

**Vorlesungsmitschrift**

# **AGLA II**

**Prof. Dr. Damaris Schindler**

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 7. Juli 2020

---

## **Disclaimer**

Nicht von Professor Schindler durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit ihrerseits.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Affine Geometrie</b>	<b>7</b>
1.1	Was ist ein affiner Raum? . . . . .	7
1.2	Affine Abbildungen . . . . .	12
1.3	Durchschnitt und Verbindung affiner Räume . . . . .	16
1.4	Parallelprojektionen . . . . .	21
1.5	Affine Koordinaten . . . . .	25
1.6	Das Teilverhältnis . . . . .	30
1.7	Affinkombinationen . . . . .	34
1.8	Affine Abbildungen und Matrizen, Fixpunkte . . . . .	35
1.9	Kollineationen . . . . .	38
1.10	Quadriken . . . . .	43
1.11	Euklidische affine Räume . . . . .	60
<b>2</b>	<b>Projektive Geometrie</b>	<b>75</b>
2.1	Projektive Räume . . . . .	75
2.2	Projektive Abbildungen . . . . .	83
2.3	Zusammenhänge zwischen affiner und projektiver Geometrie . . . . .	95
2.4	Invarianten von Projektivitäten . . . . .	102
2.5	Hauptsatz der projektiven Geometrie . . . . .	114
2.6	Dualität . . . . .	124
2.6.1	Dualräume . . . . .	129
2.7	Quadriken . . . . .	135
<b>3</b>	<b>Exkurs: Exponentialabbildungen von Matrizen</b>	<b>152</b>
<b>4</b>	<b>Multilineare Algebra</b>	<b>162</b>
4.1	Tensorprodukte . . . . .	162

# Vorlesungsverzeichnis

1	Di 21.04. 10:15	7
2	Fr 24.10. 10:15	16
3	Di 28.04. 10:15	25
4	Di 05.05. 10:15	32
5	Fr 08.05. 10:15	40
6	Di 12.05. 10:15	47
7	Fr 15.05. 10:15	54
8	Di 19.05. 10:15	64
9	Fr 21.05. 10:15	70
10	Di 26.05. 10:15	75
11	Fr 29.05. 10:15	83
12	Di 02.06. 10:15	89
13	Fr 05.06. 10:15	95
14	Di 09.06. 10:15	102
15	Fr 12.06. 10:15	109
16	Di 16.06. 10:15	117
17	Fr 19.06. 10:15	124
18	Di 23.06. 10:15	129
19	Fr 26.06. 10:15	135
20	Di 30.06. 10:15	143
21	Fr 03.07. 10:15	151
22	Di 07.07. 10:15	161
23	Do 09.07. 10:15	169

# Dateienverzeichnis

1	Was ist ein affiner Raum? . . . . .	7
2	Affine Abbildungen und Unterräume . . . . .	12
3	Durchschnitt und Verbindung affiner Räume . . . . .	16
4	Parallelprojektionen . . . . .	21
5	Affine Koordinaten und Koordinatensysteme . . . . .	25
6	Teilverhältnis . . . . .	30
7	Affinkombinationen . . . . .	33
8	Affine Abbildungen durch Matrizen, Fixpunkte . . . . .	35
9	Kollineationen . . . . .	38
10	Hauptsatz affine Geometrie . . . . .	42
11	Quadriken erster Teil . . . . .	43
12	Quadriken zweiter Teil . . . . .	51
13	Euklidische affine Räume . . . . .	60
14	Euklidische affine Räume Teil 2 . . . . .	66
15	Kongruenz . . . . .	68
16	Ähnlichkeiten . . . . .	68
17	Hauptachsentransformation Affinitäten . . . . .	73
18	Projektive Räume . . . . .	75
19	Projektive Abbildungen . . . . .	83
20	Projektive Basis . . . . .	87
21	Projektivitäten beschrieben durch Matrizen . . . . .	90
22	Zentralprojektionen . . . . .	92
23	Affine Projektive Geometrie . . . . .	95
24	Affine projektive Geometrie Teil 2 . . . . .	100
25	Doppelverhältnis . . . . .	102
26	Berechnung Doppelverhältnis . . . . .	104
27	Desargues Pappos . . . . .	109
28	Hauptsatz projektive Geometrie . . . . .	114
29	Hauptsatz projektive Geometrie Teil 2 . . . . .	121
30	Dualität . . . . .	124
31	Korrelationen . . . . .	127
32	Dualräume . . . . .	129
33	Dualräume und Korrelationen . . . . .	131

34	Projektive Quadriken Teil 1 . . . . .	135
35	Projektive Quadriken Teil 2 . . . . .	140
36	Projektive Quadriken Teil 3 . . . . .	145
37	Exponentialabbildungen Matrizen . . . . .	152
38	Tensorprodukte Teil 1 . . . . .	162
39	Tensorprodukte Teil 2 . . . . .	167
40	Tensorprodukte Teil 3 . . . . .	172

# Kapitel 1

## Affine Geometrie

### Vorlesung 1

Di 21.04. 10:15

#### §1.1 Was ist ein affiner Raum?

**Beispiel 1.1.1 (aus der AGLA I).**  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ . In diesen Räumen gibt es einen ausgezeichneten „Ursprung“.

Datei 1: Was ist ein affiner Raum?

**Frage.** Wie können wir eine affine Ebene / affine Räume modellieren, wobei alle Punkte gleichberechtigt sind?

**Idee.** Verwende affine Unterräume.

**Beispiel 1.1.2.** Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $W \subseteq V$  ein Untervektorraum und  $v \in V$ . Wir nennen  $X = v + W$  einen affinen Unterraum von  $V$ .  $X$  ist im Allgemeinen selbst kein Vektorraum unter der Addition in  $V$ , aber  $W$  „operiert“ auf  $X$ .



Für  $w \in W$  definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned}\tau_w: X &\rightarrow X \\ p &\mapsto p + w.\end{aligned}$$



Sei

$$\text{Bij}(X) = \{ f: X \rightarrow X, f \text{ ist bijektiv} \}.$$

Dann ist  $\tau_w \in \text{Bij}(X)$  für alle  $w \in W$ .

**Bemerkung.**  $\text{Bij}(X)$  ist eine Gruppe unter Verkettung von Abbildung. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned}\tau: W &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ w &\mapsto \tau_w.\end{aligned}$$

**Lemma 1.1.1.** Die Abbildung  $\tau$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

*Beweis.* Seien  $w, w' \in W$  Dann

$$\begin{aligned}\tau_w \circ \tau_{w'}: X &\rightarrow X \\ p &\mapsto p + \underbrace{w' + w},\end{aligned}$$

also

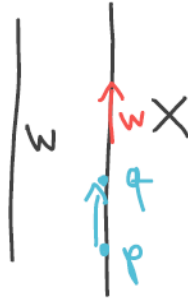
$$\tau(w) \circ \tau(w') = \tau_w \circ \tau_{w'} = \tau_{w+w'} = \tau(w + w').$$

□

Es gilt noch mehr:

für  $p, q \in X$  besteht genau ein  $w \in W$  mit  $\tau_w(p) = q$ .





## Gruppenoperationen

**Beispiel 1.1.3.** Betrachte ein gleichseitiges Dreieck  $D$  und Spiegelungen / Drehungen die  $D$  auf sich selbst abbilden.



Diese formen eine Gruppe (welche?) und „operieren“ auf  $D$ .

**Definition 1.1.1.** Sei  $X$  eine Menge und  $G$  eine Gruppe. Eine Operation von  $G$  auf  $X$  ist ein Homomorphismus von Gruppen

$$\begin{aligned}\tau: G &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ g &\mapsto \tau_g.\end{aligned}$$

**Bemerkung.**  $\tau$  ist ein Homomorphismus d. h.  $\forall g, g' \in G$

$$\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{gg'}.$$

Für  $x \in X$  nennen wir

$$G(x) = \{ \tau_g(x) \mid g \in G \}$$

die Bahn von  $x$  unter  $G$ .

**Beispiel 1.1.4.** i) Sei  $G$  eine Gruppe und  $X = G$  die Linkstranslation  $l: G \rightarrow \text{Bij}(G)$

$g \mapsto l_g$

mit  $l_g(x) = gx \quad \forall x \in G$  ist eine Gruppenoperation von  $G$  auf sich selbst.

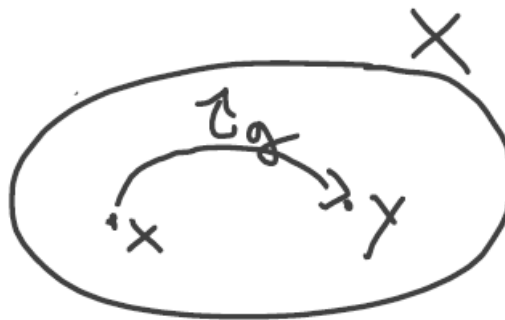
ii)

$$k: G \rightarrow \text{Bij}(G)$$

$$g \mapsto k_g$$

mit  $k_g(x) = gxg^{-1} \quad \forall x \in G$  ist eine Gruppenoperation.

**Frage.** Sei  $\tau: G \rightarrow \text{Bij}(X)$  eine Gruppenoperation,  $x, y \in X$ . Wann gibt es ein  $g \in G$  mit  $\tau_g(x) = y$ ?



**Definition.** Sei  $\tau: G \rightarrow \text{Bij}(X)$  eine Gruppenoperation von  $G$  auf  $X$ . Wir nennen  $\tau$  *einfach transitiv*, wenn  $\forall x, y \in X$  genau ein  $g \in G$  besteht mit

$$\tau_g(x) = y.$$

**Beispiel.** • Die Gruppenoperation aus Beispiel 1.1.3 ist *nicht* einfach transitiv



• Die Linkstranslation aus Beispiel 1.1.4 i) ist immer einfach transitiv.

Zurück zum Beispiel 1.1.2 ( $V$   $K$ -Vektorraum,  $W \subseteq V$  Untervektorraum,  $v \in V$ ,  $X = v + W$ )

Wir haben Translationen definiert

$$\begin{aligned}\tau: W &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ x &\mapsto \tau_w\end{aligned}$$

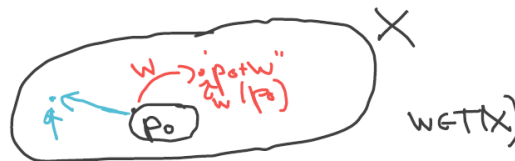
mit  $\tau_w: X \rightarrow X$ ,  $p \mapsto p + w$ .  $\tau$  ist eine einfach transitive Gruppenoperation von  $W$  auf  $X$ .



**Definition.** Sei  $K$  ein Körper. Ein affiner Raum über  $K$  ist ein Tripel  $(X, T(X), \tau)$  mit

- $X \neq \emptyset$  eine Menge
- $T(X)$  ein  $K$ -Vektorraum
- $\tau: T(X) \rightarrow \text{Bij}(X)$  eine einfach transitive Gruppenoperation

**Konvention.**  $X = \emptyset$  ohne Spezifikation von  $T(X)$ ,  $\tau$  nennen wir auch einen affinen Raum.



**Definition.** Sei  $(X, T(X), \tau)$  ein affiner Raum über einem Körper  $K$ . Dann nennen wir  $\dim_K T(X)$  die Dimension von  $X$ , schreiben auch  $\dim X$ .

Ist  $\dim X = 1$  bzw.  $\dim(X) = 2$ , dann nennen wir  $X$  eine affine Gerade bzw. affine Ebene.

Sei  $(X, T(X), \tau)$  in affiner Raum,  $p, q \in X$ . Dann  $\exists! t \in T(X)$  mit  $\tau_t(p) = q$ .

Schreibe  $\vec{pq} = t \in T(X)$  als  $\tau_{\vec{pq}}(p) = q$ .

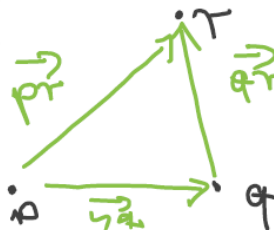


Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow T(X) \\ (p, q) &\mapsto \vec{pq}. \end{aligned}$$

**Frage.** Welche Eigenschaften hat die Abbildung  $(p, q) \mapsto \vec{pq}$  in einem allgemeinen affinen Raum?

**Lemma 1.1.2.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $p, q, r \in X$ . Dann gilt  $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$ .



*Beweis.*  $\tau: T(X) \rightarrow \text{Bij}(X)$  ist ein Homomorphismus. Also gilt  $\tau_{\vec{qr}} \circ \tau_{\vec{pq}} = \tau_{\vec{pq} + \vec{qr}}$ . Es gilt damit  $\tau_{\vec{pq} + \vec{qr}}(p) = r$ . Also  $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$ .  $\square$

## §1.2 Affine Abbildungen

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume. In der AGLA I: lineare Abbildungen

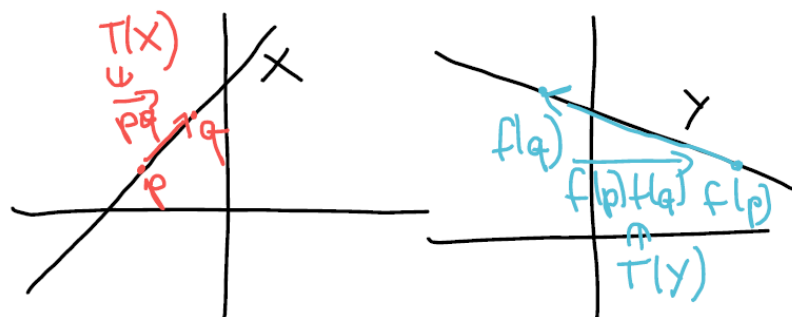
$$F: V \rightarrow W,$$

d. h.  $F$  respektiert die Vektorraum-Struktur

$$\begin{aligned} F(v_1 + v_2) &= F(v_1) + F(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \\ F(\lambda v) &= \lambda F(v) \quad \forall \lambda \in K \forall v \in V. \end{aligned}$$

**Frage.** Was sind natürliche Abbildungen zwischen affinen Räumen?

Seien  $X, Y$  affine Räume über einem Körper  $K$ .



