Vorlesungsmitschrift

AGLA II

Prof. Dr. Damaris Schindler

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 21. April 2020

Disclaimer

Nicht von Schindler durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Affine Geometrie

Vorlesung 1

Di 21.04. 10:15

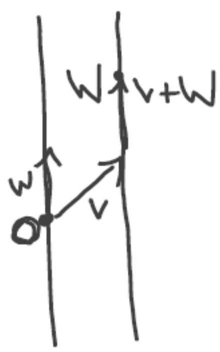
§1.1 Was ist ein affiner Raum?

Beispiel 1 (aus der AGLA I). $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. In diesen Räumen gibt es einen ausgezeichneten „Usprung“.

Frage. Wie könne wir eine affine Ebene / affine Röume modellieren, wobei alle Punkte gleichberechtigt sind?

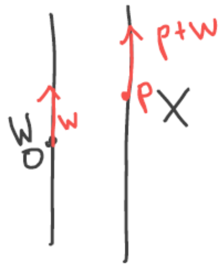
Idee. Verwende affine Unterräume.

Beispiel 2. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und $v \in V$. Wir nennen $X = v + W$ einen affinen Unterraum von V. X ist im Allgemeinen selbst kein Vektorraum unter der Addition in V, aber W „operiert“ auf X.



Für $w \in W$ definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau_w \colon X &\to X \\ p &\mapsto p + w. \end{aligned}$$



Sei

$$\mathrm{Bij}(X) = \{\, f \colon X \to X, f \text{ ist bijektiv} \,\}.$$

Dann ist $\tau_w \in \mathrm{Bij}(X)$ für alle $w \in W$.

Bemerkung. $\mathrm{Bij}(X)$ ist eine Gruppe unter Verkettung von Abbildung. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \tau \colon W &\to \mathrm{Bij}(X) \\ w &\mapsto \tau_w. \end{aligned}$$

Lemma 1. Die Abbildung τ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Seien $w, w' \in W$ Dann

$$\begin{aligned} \tau_w \circ \tau_{w'} \colon X &\to X \\ p &\mapsto p + \underbrace{w' + w}, \end{aligned}$$

also

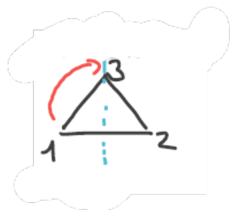
$$\tau(w) \circ \tau(w') = \tau_w \circ \tau_{w'} = \tau_{w+w'} = \tau(w + w'). \qquad \square$$

Es gilt noch mehr:

für $p, q \in X$ besteht genau ein $w \in W$ mit $\tau_w(p) = q$.

Gruppenoperationen

Beispiel 3. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck D und Spiegelungen / Drehungen die D auf sich selbst abbilden.



Diese formen eine Gruppe (welche?) und „operieren“ auf D.

Definition 1. Sei X eine Mege und G eine Gruppe. Eine Operation von G auf X ist ein Homomorphismus von Gruppen

$$\begin{aligned} \tau\colon G &\to \mathrm{Bij}(X) \\ g &\mapsto \tau_g. \end{aligned}$$

Bemerkung. τ ist ein Homomorphismus ð$\forall\ g, g' \in G$

$$\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{gg'}.$$

Für $x \in X$ nennen wir

$$G(x) = \{\ \tau_g(x) \mid g \in G\ \}$$

die Bahn von x unter G.

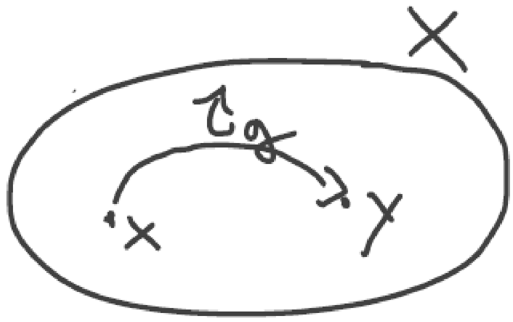
Beispiel 4. a) Sei G eine Gruppe und $X = G$ die Linkstranslation
$$l\colon G \to \mathrm{Bij}(G), \quad g \mapsto l_g$$
mit $l_g(x) = gx \quad \forall x \in G$ ist eine Gruppenoperation von G auf sich selbst.

b)

$$\begin{aligned} k\colon G &\to \mathrm{Bij}(G) \\ g &\mapsto k_g \end{aligned}$$

mit $k_g(x) = gxg^{-1} \quad \forall x \in G$ ist eine Gruppenoperation.

Frage. Sei $\tau\colon G \to \mathrm{Bij}(x)$ eine Gruppenoperation, $x, y \in X$. Wann gibt es ein $g \in G$ mit $\tau_g(x) = y$?

