0}}{X} \to Y_1, \ \ p \mapsto W(p) \cap Y_1.$$

**Satz 1.4.3.** Sei $X$ ein affiner Raum, $Y_1, Y_0 \subseteq X$ affine Unterräume, $W \subseteq T(X)$ ein Untervektorraum mit

$$T(X) = W \oplus T(Y_0) = W \oplus T(Y_1).$$

Dann ist $\pi_W : X \to Y_1$ eine surjektive affine Abbildung und $\pi_w|_{Y_0} : Y_0 \to Y_1$ eine Affinität.

*Beweis.* Seien $p, q \in X$.




Dann gilt

$$\begin{aligned}\vec{pq} &= \overrightarrow{p\pi_W(p)} + \overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)} + \overrightarrow{\pi_W(q)q} + \overrightarrow{\pi_W(q)q} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{p\pi_W(p)} + \overrightarrow{\pi_W(q)q}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)}}_{\in T(Y_1)},\end{aligned}$$

also $\overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)} = P_W(\vec{pq})$.

$P_W$ ist surjektiv, also ist $\pi_W$ eine surjektive affine Abbildung.

Der zweite Teil folgt aus Lemma 1.4.1. $\square$

## Vorlesung 3

Di 28.04. 10:15

### §1.5 Affine Koordinaten

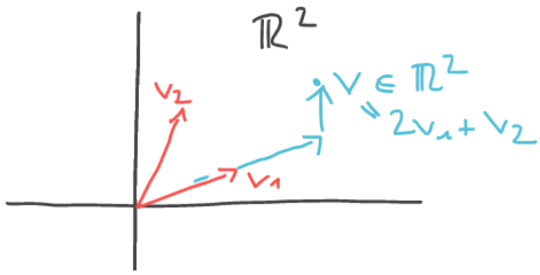
Koordinaten in einem $K$-Vektorraum $V$. Sei $\dim V = n$ und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $V$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi\colon \qquad\qquad K^n &\to V \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $K$-Vektorräumen. Jeder Punkt $\underset{\in V}{v} = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ ist eindeutig bestimmt durch seine „Koordinaten“

$$\inf \phi(v) = (x_1, \dots, x_n) \in K^n.$$

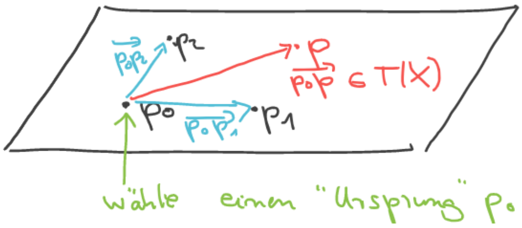
**Frage.** Sei $X$ ein affiner Raum über einem Körper $K$. Können wir auch hier die Lage eines Punkte $p \in X$ durch Angabe von „Koordinaten“ bezüglich einer „Basis“ beschreibe?




**Beispiel / Idee.** $X = \mathbb{R}^2$ als affiner Raum und Punkte $p_1, p_2 \in X$, sodass $\overrightarrow{p_0p_1}$, $\overrightarrow{p_0p_2}$ eine Basis ist für $T(X)$. Dann können wir einen Punkt $p \in X$ beschreiben durch

$$\begin{aligned} p &= \tau_{\overrightarrow{p_0p}}(p_0) \\ &= \tau_{\lambda\overrightarrow{p_0p_1} + \mu\overrightarrow{p_0p_2}}(p_0), \end{aligned}$$

falls $\overrightarrow{p_0p} = \lambda\overrightarrow{p_0p_1} + \mu\overrightarrow{p_0p_2}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.




Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \phi\colon \quad & \mathbb{R}^2 \to X \\ & (\lambda, \mu) \mapsto \tau_{\lambda\overrightarrow{p_0p_1} + \mu\overrightarrow{p_0p_2}}(p_0), \end{aligned}$$

die eine Affinität ist.

Wir formalisieren diese Konzepte für allgemeine affine Räume.

**Definition.** Sei $X$ ein affiner Raum und $p_0, \dots, p_n \in X$. Wir nennen $(p_0, \dots, p_n)$ *affin unabhängig* bzw. eine *affine Basis*, wenn die Vektoren $(\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})$ in $T(x)$ *linear unabhängig sind* bzw. *eine Basis bilden.*

**Beispiele.** i) In $X = \mathbb{R}^n$ ist $(0, e_1, \dots, e_n)$ eine affine Basis.

ii) $X = \mathbb{R}^n$ als affiner Raum, $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, $v_0 = 0$. Dann ist das Tupel $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ affin unabhängig.

**Frage.** Kann man hier $v_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig nehmen?

iii) $X = \mathbb{R}^2$ als affiner Raum. Dann gilt, dass für $v, w \in \mathbb{R}^2$ das Tupel $(v, w)$ affin unabhängig ist gdw $v \neq w$.

iv) $X$ affiner Raum, $p_0 \in X$, $(t_1, \dots, t_n)$ Basis von $T(X)$. Dann ist

$$(p_0, \tau_{t_1}(p_0), \dots, \tau_{t_n}(p_0))$$

eine affine Basis von $X$.

**Lemma 1.5.1.** Sei $X$ ein affiner Raum, $p_0, \dots, p_n \in X$ und $(p_0, \dots, p_n)$ affin unabhängig. Sei $\sigma \in S_{n+1}$ eine Permutation von $\{ 0, \dots, n \}$. Dann ist

$$(p_{\sigma(0)}, p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n)})$$

affin unabhängig.

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass unter den Annahmen des Lemmas, die Vektoren

$$\overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(1)}}, \dots, \overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(n)}} \in T(X)$$

linear unabhängig sind.

Sei $\sigma(0) = i \in \{ 0, \dots, n \}$.

Dann müssen wir also zeigen, dass die Vektoren

$$\overrightarrow{p_ip_0}, \overrightarrow{p_ip_1}, \dots, \overrightarrow{p_ip_{i-1}}, \overrightarrow{p_ip_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{p_ip_n}$$

linear unabhängig sind.

Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$\lambda_0\overrightarrow{p_ip_0} + \lambda_1\overrightarrow{p_ip_1} + \cdots + \lambda_{i-1}\overrightarrow{p_ip_{i-1}} + \lambda_{i+1}\overrightarrow{p_ip_{i+1}} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{p_ip_n} = 0.$$

Schreibe

$$\overrightarrow{p_ip_j} = \overrightarrow{p_ip_0} + \overrightarrow{p_0p_j} = \overrightarrow{p_0p_j} - \overrightarrow{p_0p_i}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_1\overrightarrow{p_0p_1} + \cdots + \lambda_{i-1}\overrightarrow{p_0p_{i-1}} + \lambda_{i+1}\overrightarrow{p_0p_{i+1}} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{p_0p_n} \\ -(\lambda_0 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n)\overrightarrow{p_0p_i} = 0 \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$ folgt

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \lambda_n = 0$$

und

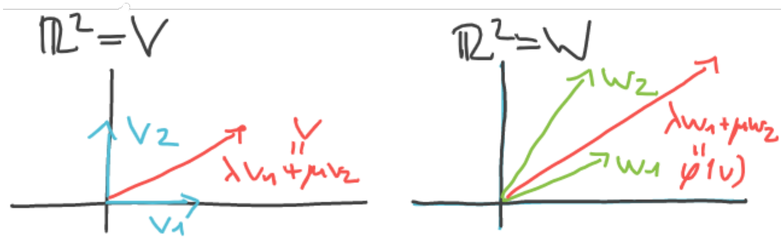
$$\underset{\lambda_0=0}{\underset{\uparrow}{+}} \underbrace{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n}_{=0} = 0$$

□

### Affine Basen und affine Abbildungen

Aus der AGLA I:
Seien $V, W$ $K$-Vektorräume, $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Basis von $V$ und $w_1, \dots, w_n \in W$. Dann gibt es genau eine $K$-lineare Abbildung $\phi\colon V \to W$ mit

$$\phi(v_i) = w_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$




**Frage.** Inwiefern sind affine Abbildungen zwischen affinen Räumen durch die Bilder einer affinen Basis bestimmt?

**Satz 1.5.2.** Seien $X, Y$ affine Räume, $(p_0, \ldots, p_n)$ eine affine Basis von $X$ und $q_0, \ldots, q_n \in Y$. Dann gibt es genau eine affine Abbildung $f\colon X \to Y$ mit

$$f(p_i) = q_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Die Abbildung $f$ ist *injektiv* bzw. *eine Affinität* gdw das Tupel $(q_0, \ldots, q_n)$ *affin unabhängig* bzw. *eine affine Basis* von $Y$ ist.

*Beweis.* Eine affine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist gegeben durch $f(p_0)$ für ein $p_0 \in X$ und eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon T(X) &\to T(Y) \\ \overrightarrow{pq} &\mapsto \overrightarrow{f(p)f(q)}. \end{aligned}$$

Wir definieren $F$ durch

$$F(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{q_0q_i} \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{*}$$

$\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}$ ist eine Basis von $T(X)$, also gibt es genau ein lineare Abbildung

$$F\colon T(X) \to T(Y)$$

mit (*). Es gilt dann

$$\begin{aligned} f(p_i) &= \tau_{\overrightarrow{f(p_0)f(p_i)}} f(p_0) \\ &= \tau_{F(\overrightarrow{p_0p_i})} f(p_0) \\ &= \tau_{\overrightarrow{q_0q_i}} q_0 = q_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$ □

$f$ ist injektiv gdw $F$ injektiv ist. $F$ ist injektiv gdw $\overrightarrow{q_0q_1}, \ldots, \overrightarrow{q_0q_n}$ linear unabhängig sind.

$\to f$ ist eine Affinität gdw $F$ bijektiv ist. $F$ ist bijektiv gdw $\overrightarrow{q_0q_1}, \ldots, \overrightarrow{q_0q_n}$ eine Basis von $T(Y)$ ist.

## Affine Koordinatensysteme

Sei $X$ ein affiner Raum über einem Körper $K$, $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ eine affine Basis von $X$.

Nach Satz 1.5.2 gibt es genau eine Affinität

$$\phi\colon K^n \to X$$

mit $\phi(0) = p_0, \phi(e_1) = p_1, \dots, \phi(e_n) = p_n$ und zugehörige lineare Abbildung $\Phi\colon K^n \to T(X)$.

Einen Punkt $p \in X$ können wir dann beschreiben durch

$$p = \tau_{\overrightarrow{p_0p}}(p_0).$$

Sei $\overrightarrow{p_0p} = \lambda_1\overrightarrow{p_0p_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{p_0p_n}$ mit $\lambda_i \in K$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Dann ist

$$\begin{aligned} p &= \tau_{\lambda_1\overrightarrow{p_0p_1}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{p_0p_n}}(p_0) \\ &= \tau_{\lambda_1\Phi(e_1)+\cdots+\lambda_n\Phi(e_n)}(p_0) \\ &= \tau_{\Phi(\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n)}(p_0), \end{aligned}$$

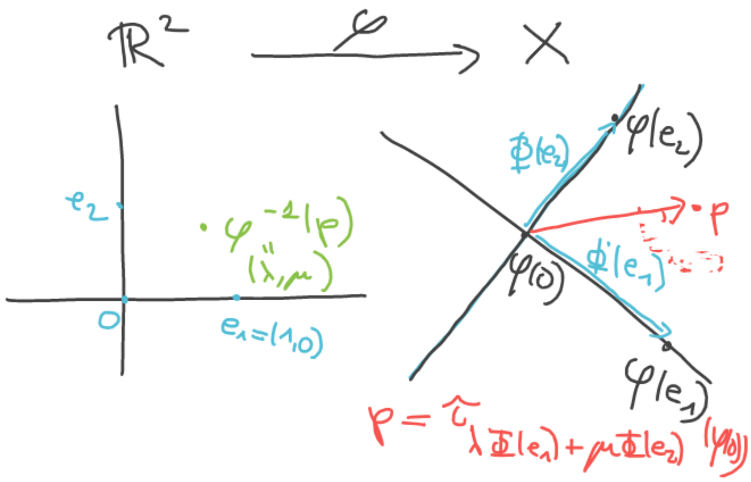
oder $p = \phi((\lambda_1, \dots, \lambda_n))$.

**Definition.** Sei $X$ ein affiner Raum über einem Körper $K$. Wir nennen eine Affinität $\phi\colon K^n \to X$ ein affines Koordinatensystem in $X$. Seu $p_0 = \phi(0), p_1 = \phi(e_1), \dots, p_n = \phi(e_n)$. Dann ist $(p_0, \dots, p_n)$ eine affine Basis von $X$.

Für $p \in X$ nennen wir

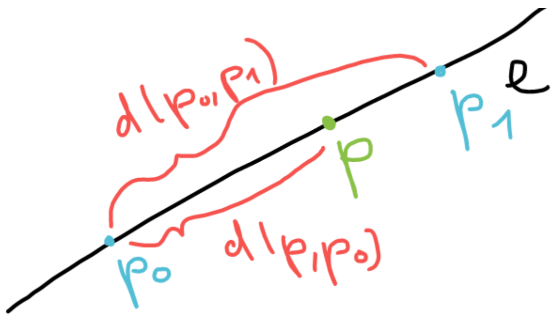
$$\phi^{-1}(p) = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$$

den Koordinatenvektor von $p$ bezüglich der affinen Basis $(p_0, \dots, p_n)$ und $(x_1, \dots, x_n)$ die Koordinaten von $p$ bezüglich $(p_0, \dots, p_n)$.




## §1.6 Das Teilverhältnis

**Idee.** Seien 3 Punkte $p_0, p_1, p$ auf einer Gerade $l$ (z. B. im $\mathbb{R}^3$) gegeben, $p_0 \neq p_1$.




Sei $\lambda = \frac{d(p,p_0)}{d(p_1,p_0)}$, mit $d$ dem euklidischen Abstand, dann können wir die Lage von $p$ auf $l$ durch $\lambda$ (und der Information, ob $p$ „rechts oder links“ von $p$ liegt) bestimmen.