$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pq} \rightsquigarrow \overrightarrow{f(p)f(q)} \\ \cap \quad \quad \cap \\ T(X) \quad T(Y) \end{array}$$

**Definition.** Wir nennen eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  affin, wenn es eine  $K$ -lineare Abbildung  $F: T(X) \rightarrow T(Y)$  gibt, sodass  $\forall p, q \in X$  gilt

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = F(\overrightarrow{pq}).$$

**Bemerkung.** i) Es gibt im Allgemeinen verschiedene affine Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$ , die zur gleichen linearen Abbildung  $F: T(X) \rightarrow T(Y)$  gehören.

ii) Sei  $p_0 \in X$  fest und  $f: X \rightarrow Y$  affin.

Für  $q \in X$  gilt

$$\begin{aligned} f(q) &= \tau_{\overrightarrow{f(p_0)f(q)}}(f(p_0)) \\ &= \tau_{F(\overrightarrow{p_0q})}(f(p_0)). \end{aligned}$$

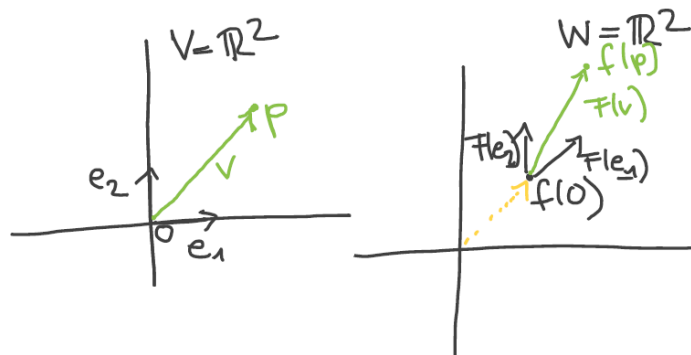
Also bestimmen  $f(p_0)$  und  $F$  zusammen die Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ .

**Beispiel.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume

$$X = (V, V, \tau), \quad Y = (W, W, \tau).$$

Eine affine Abbildung  $f: V \rightarrow W$  ist eindeutig bestimmt durch  $f(0)$  und eine lineare Abbildung  $F: V \rightarrow W$ . Es gilt

$$f(v) = f(0) + F(v) \quad \forall v \in V.$$

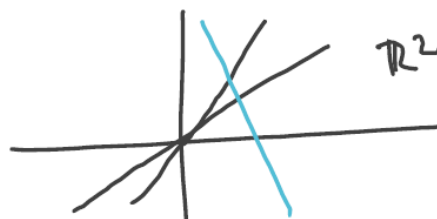


**Bemerkung / Übung.** Eine affine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, wenn die zugehörige Abbildung  $F: T(X) \rightarrow T(Y)$  es ist.

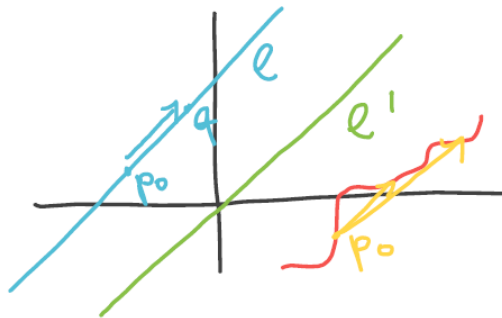
**Definition.** Wir nennen eine bijektive affine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine Affinität.

### Affine Unterräume

**Beispiel ( $\mathbb{R}^2$  als Vektorraum.).** Untervektorräume von  $\mathbb{R}^2$  sind  $\emptyset$ ,  $\{0\}$ ,  $\mathbb{R}^2$  und Geraden durch 0.



Betrachte nun  $\mathbb{R}^2$  als affinen Raum.



**Idee.** Wir wollen  $l$  und  $l'$  als affine Unterräume von  $\mathbb{R}^2$  definieren, da die Verschiebung von  $l, l'$  jeweils Untervektorräume von  $\mathbb{R}^2$  sind.

**Definition.** Sei  $(X, T(X), \tau)$  in affiner Raum und  $Y \subseteq X$ . Wenn es einen Punkt  $p_0 \in Y$  gibt, sodass

$$T(Y) := \{ \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \}$$

ein Untervektorraum von  $T(X)$  ist, dann nennen wir  $Y$  einen affinen Unterraum von  $X$ .

**Lemma 1.2.1.** Sei  $Y \subseteq X$  ein affiner Unterraum eines affinen Raumes  $(X, T(X), \tau)$ . Dann gilt

$$T(Y) = \{ \overrightarrow{p q} \in T(X), q \in Y \}$$

für jeden beliebigen Punkt  $p \in Y$ .

*Beweis.* Sei  $p_0 \in Y$  ein fester Punkt mit

$$T(Y) = \{ \overrightarrow{p_0 q} \in T(X), q \in Y \}$$

Untervektorraum von  $T(X)$ . Dann gilt für  $p \in Y$

$$\{ \overrightarrow{p q} \mid q \in Y \} = \overrightarrow{p p_0} + \{ \overrightarrow{p_0 q} \mid q \in Y \} = \overrightarrow{p p_0} + \underbrace{T(Y)}_{T(Y)} = T(Y), \quad \square$$

da  $\overrightarrow{p p_0} = -\overrightarrow{p_0 p} \in T(Y)$ .

**Definition.** Sei  $Y \subseteq X$  ein affiner Unterraum. Wir nennen  $\dim_K T(Y)$  die Dimension von  $Y$  und schreiben

$$\dim Y = \dim_K T(Y).$$

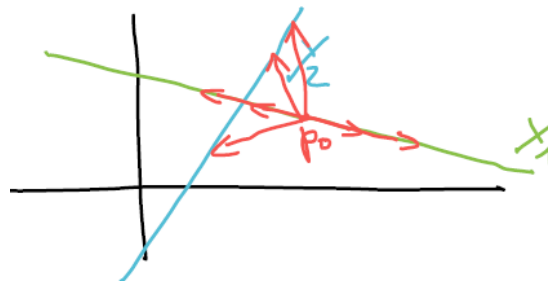
## Vorlesung 2

Fr 24.10. 10:15

## §1.3 Durchschnitt und Verbindung affiner Räume

**Frage.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_1, Y_2$  affine Unterräume von  $X$ . Sind  $Y_1 \cap Y_2, Y_1 \cup Y_2$  auch affine Unterräume von  $X$ ?

Datei 3:  
Durchschnitt  
und  
Verbindung  
affiner  
Räume



$$X = \mathbb{R}^2$$

**Lemma 1.3.1.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_i, i \in I$ , eine Familie von affinen Unterräumen von  $X$ .

Dann ist  $Y := \bigcap_{i \in I} Y_i$  ein affiner Unterraum von  $X$ .

Wenn  $Y \neq \emptyset$ , dann gilt

$$T(Y) = \bigcap_{i \in I} T(Y_i).$$

*Beweis.* Falls  $Y = \emptyset$ : ✓

Wir nehmen also an  $Y \neq \emptyset$ . Sei  $p_0 \in Y$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} T(Y) &= \left\{ \overrightarrow{p_0 q}, q \in \bigcap_{i \in I} Y_i \right\} \\ &= \bigcap_{i \in I} \underbrace{\{ \overrightarrow{p_0 q}, q \in Y_i \}}_{=T(Y_i)} \\ &= \bigcap_{i \in I} T(Y_i). \end{aligned}$$

↑  
Untervektorräume von  $T(X)$

Also ist  $T(Y)$  ein Untervektorraum von  $T(X)$  und  $T(Y) = \bigcap_{i \in I} T(Y_i)$ . □



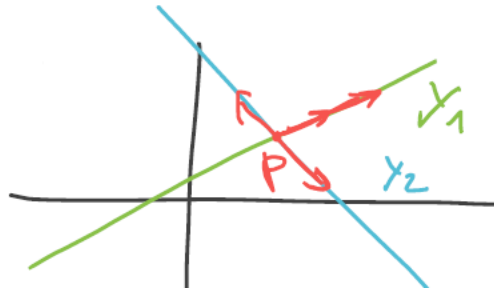
**Bemerkung.** In obiger Notation ist  $\bigcup_{i \in I} Y_i$  im Allgemeinen kein affiner Unterraum von  $X$ .

**Frage.** Finde den „kleinsten“ affinen Unterraum von  $X$ , der  $\bigcup_{i \in I} Y_i$  enthält! (z. B.  $X \supseteq \bigcup_{i \in I} Y_i$ , aber  $X$  ist im Allgemeinen nicht „minimal“).

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_i, i \in I$  affine Unterräume von  $X$ . Wir nennen

$$\bigcap_{\substack{Y \subseteq X \text{ aff. Unterraum} \\ \bigcup_{i \in I} Y_i \subseteq Y}} Y$$

den *Verbindungsraum* der affinen Unterräume  $Y_i, i \in I$ . Schreibe  $\bigvee_{i \in I} Y_i$ .



$$X = \mathbb{R}^2, Y_1 \vee Y_2 = X, Y = Y_1 \vee Y_2, T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

**Beispiel.**

**Frage.** Wie kann man im Allgemeinen  $T(Y_1 \vee Y_2)$  aus  $T(Y_1), T(Y_2)$  bestimmen?

**Lemma 1.3.2.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$  affine Unterräume von  $X$ .

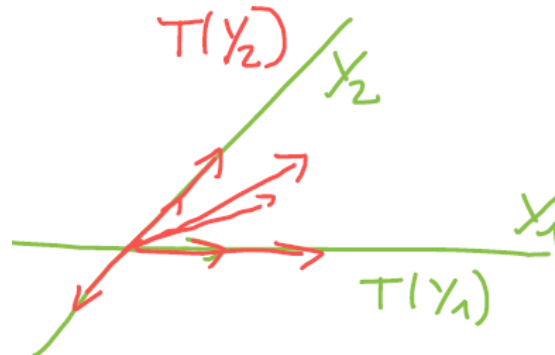
a) Sei  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

b) Sei  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, p_1 \in Y_1, p_2 \in Y_2$  und  $Y = p_1 \vee p_2$ .

Dann gilt:

$$T(Y_1 \vee Y_2) = (T(Y_1) + T(Y_2)) \oplus T(Y).$$



*Beweis.* a) Sei  $p \in Y_1 \cap Y_2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} T(Y_1) \cup T(Y_2) &= \{ \vec{pq} \mid q \in Y_1 \cup Y_2 \} \\ &\subseteq T(Y_1 \vee Y_2), \end{aligned}$$

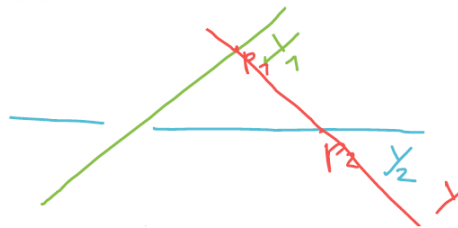
also  $T(Y_1) + T(Y_2) \subseteq T(Y_1 \vee Y_2)$ .

Sei  $Y = \{ \tau_t(p) \mid t \in T(Y_1) + T(Y_2) \}$ . Dann ist  $Y$  affiner Unterraum von  $X$  mit  $Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y$ , also  $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$ , also  $Y_1 \vee Y_2 \subseteq Y$ . Also gilt

$$T(Y_1 \vee Y_2) \subseteq T(Y) = T(Y_1) + T(Y_2).$$

Also  $T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2)$ .

b)  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ ,  $p_1 \in Y_1$ ,  $p_2 \in Y_2$ ,  $Y = p_1 \vee p_2$ .



Schreibe  $Y_1 \vee Y_2 = Y_1 \vee Y \vee Y_2$  (verwende dazu  $Y \subseteq Y_1 \vee Y_2$ ). Verwende a) und leite ab, dass gilt:

$$\begin{aligned} T(Y_1 \vee Y \vee Y_2) &= T(Y_1) + T(Y \vee Y_2) \\ &= T(Y_1) + T(Y) + T(Y_2) \\ &= (T(Y_1) + T(Y_2)) \overset{!}{\oplus} T(Y). \end{aligned}$$

Es gilt

$$T(Y) = \{ \lambda \overrightarrow{p_1 p_2} \mid \lambda \in K \}.$$

Wir wollen zeigen

$$(T(Y_1) + T(Y_2)) \cap T(Y) = \{ 0 \}.$$

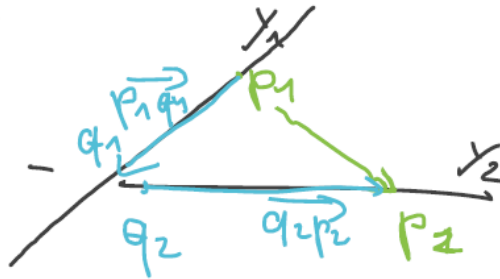
Es genügt zu zeigen

$$\overrightarrow{p_1 p_2} \notin T(Y_1) + T(Y_2).$$

Gegenannahme:

$$\overrightarrow{p_1 p_2} = \underbrace{\overrightarrow{p_1 q_1}}_{T(Y_1)} + \underbrace{\overrightarrow{q_1 p_2}}_{T(Y_2)}$$

mit  $q_1 \in Y_1, q_2 \in Y_2$ .



Dann gilt

$$\overrightarrow{q_1 q_2} = \overrightarrow{q_1 p_1} + \overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 q_2} = 0,$$

also  $q_1 = q_2$  und  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ .  $\nexists$

□

Als nächstes:  $\dim(Y_1 \vee Y_2)$  ist durch  $\dim_K T(Y_1 \vee Y_2)$  gegeben, also sollten wir aus Lemma 1.3.2 für  $Y_1 \vee Y_2$  ableiten können.

**Lemma 1.3.3.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$  affine Unterräume von  $X$ .

a) Sei  $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ . Dann gilt  $\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2)$ .

b) Sei  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ . Dann gilt

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1.$$

*Beweis.* a) Aus Lemma 1.3.2 folgt

$$T(Y_1 \vee Y_2) = T(Y_1) + T(Y_2),$$

aus der Dimensionsformel für Untervektorräume folgt

$$\begin{aligned} \dim(Y_1 \vee Y_2) &= \dim(T(Y_1 \vee Y_2)) \\ &= \dim(Y_1) + \dim(T(Y_2)) - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) \\ &= \dim(T(Y_1)) + \dim(T(Y_2)) - \dim(T(Y_1 \cap Y_2)) \\ &\stackrel{\text{Lemma 1.3.1}}{\uparrow} \\ &= \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 \cap Y_2. \end{aligned}$$

b)  $Y_1 \cap Y_2$ ,  $p_1 \in Y_1$ ,  $p_2 \in Y_2$ ,  $Y = p_1 \vee p_2$ .