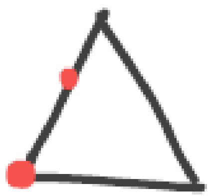


Definition. Sei $\tau\colon G \to \mathrm{Bij}(X)$ eine Gruppenoperation von G auf X. Wir nennen τ *einfach transitiv*, wenn $\forall\ x, y \in X$ *genau ein* $g \in G$ besteht mit

$$\tau_g(x) = y.$$

Beispiel.

- Die Gruppenoperation aus Beispiel 3 ist *nicht* einfach transitiv



- Die Linkstranslation aus Beispiel 4 a) ist immer einfach transitiv.

Zurück zum Beispiel 2 (V K-Vektorraum, $W \subseteq V$ Untervektorraum, $v \in V$, $X = v + W$)

Wir haben Translationen definiert

$$\begin{aligned} \tau\colon W &\to \mathrm{Bij}(X) \\ x &\mapsto \tau_w \end{aligned}$$

mit $\tau_w\colon X \to X$, $p \mapsto p + w$. τ ist eine einfach transitive Gruppenoperation von W auf x.

Definition. Sei K ein Körper. Ein affiner Raum über K ist ein Tripel $(X, T(X), \tau)$ mit

- $X \neq \emptyset$ eine Menge
- $T(X)$ ein K-Vektorraum
- $\tau\colon T(x) \to \mathrm{Bij}(X)$ eine einfach transitive Gruppenoperation

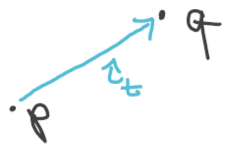
Konvention. $X = \emptyset$ ohne Spezifikation von $T(X)$, τ nennen wir auch einen affinen Raum.

Definition. Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum über einem Körper K. Dann nennen wir $\dim_K T(X)$ die Dimension von X, schreiben auch $\dim X$.

Ist $\dim X = 1$ bzw. $\dim X = 2$, dann nennen wir X eine affine Gerade bzw. affine Ebene.

Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum, $p, q \in X$. Dann $\exists! t \in T(X)$ mit $\tau_t(p) = q$.

Schreibe $\overrightarrow{pq} = t \in T(X)$ als $\tau_{\overrightarrow{pq}}(p) = q$.

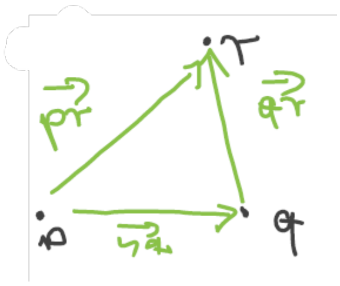


Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\to T(X) \\ (p, q) &\mapsto \overrightarrow{pq}. \end{aligned}$$

Frage. Welche Eigenschaften hat die Abbildung $(p, q) \mapsto \overrightarrow{pq}$ in einem allgemeinen affinen Raum?

Lemma 2. Sei X ein affiner Raum, $p, q, r \in X$. Dann gilt $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.



Beweis. $\tau\colon T(X) \to \mathrm{Bij}(X)$ ist ein Homomorphismus. Also gilt $\tau_{\overrightarrow{qr}} \circ \tau_{\overrightarrow{pq}} = \tau_{\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}}$. Es gilt damit $\tau_{\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}}(p) = r$. Also $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$. $\square$

§1.2 Affine Abbildungen

Seien V, W K-Vektorräume. In der AGLA I: lineare Abbildungen

$$F\colon V \to W,$$

ðF respektiert die Vektorraum-Struktur

$$\begin{aligned} F(v_1+v_2) = F(v_1)+F(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \\ F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad \forall \lambda \in K \forall v \in V. \end{aligned}$$

Frage. Was sind natürliche Abbildungen zwischen affinen Räumen?

Seien X, Y affine Räume über einem Körper K.

$$\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ T(X)}}{\overrightarrow{pq}} \rightsquigarrow \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ T(Y)}}{\overrightarrow{f(p)f(q)}}.$$

Definition. Wir nennen eine Abbildung $f\colon X \to Y$ affin, wenn s eine K-lineare Abbildung $F\colon T(X) \to T(Y)$ gibt, sodass $\forall\ p, q \in X$ gilt

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = F(\overrightarrow{pq}).$$

Bemerkung. a) Es gibt im Allgemeinen verschiedene affine Abbildungen $f\colon X \to Y$, die zur gleichen linearen Abbildung $F\colon T(X) \to T(Y)$ gehören.

b) Sei $p_0 \in X$ fest und $f\colon X \to Y$ affin.