**Definition.** Sei $X$ ein affiner Raum über $K$, $Y \subseteq X$ eine affine Gerade, $p_0, p_1, p \in Y$ und $p_0 \neq p_1$. Dann nennen wir das eindeutig bestimmte Element $\lambda \in K$ mit $\overrightarrow{p_0p} = \lambda\overrightarrow{p_0p_1}$ das Teilverhältnis von $p_0, p_1, p$. Schreibe $\lambda = \mathrm{TV}(p_0, p_1, p)$. In $\mathrm{char}(K) \neq 2$ nennen wir $p$ Mittelpunkt von $p_0, p_2$ wenn $\mathrm{TV}(p_0, p_1, p) = \frac{1}{2}$.

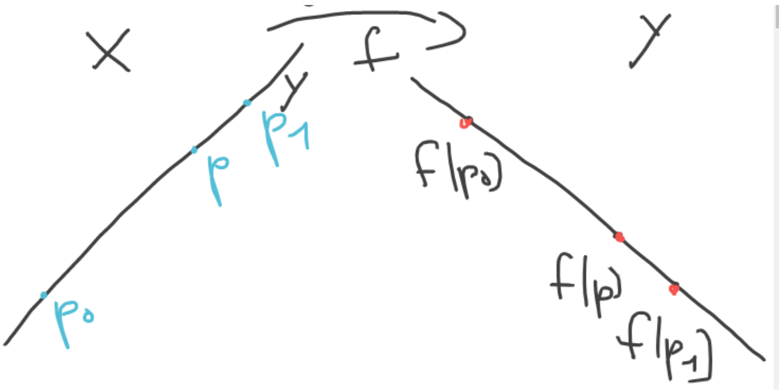
**Bemerkungen.** i) Es gilt $T(Y) = K\overrightarrow{p_0p_1}$. Damit ist $\lambda$ wohldefiniert und existiert.

ii) $p_0, p_1$ ist eine affine Basis von $Y$. Damit existiert ein Koordinatensystem

$$\phi\colon K \to Y, \quad \begin{aligned} \phi(0) &= p_0 \\ \phi(1) &= p_1 \end{aligned}$$

und es gilt $\mathrm{TV}(p_0, p_1, p) = \phi(p)^{-1}$.

**Frage.** Wie verhält sich das Teilverhältnis unter affinen Abbildungen?



## Vorlesung 4

Di 05.05. 10:15

**Lemma 1.6.1.** Seien $X, Y$ affine Räume und $f\colon X \to Y$ eine affine Abbildung, seien $p_0, p1, p$ Punkte in $X$, die auf einer Geraden liegen und $f(p_0) \neq f(p_1)$. Dann gilt

$$\mathrm{TV}(f(p_0), f(p_1), f(p)) = \mathrm{TV}(p_0, p_1, p).$$

*Beweis.* Sei $\lambda = \mathrm{TV}(p_0, p_1, p)$, also $\overrightarrow{p_0p} = \lambda\overrightarrow{p_0p_1}$. Sei $F\colon T(X) \to T(Y)$ die zu $f$ gehörige lineare Abbildung. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(p_0)f(p)} &= F(\overrightarrow{p_0p}) \\ &= F(\lambda p_0p_1) \\ &= \lambda F(p_0p_1) \\ &= \lambda\overrightarrow{f(p_0)f(p_1)}\end{aligned}$$

□

**Anwendung (Strahlensatz).** Sei $X$ ein affiner Raum über $K$, $p_0, p_1, p_2 \in X$ affin unabhängig. Sei

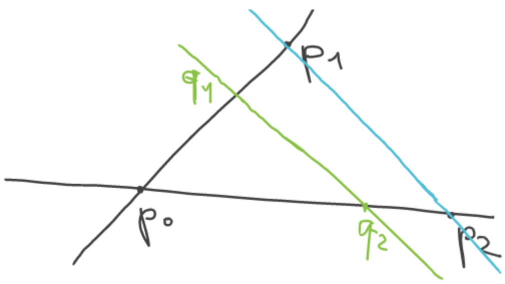
$$\begin{aligned}q_1 &\in p_0 \vee p_1, \quad q_1 \neq p_0 \\ q_2 &\in p_0 \vee p_2, \quad q_2 \neq p_0.\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass $p_1 \vee p_2$ und $q_1 \vee q_2$ parallel sind in dem Sinn, dass

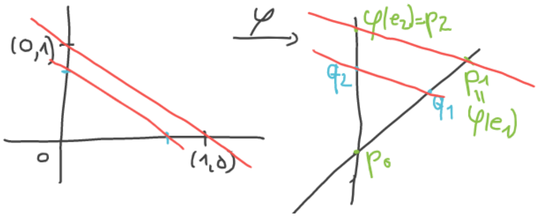
$$T(p_1 \vee p_2) = T(q_1 \vee q_2) \text{ in } T(X).$$

Dann gilt

$$\mathrm{TV}(p_0, p_1, q_1) = \mathrm{TV}(p_0, p_2, q_2).$$




*Beweis.* Sei $Y$ diedurch $p_0, p_1, p_2$ aufgespannte Ebene. Dann gibt es ein affines Koordinatensystem $\phi\colon K^2 \to Y$ mit $\phi(0) = p_0, \phi(e_1) = p_1, \phi(e_2) = p_2$.




Sei

$$\begin{aligned}(\lambda, 0) &= \phi^{-1}(q_1)\\ (0, \mu) &= \phi^{-1}(q_2).\end{aligned}$$

**Behauptung.** $l_1 = \phi^{-1}(q_1) \vee \phi^{-1}(q_2)$ und $l_2 = \phi^{-1}(p_1) \vee \phi^{-1}(p_2)$ sind parallel.

**Denn:**

$$\begin{aligned}T(l_1) &= K\overrightarrow{\phi^{-1}(q_1)\phi^{-1}(q_2)}\\ T(l_2) &= K\overrightarrow{\phi^{-1}(p_1)\phi^{-1}(p_2)}.\end{aligned}$$

Es ist $K\overrightarrow{p_1p_2} = K\overrightarrow{q_1q_2}$ und daher

$$\underset{K\overrightarrow{\phi^{-1}(q_1)\phi^{-1}(q_2)}}{\underset{\parallel}{K\Phi^{-1}(\overrightarrow{p_1p_2})}} = \underset{K\overrightarrow{\phi^{-1}(p_1)\phi^{-1}(p_2)}}{\underset{\parallel}{K\Phi^{-1}(\overrightarrow{q_1q_2})}}.$$

Aus der Parallelität von $l_1, l_2$ folgt $\lambda = \mu$.

Also

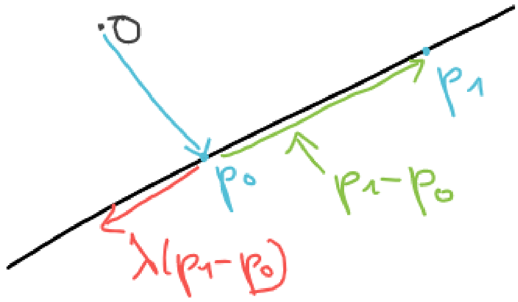
$$\begin{aligned}\mathrm{TV}(\phi^{-1}(p_0), \phi^{-1}(p_1), \phi^{-1}(q_1)) = \lambda\\ = \mu = \mathrm{TV}(\phi^{-1}(p_0), \phi^{-1}(p_2), \phi^{-1}(q_2))\end{aligned}$$

und der Strahlensatz folgt aus Lemma 1.6.1. $\square$

## §1.7 Affinkombinationen

**Beispiel.** Seien $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$, $p_0 \neq p_1$. Ziel: Beschreibe den affinen Unterraum $p_0 \vee p_1$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Sei $p \in p_0 \vee p_1$. Dann $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1}$ und als Vektoren im $\mathbb{R}^2$ gilt $p = p_0 + \lambda(p_1 - p_0)$. Es gilt

$$p_0 \vee p_1 = \{ (1-\lambda) p_0 + \lambda p_1, \;\; \lambda \in \mathbb{R} \} .$$




**Frage.** Verallgemeinerung zu höherdimensionalen Räumen?

**Definition.** Seien $p_0, \dots, p_k \in K^n$. Wir nennen eine Linearkombination

$$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m$$

mit $\lambda_i \in K$, $0 \leqslant i \leqslant m$ eine Affinkombination oder affin falls gilt $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$.

**Satz 1.7.1.** Seien $p_0, \cdots, p_m \in K^n$. Dann gilt

$$p_0 \vee \cdots \vee p_m = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i \in K^n \;\; \lambda_0, \dots, \lambda_m \in K, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

*Beweis.* Sei $Y = p_0 \vee \cdots \vee p_m \in K^n$. Es gilt

$$\begin{aligned} T(Y) &= \underbrace{T(p_m)}_{=0} + T(p_0 \vee \cdots \vee p_{m-1}) + \underbrace{K\overrightarrow{p_0 p_m}}_{=T(p_0 \vee p_m)} \\ &= K\overrightarrow{p_0 p_m} + T(p_0 \vee \cdots \vee p_{m-1}) \\ &= K\overrightarrow{p_0 p_m} + \cdots + K\overrightarrow{p_0 p_1} \\ &\vdots \\ &= K\overrightarrow{p_0 p_m} + \cdots + K\overrightarrow{p_0 p_1} \\ &= \qquad\qquad (\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_m}). \end{aligned}$$

Sei $p \in K^n$. Dann ist $p \in Y$ genau dann, wenn $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ mit

$$\overrightarrow{p_0p} = \lambda_1\overrightarrow{p_0p_1} + \cdots + \lambda_m\overrightarrow{p_0p_m}.$$

Im $K^n$ gilt dann also

$$p - p_0 = \lambda_1(p_1 - p_0) + \cdots + \lambda_m(p_m - p_0)$$

oder

$$p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m$$

mit $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_m$, d. h. $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$. □

## §1.8 Affine Abbildungen und Matrizen, Fixpunkte

**Motivation.** Seien $V, W$ $K$-Vektorräume, $F\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn wir für $V$ und $W$ Basen wählen, dann können wir die Abbildung $F$ eindeutig durch eine Matrix beschreiben.

**Frage.** Inwiefern können wir affin Abbildung zwischen affinen Räumen durch Matrizen beschreiben?

Wahl von Basen in Vektorräumen $\leftrightarrow$ Wahl von Koordinaten in affinen Räumen.

Seien $X, Y$ affine Räume über $K$, $f\colon X \to Y$ eine affine Abbildung. Wähle affine Koordinatensysteme $\phi\colon K^n \to X$ und $\psi\colon K^m \to Y$.

Wir haben das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "f"] \\ K^m \arrow[r, "\psi"] & Y \end{tikzcd}$$

mit $g = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ affin. $g$ ist affin, also besteht eine affine Abbildung $G\colon K^n \to K^m$ mit

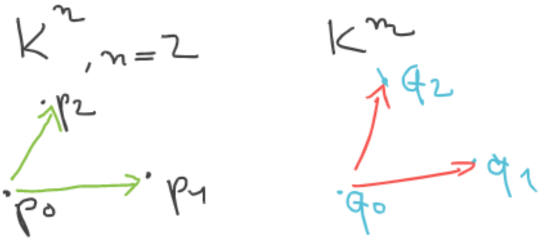
$$g(x) - g(0) = G(x) \quad \forall\, x \in K^n.$$

$G$ ist linear, also können wir $G$ durch eine Matrix $A$ ausdrücken.

$$g(x) = Ax + b \quad \forall\, x \in K^n.$$

mit $b = g(0)$.

**Frage.** Wie können wir $A$ berechnen gegeben eine affine Basis $(p_0, \dots, p_n)$ von $K^n$ und $g(p_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$?

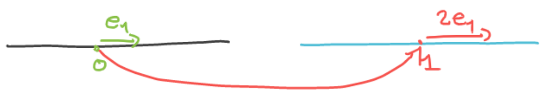



Wir betrachten die Matrizen $B \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ bestehend aus den Spaltenvektoren $\overrightarrow{q_0q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0q_n}$ und $S \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ bestehend aus den Spaltenvektoren $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$. Dann gilt $A = B \cdot S^{-1}$ und $g(x) - g(p_0) = A(x - p_0)$, also $g(x) = Ax + b$ mit $b = g(p_0) - Ap_0$.

**Bemerkung.** Wählen wir für $p_0, \dots, pm$ die affine Basis $0, e_1, \dots, e_n$, dann $S = \mathrm{Id}_{n\times n}$ und $A = B$.

### Fixpunkte

**Beispiel 1.8.1.** Betrachte die affine Abbildung $f\colon K \to K$, $K$ ein Körper, in der Matrizendarstellung gegeben durch $f(x) = 2x + 1 \overset{?}{=} x$.




Dann gibt es genau ein $x \in K$ mit $f(x) = x$, nämlich $x = -1$.

**Definition.** Sei $X$ ein affiner Raum $f\colon X \to X$ eine affine Abbildung. Wir nennen

$$\mathrm{Fix}(f) := \{\, x \in X \mid f(x) = x \,\}$$

die Menge der Fixpunkte von $f$.

**Frage.** Welche Struktur hat $\mathrm{Fix}(f)$.

**Beispiel 1.8.2.** $X$ affiner Raum.

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}\colon X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

dann $\mathrm{Fix}(\mathrm{Id}) = X$.

**Beispiel 1.8.3.** $f\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto \underbrace{x + p_0}_{\overset{?}{=}x}$ mit $p_0 \in K^n \setminus \{ 0 \}$, dann $\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$.

**Beispiel 1.8.4. Frage.** Was sind die Fixpunkte einer Projektion?

**Lemma 1.8.1.** $\mathrm{Fix}(f) \subseteq X$ ist ein affiner Unterraum.

*Beweis.* Falls $\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$ dann ✓. Sei also $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$ und $p \in \mathrm{Fix}(f)$, $F$ die zu $f$ gehörig lineare Abbildung.