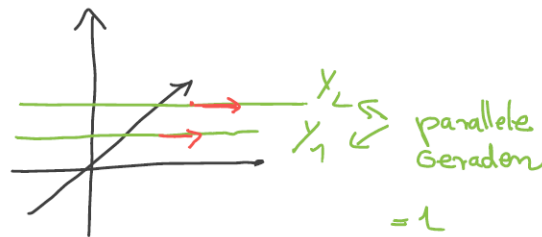
Dann ist

$$\dim Y = \dim(T(Y)) = 1.$$

Wir erhalten

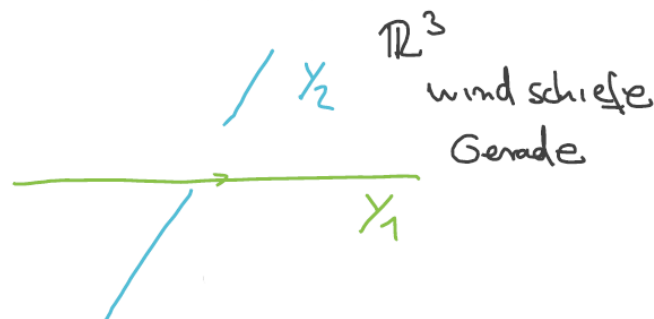
$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1$$

□



**Beispiel** ( $X = \mathbb{R}^3$ ).

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - \underbrace{\dim(T(Y_1) \cap T(Y_2))}_{=1} + 1 = 2$$

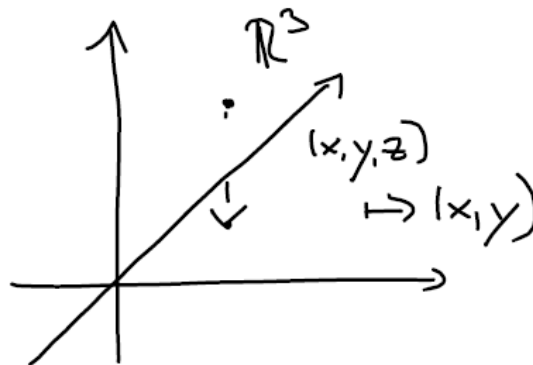


$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = 1 + 1 - 0 + 1 = 3$$

und  $Y_1 \vee Y_2 = X$ .

Datei 4:  
Parallelpro-  
jektionen

## §1.4 Parallelprojektionen



### Wiederholung (Projektionen aus der AGLA I). Beispiel.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $W, W_1 \subset V$   $K$ -Untervektorräume mit  $V = W \oplus W_1$ . Schreibe  $v \in V$  in der Form  $v = w + w_1$  und mit  $w \in W$ ,  $w_1 \in W_1$ . Definiere

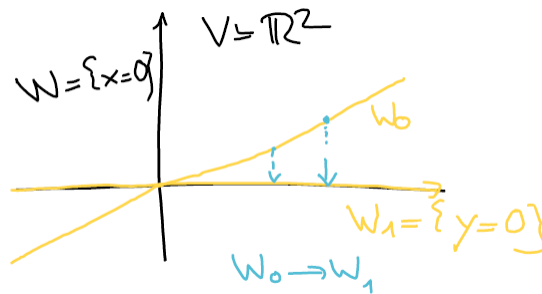
$$P_W: V \rightarrow W_1$$

$$\begin{array}{c} v \mapsto w_1. \\ \parallel \\ w + w_1 \end{array}$$

Ein paar Eigenschaften von  $P_W$ :

- $P_W: V \rightarrow W_1$  ist eine lineare Abbildung,
- $\text{Ker } P_W = W$ ,
- $P_W|_{W_1} = \text{Id}_{W_1}$ .

Als Nächstes: Wir schränken  $P_W$  ein auf einen Untervektorraum  $W_0$  von  $V$ .



**Lemma 1.4.1.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $W, W_0, W_1 \subseteq V$  Untervektorräume mit  $V = W \oplus W_0 = W \oplus W_1$ .

Dann ist  $P_W|_{W_0}: W_0 \rightarrow W_1$  ein Isomorphismus (Notation wie oben).

*Beweis.* Es gilt  $\dim W_0 = \dim W_1$  und es genügt zu zeigen, dass  $P_W|_{W_0}$  injektiv ist.

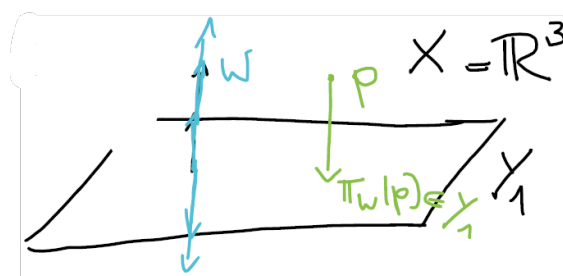
Sei  $P_W|_{w_0} = w_1$  für  $w_0 \in W_0$ ,  $w_1 \in W_1$ . Dann ist  $w_0 = w + w_1$  mit  $w \in W$ ,  $w_1 \in W_1$ , also

$$w_1 = \underbrace{w_0}_{\in W_0} - \underbrace{w}_{\in W} \in W_0 \oplus W, \quad \square$$

und diese Zerlegung ist eindeutig.

### Parallelprojektionen für affine Räume

Sei  $X$  ein affiner Raum (über einem Körper  $K$ ),  $Y_1 \subseteq X$  ein affiner Unterraum



**Beispiel.**

Sei  $W \subseteq T(X)$  ein Untervektorraum mit  $T(X) = T(Y_1) \oplus W$ .

**Ziel.** Definiere eine Projektionsabbildung

$$\pi_W: X \rightarrow Y_1$$

„längs  $W$ “.

Für  $p \in X$  definiere

$$W(p) := \{ x \in X \mid \overrightarrow{px} \in W \}$$

**Lemma 1.4.2.** Notation wie oben. Für  $p \in X$  gilt

$$\#(Y_1 \cap W(p)) = 1.$$

*Beweis.* Wir berechnen

$$\dim Y_1 \cap W(p).$$

Sei  $x = \dim X$ , verwende Lemma 1.3.3 b). Falls  $Y_1 \cap W(p) = \emptyset$ , dann

$$\begin{aligned} \dim Y_1 \vee W(p) &= \dim Y_1 + \dim W(p) - \underbrace{\dim(T(Y_1) \cap W)}_{=\{0\}} + 1 \\ &= \dim(T(Y_1)) + \dim W + 1 \end{aligned}$$

⚡ zu  $Y_1 \vee W(p) \subseteq X$ , also ist  $Y_1 \cap W(p) \neq \{0\}$ , und nach Lemma 1.3.3 a) gilt Folgendes:

$$\underbrace{\dim(Y_1 \vee W(p))}_{\substack{\parallel \\ n}} = \dim Y_1 + \dim W(p) - \dim(Y_1 \cap W(p))$$

und nach Lemma 1.3.1

$$\begin{aligned} \dim Y_1 \vee W(p) &= \dim(T(Y_1) + W) \\ &= n, \end{aligned} \quad \square$$

also  $\dim(Y_1 \cap W(p)) = 0$ .

Wir definieren die Projektion längs  $W$

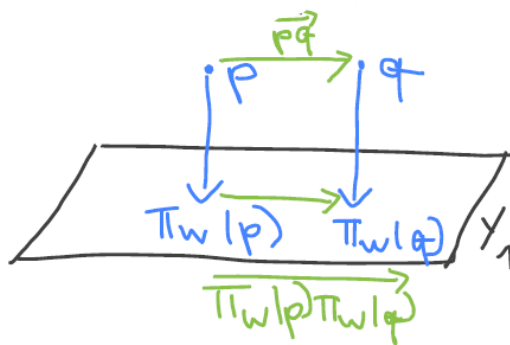
$$\pi_W: \underset{Y_0}{X} \rightarrow Y_1, \quad p \mapsto W(p) \cap Y_1.$$

**Satz 1.4.3.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $Y_1, Y_0 \subseteq X$  affine Unterräume,  $W \subseteq T(X)$  ein Untervektorraum mit

$$T(X) = W \oplus T(Y_0) = W \oplus T(Y_1).$$

Dann ist  $\pi_W: X \rightarrow Y_1$  eine surjektive affine Abbildung und  $\pi_W|_{Y_0}: Y_0 \rightarrow Y_1$  eine Affinität.

*Beweis.* Seien  $p, q \in X$ .



Dann gilt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pq} &= \overrightarrow{p\pi_W(p)} + \overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)} + \overrightarrow{\pi_W(q)q} + \overrightarrow{\pi_W(q)q} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{p\pi_W(p)} + \overrightarrow{\pi_W(q)q}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)}}_{\in T(Y_1)}, \end{aligned}$$

also  $\overrightarrow{\pi_W(p)\pi_W(q)} = P_W(\overrightarrow{pq})$ .

$P_W$  ist surjektiv, also ist  $\pi_W$  eine surjektive affine Abbildung.

Der zweite Teil folgt aus Lemma 1.4.1. □



**Vorlesung 3**

Di 28.04. 10:15

**§1.5 Affine Koordinaten**

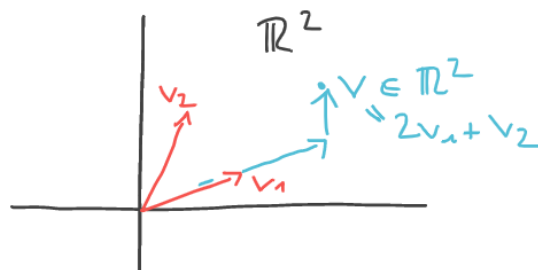
Koordinaten in einem  $K$ -Vektorraum  $V$ . Sei  $\dim(V) = n$  und  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi: K^n &\rightarrow V \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen. Jeder Punkt  $\underset{V}{v} = \sum_{i=1}^n x_i v_i$  ist eindeutig bestimmt durch seine „Koordinaten“

$$\phi^{-1}(v) = (x_1, \dots, x_n) \in K^n.$$

**Frage.** Sei  $X$  ein affiner Raum über einem Körper  $K$ . Können wir auch hier die Lage eines Punkte  $p \in X$  durch Angabe von „Koordinaten“ bezüglich einer „Basis“ beschreiben?

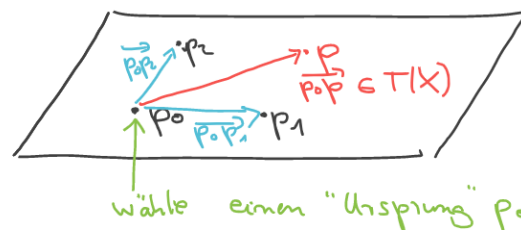


**Beispiel / Idee.**  $X = \mathbb{R}^2$  als affiner Raum und Punkte  $p_1, p_2 \in X$ , sodass  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2}$  eine Basis ist für  $T(X)$ . Dann können wir einen Punkt  $p \in X$  beschreiben durch

$$\begin{aligned} p &= \tau_{\overrightarrow{p_0 p}}(p_0) \\ &= \tau_{\lambda \overrightarrow{p_0 p_1} + \mu \overrightarrow{p_0 p_2}}(p_0), \end{aligned}$$

falls  $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1} + \mu \overrightarrow{p_0 p_2}$  mit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Datei 5:  
Affine  
Koordinaten  
und Koordi-  
natensysteme



Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned}\phi: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow X \\ (\lambda, \mu) &\mapsto \tau_{\lambda \overrightarrow{p_0 p_1} + \mu \overrightarrow{p_0 p_2}}(p_0),\end{aligned}$$

die eine Affinität ist.

Wir formalisieren diese Konzepte für allgemeine affine Räume.

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum und  $p_0, \dots, p_n \in X$ . Wir nennen  $(p_0, \dots, p_n)$  *affin unabhängig* bzw. eine *affine Basis*, wenn die Vektoren  $(\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n})$  in  $T(x)$  *linear unabhängig* sind bzw. eine *Basis* bilden.

**Beispiele.** i) In  $X = \mathbb{R}^n$  ist  $(0, e_1, \dots, e_n)$  eine affine Basis.

ii)  $X = \mathbb{R}^n$  als affiner Raum,  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängig,  $v_0 = 0$ . Dann ist das Tupel  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  affin unabhängig.

**Frage.** Kann man hier  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  beliebig nehmen?

iii)  $X = \mathbb{R}^2$  als affiner Raum. Dann gilt, dass für  $v, w \in \mathbb{R}^2$  das Tupel  $(v, w)$  affin unabhängig ist gdw  $v \neq w$ .

iv)  $X$  affiner Raum,  $p_0 \in X$ ,  $(t_1, \dots, t_n)$  Basis von  $T(X)$ . Dann ist

$$(p_0, \tau_{t_1}(p_0), \dots, \tau_{t_n}(p_0))$$

eine affine Basis von  $X$ .

**Lemma 1.5.1.** Sei  $X$  ein affiner Raum,  $p_0, \dots, p_n \in X$  und  $(p_0, \dots, p_n)$  affin unabhängig. Sei  $\sigma \in S_{n+1}$  eine Permutation von  $\{0, \dots, n\}$ . Dann ist

$$(p_{\sigma(0)}, p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n)})$$

affin unabhängig.

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass unter den Annahmen des Lemmas, die Vektoren

$$\overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(1)}}, \dots, \overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(n)}} \in T(X)$$

linear unabhängig sind.

Sei  $\sigma(0) = i \in \{0, \dots, n\}$ .

Dann müssen wir also zeigen, dass die Vektoren

$$\overrightarrow{p_i p_0}, \overrightarrow{p_i p_1}, \dots, \overrightarrow{p_i p_{i-1}}, \overrightarrow{p_i p_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{p_i p_n}$$

linear unabhängig sind.