Für $q \in X$ gilt

$$\begin{aligned} f(q) &= \tau_{\overrightarrow{f(p_0)f(q)}}(f(p0)) \\ &= \tau_{F(\overrightarrow{p_0q})}(f(p0)). \end{aligned}$$

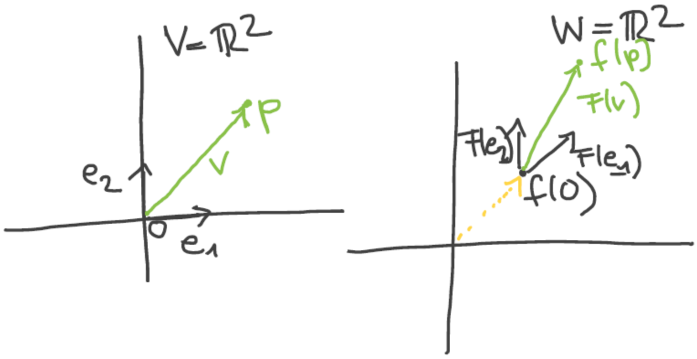
Also bestimmen $f(p_0)$ und F zusammenen die Abbildung $f\colon X \to Y$.

Beispiel. Seien V, W K-Vektorräume

$$X = (V, V, \tau), \quad Y = (W, W, \tau).$$

Eine affine Abbildung $f \colon V \to W$ ist eindeutig bestimmt durch $f(0)$ und eine lineare Abbildung $F \colon V \to W$. Es gilt

$$f(v) = f(0) + F(v) \quad \forall v \in V.$$

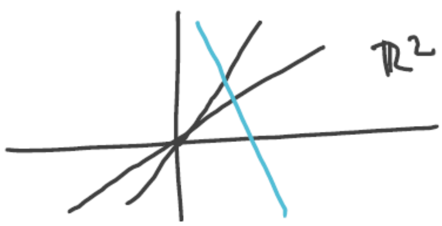


Bemerkung / Übung. Eine affine Abbildung $f \colon X \to Y$ ist genau dann injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, wenn die zugehörige Abbildung $F \colon T(X) \to T(Y)$.

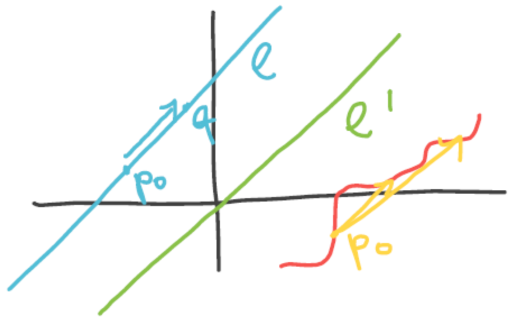
Definition. Wir nennen eine bijektive affine Abbildung $f \colon X \to Y$ eine Affinität.

Affine Unterräume

Beispiel ($\mathbb{R}^2$ als Vektorraum.). Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind $\emptyset$, $\{ 0 \}$, $\mathbb{R}^2$ und Geraden durch 0.



Betrachte nun $\mathbb{R}^2$ als affinen Raum.



Idee. Wir wollen l und l' als affine Unterräume von $\mathbb{R}^2$ definieren, da die Verschiebung von l, l' jeweils Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind.

Definition. Sei $(X, T(X), \tau)$ in affiner Raum und $Y \subseteq X$. Wenn es einen Punkt $p_0 \in Y$ gibt, sodass

$$T(Y) := \{ \overrightarrow{p \circ q} \in T(X), q \in Y \}$$

ein Untervektorraum von $T(X)$ ist, dann nennen wir Y einen affinen Unterraum von X.

Lemma 3. Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum eines affinen Raumes $(X, T(X), \tau)$. Dann gilt

$$T(Y) = \{ \overrightarrow{pq} \in T(X), q \in Y \}$$

für jedes beiliebigen Punkt $p \in Y$.

Beweis. Sei $p_0 \in Y$ ein fester Punkt mit

$$T(Y) = \{ \overrightarrow{p_0q} \in T(X), q \in Y \}$$

Untervektorraum von $T(X)$. Dann gilt für $p \in Y$

$$\{ \overrightarrow{pq} \mid q \in Y \} = \overrightarrow{pp_0} + \{ \overrightarrow{p_0q} \mid q \in Y \} = \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ T(Y)}}{\overrightarrow{pp_0}} + T(Y) = T(Y), \qquad \square$$

da $\overrightarrow{pp_0} = -\overrightarrow{p_0p} \in T(Y)$.

Definition. Sei $Y \subseteq X$ ein affiner Unterraum. Wir nennen $\dim_K T(Y)$ die Dimension von Y und schreiben

$$\dim Y = \dim_K T(Y).$$