Für $x \in \mathrm{Fix}(f)$ gilt

$$\overrightarrow{px} = \overrightarrow{f(p)f(x)} = F(\overrightarrow{px}).$$

Umgekehrt folgt aus

$$\overrightarrow{px} = F(\overrightarrow{px}) = \overrightarrow{pf(x)},$$

dass $x = f(x)$, also $x \in \mathrm{Fix}(f)$.

Damit gilt

$$\{ \overrightarrow{px} \in T(X) \mid x \in \mathrm{Fix}(f) \} = \{ \overrightarrow{px} \in T(X) \mid \overrightarrow{px} = F(\overrightarrow{px}) \}$$

und wir erkennen diese Menge als $K$-Untervektorraum von $X$. □

**Frage.** Bestimmung von $\mathrm{Fix}(f)$ für eine beliebige affine Abbildung $f\colon X \to X$?

Nach Wahl eines Koordinatensystems können wir auf den Fall $X = K^n$ reduzieren und annehmen, dass $f$ in Matrizendarstellung gegeben ist.

Sei also

$$\begin{aligned} f\colon\ & K^n \to K^n \\ & x \mapsto \underbrace{Ax + b}_{=x=\mathrm{Id}_n x}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mathrm{Fix}(f) = \{ x \in K^n \mid (A - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einheitsmatrix der Dimension } n\colon \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}}{\mathrm{Id}_n})x = -b \}$$

Wir haben das Problem also reduziert auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems.

**Bemerkung.** Daraus kann man auch Lemma 1.8.1 ableiten.

**Beispiel 1.8.5.**

$$\begin{aligned} f\colon K^n &\to K^n \\ x &\mapsto \lambda \operatorname{Id}_n x + b \end{aligned}$$

mit $\lambda \in K$.

Dann

$$\operatorname{Fix}(f) = \{ x \in K^n \mid (\lambda - 1)x = -b \}.$$

Falls $\lambda - 1$ invertierbar ist ($\lambda \neq 1$), gibt es genau einen Fixpunkt.

**Definition.** Sei $f\colon X \to X$ eine affine Abbildung mit zugehöriger linearer Abbildung $F\colon T(X) \to T(X)$. Wir nennen $f$ eine *Dilatation* mit *Faktor* $\lambda$, falls gilt

$$F = \lambda \cdot \operatorname{Id}_{T(X)} \qquad \lambda \in K.$$

Im Fall $\lambda = 1$ nennen wir $f$ eine Translation.

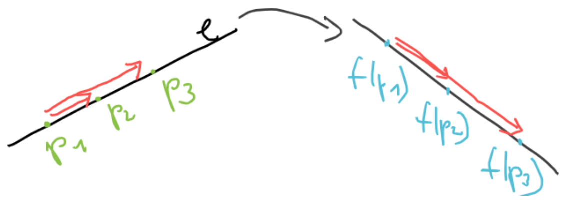
**Lemma 1.8.2.** Sei $f\colon X \to X$ eine Dilatation mit Faktor $\lambda \neq 1$. Dann gilt

$$\#\operatorname{Fix}(f) = 1.$$

*Beweis.* Nach Wahl eines Koordinatensystems reduzieren wir das Problem auf Beispiel 1.8.5. □

## §1.9 Kollineationen

Sei $f\colon X \to X$ eine affine Abbildung eines affinen Raumes $X$, z. B. eine Affinität. Seien $p_1, p_2, p_3 \subset X$ in einer Geraden $\ell \subseteq X$ enthalten.




Dann liegen auch $f(p_1), f(p_2), f(p_3)$ auf einer Geraden.

**Frage.** Welche bijektiven Abbildungen $f\colon X \to X$ haben diese Eigenschaft?

**Definition.** Sei $X$ ein affiner Raum und $p_1, p_2, p_3 \in X$. Wir nennen $p_1, p_2, p_3$ *kollinear*, wenn $p_1, p_2, p_3$ auf einer Geraden $\ell \subset X$ liegen. Wir nennen eine bijektive Abbildung $f\colon X \to X$ eine Kollineation, falls jede Gerade $\ell \subset X$ auf eine Gerade $f(\ell) \subset X$ abgebildet wird.

**Beispiel 1.9.1.** Affinitäten

**Beispiel 1.9.2.** Ist $\dim X = 1$ und $f\colon X \to X$ bijektiv, dann ist $f$ eine Kollineation.

**Beispiel 1.9.3.** Sei $X = \mathbb{C}^2$ als affiner Raum über $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\mapsto \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komplexe Konjugation}}}{(\overline{x}, \overline{y})}. \end{aligned}$$

Dann ist $f$ eine Kollineation. Das Bild einer Geraden

$$(x_0, y_0) + \mathbb{C}(x_1, y_1)$$

ist gegeben durch die Gerade

$$(\overline{x_0}, \overline{y_0}) + \mathbb{C}(\overline{x_1}, \overline{y_1}),$$

aber $f$ ist *keine Affinität*!

**Bemerkung.** Die komplexe Konjugation

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \overline{x} \end{aligned}$$

ist ein Automorphismus von dem Körper $\mathbb{C}$.

## Vorlesung 5

Fr 08.05. 10:15

**Definition.** Sei $K$ ein Körper. Wir nennen eine Bijektion $\alpha\colon K \to K$ einen Automorphismus von $K$ falls gilt

$$\alpha(\lambda + \mu) = \alpha(\lambda) + \alpha(\mu) \quad \forall\, \lambda, \mu \in K$$

und

$$\alpha(\lambda \cdot \mu) = \alpha(\lambda) \cdot \alpha(\mu) \quad \forall\, \lambda, \mu \in K$$

**Beispiel 1.9.4.**

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{\, x + y\sqrt{2} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Q} \,\right\}$$

ist ein Körper und

$$\begin{aligned} \alpha\colon \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &\to \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ x + y\sqrt{2} &\mapsto x - y\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Satz 1.9.1.** Sei $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Automorphismus von $\mathbb{R}$. Dann gilt $\alpha = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

*Beweis.* Sei $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Automorphismus.

1. Dann gilt

$$\alpha(0) = \alpha(0 + 0) = \alpha(0) + \alpha(0),$$

also $\alpha(0) = 0$.

2. Dann gilt

$$0 = \alpha(0) = \alpha(\lambda - \lambda) = \alpha(\lambda) + \alpha(-\lambda),$$

also $\alpha(-\lambda) = -\alpha(\lambda) \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

3. Dann gilt

$$\alpha(1) = \alpha(1 \cdot 1) = \alpha(1)\alpha(1),$$

also $\alpha(1) = 1$ und daher

$$\alpha(n) = n \;\; \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

z. B.

$$\alpha(2) = \alpha(1 + 1) = \alpha(1) + \alpha(1) = 1 + 1 = 2.$$

4. Sei $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$q\alpha\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha(q)\alpha\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha\left(q\frac{p}{q}\right) = \alpha(p) = p,$$

also $\alpha\left(\frac{p}{q} = \frac{p}{q}\right)$ oder $\alpha(t) = t \quad \forall\, t \in \mathbb{Q}$.

5. Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann $\exists\, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda = \mu^2$ und

$$\alpha(\lambda) = \alpha(\mu^2) = \alpha(\mu) \cdot \alpha(\mu) > 0,$$

also

$$\alpha(\lambda) > 0 \quad \forall\, \lambda \subset \mathbb{R} > 0.$$

Wir zeigen nun $\alpha(\lambda) = \lambda \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

**Gegenannahme**

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\alpha(\lambda) \neq \lambda$. Wir diskutieren den Fall $\alpha(\lambda) < \lambda$ ($\alpha(\lambda) > \lambda$ geht genauso).

Wähle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit

$$\alpha(\lambda) < \frac{p}{q} < \lambda.$$

Dann gilt

$$\alpha(\lambda - \frac{p}{q}) = \alpha(\lambda) - \frac{p}{q} < 0$$

$\lightning$ zu $\lambda - \frac{p}{q} > 0$. $\square$

## Eine Familie von Kollineationen

**Idee.** Wir verallgemeinern Beispiel 1.9.3, um eine größere Klasse an Kollineationen zu erhalten als Affinitäten.

**Beispiel 1.9.5.**

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\overline{x}, \overline{y}) \end{aligned}$$

respektiert Addition, d. h.

$$f(z+z') = f(z) + f(z') \quad \forall\, z, z' \in \mathbb{C}^2,$$

und hat die Eigenschaft

$$f(\lambda z) = \overline{\lambda}\, f(z) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \;\; \forall\, z \in \mathbb{C}^2.$$

$\rightarrow$Wir nennen $f$ semilinear.

**Definition.** Seien $V, W$ Vektorräume über einem Körper $K$. Wir nennen eine Abbildung $F\colon V \to W$ *semilinear*, wenn es einen Automorphismus $\alpha$ von $K$ gibt, sodass gilt

- $F(v+v') = F(v) + F(v') \quad \forall\, v, v' \in V$
- $F(\lambda v) = \alpha(\lambda) F(v) \quad \forall\, \lambda \in K \;\; \forall\, v \in V.$

**Definition.** Seien $X, Y$ affine Räume über einem Körper $K$. Wir nennen eine Abbildung

$$f\colon X \to Y$$

*semiaffin*, wenn es eine *semilineare Abbildung* $F\colon T(X) \to T(Y)$ gibt mit

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = F(\overrightarrow{pq}) \;\; \forall\, p, q \in X.$$

Falls $f$ außerdem bijektiv ist, dann nennen wir $f$ eine Semiaffinität.

**Lemma 1.9.2.** Sei $f\colon X \to X$ eine Semiaffinität eines affinen Raumes $X$. Dann ist $f$ eine Kollineation.

*Beweisidee.* Sei $\ell \subseteq X$ eine Gerade, $p_0 \in \ell$. Dann ist

$$T(\ell) = \{\, \overrightarrow{p_0 x}, x \in \ell \,\} \subseteq T(x)$$

ein $K$-Untervektorraum mit

$$\dim_K T(\ell) = 1.$$

Sei $F\colon T(X) \to T(X)$ die zu $f$ gehörige semilineare Abbildung.

Wir betrachten

$$\begin{aligned} T(f(\ell)) &= \left\{\, \overrightarrow{f(p_0)f(x), x \in \ell} \,\right\} \\ &= \{\, F(\overrightarrow{p_0 x}), x \in \ell \,\} \qquad = F(T(\ell)). \end{aligned}$$

Dann ist auch $F(T(\ell)) \subseteq T(X)$ ein $K$-Untervektorraum der Dimension 1, also $\underset{\text{Übung}}{\uparrow}$

$$f(\ell) \subseteq X$$

eine Gerade. $\square$

**Frage.** Gibt es Kollineationen, die keine Semiaffinität sind?

$\to$Ja, z. B. für $\dim X = 1$.

### Hauptsatz der affinen Geometrie

Sei $K$ ein Körper mit $\#K \geqslant 3$, $X$ ein affiner Raum über $K$ mit $\dim(X) \geqslant 2$ und $f\colon X \to X$ eine Kollineation. Dann ist $f$ eine Semiaffinität.

**Bemerkung.** Aus Satz 1.9.1 folgt, dass über $\mathbb{R}$ jede semilineare Abbildung linear ist.

**Korollar.** Sei $X$ ein affiner Raum über $\mathbb{R}$ mit $\dim(X) \geqslant 2$, $f\colon X \to X$ eine Kollineation. Dann ist $f$ eine Affinität.

## §1.10 Quadriken

**Motivation.** Affine Unterräume der $\mathbb{R}^n$ sind gegeben durch *lineare* Gleichungssysteme.

### Jetzt:

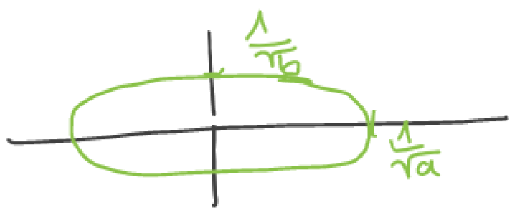
Betrachte den Unterraum im $\mathbb{R}^n$, der entsteht als Lösungsmenge einer *quadratischen* Gleichung.