Seien  $\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in K$  mit

$$\lambda_0 \overrightarrow{p_i p_0} + \lambda_1 \overrightarrow{p_i p_1} + \dots + \lambda_{i-1} \overrightarrow{p_i p_{i-1}} + \lambda_{i+1} \overrightarrow{p_i p_{i+1}} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{p_i p_n} = 0.$$

Schreibe

$$\overrightarrow{p_i p_j} = \overrightarrow{p_i p_0} + \overrightarrow{p_0 p_j} = \overrightarrow{p_0 p_j} - \overrightarrow{p_0 p_i}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \lambda_{i-1} \overrightarrow{p_0 p_{i-1}} + \lambda_{i+1} \overrightarrow{p_0 p_{i+1}} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{p_0 p_n} \\ & - (\lambda_0 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n) \overrightarrow{p_0 p_i} = 0 \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}$  folgt

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

und

$$\underbrace{\lambda_0 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n}_{\substack{\uparrow \\ \lambda_0=0}} = 0$$

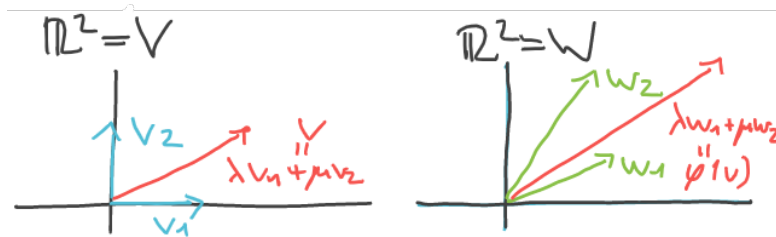
□

## Affine Basen und affine Abbildungen

Aus der AGLA I:

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume,  $v_1, \dots, v_n \in V$  eine Basis von  $V$  und  $w_1, \dots, w_n \in W$ . Dann gibt es genau eine  $K$ -lineare Abbildung  $\phi: V \rightarrow W$  mit

$$\phi(v_i) = w_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$



**Frage.** Inwiefern sind affine Abbildungen zwischen affinen Räumen durch die Bilder einer affinen Basis bestimmt?

**Satz 1.5.2.** Seien  $X, Y$  affine Räume,  $(p_0, \dots, p_n)$  eine affine Basis von  $X$  und  $q_0, \dots, q_n \in Y$ . Dann gibt es genau eine affine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit

$$f(p_i) = q_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Die Abbildung  $f$  ist *injektiv* bzw. *eine Affinität* gdw das Tupel  $(q_0, \dots, q_n)$  *affin unabhängig* bzw. *eine affine Basis* von  $Y$  ist.

*Beweis.* Eine affine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist gegeben durch  $f(p_0)$  für ein  $p_0 \in X$  und eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F: T(X) &\rightarrow T(Y) \\ \overrightarrow{pq} &\mapsto \overrightarrow{f(p)f(q)}. \end{aligned}$$

Wir definieren  $F$  durch

$$F(\overrightarrow{p_0 p_i}) = \overrightarrow{q_0 q_i} \quad 1 \leq i \leq n. \quad (*)$$

$\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}$  ist eine Basis von  $T(X)$ , also gibt es genau eine lineare Abbildung

$$F: T(X) \rightarrow T(Y)$$

mit (\*). Es gilt dann

$$\begin{aligned} f(p_i) &= \tau_{\overrightarrow{f(p_0)f(p_i)}} f(p_0) \\ &= \tau_{F(\overrightarrow{p_0 p_i})} f(p_0) \\ &= \tau_{\overrightarrow{q_0 q_i}} q_0 = q_i \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad \square$$

$f$  ist injektiv gdw  $F$  injektiv ist.  $F$  ist injektiv gdw  $\overrightarrow{q_0 q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0 q_n}$  linear unabhängig sind.

$\rightarrow f$  ist eine Affinität gdw  $F$  bijektiv ist.  $F$  ist bijektiv gdw  $\overrightarrow{q_0 q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0 q_n}$  eine Basis von  $T(Y)$  ist.

### Affine Koordinatensysteme

Sei  $X$  ein affiner Raum über einem Körper  $K$ ,  $(p_0, p_1, \dots, p_n)$  eine affine Basis von  $X$ .

Nach Satz 1.5.2 gibt es genau eine Affinität

$$\phi: K^n \rightarrow X$$

mit  $\phi(0) = p_0, \phi(e_1) = p_1, \dots, \phi(e_n) = p_n$  und zugehörige lineare Abbildung  $\Phi: K^n \rightarrow T(X)$ .

Einen Punkt  $p \in X$  können wir dann beschreiben durch

$$p = \tau_{\overrightarrow{p_0 p}}(p_0).$$

Sei  $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{p_0 p_n}$  mit  $\lambda_i \in K, 1 \leq i \leq n$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} p &= \tau_{\lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{p_0 p_n}}(p_0) \\ &= \tau_{\lambda_1 \Phi(e_1) + \dots + \lambda_n \Phi(e_n)}(p_0) \\ &= \tau_{\Phi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)}(p_0), \end{aligned}$$

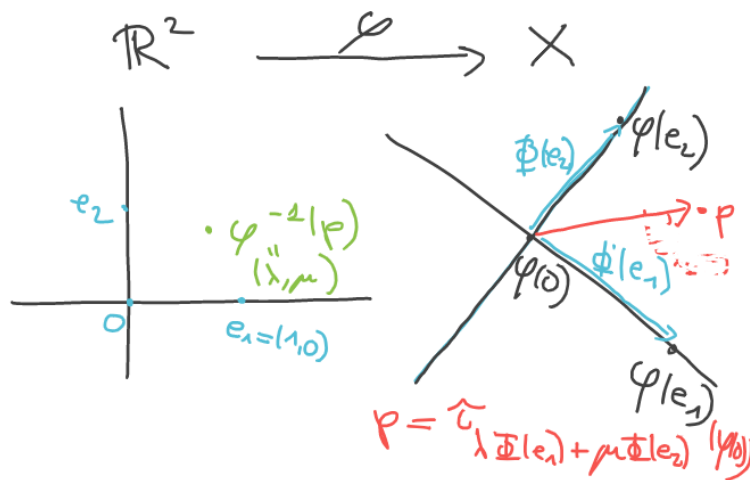
oder  $p = \phi((\lambda_1, \dots, \lambda_n))$ .

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum über einem Körper  $K$ . Wir nennen eine Affinität  $\phi: K^n \rightarrow X$  ein affines Koordinatensystem in  $X$ . Sei  $p_0 = \phi(0), p_1 = \phi(e_1), \dots, p_n = \phi(e_n)$ . Dann ist  $(p_0, \dots, p_n)$  eine affine Basis von  $X$ .

Für  $p \in X$  nennen wir

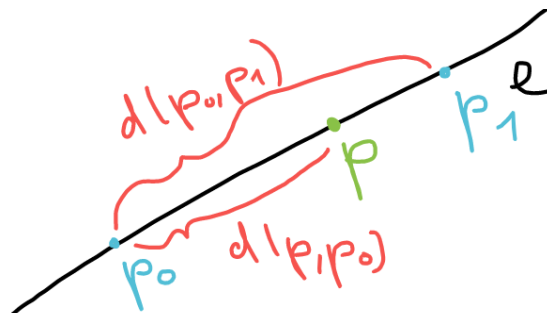
$$\phi^{-1}(p) = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$$

den Koordinatenvektor von  $p$  bezüglich der affinen Basis  $(p_0, \dots, p_n)$  und  $(x_1, \dots, x_n)$  die Koordinaten von  $p$  bezüglich  $(p_0, \dots, p_n)$ .

Datei 6:  
Teilverhältnis

## §1.6 Das Teilverhältnis

**Idee.** Seien 3 Punkte  $p_0, p_1, p$  auf einer Gerade  $l$  (z. B. im  $\mathbb{R}^3$ ) gegeben,  $p_0 \neq p_1$ .



Sei  $\lambda = \frac{d(p, p_0)}{d(p_1, p_0)}$ , mit  $d$  dem euklidischen Abstand, dann können wir die Lage von  $p$  auf  $l$  durch  $\lambda$  (und der Information, ob  $p$  „rechts oder links“ von  $p_0$  liegt) bestimmen.

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum über  $K$ ,  $Y \subseteq X$  eine affine Gerade,  $p_0, p_1, p \in Y$  und  $p_0 \neq p_1$ . Dann nennen wir das eindeutig bestimmte Element  $\lambda \in K$  mit  $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1}$  das Teilverhältnis von  $p_0, p_1, p$ . Schreibe  $\lambda = \text{TV}(p_0, p_1, p)$ . In  $\text{char}(K) \neq 2$  nennen wir  $p$  Mittelpunkt von  $p_0, p_1$  wenn  $\text{TV}(p_0, p_1, p) = \frac{1}{2}$ .

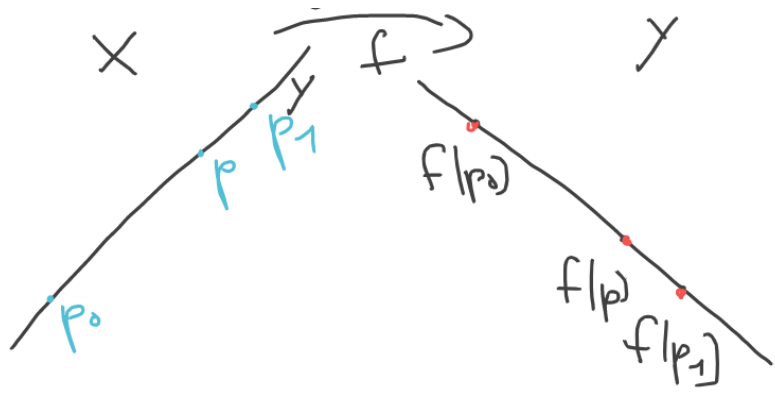
**Bemerkungen.** i) Es gilt  $T(Y) = K\overrightarrow{p_0p_1}$ . Damit ist  $\lambda$  wohldefiniert und existiert.

ii)  $p_0, p_1$  ist eine affine Basis von  $Y$ . Damit existiert ein Koordinatensystem

$$\begin{aligned}\phi: K &\rightarrow Y, \quad \phi(0) = p_0 \\ \phi(1) &= p_1\end{aligned}$$

und es gilt  $\text{TV}(p_0, p_1, p) = \phi(p)^{-1}$ .

**Frage.** Wie verhält sich das Teilverhältnis unter affinen Abbildungen?



**Vorlesung 4**

Di 05.05. 10:15

**Lemma 1.6.1.** Seien  $X, Y$  affine Räume und  $f: X \rightarrow Y$  eine affine Abbildung, seien  $p_0, p_1, p$  Punkte in  $X$ , die auf einer Geraden liegen und  $f(p_0) \neq f(p_1)$ . Dann gilt

$$\text{TV}(f(p_0), f(p_1), f(p)) = \text{TV}(p_0, p_1, p).$$

*Beweis.* Sei  $\lambda = \text{TV}(p_0, p_1, p)$ , also  $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1}$ . Sei  $F: T(X) \rightarrow T(Y)$  die zu  $f$  gehörige lineare Abbildung. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(p_0) f(p)} &= F(\overrightarrow{p_0 p}) \\ &= F(\lambda \overrightarrow{p_0 p_1}) \\ &= \lambda F(\overrightarrow{p_0 p_1}) \\ &= \lambda \overrightarrow{f(p_0) f(p_1)} \end{aligned} \quad \square$$

**Anwendung (Strahlensatz).** Sei  $X$  ein affiner Raum über  $K$ ,  $p_0, p_1, p_2 \in X$  affin unabhängig. Sei

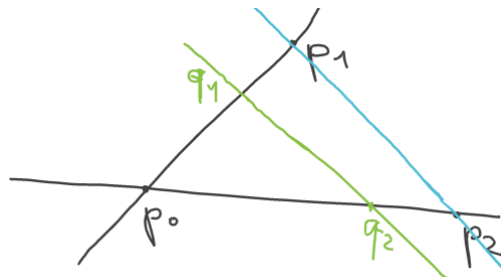
$$\begin{aligned} q_1 &\in p_0 \vee p_1, \quad q_1 \neq p_0 \\ q_2 &\in p_0 \vee p_2, \quad q_2 \neq p_0. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass  $p_1 \vee p_2$  und  $q_1 \vee q_2$  parallel sind in dem Sinn, dass

$$T(p_1 \vee p_2) = T(q_1 \vee q_2) \text{ in } T(X).$$

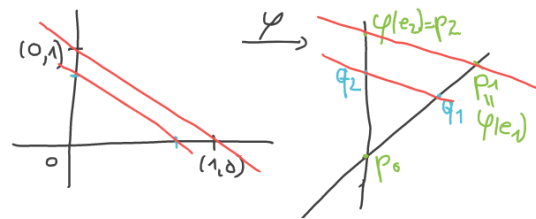
Dann gilt

$$\text{TV}(p_0, p_1, q_1) = \text{TV}(p_0, p_2, q_2).$$



*Beweis.* Sei  $Y$  die durch  $p_0, p_1, p_2$  aufgespannte Ebene. Dann gibt es ein affines Koordinatensystem  $\phi: K^2 \rightarrow Y$  mit  $\phi(0) = p_0, \phi(e_1) = p_1, \phi(e_2) = p_2$ .





Sei

$$\begin{aligned}(\lambda, 0) &= \phi^{-1}(q_1) \\ (0, \mu) &= \phi^{-1}(q_2).\end{aligned}$$

**Behauptung.**  $l_1 = \phi^{-1}(q_1) \vee \phi^{-1}(q_2)$  und  $l_2 = \phi^{-1}(p_1) \vee \phi^{-1}(p_2)$  sind parallel.

**Denn:**

$$\begin{aligned}T(l_1) &= K \overrightarrow{\phi^{-1}(q_1)\phi^{-1}(q_2)} \\ T(l_2) &= K \overrightarrow{\phi^{-1}(p_1)\phi^{-1}(p_2)}.\end{aligned}$$

Es ist  $K \overrightarrow{p_1 p_2} = K \overrightarrow{q_1 q_2}$  und daher

$$\begin{aligned}K \Phi^{-1}(\overrightarrow{p_1 p_2}) &= K \Phi^{-1}(\overrightarrow{q_1 q_2}). \\ \parallel & \parallel \\ K \phi^{-1}(q_1)\phi^{-1}(q_2) & K \phi^{-1}(p_1)\phi^{-1}(p_2)\end{aligned}$$

Aus der Parallelität von  $l_1, l_2$  folgt  $\lambda = \mu$ .

Also

$$\begin{aligned}\text{TV}(\phi^{-1}(p_0), \phi^{-1}(p_1), \phi^{-1}(q_1)) &= \lambda \\ &= \mu = \text{TV}(\phi^{-1}(p_0), \phi^{-1}(p_2), \phi^{-1}(q_2))\end{aligned}$$

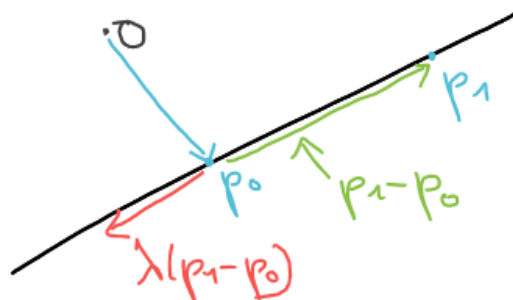
und der Strahlensatz folgt aus Lemma 1.6.1. □

Datei 7:  
Affinkombi-  
nationen

## §1.7 Affinkombinationen

**Beispiel.** Seien  $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$ ,  $p_0 \neq p_1$ . Ziel: Beschreibe den affinen Unterraum  $p_0 \vee p_1$  als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $p \in p_0 \vee p_1$ . Dann  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\overrightarrow{p_0 p} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1}$  und als Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  gilt  $p = p_0 + \lambda(p_1 - p_0)$ . Es gilt

$$p_0 \vee p_1 = \{ (1 - \lambda)p_0 + \lambda p_1, \lambda \in \mathbb{R} \}.$$



**Frage.** Verallgemeinerung zu höherdimensionalen Räumen?

**Definition.** Seien  $p_0, \dots, p_k \in K^n$ . Wir nennen eine Linearkombination

$$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m$$

mit  $\lambda_i \in K$ ,  $0 \leq i \leq m$  eine Affinkombination oder affin falls gilt  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ .

**Satz 1.7.1.** Seien  $p_0, \dots, p_m \in K^n$ . Dann gilt

$$p_0 \vee \dots \vee p_m = \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i \in K^n \mid \lambda_0, \dots, \lambda_m \in K, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

*Beweis.* Sei  $Y = p_0 \vee \dots \vee p_m \in K^n$ . Es gilt

$$\begin{aligned} T(Y) &= \underbrace{T(p_m)}_{=0} + T(p_0 \vee \dots \vee p_{m-1}) + \underbrace{K \overrightarrow{p_0 p_m}}_{=T(p_0 \vee p_m)} \\ &= K \overrightarrow{p_0 p_m} + T(p_0 \vee \dots \vee p_{m-1}) \\ &= K \overrightarrow{p_0 p_m} + \dots + K \overrightarrow{p_0 p_1} \\ &\vdots \\ &= K \overrightarrow{p_0 p_m} + \dots + K \overrightarrow{p_0 p_1} \\ &= (\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_m}). \end{aligned}$$

Sei  $p \in K^n$ . Dann ist  $p \in Y$  genau dann, wenn  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  mit

$$\overrightarrow{p_0 p} = \lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{p_0 p_m}.$$

Im  $K^n$  gilt dann also

$$p - p_0 = \lambda_1(p_1 - p_0) + \dots + \lambda_m(p_m - p_0)$$

oder

$$p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m$$

mit  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_m$ , d. h.  $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ . □

Datei 8:  
Affine  
Abbildungen  
durch  
Matrizen,  
Fixpunkte

## §1.8 Affine Abbildungen und Matrizen, Fixpunkte

**Motivation.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume,  $F: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Wenn wir für  $V$  und  $W$  Basen wählen, dann können wir die Abbildung  $F$  eindeutig durch eine Matrix beschreiben.

**Frage.** Inwiefern können wir affin Abbildung zwischen affinen Räumen durch Matrizen beschreiben?

Wahl von Basen in Vektorräumen  $\leftrightarrow$  Wahl von Koordinaten in affinen Räumen.

Seien  $X, Y$  affine Räume über  $K$ ,  $f: X \rightarrow Y$  eine affine Abbildung. Wähle affine Koordinatensysteme  $\phi: K^n \rightarrow X$  und  $\psi: K^m \rightarrow Y$ .

Wir haben das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{\phi} & X \\ \downarrow g & \circlearrowleft & \downarrow f \\ K^m & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

mit  $g = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$  affin.  $g$  ist affin, also besteht eine affine Abbildung  $G: K^n \rightarrow K^m$  mit

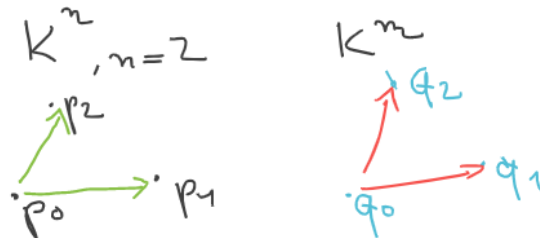
$$g(x) - g(0) = G(x) \quad \forall x \in K^n.$$

$G$  ist linear, also können wir  $G$  durch eine Matrix  $A$  ausdrücken.

$$g(x) = Ax + b \quad \forall x \in K^n.$$

mit  $b = g(0)$ .

**Frage.** Wie können wir  $A$  berechnen gegeben eine affine Basis  $(p_0, \dots, p_n)$  von  $K^n$  und  $g(p_i)$ ,  $0 \leq i \leq n$ ?



Wir betrachten die Matrizen  $B \in M_{m \times n}(K)$  bestehend aus den Spaltenvektoren  $\overrightarrow{q_0 q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0 q_n}$  und  $S \in M_{n \times n}(K)$  bestehend aus den Spaltenvektoren  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}$ . Dann gilt  $A = B \cdot S^{-1}$  und  $g(x) - g(p_0) = A(x - p_0)$ , also  $g(x) = Ax + b$  mit  $b = g(p_0) - Ap_0$ .

**Bemerkung.** Wählen wir für  $p_0, \dots, p_m$  die affine Basis  $0, e_1, \dots, e_n$ , dann  $S = \text{Id}_{n \times n}$  und  $A = B$ .

## Fixpunkte

**Beispiel 1.8.1.** Betrachte die affine Abbildung  $f: K \rightarrow K$ ,  $K$  ein Körper, in der Matrixdarstellung gegeben durch  $f(x) = 2x + 1 \stackrel{?}{=} x$ .



Dann gibt es genau ein  $x \in K$  mit  $f(x) = x$ , nämlich  $x = -1$ .

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum  $f: X \rightarrow X$  eine affine Abbildung. Wir nennen

$$\text{Fix}(f) := \{ x \in X \mid f(x) = x \}$$

die Menge der Fixpunkte von  $f$ .

**Frage.** Welche Struktur hat  $\text{Fix}(f)$ .

**Beispiel 1.8.2.**  $X$  affiner Raum.

$$\text{Id}: X \rightarrow X$$

$$x \mapsto x$$

dann  $\text{Fix}(\text{Id}) = X$ .

**Beispiel 1.8.3.**  $f: K^n \rightarrow K^n, x \mapsto \underbrace{x + p_0}_{\substack{? \\ = \\ x}}$  mit  $p_0 \in K^n \setminus \{0\}$ , dann  $\text{Fix}(f) = \emptyset$ .

**Beispiel 1.8.4. Frage.** Was sind die Fixpunkte einer Projektion?

**Lemma 1.8.1.**  $\text{Fix}(f) \subseteq X$  ist ein affiner Unterraum.

*Beweis.* Falls  $\text{Fix}(f) = \emptyset$  dann  $\checkmark$ . Sei also  $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$  und  $p \in \text{Fix}(f)$ ,  $F$  die zu  $f$  gehörende lineare Abbildung.

Für  $x \in \text{Fix}(f)$  gilt

$$\overrightarrow{px} = \overrightarrow{f(p)f(x)} = F(\overrightarrow{px}).$$

Umgekehrt folgt aus

$$\overrightarrow{px} = F(\overrightarrow{px}) = \overrightarrow{pf(x)},$$

dass  $x = f(x)$ , also  $x \in \text{Fix}(f)$ .

Damit gilt

$$\{ \overrightarrow{px} \in T(X) \mid x \in \text{Fix}(f) \} = \{ \overrightarrow{px} \in T(X) \mid \overrightarrow{px} = F(\overrightarrow{px}) \}$$

und wir erkennen diese Menge als  $K$ -Untervektorraum von  $X$ . □

**Frage.** Bestimmung von  $\text{Fix}(f)$  für eine beliebige affine Abbildung  $f: X \rightarrow X$ ?

Nach Wahl eines Koordinatensystems können wir auf den Fall  $X = K^n$  reduzieren und annehmen, dass  $f$  in Matrizendarstellung gegeben ist.

Sei also

$$\begin{aligned} f: K^n &\rightarrow K^n \\ x &\mapsto \underbrace{Ax + b}_{=x = \text{Id}_n x}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\text{Fix}(f) = \{ x \in K^n \mid (A - \underset{\uparrow}{\text{Id}_n})x = -b \}$$

Einheitsmatrix der Dimension  $n$ :  $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Wir haben das Problem also reduziert auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems.

**Bemerkung.** Daraus kann man auch Lemma 1.8.1 ableiten.

**Beispiel 1.8.5.**

$$\begin{aligned} f: K^n &\rightarrow K^n \\ x &\mapsto \lambda \operatorname{Id}_n x + b \end{aligned}$$

mit  $\lambda \in K$ .

Dann

$$\operatorname{Fix}(f) = \{ x \in K^n \mid (\lambda - 1)x = -b \}.$$

Falls  $\lambda - 1$  invertierbar ist ( $\lambda \neq 1$ ), gibt es genau einen Fixpunkt.

**Definition.** Sei  $f: X \rightarrow X$  eine affine Abbildung mit zugehöriger linearer Abbildung  $F: T(X) \rightarrow T(X)$ . Wir nennen  $f$  eine *Dilatation* mit *Faktor*  $\lambda$ , falls gilt

$$F = \lambda \cdot \operatorname{Id}_{T(X)} \quad \lambda \in K.$$

Im Fall  $\lambda = 1$  nennen wir  $f$  eine Translation.

**Lemma 1.8.2.** Sei  $f: X \rightarrow X$  eine Dilatation mit Faktor  $\lambda \neq 1$ . Dann gilt

$$\# \operatorname{Fix}(f) = 1.$$

*Beweis.* Nach Wahl eines Koordinatensystems reduzieren wir das Problem auf Beispiel 1.8.5. □

Datei 9: Kollineationen

## §1.9 Kollineationen

Sei  $f: X \rightarrow X$  eine affine Abbildung eines affinen Raumes  $X$ , z. B. eine Affinität. Seien  $p_1, p_2, p_3 \in X$  in einer Geraden  $\ell \subseteq X$  enthalten.



Dann liegen auch  $f(p_1), f(p_2), f(p_3)$  auf einer Geraden.

**Frage.** Welche bijektiven Abbildungen  $f: X \rightarrow X$  haben diese Eigenschaft?

**Definition.** Sei  $X$  ein affiner Raum und  $p_1, p_2, p_3 \in X$ . Wir nennen  $p_1, p_2, p_3$  *kollinear*, wenn  $p_1, p_2, p_3$  auf einer Geraden  $\ell \subset X$  liegen. Wir nennen eine bijektive Abbildung  $f: X \rightarrow X$  eine Kollineation, falls jede Gerade  $\ell \subset X$  auf eine Gerade  $f(\ell) \subset X$  abgebildet wird.

**Beispiel 1.9.1.** Affinitäten

**Beispiel 1.9.2.** Ist  $\dim X = 1$  und  $f: X \rightarrow X$  bijektiv, dann ist  $f$  eine Kollineation.

**Beispiel 1.9.3.** Sei  $X = \mathbb{C}^2$  als affiner Raum über  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\overline{x}, \overline{y}). \end{aligned}$$

$\uparrow$   
 komplexe Konjugation

Dann ist  $f$  eine Kollineation. Das Bild einer Geraden

$$(x_0, y_0) + \mathbb{C}(x_1, y_1)$$

ist gegeben durch die Gerade

$$(\overline{x_0}, \overline{y_0}) + \mathbb{C}(\overline{x_1}, \overline{y_1}),$$

aber  $f$  ist *keine Affinität*!

**Bemerkung.** Die komplexe Konjugation

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \overline{x} \end{aligned}$$

ist ein Automorphismus von dem Körper  $\mathbb{C}$ .

**Vorlesung 5**

Fr 08.05. 10:15

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper. Wir nennen eine Bijektion  $\alpha: K \rightarrow K$  einen Automorphismus von  $K$  falls gilt

$$\alpha(\lambda + \mu) = \alpha(\lambda) + \alpha(\mu) \quad \forall \lambda, \mu \in K$$

und

$$\alpha(\lambda \cdot \mu) = \alpha(\lambda) \cdot \alpha(\mu) \quad \forall \lambda, \mu \in K$$

**Beispiel 1.9.4.**

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

ist ein Körper und

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &\rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ x + y\sqrt{2} &\mapsto x - y\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Satz 1.9.1.** Sei  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Automorphismus von  $\mathbb{R}$ . Dann gilt  $\alpha = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

*Beweis.* Sei  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Automorphismus.

1. Dann gilt

$$\alpha(0) = \alpha(0 + 0) = \alpha(0) + \alpha(0),$$

also  $\alpha(0) = 0$ .

2. Dann gilt

$$0 = \alpha(0) = \alpha(\lambda - \lambda) = \alpha(\lambda) + \alpha(-\lambda),$$

also  $\alpha(-\lambda) = -\alpha(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

3. Dann gilt

$$\alpha(1) = \alpha(1 \cdot 1) = \alpha(1)\alpha(1),$$

also  $\alpha(1) = 1$  und daher

$$\alpha(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

z. B.

$$\alpha(2) = \alpha(1 + 1) = \alpha(1) + \alpha(1) = 1 + 1 = 2.$$



4. Sei  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , dann gilt

$$q\alpha\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha(q)\alpha\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha\left(q\frac{p}{q}\right) = \alpha(p) = p,$$

also  $\alpha\left(\frac{p}{q} = \frac{p}{q}\right)$  oder  $\alpha(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{Q}$ .