**Beispiele (im $\mathbb{R}^2$).** i) der Kreis

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

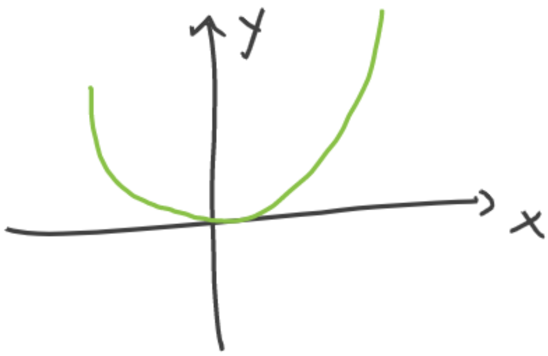
ii) Ellipsen, $a, b > 0$

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ax^2 + by^2 = 1 \right\}$$



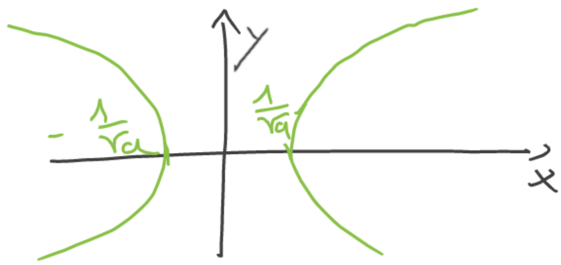
iii) Parabel

$$y = ax^2$$

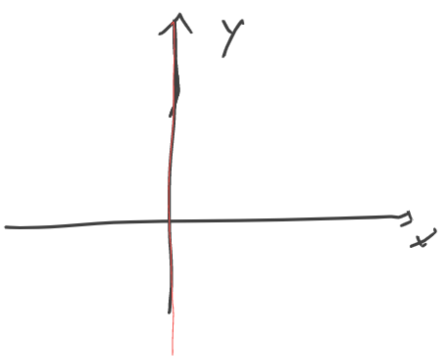



iv) Hyperbeln, $a, b > 0$

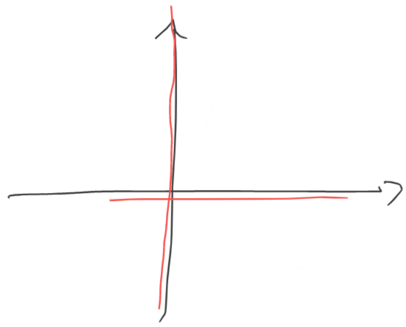
$$ax^2 - by^2 = 1$$



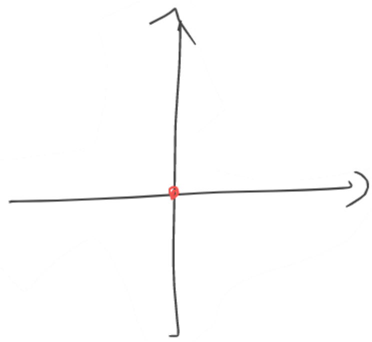

v) $x^2 = 0$



vi) $xy = 0$



vii) $x^2 + y^2 = 0$



Der Ursprung

**Beispiele.** Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 = 0.$$

Erster Schritt: Entferne den „gemischten" Term $x_1x_2$.

$$(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 2x_1 = 0.$$

Nach der Koordinatentransformation

$$y_1 = x_1 + x_2 \quad y_2 = x_2$$

ist $Q$ gegeben durch

$$y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 \cdot 1 - 2y_2 \cdot 1 = 0.$$

**Bemerkung.** Wir können die obigen Gleichungen auch über anderen Körpern $K$ betrachten, die Lösungsmenge hängt im Allgemeinen wesentlich von $K$ ab, z. B. $x^2+y^2=0$.

**Frage.** Was passier hier über $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für $p$ prim?

**Definition.** Sei $K$ ein Körper. Ein quadratisches Polynom über $K$ in den Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$ ist eine Ausdruck der Form

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_{0i} x_i + \alpha_{00}.$$

mit $\alpha_{ij}, \alpha_{0i}, \alpha_{00} \in K \quad \forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n$.

**Bemerkung.** Aus einem quadratischen Polynom $P$ über $K$ erhält man eine Abbildung

$$\begin{aligned} K^n &\to K \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto P(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

***Achtung.*** Zwei unterschiedliche Polynome $P_1, P_2$ müssen nicht notwenigerweise identisch sein, um dieselben Abbildung zu induzieren.

**Beispiel.** $K = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Körper mit $p$ Elementen mit $p$ prim, $n = 1$.

$$\begin{aligned} P_1 &= x \\ P_2 &= x^p. \end{aligned}$$

Nach Fermats kleinem Satz gilt

$$t \equiv t^p \mod p \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Für $p = 2$ sind $P_1, P_2$ quadratische Polynome nach obiger Definition.

**Definition.** Wir nennen eine Teilmenge $Q \subseteq K^n$ eine *Quadrik*, falls $Q$ definiert ist durch

$$Q = \{\, (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0 \,\}$$

für ein quadratisches Polynom $P$ über $K$.

**Beispiele.**

- $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ über $\mathbb{R}$ ergibt den Ursprung.
- $a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 = 1$, $a_1, \cdots, a_n > 0$ über $\mathbb{R}$ ergibt einen Ellipsoid.
- $K = \mathbb{R}$, $P = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$. Dann ist

$$Q = \left\{ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0}_{P(x_1, x_2)} \right\}.$$

**Frage.** Wie können wir im Allgemeinen Quadriken in Matrizenschreibweise ausdrücken?

## Vorlesung 6

Di 12.05. 10:15

**Idee.** Sei

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_{0i} x_i \cdot 1 + \alpha_{00} \cdot 1^2.$$

Wir schreiben

$$x' = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1}.$$

und (sei im Folgenden $\operatorname{char}(K) \neq 2$)

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} a_{00} & a_{01} & \cdots & \cdots & a_{0n} \\ \hline a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

mit $a_{ii} = \alpha_{ii} \quad \forall\, 0 \leqslant i \leqslant n$.

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}\alpha_{ij} \text{ für } 0 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Es gilt dann

$$P(x_1, \ldots, x_n) = {}^t x' A' x'$$

und

$$Q = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \;\middle|\; {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

**Bemerkung.** Die Matrix $A'$ ist symmetrisch (nach Konstruktion).

**Definition.** In obiger Notation nennen wir $A'$ di erweiterte Matrix zu $P$ und $x'$ den erweiterten Spaltenvektor zu $x$. Wir sagen, dass $A' \in \mathrm{M}_{(n+1)\times(n+1)}(K)$ die Quadrik $Q$ beschreibt, wenn gilt

$$Q = \left\{ x \in K^n \;\middle|\; {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

**Notation.** Für $P$ wie oben schreiben wir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für den „rein quadratischen“ Anteil von $P$.

**Bemerkung.** Sei $Q \subseteq K^n$ eine Quadrik. Dann gibt es im Allgemeinen nicht nur eine erweiterte Matrix $A'$ die $Q$ beschreibt. Ist

$$Q = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \;\middle|\; {}^t x' A' x' = 0 \right\},$$

dann beschreibt auch $\lambda A'$ mit $\lambda \in K \setminus \{ 0 \}$ die Quadrik $Q$.

**Frage.** Wie verhalten sich Quadriken unter Koordinatentransformationen / Affinitäten?

**Beispiel.** $K = \mathbb{Q}$. $P(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
P(x_1, x_2) &= (y_1 + y_2)^2 + (y_2 + 1)^2 \\
&= y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_2^2 + 2y_2 + 1
\end{aligned}$$

ist wieder ein quadratisches Polynom.

**Lemma 1.10.1.** Sei $K$ ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$, $Q \leqslant K^n$ eine Quadrik und $f\colon K^n \to K^n$ eine Affinität. Dann ist auch $f(Q) \subseteq K^n$ eine Quadrik.

*Beweis.* Sei $Q$ gegeben durch das quadratische Polynom $P(x_1, \ldots, x_n)$, also

$$Q = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid P(x_1, \ldots, x_n) = 0 \}.$$

Sei $A'$ die erweiterte Matrix zu $P$ und $x'$ der erweiterte Spaltenvektor zu $x$. Dann gilt

$$Q = \left\{ (x_1, \ldots, x_n \in K^n) \;\middle|\; {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

Als nächstes beschreibe den durch $f$ gegebenen Koordinatenwechsel. $f$ ist eine Affinität, also $\exists\, b \in K^n$ und $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$\begin{aligned} f\colon K^n &\to K^n \\ x &\mapsto Sx + b. \end{aligned}$$

Sei $y = f(x)$, schreibe $y' = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$S' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & S \\ b_n & \end{array}\right).$$

Dann gilt $y' = S'x'$.

**Bemerkung.** $S'$ ist invertierbar mit inverser Matrix

$$T' = (S')^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline -S^{-1}b & S^{-1} \end{array}\right),$$

d. h. $x' = T'y'$.

Es gilt

$$\begin{aligned} f(Q) &= \{\, f((x_1,\dots,x_n)) \in K^n \mid P(x_1,\dots,x_n) = 0 \,\} \\ &= \left\{\, y \in K^n \;\middle|\; {}^t x' A' x' = 0 \,\right\} \\ &= \left\{\, y \in K^n \;\middle|\; {}^t(T'y')A'(T'y') = 0 \,\right\} \\ &= \left\{\, y \in K^n \;\middle|\; {}^t y' \underbrace{{}^t T' A' T'}_{\text{symmetrische Matrix}} y' = 0 \,\right\}, \end{aligned}$$

also ist $f(Q)$ eine Quadrik mit

$$P'(y_1,\dots,y_n) = {}^t y' ({}^t T' A' T') y'. \qquad \square$$

**Bemerkung.** Der Beweis von Lemma 1.10.1 zeigt wie sich eine beschreibende Matrix $A'$ unter einer Koordinatentransformation ändert.

**Frage.** Sei $Q$ eine Quadrik beschrieben durch eine erweiterte Matrix $A'$. Find eine Koordinatentransformation $f$ der $K^n$, sodass $f(Q)$ möglichst „einfach“ beschrieben werden kann.

### zweiter Schritt

Entferne lineare Terme

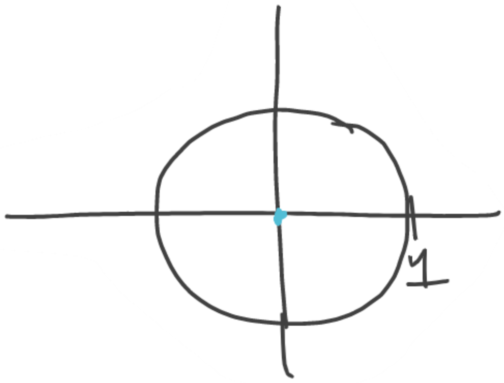
$$(y_1 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2 - 2 = 0.$$

Nach der Koordinatentransformation

$$z_1 = y_1 + 1 \qquad z_2 = y_2 - 1$$

erhalten wir $z_1^2 + z_2^2 = 2$, oder nach skalieren mit $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2}w_1 = z_1 \qquad \sqrt{2}w_2 = z_2$$
$$w_1^2 + w_2^2 = 1$$




**Satz 1.10.2 (affine Hauptachsentransformation von reellen Quadriken).** Sei $A' \in \mathrm{M}_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und die Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

Sei $A$ der rein quadratische Anteil von $A'$, $m = \operatorname{rang}(A)$ und $m' = \operatorname{rang}(A)'$. Dann gibt es eine Affinität $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass $f(Q)$ beschrieben wird durch eine der folgenden Gleichungen:

a) $m = m'$:
$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_m^2 = 0$$
für ein $0 \leqslant j \leqslant m$.

b) $m + 1 = m'$:
$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_m^2 = 1$$
für ein $0 \leqslant k \leqslant m$.

c) $m + 2 = m'$:
$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_m^2 + 2_{y_{m+1}} = 0$$
für ein $0 \leqslant k \leqslant m$.

**Frage / Übung 1.10.1.** Warum gilt immer $m \leqslant m' \leqslant m + 2$?

*Beweis zu Satz 1.10.2.* Sei

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} a_{00} & a_{01} \cdots\cdots a_{0n} \\ \hline a_{10} & \\ \vdots & A \\ a_{n0} & \end{array}\right).$$

mit $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Schritt 1 Entferne gemischte Terme.

**Idee.** Wollen $A$ in Diagonalgestalt bringen.

AGLA I: Orthogonalisierungssatz für reelle symmetrische Matrizen.

Wir erhalten eine invertierbare Matrix $T_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit

$${}^tT_1AT_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} I_k & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{m-k} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$I_l$ Einheitsmatrix der Dimension $l$, $m = \mathrm{rang}(A)$, $k$ Zahl der positiven Eigenwerte von $A$ (mit Vielfachheit).

Sei

$$T_1' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & T_1 \\ 0 & \end{array}\right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} A_1' &:= {}^tT_1'A'T_1' \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} c_{00} & c_{01} & \cdots\cdots\cdots & c_{0n} \\ \hline c_{10} & I_k & 0 & 0 \\ \cline{2-4} \vdots & 0 & -I_{m-k} & 0 \\ \hline c_{n0} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

für $c_{00}, c_{01}, \ldots, c_{0n}, c_{10}, \ldots, c_{n0} \in \mathbb{R}$ mit $c_{i0} = c_{0i}\ \forall\ i$. Die durch $A'$ bestimmte Quadrik ist gegeben durch

$$y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_m^2 + 2(c_{01}y_1 + \cdots + c_{0n}y_n) + c_{00} = 0.$$

Schritt 2 Reduzieren der linearen Terme. Sei

$$T_2' = \left(\begin{array}{c|ccc}
1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
-c_{10} & 1 & & \\
\vdots & & \ddots & 0 \\
-c_{k0} & & & \\
c_{(k+1)0} & & & \\
\vdots & & & \\
c_{m0} & & & \\
0 & & & \\
\vdots & 0 & & \\
0 & & & 1
\end{array}\right)$$

entsprechend dem Basiswechsel

$$y_i = \begin{cases} z_i - c_{i0} & 1 \leqslant i \leqslant k \\ z_i + c_{i0} & k < i \leqslant m \\ z_i & i > m. \end{cases}$$

Sei

$$\begin{aligned} A_2' &\coloneqq {}^tT_2' A_1' T_2' \\ &= \left(\begin{array}{c|cc|c}
d_{00} & 0 \cdots & \cdots 0 & c_{0(m+1)} \cdots\cdots c_{0n} \\ \hline
0 & I_k & 0 & \\ \cline{2-3}
\vdots & & & 0 \\
0 & 0 & -I_{m-k} & \\ \hline
c_{(m+1)0} & & & \\
\vdots & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \\
c_{n0} & & &
\end{array}\right). \end{aligned}$$

Nach der durch $T_1'T_2'$ beschriebenen Koordinatentransformation ist $Q$ gegeben durch

$$z_1^2 + \cdots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \cdots - z_m^2 + 2(c_{(m+1)0} z_{m+1} + \cdots + c_{n0} z_n) + d_{00}.$$

### Fallunterscheidung

a) $d_{00} = c_{(m+1)0} = \cdots = c_{n0} = 0$.

b) $d_{00} \neq 0$, $c_{(m+1)0} = \cdots = c_{n0} = 0$. Nach eventuellem Multiplizieren der Matrix $A'$ mit $(-1)$ und Umordnen der Variablen $z_i$, können wir $d_{00} < 0$ annehmen.