5. Sei  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dann  $\exists \mu \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda = \mu^2$  und

$$\alpha(\lambda) = \alpha(\mu^2) = \alpha(\mu) \cdot \alpha(\mu) > 0,$$

also

$$\alpha(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Wir zeigen nun  $\alpha(\lambda) = \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

### Gegenannahme

Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha(\lambda) \neq \lambda$ . Wir diskutieren den Fall  $\alpha(\lambda) < \lambda$  ( $\alpha(\lambda) > \lambda$  geht genauso).

Wähle  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  mit

$$\alpha(\lambda) < \frac{p}{q} < \lambda.$$

Dann gilt

$$\alpha\left(\lambda - \frac{p}{q}\right) = \alpha(\lambda) - \frac{p}{q} < 0$$

↳ zu  $\lambda - \frac{p}{q} > 0$ . □

### Eine Familie von Kollineationen

**Idee.** Wir verallgemeinern Beispiel 1.9.3, um eine größere Klasse an Kollineationen zu erhalten als Affinitäten.

#### Beispiel 1.9.5.

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

respektiert Addition, d. h.

$$f(z + z') = f(z) + f(z') \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}^2,$$

und hat die Eigenschaft

$$f(\lambda z) = \bar{\lambda} f(z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C}^2.$$

→ Wir nennen  $f$  semilinear.

**Definition.** Seien  $V, W$  Vektorräume über einem Körper  $K$ . Wir nennen eine Abbildung  $F: V \rightarrow W$  *semilinear*, wenn es einen Automorphismus  $\alpha$  von  $K$  gibt, sodass gilt

- $F(v + v') = F(v) + F(v') \quad \forall v, v' \in V$
- $F(\lambda v) = \alpha(\lambda)F(v) \quad \forall \lambda \in K \quad \forall v \in V.$

**Definition.** Seien  $X, Y$  affine Räume über einem Körper  $K$ . Wir nennen eine Abbildung

$$f: X \rightarrow Y$$

*semiaffin*, wenn es eine *semilineare Abbildung*  $F: T(X) \rightarrow T(Y)$  gibt mit

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = F(\overrightarrow{pq}) \quad \forall p, q \in X.$$

Falls  $f$  außerdem bijektiv ist, dann nennen wir  $f$  eine Semiaffinität.

**Lemma 1.9.2.** Sei  $f: X \rightarrow X$  eine Semiaffinität eines affinen Raumes  $X$ . Dann ist  $f$  eine Kollineation.

Datei 10:  
Hauptsatz  
affine  
Geometrie

*Beweisidee.* Sei  $\ell \subseteq X$  eine Gerade,  $p_0 \in \ell$ . Dann ist

$$T(\ell) = \{ \overrightarrow{p_0 x}, x \in \ell \} \subseteq T(X)$$

ein  $K$ -Untervektorraum mit

$$\dim_K T(\ell) = 1.$$

Sei  $F: T(X) \rightarrow T(X)$  die zu  $f$  gehörige semilineare Abbildung.

Wir betrachten

$$\begin{aligned} T(f(\ell)) &= \{ \overrightarrow{f(p_0)f(x)}, x \in \ell \} \\ &= \{ F(\overrightarrow{p_0 x}), x \in \ell \} = F(T(\ell)). \end{aligned}$$

Dann ist auch  $F(T(\ell)) \subseteq T(X)$  ein  $K$ -Untervektorraum der Dimension 1, also

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Übung} \\ f(\ell) \subseteq X \end{array}$$

eine Gerade. □

**Frage.** Gibt es Kollineationen, die keine Semiaffinität sind?

→ Ja, z. B. für  $\dim X = 1$ .

### Hauptsatz der affinen Geometrie

Sei  $K$  ein Körper mit  $\#K \geq 3$ ,  $X$  ein affiner Raum über  $K$  mit  $\dim(X) \geq 2$  und  $f: X \rightarrow X$  eine Kollineation. Dann ist  $f$  eine Semiaffinität.

**Bemerkung.** Aus Satz 1.9.1 folgt, dass über  $\mathbb{R}$  jede semilineare Abbildung linear ist.

**Korollar 1.9.3.** Sei  $X$  ein affiner Raum über  $\mathbb{R}$  mit  $\dim(X) \geq 2$ ,  $f: X \rightarrow X$  eine Kollineation. Dann ist  $f$  eine Affinität.

Datei 11:  
Quadriken  
erster Teil

## §1.10 Quadriken

**Motivation.** Affine Unterräume der  $\mathbb{R}^n$  sind gegeben durch *lineare* Gleichungssysteme.

**Jetzt:**

Betrachte den Unterraum im  $\mathbb{R}^n$ , der entsteht als Lösungsmenge einer *quadratischen* Gleichung.

**Beispiele (im  $\mathbb{R}^2$ ).** i) der Kreis

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

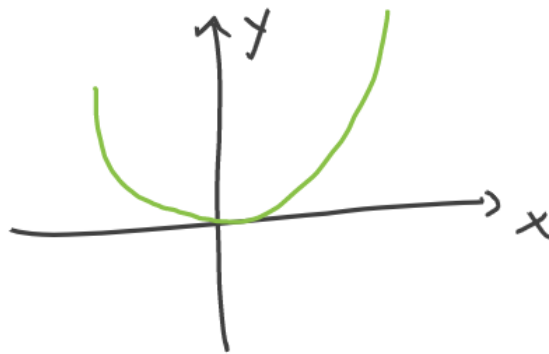
ii) Ellipsen,  $a, b > 0$

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + by^2 = 1 \right\}$$

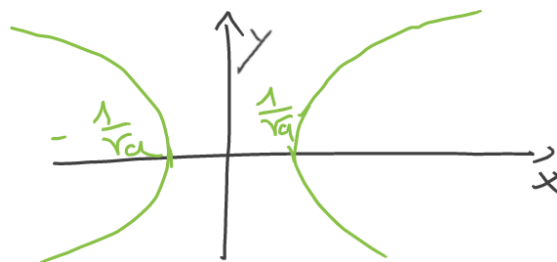
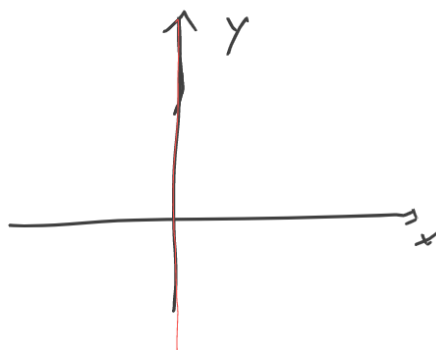


iii) Parabel

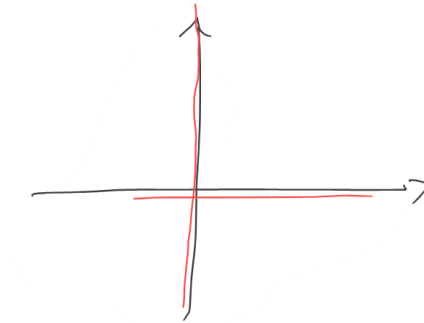
$$y = ax^2$$

iv) Hyperbeln,  $a, b > 0$ 

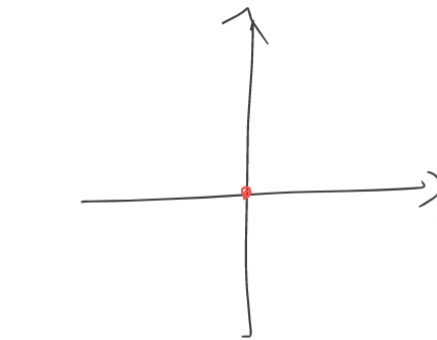
$$ax^2 - by^2 = 1$$

v)  $x^2 = 0$ 

vi)  $xy = 0$



vii)  $x^2 + y^2 = 0$



Der Ursprung

**Beispiele.** Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 = 0.$$

Erster Schritt: Entferne den „gemischten“ Term  $x_1x_2$ .

$$(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 2x_1 = 0.$$

Nach der Koordinatentransformation

$$y_1 = x_1 + x_2 \quad y_2 = x_2$$

ist  $Q$  gegeben durch

$$y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 \cdot 1 - 2y_2 \cdot 1 = 0.$$

**Bemerkung.** Wir können die obigen Gleichungen auch über anderen Körpern  $K$  betrachten, die Lösungsmenge hängt im Allgemeinen wesentlich von  $K$  ab, z. B.  $x^2 + y^2 = 0$ .

**Frage.** Was passiert hier über  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  für  $p$  prim?

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper. Ein quadratisches Polynom über  $K$  in den Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$  ist ein Ausdruck der Form

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{0i} x_i + \alpha_{00}.$$

mit  $\alpha_{ij}, \alpha_{0i}, \alpha_{00} \in K \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$ .

**Bemerkung.** Aus einem quadratischen Polynom  $P$  über  $K$  erhält man eine Abbildung

$$\begin{aligned} K^n &\rightarrow K \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto P(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

**Achtung.** Zwei unterschiedliche Polynome  $P_1, P_2$  müssen nicht notwendigerweise identisch sein, um dieselbe Abbildung zu induzieren.

**Beispiel.**  $K = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Körper mit  $p$  Elementen mit  $p$  prim,  $n = 1$ .

$$\begin{aligned} P_1 &= x \\ P_2 &= x^p. \end{aligned}$$

Nach Fermats kleinem Satz gilt

$$t \equiv t^p \pmod{p} \quad \forall t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Für  $p = 2$  sind  $P_1, P_2$  quadratische Polynome nach obiger Definition.

**Definition.** Wir nennen eine Teilmenge  $Q \subseteq K^n$  eine *Quadrik*, falls  $Q$  definiert ist durch

$$Q = \{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0 \}$$

für ein quadratisches Polynom  $P$  über  $K$ .

**Beispiele.** •  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$  über  $\mathbb{R}$  ergibt den Ursprung.

•  $a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 1$ ,  $a_1, \dots, a_n > 0$  über  $\mathbb{R}$  ergibt einen Ellipsoid.

•  $K = \mathbb{R}$ ,  $P = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 5x_2^2$ . Dann ist

$$Q = \left\{ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{P(x_1, x_2)} = 0 \right\}.$$

**Frage.** Wie können wir im Allgemeinen Quadriken in Matrizenschreibweise ausdrücken?

**Vorlesung 6**

Di 12.05. 10:15

**Idee.** Sei

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{0i} x_i \cdot 1 + \alpha_{00} \cdot 1^2.$$

Wir schreiben

$$x' = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1}.$$

und (sei im Folgenden  $\text{char}(K) \neq 2$ )

$$A = \left( \begin{array}{c|cccc} a_{00} & a_{01} & \cdots & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array} \right)$$

mit  $a_{ii} = \alpha_{ii} \quad \forall 0 \leq i \leq n$ .

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2} \alpha_{ij} \quad \text{für } 0 \leq i < j \leq n.$$

Es gilt dann

$$P(x_1, \dots, x_n) = {}^t x' A' x'$$

und

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

**Bemerkung.** Die Matrix  $A'$  ist symmetrisch (nach Konstruktion).**Definition.** In obiger Notation nennen wir  $A'$  die erweiterte Matrix zu  $P$  und  $x'$  den erweiterten Spaltenvektor zu  $x$ . Wir sagen, dass  $A' \in M_{(n+1) \times (n+1)}(K)$  die Quadrik  $Q$  beschreibt, wenn gilt

$$Q = \left\{ x \in K^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

**Notation.** Für  $P$  wie oben schreiben wir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für den „rein quadratischen“ Anteil von  $P$ .

**Bemerkung.** Sei  $Q \subseteq K^n$  eine Quadrik. Dann gibt es im Allgemeinen nicht nur eine erweiterte Matrix  $A'$  die  $Q$  beschreibt. Ist

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\},$$

dann beschreibt auch  $\lambda A'$  mit  $\lambda \in K \setminus \{0\}$  die Quadrik  $Q$ .

**Frage.** Wie verhalten sich Quadriken unter Koordinatentransformationen / Affinitäten?

**Beispiel.**  $K = \mathbb{Q}$ .  $P(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ P(x_1, x_2) &= (y_1 + y_2)^2 + (y_2 + 1)^2 \\ &= y_1^2 + 2y_1 y_2 + 2y_2^2 + 2y_2 + 1 \end{aligned}$$

ist wieder ein quadratisches Polynom.

**Lemma 1.10.1.** Sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char}(K) \neq 2$ ,  $Q \subseteq K^n$  eine Quadrik und  $f: K^n \rightarrow K^n$  eine Affinität. Dann ist auch  $f(Q) \subseteq K^n$  eine Quadrik.

*Beweis.* Sei  $Q$  gegeben durch das quadratische Polynom  $P(x_1, \dots, x_n)$ , also

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0 \right\}.$$

Sei  $A'$  die erweiterte Matrix zu  $P$  und  $x'$  der erweiterte Spaltenvektor zu  $x$ . Dann gilt

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

Als nächstes beschreibe den durch  $f$  gegebenen Koordinatenwechsel.  $f$  ist eine Affinität, also  $\exists b \in K^n$  und  $S \in \text{GL}_n(K)$  mit

$$\begin{aligned} f: K^n &\rightarrow K^n \\ x &\mapsto Sx + b. \end{aligned}$$

Sei  $y = f(x)$ , schreibe  $y' = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ,

$$S' = \left( \begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ \vdots & & & \\ b_n & & & \end{array} \right).$$



Dann gilt  $y' = S'x'$ .

**Bemerkung.**  $S'$  ist invertierbar mit inverser Matrix

$$T' = (S')^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline -S^{-1}b & S^{-1} \end{array} \right),$$

d. h.  $x' = T'y'$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} f(Q) &= \{ f((x_1, \dots, x_n)) \in K^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0 \} \\ &= \left\{ y \in K^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in K^n \mid {}^t T' y' A' (T' y') = 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in K^n \mid \begin{array}{c} {}^t y' \underbrace{{}^t T' A' T'}_{\text{symmetrische Matrix}} y' = 0 \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

also ist  $f(Q)$  eine Quadrik mit

$$P'(y_1, \dots, y_n) = {}^t y' ({}^t T' A' T') y'. \quad \square$$

**Bemerkung.** Der Beweis von Lemma 1.10.1 zeigt wie sich eine beschreibende Matrix  $A'$  unter einer Koordinatentransformation ändert.

**Frage.** Sei  $Q$  eine Quadrik beschrieben durch eine erweiterte Matrix  $A'$ . Find eine Koordinatentransformation  $f$  der  $K^n$ , sodass  $f(Q)$  möglichst „einfach“ beschrieben werden kann.