Sei $\lambda = \sqrt{|d_{00}|}$ und definiere

$$T_3' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \lambda I_n \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right).$$

Wir berechnen

$$A_3' := {}^t T_3' A_2' T_3'.$$

Dann ist

$$A_3' = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -\lambda^2 & \multicolumn{3}{c}{0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0} \\ \hline 0 & \lambda^2 I_k & 0 & 0 \\ \cline{2-4} \vdots & 0 & -\lambda^2 I_{m-k} & 0 \\ \cline{2-4} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nach der zu $T_1' t_2' t_3'$ gehörigen Affinität und Division durch $\lambda^2$ wird $Q$ gegeben durch

$$u_1^2 + \cdots + u_k^2 - u_{k+1}^2 - u_m^2 = 1.$$

c) $c_{i0} \neq 0$ für mindestens ein $m + 1 \leqslant i \leqslant n$. Nach Umordnen der Variablen $z_i$, $m + 1 \leqslant i \leqslant n$ können wir annehmen, dass $c_{(m+1)0} \neq 0$ gilt. Betrachte die Koordinatentransformation $u_i = z_i$, $i \neq m + 1.$,

$$2u_{m+1} = 2(c_{(m+1)0} z_{m+1} + \cdots + c_{n0} z_n) + d_{00}.$$

Nach dieser Affinität wird $Q$ beschrieben durch

$$u_1^2 + \cdots + u_k^2 - u_{k+1}^2 - \cdots - u_m^2 + 2u_{m+1} = 0. \qquad \square$$

## Vorlesung 7

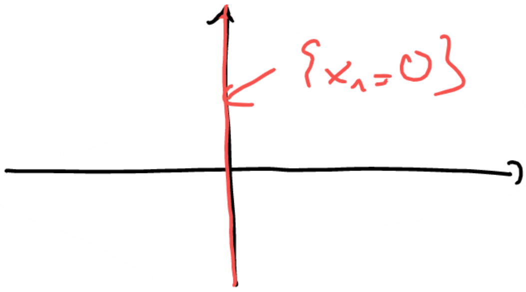
Do 14.05. 10:15

Resultate der affinen Hauptachsentransformation im $\mathbb{R}^2$: $m = \operatorname{rang}(A)$, $m' = \operatorname{rang}(A)'$.

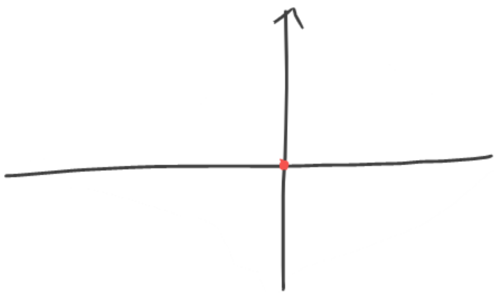
a) $m = m'$:

$m = m' = 0$: $Q$ gegeben durch $0 = 0$ →Ebene $\mathbb{R}^2$.

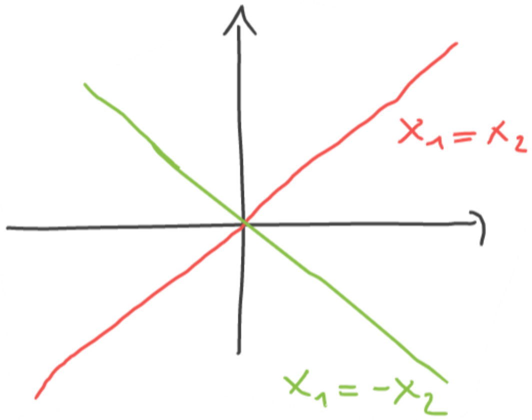
$m = m' = 1$ $x_1^2 = 0$ →„doppelte“ Gerade.




$m = m' = 2$ $x_1^2 + x_2^2 = 0$ →Punkt.



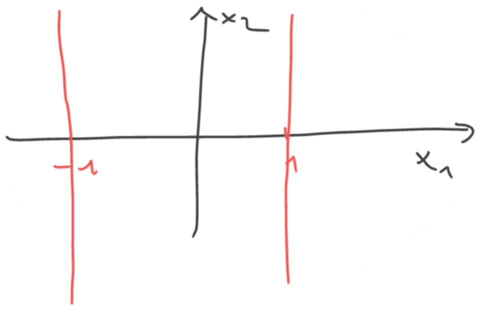
$\underset{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{\underset{\parallel}{x_1^2 - x_2^2}} = 0$ →2 Geraden.




b) $m' = m + 1$.

$m = 0$ $\rightarrow 0 = 1$ $\rightarrow$leere Menge.

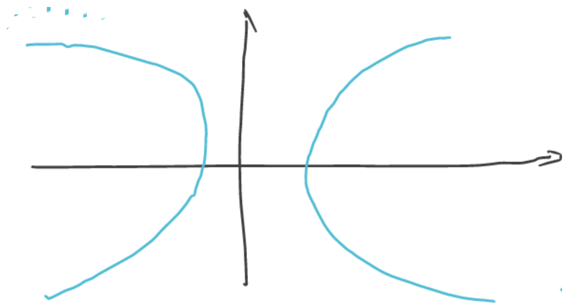
$m = 1$ $x_1^2 = 1$ $\rightarrow$2 parallele Geraden



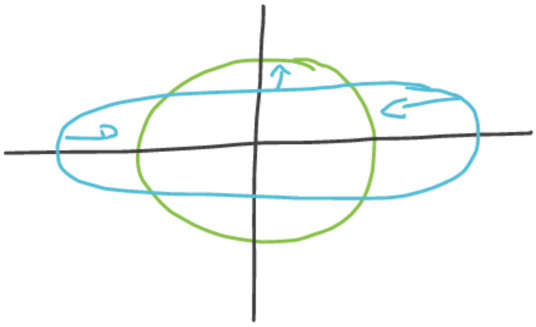

$-x_1^2 = 1$ $\rightarrow$leere Menge.

$m = 2$ $-x_1^2 - x_2^2 = 1$ $\rightarrow \varnothing$.

$x_1^2 - x_2^2 = 1$ $\rightarrow$Hyperbel.



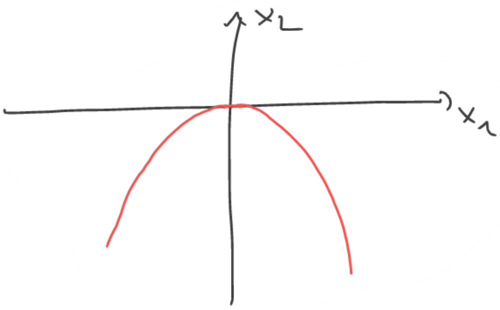
$x_1^2 + x_2^2 = 1$ $\to$Kreis.



$m' = m + 2.$

$m = 0$ $2x_1 = 0$ $\to$Gerade.

$m = 1$ $x_1^2 + 2x_2 = 0$ $\to$Parabel.




**Bemerkung.** Verschiedene dieser quadratischen Formen können als *Menge* die gleiche Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ beschreiben.

**Beispiel.**
$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 = 0 \right\} = \left\{ (x_1, x_2) \subset \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1 = 0 \right\}.$$

**Definition.** Wir nennen zwei Quadriken $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ *geometrisch äquivalent* wenn es eine Affinität $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $f(Q_1) = Q_2$.

**Frage.** Klassifikation aller Quadriken über $\mathbb{R}$ bis auf geometrische Äquivalenz?

Für eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ sei $\mathrm{sign}(B) = \#$ positive Eigenwerte von $B$ $-\#$ negative Eingenwerte von $B$ die Signatur von $B$.

**Satz 1.10.3 (Geometischer Klassifikationssatz (ohne Beweis)).** Seien $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ nichtleere Quadriken, die beschrieben werden durch erweiterte Matrizen $A_1', , A_2'$ mit rein quadratischen Anteilen $A_1, A_2$. Seien $Q_1, Q_2$ nicht gleich an Hyperebenen.

Dann sind $Q_1$ und $Q_2$ *geometrisch äquivalent* gdw gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} A_1 &= \operatorname{rang} A_2, \\ \operatorname{rang} A_1' &= \operatorname{rang} A_2', \\ |\operatorname{sign} A_1| &= |\operatorname{sign} A_2| \text{ und} \\ |\operatorname{sign} A_1'| &= |\operatorname{sign} A_2'|. \end{aligned}$$

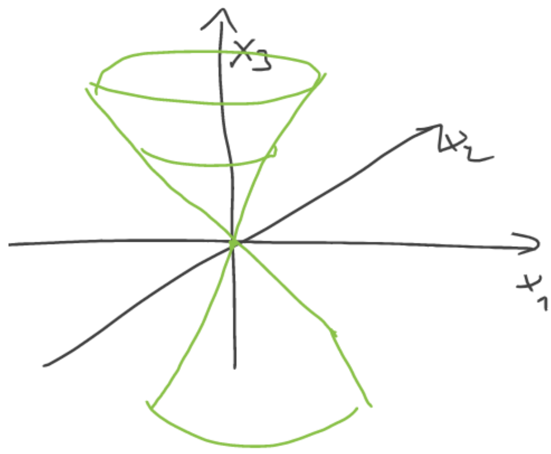
**Folgerung 1.10.1.** Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Quadrik. Dann ist $Q$ geometrisch äquivalent zu genau einer der folgenden Quadriken.

a) $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 = 0$, $0 \leqslant k \leqslant m$, $2k - m \geqslant 0$.

b) $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

c) $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1} - \cdots - x_m^2 + 2x_{m+1} = 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$ und $2k - m \geqslant 0$.

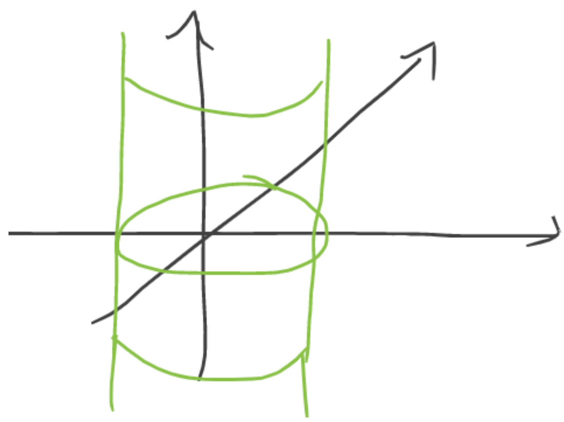
**Beispiele (Quadriken im $\mathbb{R}^3$). Typ a)** $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$




Kegel

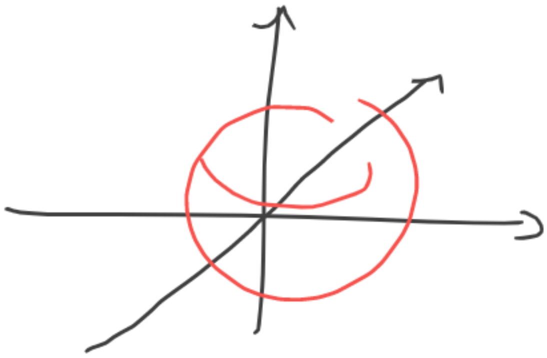
**Typ b)**

- $x_1^2 + x_2^2 = 1$.



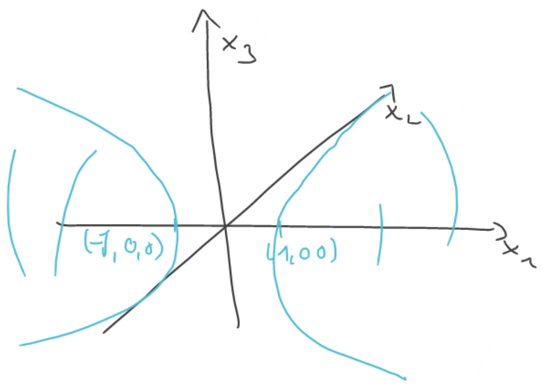
Kreiszylinder

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.



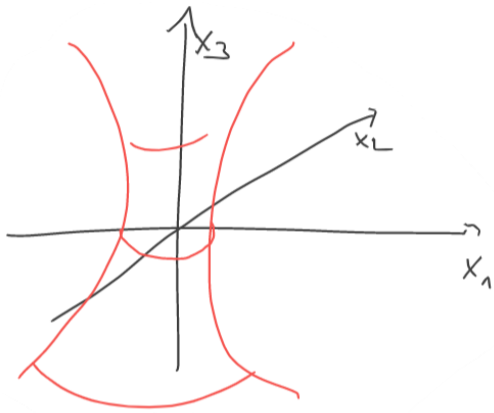
Kugel

- $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1$.



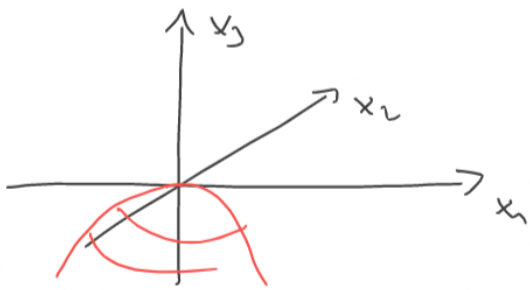

Zweischaliges Hyperboloid

- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$




Einschaliges Hyperboloid

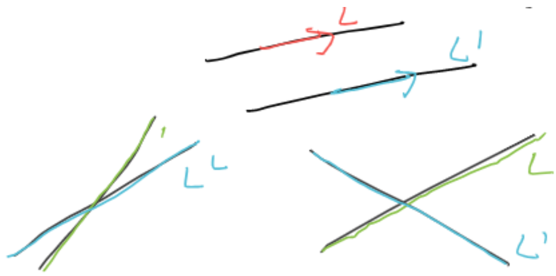
**Typ c)** $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0.$




Elliptisches Paraboloid

## §1.11 Euklidische affine Räume

In einem allgemeinen affinen Raum $X$ haben wir den Begriff von Gerade und parallelen Geraden (Sind $L, L' \subset X$ Geraden, dann sagen wir, dass $L$ und $L'$ parallel sind, falls $T(L) = T(L')$).




**Frage.** Können wir auch „Winkel“ messen zischen zwei sich schneidenden Geraden?

**Erinnerung.** Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf $V$ ist eine *positiv-definite symmetrische Bilinearform*

$$S\colon V \times V \to \mathbb{R}.$$

**Definition.** Ein euklidischer affiner Raum ist ein reeller affiner Raum $(X, T(X), \tau)$ zusammen mit einem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon T(X) \times T(X) \to \mathbb{R}$$

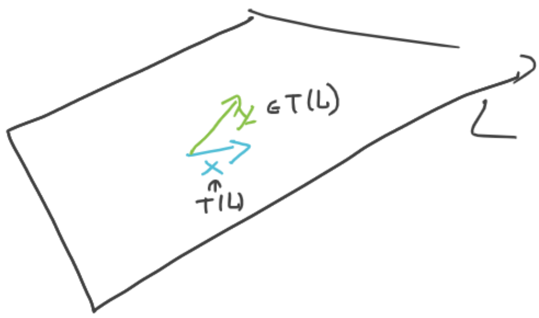
auf dem Translationsvektorraum $T(X)$.

**Beispiel 1.11.1.** Der $\mathbb{R}^n$ als reeller affiner Raum mit dem Standard-Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\wr|}{T(X)}} \times \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\wr|}{T(X)}} \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

**Beispiel 1.11.2.** Die Lösungsmenge $L$ im $\mathbb{R}^n$ eines Systems von linearen Gleichungen $Ax = b$, $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$



mit dem aus dem $\mathbb{R}^n$ induzierten Standard-Skalarprodukt auf $T(L) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Untervektorraum}}}{\leq} \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle \colon T(L) \times T(L) &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \langle x,y\rangle. \end{aligned}$$

**Frage.** Definition von Abständen / Winkeln in einem euklidischen affinen Raum?

**Definition 1.11.1.** Sei $X$ ein euklidischer affiner Raum. Wir definieren eine Normabbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \colon T(X) &\to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ t &\mapsto \|t\| := \sqrt{\langle t,t\rangle} \end{aligned}$$

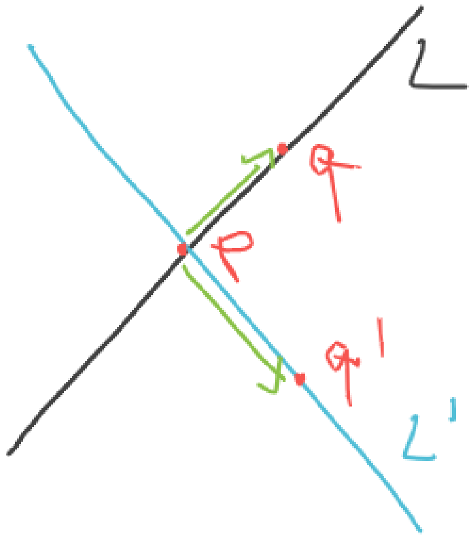
und eine Metrik

$$\begin{aligned} d\colon \quad X \times X &\to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ (p,q) &\mapsto d(p,q) := \|\overrightarrow{pq}\|. \end{aligned}$$


**Bemerkung.** $\|\cdot\|$ ist eine Norm, da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist. Man kann nachrechnen, dass $d$ tatsächlich eine Metrik auf $X$ ist, z. B.

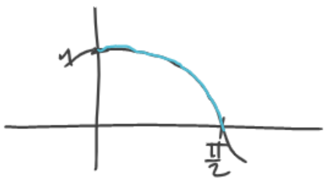
$$d(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\| = \|-\overrightarrow{qp}\| = |-1| \cdot \overrightarrow{qp} = d(q,p).$$

**Definition.** Sei $X$ ein euklidischer affiner Raum, $p,q,q' \in X$ mit $p \neq q,\ q'$, $L = p \vee q$, $L' = p \vee q'$.




Wir definieren den Winkel $\sphericalangle(L, L')$ zwischen den Geraden $L, L'$ durch

$$\sphericalangle(L, L') = \arccos \frac{\left|\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq'} \rangle\right|}{\|\overrightarrow{pq}\| \cdot \left\|\overrightarrow{pq'}\right\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$




**Bemerkung.** Die Definition des Winkels $\sphericalangle(L, L')$ ist unabhängig von der Wahl der Elemente $q, q'$ (solange $p \neq q, q'$).

## Vorlesung 8

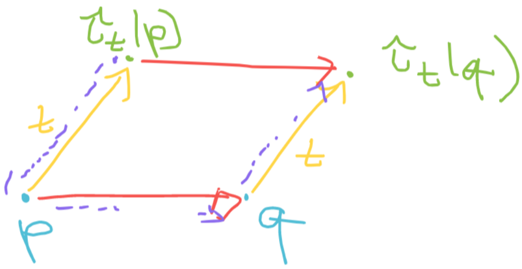
Di 19.05. 10:15

**Lemma 1.11.1.** Sei $X$ ein euklidischer affiner Raum, $t \in T(X)$ und $\tau_t \colon X \to X$ die Translation um $t$. Seien $q, q' \in X$ und $L, L' \subseteq X$ Geraden mit $L \cap L' \neq \varnothing$. Dann gilt

$$d(\tau_t(p), \tau_t(q)) = d(p, q) \text{ und}$$
$$\sphericalangle(\tau_t(L), \tau_t(L')) = \sphericalangle(L, L').$$

*Beweisidee.* Verwende

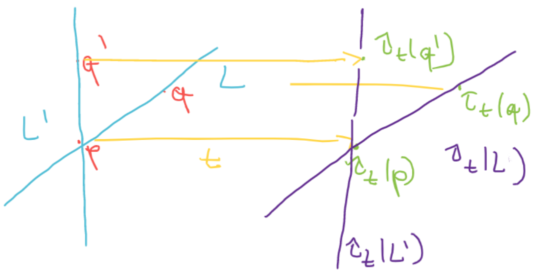
$$\overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q)} \overset{!}{=} \overrightarrow{pq},$$




also

$$d(\tau_t(p), \tau_t(q)) = \left\| \overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q)} \right\| = \|\overrightarrow{pq}\| = d(p, q)$$

für beliebige Punkte $p, q \in X$ und $t \in T(X)$.




Winkel zwischen Geraden $L, L'$

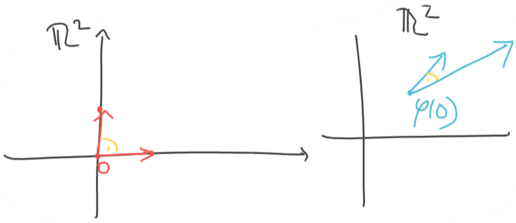
$$\sphericalangle(L, L') = \arccos \frac{\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq'} \rangle}{\|\overrightarrow{pq}\| \left\| \overrightarrow{pq'} \right\|}. \qquad \square$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$
$$\|\overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q)}\|$$
$$\|\overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q)}\|$$

**also:**

Translation um ein Element $t \in T(X)$ erhält Abstände und Winkel.

Nicht alle affinen Abbildungen haben diese Eigenschaft, z. B. $X = \mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt.




$$\phi \colon X \to X$$

**Frage.** Welche Abbildungen zwischen euklidischen affinen Räumen erhalten Abstände?

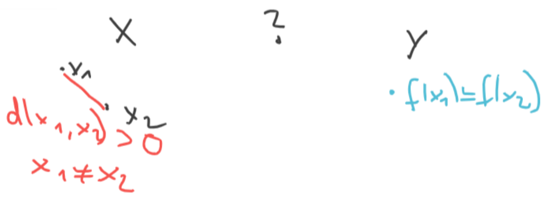
**Definition.** Seien $X, X'$ metrische Räume mit Metriken $d, d'$ und $f \colon X \to X'$ eine Abbildung. Wir nennen $f$ eine *Isometrie*, falls $\forall\, p, q \in X$ gilt

$$d'(f(p), f(q)) = d(p, q).$$

**Frage.** Welche *Abbildungen* zwischen euklidischen affinen Räumen erhalten Abstände?

$\rightarrow$Wir können dies Frage auf *affine Abbildungen* reduzieren.

**Satz 1.11.2.** Seien $X, Y$ euklidische affine Räume $f \colon X \to Y$ eine Isometrie. Dann ist $f$ *affin* und injektiv.




*Beweis.* Sei $f \colon X \to X$ eine Isometrie und $p \in X$. Betrachte die Abbildung (mit $T(X), T(Y)$ Vektorräumen mit Skalarprodukt)

$$\begin{aligned} F \colon T(X) &\to T(Y) \\ \overrightarrow{px} &\mapsto \overrightarrow{f(p)f(x)}. \end{aligned}$$

**Behauptung 1.** $F$ ist eine Isometrie. ■

Seien $x_1, x_2 \in X$.

$$\begin{aligned}
\|F(\overrightarrow{px_1}) - F(\overrightarrow{px_2})\| &= \|\overrightarrow{f(p)f(x_1)} \underbrace{-\overrightarrow{f(p)f(x_2)}}_{=\overrightarrow{f(x_2)f(p)}}\|_{T(Y)} \\
&= \left\|\overrightarrow{f(p)f(x_1)} + \overrightarrow{f(x_2)f(p)}\right\|_{T(Y)} \\
&= \|f(x_2)f(x_1)\|_{T(Y)} \\
&= \left\|\overrightarrow{f(x_2)f(x_1)}\right\|_{T(Y)} \\
&= d_Y(f(x_2), f(x_1)) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ ist Isometrie}}}{=} d_X(x_2, x_1) = \overrightarrow{x_2x_1}_{T(X)} \\
&= \|\overrightarrow{px_1} - \overrightarrow{px_2}\|_{T(x)}.
\end{aligned}$$

**Behauptung 2.** Ist $F$ *linear*, dann ist $f$ affin. Seien $x_1, x_2 \in X$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
F(\overrightarrow{x_1x_2}) &= F(\overrightarrow{x_1p} + \overrightarrow{px_2}) \\
&= F(-\overrightarrow{px_1} + \overrightarrow{px_2}) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ ist linear}}}{=} -F(\overrightarrow{px_1}) + F(\overrightarrow{px_2}) \\
&= -\overrightarrow{f(p)f(x_1)} + \overrightarrow{f(p)f(x_2)} \\
&= \overrightarrow{f(x_1)f(x_2)}.
\end{aligned}$$

Also ist Abbildung

$$\overrightarrow{x_1x_2} \mapsto \overrightarrow{f(x_1)f(x_2)}$$

linear! ■

Es genügt also folgendes Lemma zu beweisen

**Lemma 1.11.3.** Seien $V, W$ euklidisch Vektorräume, $F\colon V \to W$ eine Isometrie mit $F(0) = 0$. Dann ist $F$ *linear* und injektiv.

*Beweis von Lemma 1.11.3.* $F$ ist injektiv: Sei $v', v \in V$ mit $F(v) = F(v')$. Dann

$$0 = d_W(F(v), F(v')) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ Isometrie}}}{=} d_V(v, v'),$$

also $v = v'$.

Zur Linearität von $F$: $F$ ist Isometrie, also gilt $\forall\ v_1, v_2 \in V$

$$\underbrace{\|F(v_1) - F(v_2)\|_{d_W(F(v_1),F(v_2))}} = \underbrace{\|v_1 - v_2\|}_{d_V(v_1,v_2)}.$$

Aus $F(0) = 0$ folgt

$$\|F(v)\| = \|v\| \quad \forall\, v \in V$$

Berechne für $v_1, v_2 \in V$:

$$\|v_1 - v_2\|^2 = \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2\rangle = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2\langle v_1, v_2\rangle.$$

Es gilt auch

$$\underbrace{\|F(v_1) - F(v_2)\|^2}_{\|v_1 - v_2\|^2} = \underbrace{\|F(v_1)\|^2}_{\|v_1\|^2} + \underbrace{\|F(v_2)\|^2}_{\|v_2\|^2} - 2\langle F(v_1), F(v_2)\rangle.$$

Also folgt

$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle F(v_1), F(v_2)\rangle \quad \forall\, v_1, v_2 \in V.$$

Seien $v, v' \in V$.

$$\begin{aligned}\langle \underbrace{F(v+v') - F(v) - F(v')_{\overset{?}{=}0}}, F(v+v') - F(v) - F(v')\rangle &= \langle F(v+v'), F(v+v')\rangle - \langle F(v+v'), F(v)\rangle - \cdots \\ &= \langle v+v', v+v'\rangle - \langle v+v', v\rangle - \cdots + \langle v', v'\rangle \\ &= \langle v+v'-v-v', v+v'-v-v'\rangle \quad \forall\, v, v' \in V.\end{aligned}$$

Multiplikation mit Skalaren. Sei $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle F(\lambda v) - \lambda F(v), F(\lambda v) - \lambda F(v)\rangle &= \langle F(\lambda v), F(\lambda v)\rangle - 2\langle F(\lambda v), \lambda F(v)\rangle\langle \lambda F(v), \lambda F(V)\rangle \\ &= \langle F(\lambda v), F(\lambda v)\rangle - 2\lambda\langle F(\lambda v), F(v)\rangle + \lambda^2\langle F(v), F(v)\rangle \\ &= \langle \lambda v, \lambda v\rangle - 2\lambda\langle \lambda v, v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle = (\lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2)\langle v, v\rangle \\ &= 0, \qquad \square\end{aligned}$$

also $F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad \forall\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \ \ \forall\, v \in V$. $\square$

**Definition.** Eine Isometrie $f\colon X \to X$ eines euklidischen affinen Raumes $X$ nennen wir *Kongruenz* (also nach Satz 1.11.2 immer eine Affinität).

**Lemma 1.11.4.** Sei $f\colon X \to X$ eine Affinität eines euklidischen affinen Raumes $X$. Dann ist $f$ eine *Kongruenz* genau dann, wenn die zugehörige lineare Abbildung $F\colon T(X) \to T(X)$ *orthogonal* ist.