### zweiter Schritt

Entferne lineare Terme

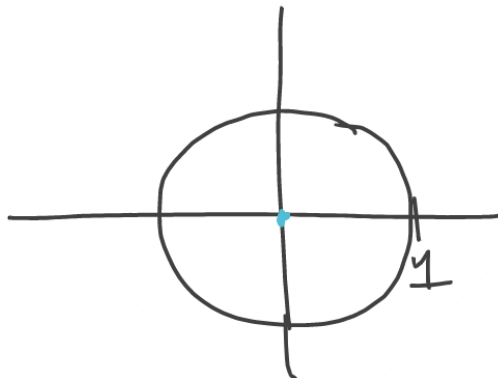
$$(y_1 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2 - 2 = 0.$$

Nach der Koordinatentransformation

$$z_1 = y_1 + 1 \quad z_2 = y_2 - 1$$

erhalten wir  $z_1^2 + z_2^2 = 2$ , oder nach skalieren mit  $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{2}w_1 &= z_1 & \sqrt{2}w_2 &= z_2 \\ w_1^2 + w_2^2 &= 1\end{aligned}$$



**Satz 1.10.2 (affine Hauptachsentransformation von reellen Quadriken).** Sei  $A' \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix und die Quadrik  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  gegeben durch

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid {}^t x' A' x' = 0 \right\}.$$

Sei  $A$  der rein quadratische Anteil von  $A'$ ,  $m = \text{rang}(A)$  und  $m' = \text{rang}(A)'$ . Dann gibt es eine Affinität  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $f(Q)$  beschrieben wird durch eine der folgenden Gleichungen:

a)  $m = m'$ :

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_m^2 = 0$$

für ein  $0 \leq j \leq m$ .

b)  $m + 1 = m'$ :

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_m^2 = 1$$

für ein  $0 \leq k \leq m$ .

c)  $m + 2 = m'$ :

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_m^2 + 2y_{m+1} = 0$$

für ein  $0 \leq k \leq m$ .

**Frage / Übung 1.10.1.** Warum gilt immer  $m \leq m' \leq m + 2$ ?

*Beweis zu Satz 1.10.2.* Sei

$$A' = \left( \begin{array}{c|cccc} a_{00} & a_{01} & \cdots & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n0} & & & & \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ A \\ \\ \end{array} \right).$$

mit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

Schritt 1 Entferne gemischte Terme.

**Idee.** Wollen  $A$  in Diagonalgestalt bringen.

AGLA I: Orthogonalisierungssatz für reelle symmetrische Matrizen.

Wir erhalten eine invertierbare Matrix  $T_1 \in GL_n(\mathbb{R})$  mit

$${}^t T_1 A T_1 = \left( \begin{array}{c|cc} I_k & 0 & 0 \\ 0 & -I_{m-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$I_l$  Einheitsmatrix der Dimension  $l$ ,  $m = \text{rang}(A)$ ,  $k$  Zahl der positiven Eigenwerte von  $A$  (mit Vielfachheit).

Sei

$$T'_1 = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \begin{array}{c} \\ T_1 \\ \\ \end{array} \right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} A'_1 &:= {}^t T'_1 A' T'_1 \\ &= \left( \begin{array}{c|cccc} c_{00} & c_{01} & \cdots & \cdots & c_{0n} \\ c_{10} & I_k & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & -I_{m-k} & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ c_{n0} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

für  $c_{00}, c_{01}, \dots, c_{0n}, c_{10}, \dots, c_{n0} \in \mathbb{R}$  mit  $c_{i0} = c_{0i} \forall i$ . Die durch  $A'$  bestimmte Quadrik ist gegeben durch

Datei 12:  
Quadriken  
zweiter Teil

$$y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_m^2 + 2(c_{01}y_1 + \cdots + c_{0n}y_n) + c_{00} = 0.$$

Schritt 2 Reduzieren der linearen Terme. Sei

$$T'_2 = \left( \begin{array}{c|cccccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline -c_{10} & 1 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & & & \\ -c_{k0} & & & & & & 0 & \\ c_{(k+1)0} & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ c_{m0} & & & & & & & \\ 0 & & & & & & 0 & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{array} \right)$$

entsprechend dem Basiswechsel

$$y_i = \begin{cases} z_i - c_{i0} & 1 \leq i \leq k \\ z_i + c_{i0} & k < i \leq m \\ z_i & i > m. \end{cases}$$

Sei

$$A'_2 := {}^t T'_2 A'_1 T'_2 = \left( \begin{array}{c|cc|c} d_{00} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{0(m+1)} & \dots & c_{0n} \\ \hline 0 & \ddots & & & & & & & \\ \vdots & & I_k & & 0 & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & & 0 & & -I_{m-k} & & & & \\ \hline c_{(m+1)0} & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ c_{n0} & & & & 0 & & & & 0 \end{array} \right).$$

Nach der durch  $T'_1 T'_2$  beschriebenen Koordinatentransformation ist  $Q$  gegeben durch

$$z_1^2 + \dots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \dots - z_m^2 + 2(c_{(m+1)0}z_{m+1} + \dots + c_{n0}z_n) + d_{00}.$$

### Fallunterscheidung

a)  $d_{00} = c_{(m+1)0} = \dots = c_{n0} = 0.$

- b)  $d_{00} \neq 0$ ,  $c_{(m+1)0} = \dots = c_{n0} = 0$ . Nach eventuellem Multiplizieren der Matrix  $A'$  mit  $(-1)$  und Umordnen der Variablen  $z_i$ , können wir  $d_{00} < 0$  annehmen.

Sei  $\lambda = \sqrt{|d_{00}|}$  und definiere

$$T'_3 = \left( \begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & \lambda I_n & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right).$$

Wir berechnen

$$A'_3 := {}^t T'_3 A'_2 T'_3.$$

Dann ist

$$A'_3 = \left( \begin{array}{c|cccc} -\lambda^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \lambda^2 I_k & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & 0 & & -\lambda^2 I_{m-k} & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nach der zu  $T'_1 t'_2 t'_3$  gehörigen Affinität und Division durch  $\lambda^2$  wird  $Q$  gegeben durch

$$u_1^2 + \dots + u_k^2 - u_{k+1}^2 - \dots - u_m^2 = 1.$$

- c)  $c_{i0} \neq 0$  für mindestens ein  $m+1 \leq i \leq n$ . Nach Umordnen der Variablen  $z_i$ ,  $m+1 \leq i \leq n$  können wir annehmen, dass  $c_{(m+1)0} \neq 0$  gilt. Betrachte die Koordinatentransformation  $u_i = z_i$ ,  $i \neq m+1$ ,

$$2u_{m+1} = 2(c_{(m+1)0}z_{m+1} + \dots + c_{n0}z_n) + d_{00}.$$

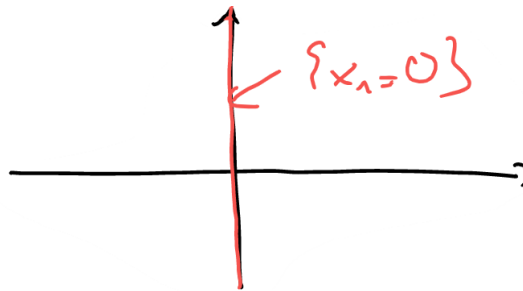
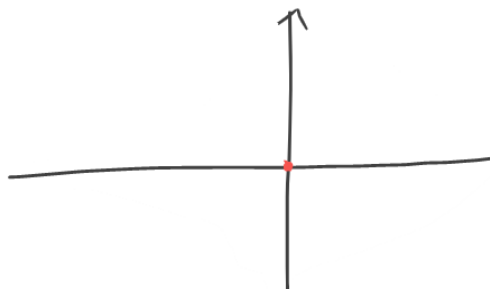
Nach dieser Affinität wird  $Q$  beschrieben durch

$$u_1^2 + \dots + u_k^2 - u_{k+1}^2 - \dots - u_m^2 + 2u_{m+1} = 0.$$

□

**Vorlesung 7**

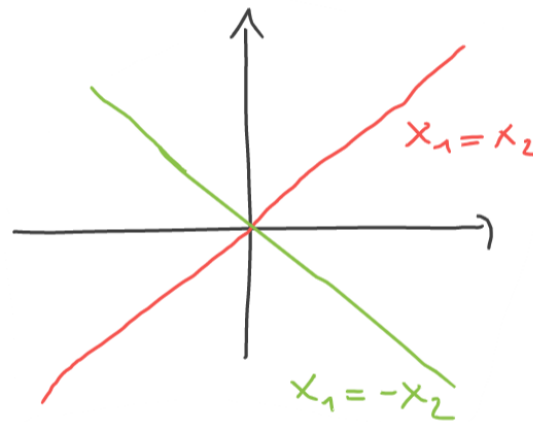
Fr 15.05. 10:15

Resultate der affinen Hauptachsentransformation im  $\mathbb{R}^2$ :  $m = \text{rang}(A)$ ,  $m' = \text{rang}(A)'$ .a)  $m = m'$ : $m = m' = 0$ :  $Q$  gegeben durch  $0 = 0 \rightarrow$  Ebene  $\mathbb{R}^2$ . $m = m' = 1$   $x_1^2 = 0 \rightarrow$  „doppelte“ Gerade. $m = m' = 2$   $x_1^2 + x_2^2 = 0 \rightarrow$  Punkt.

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \rightarrow 2 \text{ Geraden.}$$

$$\parallel$$

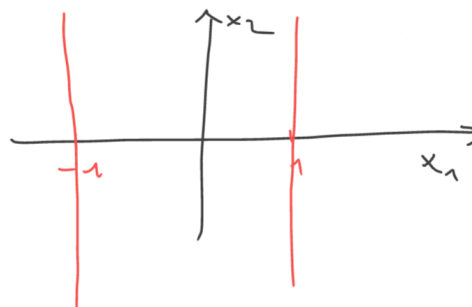
$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$



b)  $m' = m + 1$ .

$m = 0 \rightarrow 0 = 1 \rightarrow$ leere Menge.

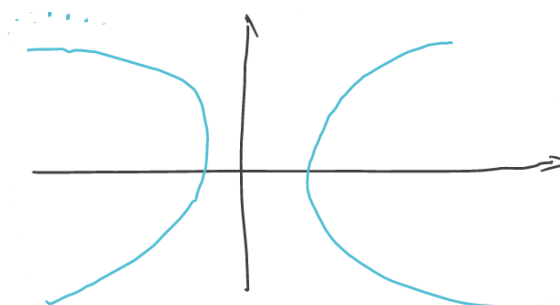
$m = 1 \quad x_1^2 = 1 \rightarrow 2$  parallele Geraden



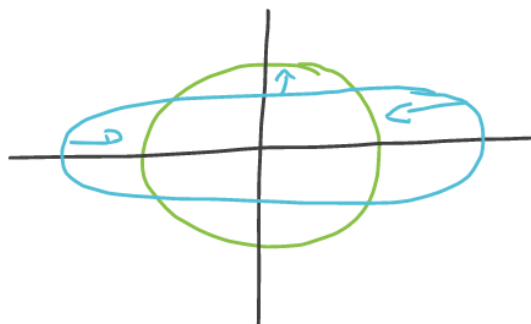
$-x_1^2 = 1 \rightarrow$ leere Menge.

$m = 2 \quad -x_1^2 - x_2^2 = 1 \rightarrow \emptyset$ .

$x_1^2 - x_2^2 = 1 \rightarrow$ Hyperbel.



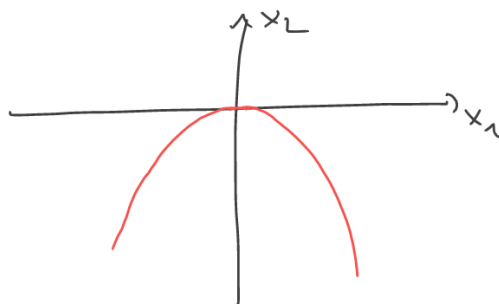
$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \rightarrow \text{Kreis.}$$



$$m' = m + 2.$$

$$m = 0 \quad 2x_1 = 0 \rightarrow \text{Gerade.}$$

$$m = 1 \quad x_1^2 + 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Parabel.}$$



**Bemerkung.** Verschiedene dieser quadratischen Formen können als *Menge* die gleiche Quadrik  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  beschreiben.



**Beispiel.**

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 = 0 \right\} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 = 0 \right\}.$$

**Definition.** Wir nennen zwei Quadriken  $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  *geometrisch äquivalent* wenn es eine Affinität  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt mit  $f(Q_1) = Q_2$ .

**Frage.** Klassifikation aller Quadriken über  $\mathbb{R}$  bis auf geometrische Äquivalenz?

Für eine Matrix  $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  sei  $\text{sign}(B) = \#$  positive Eigenwerte von  $B$   $-\#$  negative Eigenwerte von  $B$  die Signatur von  $B$ .

**Satz 1.10.3 (Geometrischer Klassifikationssatz (ohne Beweis)).** Seien  $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$  nichtleere Quadriken, die beschrieben werden durch erweiterte Matrizen  $A'_1, A'_2$  mit rein quadratischen Anteilen  $A_1, A_2$ . Seien  $Q_1, Q_2$  nicht gleich an Hyperebenen.

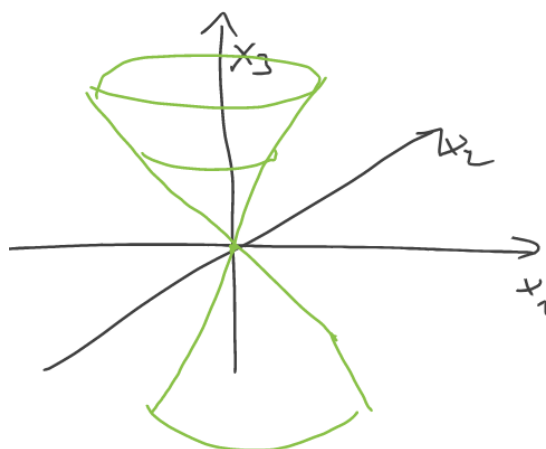
Dann sind  $Q_1$  und  $Q_2$  *geometrisch äquivalent* gdw gilt

$$\begin{aligned} \text{rang } A_1 &= \text{rang } A_2, \\ \text{rang } A'_1 &= \text{rang } A'_2, \\ |\text{sign } A_1| &= |\text{sign } A_2| \text{ und} \\ |\text{sign } A'_1| &= |\text{sign } A'_2|. \end{aligned}$$

**Folgerung 1.10.1.** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  eine nichtleere Quadrik. Dann ist  $Q$  geometrisch äquivalent zu genau einer der folgenden Quadriken.