*Beweis.* $f$ ist Isometrie gdw

$$d(f(p), f(q)) = d(p, q) \quad \forall\, p, q \in X,$$

d. h. gdw

$$\underset{\|F(\overrightarrow{pq})\|}{\overset{\|}{\|f(p)f(q)\|}} = \| \underbrace{\overrightarrow{pq}}_{\in T(X)} \| \quad \forall\, p, q \in X.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass $F$ orthogonal ist (also das Skalarprodukt erhält) $\square$

**Definition.** Sei $X$ ein euklidischer affiner Raum, $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Sei $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir nennen $f$ eine *Ähnlichkeit* mit (Ähnlichkeits-) Faktor $\rho$ wenn $\forall\, p, q \in X$ gilt

$$d(f(p), f(q)) = \rho \cdot d(p, q).$$

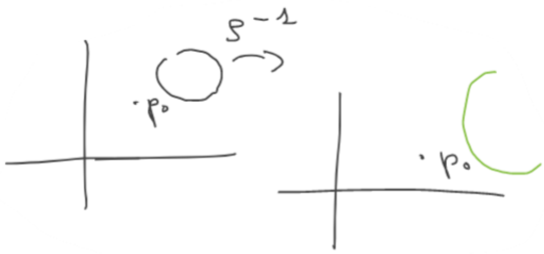
**Korollar (aus Satz 1.11.2).** Eine Ähnlichkeit $f\colon X \to X$ eines euklidischen affinen Raumes $X$ ist eine Affinität.

*Beweis.* Sei $p_0 \in X$. Wir definieren eine Affinität

$$\rho^{-1}\colon X \to X$$

durch $\rho^{-1}(p_0) = p_0$ und

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}\colon \qquad T(X) &\to T(X) \\ T(X) \ni v &\mapsto \rho^{-1} v. \end{aligned}$$




Wir betrachten die Abbildung

$$\rho^{-1} \circ f\colon X \to X.$$

**Behauptung.** $\rho^{-1} \circ f$ ist eine Isometrie.

Seien $p, q \in X$. Dann gilt

$$d(\rho^{-1} \circ f(p), \rho^{-1}(f(q))) = \|\overrightarrow{\rho^{-1} \circ f(p)\rho^{-1} \circ f(q)}\|$$

also

$$\begin{aligned} d(\rho^{-1} \circ f(p), \rho^{-1}(f(q))) &= \left\|\rho^{-1}\overrightarrow{f(p)f(q)}\right\| \\ &= \rho^{-1}\left\|\overrightarrow{f(p)f(q)}\right\| \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ ist Ähnlichkeit mit Faktor } \rho}}{=} d(p, q), \end{aligned}$$

also ist nach Satz 1.11.2 $\rho^{-1} \circ f$ injektiv und affin. Damit ist auch $f$ Affinität. $\square$

## Vorlesung 9

Fr 21.05. 10:15

Eine Weitere Eignenschaft von Ähnlichkeiten:

**Satz 1.11.5.** Sei $X$ ein euklidischer affiner Raum und $f\colon X \to X$ eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor $\rho \neq 1$. Dann besitzt $f$ genau einen Fixpunkt.

*Beweisidee.* Nach obigem Korollar ist $f$ eine Affinität. Sei $F\colon T(X) \to T(X)$ die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist $\frac{1}{\rho}F$ orthogonal, also haben alle Eigenwerte von $F$ Betrag $\rho$.

Nach Wahl eines Koordinatensystem wird $f$ beschrieben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \underbrace{Ax+b}_{\overset{?}{=}x}. \end{aligned}$$

mit $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $k \subset \mathbb{R}^n$ und Fixpunkten beschrieben durch

$$Ax + b = x,$$

also $(A - I_n)x = -b$, da 1 kin Eigenwert von $A$ ist, gilt $\det(A - I_n) \neq 0$. □

Ähnlichkeiten erhalten Winkel. Gibt es noch weitere Affinitäten eines euklidischen affinen Raumes, die Winkel erhalten?

**Definition.** Sei $X$ ein euklidischer affiner Raum, $L, L' \subseteq X$ Geraden mit $L \cap L' \neq \varnothing$. Wir nennen $L$ und $L'$ orthogonal, wenn gilt

$$\sphericalangle(L, L') = \frac{\pi}{2}.$$

Schriebe auch $L \perp L'$.

**Satz 1.11.6.** Sei $X$ ein euklidischer affiner Raum und $f\colon X \to X$ eine Affinität mit der Eigenschaft, dass für alle Geraden $L, L'$ mit $L \cap L' \neq \varnothing$ und $L \perp L'$ gilt, dass

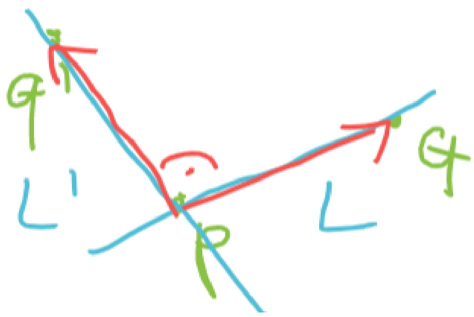
$$f(L) \perp f(L').$$

Dann ist $F$ eine Ähnlichkeit.

*Beweis.* Sei $F\colon T(X) \to T(X)$ die zugehörige bijektive lineare Abbildung. Seien $p, q, q' \in X$ mit $p \vee q = L$, $p \vee q' = L'$ und $L \perp L'$. Dann gilt $\sphericalangle(L, L') = \frac{\pi}{2}$, also

$$\arccos \frac{|\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq'} \rangle|}{\|\overrightarrow{pq}\| \|\overrightarrow{pq}\|} = \frac{\pi}{2}$$

d. h. $\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq'} \rangle = 0$.




Die Geraden $f(L)$ und $f(L')$ sind gegeben durch

$$f(p) \vee f(q) = f(L) \qquad f(p) \vee f(q') = f(L')$$

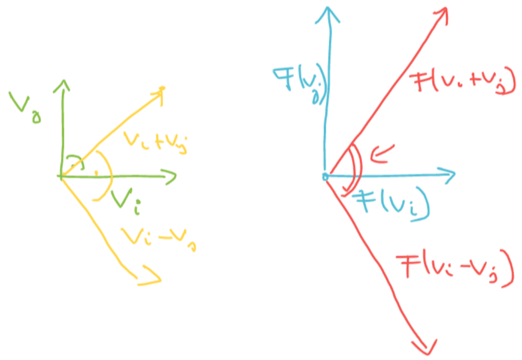
und wir können annehmen (wegen $f(L) \perp f(L')$), dass

$$\underbrace{\langle \overrightarrow{f(p)f(q)}, f(p)f(q') \rangle}_{\langle F(\underbrace{\overrightarrow{pq}}_{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ T(X)}}), F(\underbrace{\overrightarrow{pq'}}_{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ T(X)}}) \rangle} = 0.$$

Es gilt also, dass für alle $v, w \in T(X)$ mit $\langle v, w \rangle = 0$ gilt $\langle F(v), F(w) \rangle = 0$. Wir haben den Beweis von Satz 1.11.6 auf folgendes Lemma reduziert. $\square$

**Lemma 1.11.7.** Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum, $F\colon V \to V$ ein Isomorphismus mit $F(v) \perp F(w)$ für alle $v, w \in V$ mit $v \perp w$. Dann existiert $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ s. d. $\frac{1}{\rho} \cdot F$ orthogonal ist.

*Beweis.* Sei $n = \dim V$ und $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormal von $V$, d. h. $\|v_i\| = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$ und $\langle v_i, v_\gamma \rangle = 0$ für $i \leqslant j$. Sei $\rho_i := \|F(v_i)\|$, $1 \leqslant i \leqslant n$.




Fpr $j \neq j$ gilt

$$\langle v_i + v_j, v_i - v_j\rangle = \underbrace{\|v_i\|^2}_{=1} + \underbrace{\langle v_j, v_i\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle v_i, v_j\rangle}_{=0} - \underbrace{\|v_j\|^2}_{=1} = 0,$$

also $v_i + v_j \perp v_i - v_j$. Nach Annahme gilt dann auch

$$\langle F(v_i), F(v_i)\rangle + \underbrace{\langle F(v_j), F(v_i)\rangle}_{=0,\text{ da } F(v_j)\perp F(v_i)} - \underbrace{\langle F(v_i), F(v_j)\rangle}_{=0} - \langle F(v_j), F(v_j)\rangle = \langle F(v_i+v_j), F(v_i-v_j)\rangle = 0.$$

Also gilt

$$\underset{\rho_i^2}{\underset{\shortparallel}{\|F(v_i)\|^2}} = \underset{\rho_j^2}{\underset{\shortparallel}{\|F(v_j)\|^2}} \quad \forall\, i, j$$

und damit $\rho_i = \rho_j \quad \forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n$. Schreibe $\rho = \rho_i \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n$ für den gemeinsamen Wert. Dann ist die Abbildung $\frac{1}{\rho}F$ orthogonal, da $v_1, \ldots, v_n$ auf die Orthonormalbasis $\frac{1}{\rho}F(v_1), \ldots, \frac{1}{\rho}F(v_n)$ abgebildet wird. $\square$

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Affinität gegeben durch

$$x \mapsto Ax + b \qquad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{R}^n.$$

Im Obigen haben wir gesehen, dass gilt: $f$ ist *Kongruenz* $\iff$ $A$ ist *orthogonal*, $f$ ist Ähnlichkeit $\frac{1}{\rho}A$ ist orthogonal für ein $\rho \geqslant 0$.

**Frage.** Wie können wir $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ für eine allgemeine Affinität $f$ mit Hilfe von / bis auf eine orthogonale Matrix möglichst einfach ausdrücken?

Betrachte $\mathbb{R}^n$ als euklidischen affinen Raum mit Standard-skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle\colon \qquad\qquad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ (x_1, \ldots, x_n) \times (y_1, \ldots, y_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned}$$

**Satz 1.11.8 (Hauptachsentransformation von Affinitäten).** Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Affinität gegeben durch $x \mapsto Ax+b$ mit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es orthogonale Matrizen $S, T \in \mathrm{O}(n)$ und eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$, s. d.

$$A = SDT$$

d. h.

$$f(x) = SDTx + f(0).$$

*Beweis.* Wir bilden die Matrix $C = {}^tAA$.

- $C$ ist symmetrisch da
$$ {}^tC = {}^t({}^tAA) = {}^tA{}^{tt}A = {}^tAA = C.$$
- $C$ ist positiv definit, denn $I_n$ ist positiv definit und daher nach dem Sylvesterschen Trägheitsgesetz auch $C$. Aus der Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen (AGLA I) folgt, dass es eine Matrix $T \in \mathrm{O}(n)$ mit
$$TC{}^tT = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix},$$
$\beta_1, \dots, \beta_n > 0$. Wir definieren $\alpha_i = \sqrt{\beta_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ und
$$D \coloneqq \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix},$$
Dann gilt
$$T \underbrace{{}^tC}_{{}^tAA} {}^tT = D^2 = {}^tDD,$$
also
$$I_n = \underbrace{{}^tA^{-1}{}^tT{}^tD}_{S}\,\underbrace{DTA^{-1}}_{{}^tS}.$$
Sei $S \coloneqq {}^tA^{-1}{}^tT{}^tD$. Dann gilt ${}^tSS = I_n$ und $S \in \mathrm{O}(n)$ ist orthogonal. Wir erhalten ${}^tS = DTA^{-1}$ und $A = SDT$. □

**Korollar.** Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, s. d. die Vektoren $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ eine Orthogonalbasis bilden.

*Beweis.* Sei $F$ bezüglich der Standardbasis der $\mathbb{R}^n$ gegeben durch die Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Aus Satz 1.11.8 folgt, dass es orthogonale Matrizen $S, T \in \mathrm{O}(n)$ gibt mit $A = SDT$ und

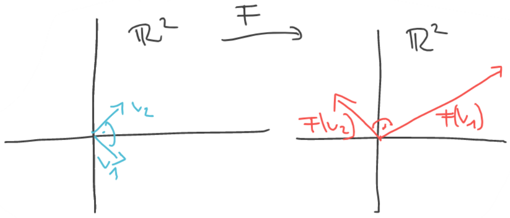
$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ einer Diagonalmatrix. Sei $v_i = {}^tTe_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. $T$ ist orthogonal, also auch ${}^tT$ und damit ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\begin{aligned} F(v_i) &= A^tTe_i \\ &= SD \underbrace{I_n}_{T^tT} e_i \\ &= SDe = S(\alpha_i e_i) \\ &= \alpha_i S_{e_i}. \end{aligned}$$

Die Matrix $S$ ist orthogonal, also sind die Vektoren $Se_1, \ldots, Se_n$ eine Orthonormalbasis. Da $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, bilden $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ eine orthogonal Basis der $\mathbb{R}^n$. $\square$

**Beispiel.**



# Kapitel 2

# Projektive Geometrie

## §2.1 Projektive Räume

### Vorlesung 10

Di 26.05. 10:15

Sei $K$ ein Körper und

$$P(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$$

ein quadratisches Polynom der Form

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

it $\alpha_{ij} \in K$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Sei

$$Q = \{ \, (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0 \, \}$$

die durch $P$ beschriebene Quadrik.

Sei $\lambda \in \star\ast$. Dann gilt für $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \in Q \iff \lambda(x_1, \dots, x_n) \in Q.$$

Denn $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ ist äquivalent zu

$$0 = \lambda^2 P(x_1, \dots, x_n) = \lambda^2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} (\lambda x_i)(\lambda x_j) = P(\lambda(x_1, \dots, x_n)).$$

Mit $(x_1, \dots, x_n) \in Q$ ist also auch

$$\underbrace{K \cdot (x_1, \dots, x_n)}_{\{ \, \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) \mid \lambda \in K \, \}} \subseteq Q$$

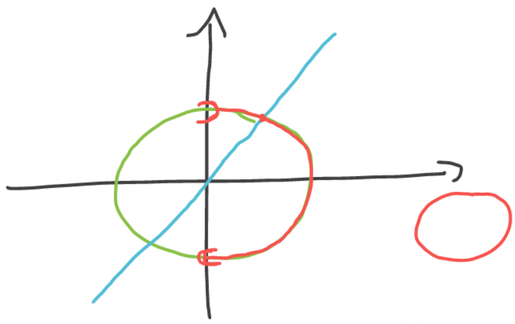
d. h. $Q$ „besteht aus einer Vereinigung an Geraden“.

**Idee.** Im projektiven Raum identifizieren wir die Punkte der Gerade $K \cdot (x_1, \ldots, x_n)$ zu einem Punkt.

**Definition.** Sei $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum. Wir definieren

$$\mathbb{P}(V) = \{ L \leqslant V \mid L \text{ ist eindimensionaler Untervektorraum von } V \}.$$

**Beispiel.** $V = \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.



$$\dim(\mathbb{P}(V)) = 1.$$

**Bemerkung.** Für $V = \{ 0 \}$ erhalte

$$\dim(\mathbb{P}(V)) = \dim_K(fV) - 1 = 0 - 1 = -1$$

und $\mathbb{P}(V) = \varnothing$.

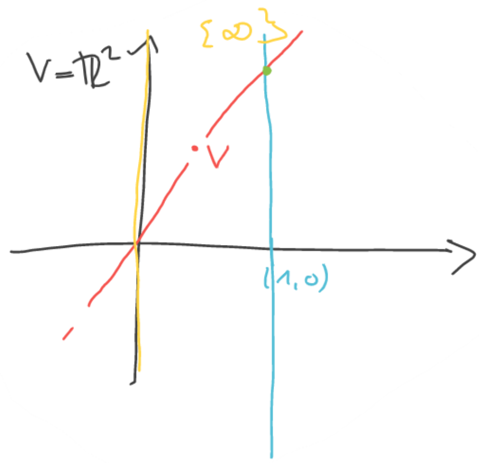
**Beispiel / Definition 2.1.1.** Sei $K$ ein Körper, $n \geqslant 0$. Dann ist $\mathbb{P}(K^{n+1})$ die Menge der Geraden durch den Ursprung im $K^{n+1}$. Wir bezeichnen

$$\mathbb{P}_n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$$

als $n$-dimensionalen projektiven Raum über $K$.

**Bemerkung.** Für einen $K$-Vektorraum $V$ haben wir immer eine Abbildung

$$\begin{aligned} V \setminus \{ 0 \} &\to \mathbb{P}(V) \\ v &\mapsto K \cdot v. \end{aligned}$$




$\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ „$\sim$“ $\mathbb{R}^1 \cup \{ \infty \}$

**Definition (homogene Koordinaten).** $n \in \ _{\geqslant 0}$. Sei $K$ ein Körper und $L \in \mathbb{P}_n(K)$. Wir nennen ein Tupel

$$(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{ 0 \}$$

homogene Koordinaten des Punktes $L \in \mathbb{P}_n(K)$, falls

$$K \cdot (x_0, \ldots, x_n) = L.$$

Schreibe auch

$$(x_0 : \ldots : x_n) := K \cdot (x_0, \ldots, x_n).$$

**Bemerkung.** Die homogenen Koordinaten eines Punktes $L \in \mathbb{P}_n(K)$ sind nur bis auf Multiplikation mit $\lambda \in K^\star$ eindeutig bestimmt, d. h. für $(x_0, \ldots, x_n), (y_0, \ldots, y_n) \in K^{n+1} \setminus \{ 0 \}$ gilt

$$(x_0 : \ldots : x_n) = (y_0 : \ldots : y_n)$$

gdw

$$K(x_0, \ldots, x_n) = K(y_0, \ldots, y_n),$$

d. h. wenn $\exists\ \lambda \in K^\star$ mit

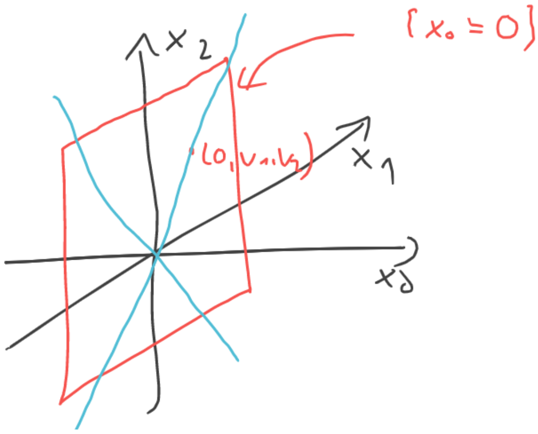
$$(x_0, \ldots, x_n) = \lambda(y_0, \ldots, y_n).$$

## Unterräume eines projektiven Raums

**Beispiel 2.1.1.** $V = \mathbb{R}^3$, die Menge der Geraden $\mathbb{R} \cdot (0, v_1, v_2)$ mit $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \}$ „sieht genauso aus“ wie

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2).$$

Wir wollen
$$\left\{ \mathbb{R} \cdot (0, v_1, v_2) \;\middle|\; (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \right\}$$
als projektiven Unterraum erklären.

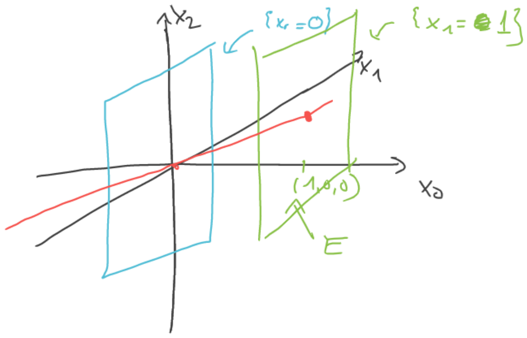



**Definition.** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$. Wir nennen $Z$ einen projektiven Unterraum von $\mathbb{P}(V)$, falls es einen $K$-Untervektorraum $W \leq V$ gibt mit $Z = \mathbb{P}(W)$. Wir nennen $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine

- (projektive) Gerade, wenn $\dim Z = 1$,
- (projektive) Ebene, wenn $\dim Z = 2$,
- (projektive) Hyperebene, wenn $\dim Z = \dim(\mathbb{P}(V)) - 1$.

**Bemerkung.** Ist $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ ein projektiver Unterraum mit $Z = \mathbb{P}(W)$ für einen Untervektorraum $W \leq V$, so ist
$$W = \bigcup_{p \in Z} p$$
Vereinigung von Geraden in $Z$.

Zurück zum obigen Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{ (0, x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3 \} \cong \mathbb{R}^2$. Dann ist $Z = \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$ ein projektiver Unterraum. Was bleibt übrig, wenn wir $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathbb{P}(W)$ betrachten?




$\mathbb{P}(W)$: Geraden, die in der $x_1$-$x_2$-Ebene enthalten sind. Betrachte die affine Ebene

$$E = \left\{ (1, x_1, x_2) \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Sei $L \in \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$. Dann gibt es genau einen Schnittpunkt $L \cap E$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W) &\to E \underset{\substack{\uparrow \\ \text{als affiner Raum über } \mathbb{R}}}{\cong} \mathbb{R}^2 \\ L &\mapsto L \cap E \end{aligned}$$

ist bijektiv.

**Allgemein:**

Sei $K$ ein Körper und betrachte im $K^{n+1}$ den Untervektorraum

$$W := \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \;\middle|\; x_0 = 0 \right\}.$$

Dann ist $H := \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}_n(K)$ eine (projektive) Hyperebene. Falls

$$(y_0 : \ldots : y_n) \in \mathbb{P}_n(K) \setminus H,$$

dann ist $y_0 \neq 0$, also ist

$$(y_0 : \ldots : y_n) = \left( 1 : \frac{y_1}{y_0} : \ldots : \frac{y_n}{y_0} \right)$$

von der Form $(1 : x_1 : \ldots : x_n)$ mit $x_1, \ldots, x_n \in K$. Zwei Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \neq (x'_1, \ldots, x'_n) \in K^n$ induzieren unterschiedliche Projektive Punkte im $\mathbb{P}_n(K)$.

$$(1 : x_1 : \ldots : x_n) \neq (1 : x'_1 : \ldots : x'_n) \in \mathbb{P}_n(K).$$

Aus
$$(1, x_1, \ldots, x_n) = \lambda(1, x_1', \ldots, x_n')$$
folgt $\lambda = 1$.

Wir erhalten eine Bijektion
$$\begin{aligned} \phi\colon K^n &\to \mathbb{P}_n(K) \setminus H \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n) \end{aligned}$$
und damit eine Einbettung
$$\begin{aligned} \iota\colon K^n &\to \mathbb{P}_n(K) \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n), \end{aligned}$$
die wir kanonische Einbettung des $K^n$ in den $\mathbb{P}_n(K)$ nennen.

## Dimensionsformel als nächstes Ziel

**Lemma 2.1.1.** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $(Z_i)_{i\in I}$ eine Familie projektiver Unterräume von $\mathbb{P}(V)$, $i \in I$ gibt es eine Familie projektiver Unterräume von $\mathbb{P}(V)$. Dann ist $\bigcap_{i\in I} Z_i$ in projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$.

*Beweis.* Zu jedem $Z_i \subseteq \mathbb{P}(V)$, $i \in I$, gibt es einen $K$-Untervektorraum $W_i \subseteq V$ mit $Z_i = \mathbb{P}(W_i)$. Es gilt
$$\begin{aligned} \bigcap_{i\in I} Z_i &= \bigcap_{i\in I} \{\, L \subseteq V \mid \text{Gerade mit } L \subseteq W_i \,\} \\ &= \bigcap_{i\in I} \left\{ L \subseteq V \;\middle|\; \text{Gerade } L \text{ mit } L \subseteq \underbrace{\bigcap_{i\in I} W_i}_{K\text{-Untervektorraum}} \right\} \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} W_i\right) \end{aligned}$$
□

**Beispiel 2.1.1.** $V = \mathbb{R}^3$, also $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ die projektive Ebene über $\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} \iota\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\ (x_1, x_2) &\mapsto (1 : x_1 : x_2) \end{aligned}$$

kanonische Einbettung. Betrachte die projektiven Geraden

$$Z_1 = \{\, (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid x_1 = 0 \,\} = \mathbb{P}(W_1)$$

mit

$$W_1 = \left\{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = 0 \right\}$$

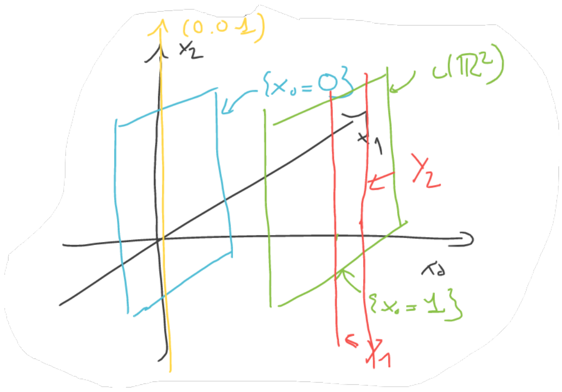
und $Z_2 = \mathbb{P}(W_2)$ it

$$W_2 = \left\{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_0 = x_1 \right\}.$$

Seien $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ die affinen Geraden gegeben durch

$$\begin{aligned} Y_1 &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = 0 \right\} \\ Y_2 &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Dann ist $Z_1 = \iota(Y_1) \cup \{\, (0:0:1) \,\}$ und $Z_2 = \iota(Y_2) \cup \{\, (0:0:1) \,\}$. Es ist $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. ($Y_1, Y_2$ sind parallele Geraden), aber $Z_1 \cap Z_2 = \{\, (0:0:1) \,\}$. „Wir sagen auch, die Geraden $Z_1, Z_2$ schneiden sich in dem unendlich fernen Punkt $(0:0:1)$“.




**Bemerkung.** Die Vereinigung von projektiven Unterräumen eines projektiven Raumes $\dim(V)$ ist im Allgemeinen selbst kein projektiver Unterraum.

**Frage.** Seien $Z_i$, $i \in I$ projektive Unterräume von $\mathbb{P}(V)$. Finde den kleinsten projektiven Unterraum von $\mathbb{P}(V)$, der $\bigcup_{i \in I} Z_i$ enthält.

**Definition.** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum mit $Z_i$, $i \in I$ projektive Unterräume von $\mathbb{P}(V)$. Wir definieren den Verbindungraum

$$\bigvee_{i \in I} Z_i := \bigcap_{\substack{Y \subseteq \mathbb{P}(V) \\ \text{proj. Unterraum} \\ \bigcup_{i\in I} Z_i \subseteq Y}} Y.$$

**Bemerkung.** $\bigvee_{i\in I} Z_i$ ist der kleinste projektive Unterraum $Y$ von $\mathbb{P}(V)$ mit $\bigcup_{i\in I} Z_i \subseteq Y$.

**Lemma 2.1.2.** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $W_i$, $i \in I$ Untervektorräume von $V$. Dann gilt

$$\bigvee_{i\in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}\left(\sum_{i\in I} W_i\right).$$

*Beweis.* Es ist

$$\bigcup_{i\in I} \mathbb{P}(W_i) \subseteq \mathbb{P}\left(\sum_{i\in I} W_i\right).$$

Sei $Y = \mathbb{P}(W)$ ein projektiver Unterraum mit

$$\bigcup_{i\in I} \mathbb{P}(W_i) \subseteq Y$$

wobei $W \subseteq V$ ein $K$-Untervektorraum ist. Dann gilt

$$W_i = \bigcup_{p\in\mathbb{P}(W_i)} p \subseteq \bigcup_{p\in Y} p = W,$$

also $W_i \subseteq W \quad \forall\, i \in I$. $W$ ist $K$-Untervektorraum, also gilt dann auch $\sum_{i\in I} W_i \subseteq W$ und

$$\underbrace{\mathbb{P}(\sum_{i\in I} W_i)}_{\supseteq \mathbb{P}(W_i)} \subseteq \mathbb{P}(W).$$ □