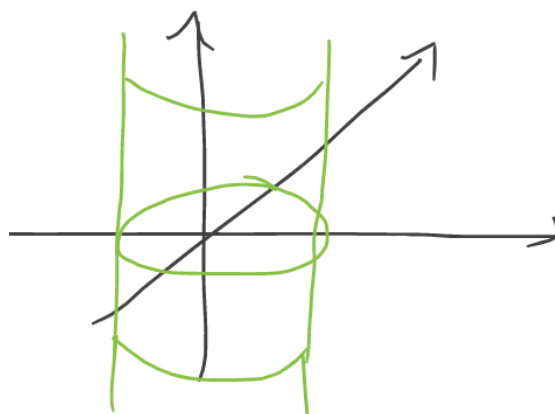
- a)  $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 = 0, 0 \leq k \leq m, 2k - m \geq 0.$
- b)  $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 1, 1 \leq k \leq m.$
- c)  $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 + 2x_{m+1} = 0, 1 \leq k \leq m \text{ und } 2k - m \geq 0.$

**Beispiele (Quadriken im  $\mathbb{R}^3$ ).** **Typ a)**  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$



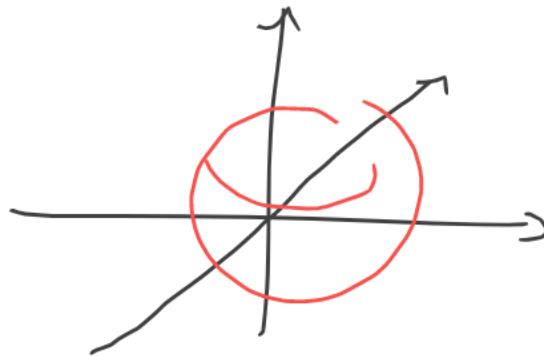
Kegel

**Typ b)** •  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .



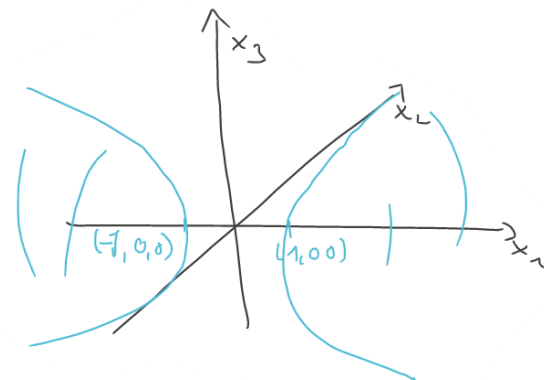
Kreiszyylinder

•  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ .



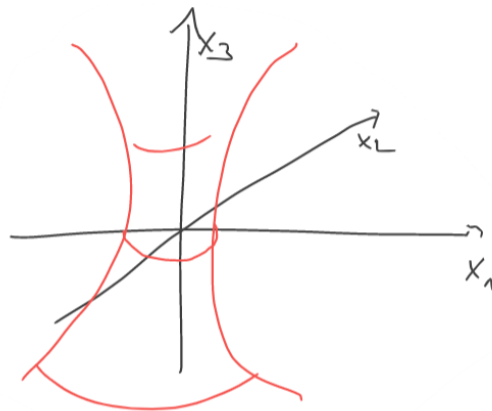
Kugel

- $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1.$



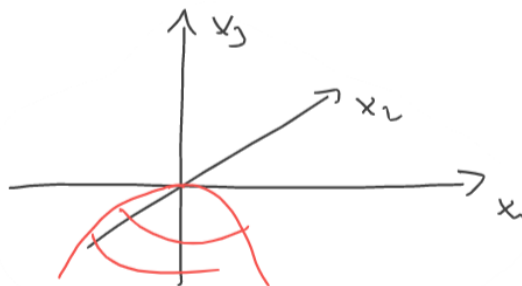
Zweischaliges Hyperboloid

- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$



Einschaliges Hyperboloid

**Typ c)**  $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$ .

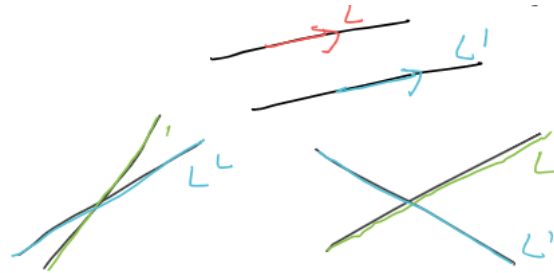


Elliptisches Paraboloid

Datei 13:  
Euklidische  
affine Räume

## §1.11 Euklidische affine Räume

In einem allgemeinen affinen Raum  $X$  haben wir den Begriff von Gerade und parallelen Geraden (Sind  $L, L' \subset X$  Geraden, dann sagen wir, dass  $L$  und  $L'$  parallel sind, falls  $T(L) = T(L')$ ).



**Frage.** Können wir auch „Winkel“ messen zwischen zwei sich schneidenden Geraden?

**Erinnerung.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf  $V$  ist eine *positiv-definite symmetrische Bilinearform*

$$S: V \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Definition.** Ein euklidischer affiner Raum ist ein reeller affiner Raum  $(X, T(X), \tau)$  zusammen mit einem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: T(X) \times T(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

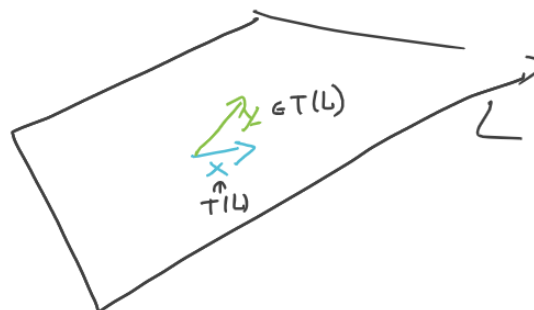
auf dem Translationsvektorraum  $T(X)$ .

**Beispiel 1.11.1.** Der  $\mathbb{R}^n$  als reeller affiner Raum mit dem Standard-Skalarprodukt

$$\begin{array}{ccc} \langle \cdot, \cdot \rangle: T(X) \times T(X) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Beispiel 1.11.2.** Die Lösungsmenge  $L$  im  $\mathbb{R}^n$  eines Systems von linearen Gleichungen  $Ax = b$ ,  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$



mit dem aus dem  $\mathbb{R}^n$  induzierten Standard-Skalarprodukt auf  $T(L) \leq \mathbb{R}^n$   
 $\uparrow$   
 Untervektorraum

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : T(L) \times T(L) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

**Frage.** Definition von Abständen / Winkeln in einem euklidischen affinen Raum?

**Definition 1.11.1.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum. Wir definieren eine Normabbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : T(X) &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ t &\mapsto \|t\| := \sqrt{\langle t, t \rangle} \end{aligned}$$

und eine Metrik

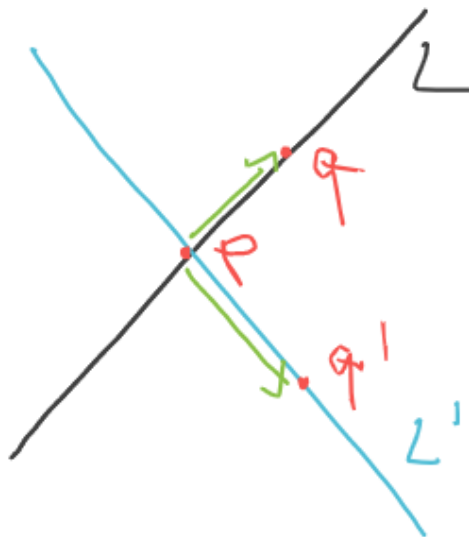
$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (p, q) &\mapsto d(p, q) := \|\vec{pq}\|. \end{aligned}$$



**Bemerkung.**  $\|\cdot\|$  ist eine Norm, da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt ist. Man kann nachrechnen, dass  $d$  tatsächlich eine Metrik auf  $X$  ist, z. B.

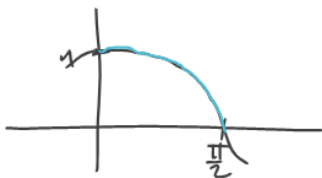
$$d(p, q) = \|\vec{pq}\| = \|-\vec{qp}\| = |-1| \cdot \|\vec{qp}\| = d(q, p).$$

**Definition.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum,  $p, q, q' \in X$  mit  $p \neq q, q'$ ,  $L = p \vee q$ ,  $L' = p \vee q'$ .



Wir definieren den Winkel  $\sphericalangle(L, L')$  zwischen den Geraden  $L, L'$  durch

$$\sphericalangle(L, L') = \arccos \frac{|\langle \vec{pq}, \vec{pq'} \rangle|}{\|\vec{pq}\| \cdot \|\vec{pq'}\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$



**Bemerkung.** Die Definition des Winkels  $\sphericalangle(L, L')$  ist unabhängig von der Wahl der Elemente  $q, q'$  (solange  $p \neq q, q'$ ).

## Vorlesung 8

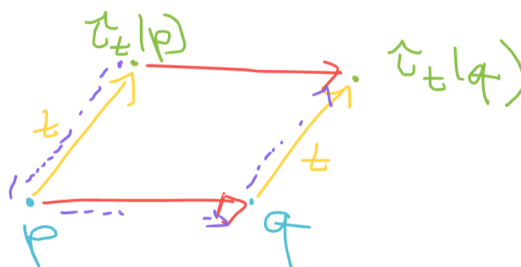
Di 19.05. 10:15

**Lemma 1.11.1.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum,  $t \in T(X)$  und  $\tau_t: X \rightarrow X$  die Translation um  $t$ . Seien  $q, q' \in X$  und  $L, L' \subseteq X$  Geraden mit  $L \cap L' \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$d(\tau_t(p), \tau_t(q)) = d(p, q) \text{ und} \\ \sphericalangle(\tau_t(L), \tau_t(L')) = \sphericalangle(L, L').$$

*Beweisidee.* Verwende

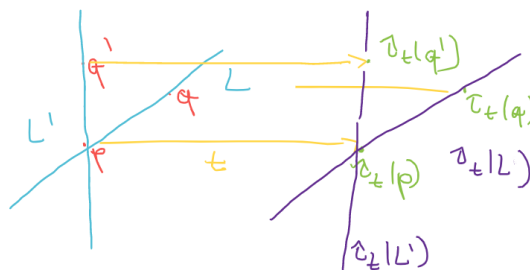
$$\overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q)} \stackrel{!}{=} \overrightarrow{pq},$$



also

$$d(\tau_t(p), \tau_t(q)) = \|\overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q)}\| = \|\overrightarrow{pq}\| = d(p, q)$$

für beliebige Punkte  $p, q \in X$  und  $t \in T(X)$ .



Winkel zwischen Geraden  $L, L'$

$$\sphericalangle(L, L') = \arccos \frac{|\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq'} \rangle|}{\|\overrightarrow{pq}\| \|\overrightarrow{pq'}\|}.$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \|\overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q)}\| \\ \uparrow \\ \|\overrightarrow{\tau_t(p)\tau_t(q')}\| \end{array}$$

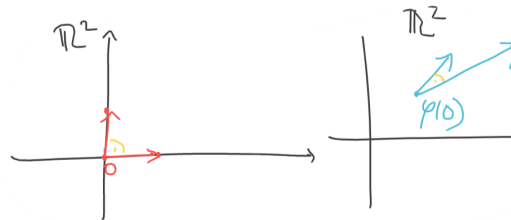
□



also:

Translation um ein Element  $t \in T(X)$  erhält Abstände und Winkel.

Nicht alle affinen Abbildungen haben diese Eigenschaft, z. B.  $X = \mathbb{R}^2$  mit Standardskalarprodukt.



$$\phi: X \rightarrow X$$

**Frage.** Welche Abbildungen zwischen euklidischen affinen Räumen erhalten Abstände?

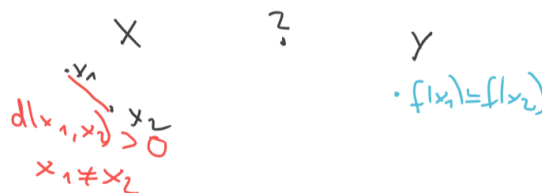
**Definition.** Seien  $X, X'$  metrische Räume mit Metriken  $d, d'$  und  $f: X \rightarrow X'$  eine Abbildung. Wir nennen  $f$  eine *Isometrie*, falls  $\forall p, q \in X$  gilt

$$d'(f(p), f(q)) = d(p, q).$$

**Frage.** Welche *Abbildungen* zwischen euklidischen affinen Räumen erhalten Abstände?

→ Wir können diese Frage auf *affine Abbildungen* reduzieren.

**Satz 1.11.2.** Seien  $X, Y$  euklidische affine Räume  $f: X \rightarrow Y$  eine Isometrie. Dann ist  $f$  *affin* und injektiv.



*Beweis.* Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Isometrie und  $p \in X$ . Betrachte die Abbildung (mit  $T(X), T(Y)$  Vektorräumen mit Skalarprodukt)

$$F: T(X) \rightarrow T(Y) \\ \overrightarrow{px} \mapsto \overrightarrow{f(p)f(x)}.$$

**Behauptung 1.**  $F$  ist eine Isometrie.

Seien  $x_1, x_2 \in X$ .

$$\begin{aligned}
 \|F(\overrightarrow{px_1}) - F(\overrightarrow{px_2})\|_{T(Y)} &= \|\overrightarrow{f(p)f(x_1)} - \underbrace{\overrightarrow{f(p)f(x_2)}}_{=\overrightarrow{f(x_2)f(p)}}\|_{T(Y)} \\
 &= \|\overrightarrow{f(p)f(x_1)} + \overrightarrow{f(x_2)f(p)}\|_{T(Y)} \\
 &= \|\overrightarrow{f(x_2)f(x_1)}\|_{T(Y)} \\
 &= \|\overrightarrow{f(x_2)f(x_1)}\|_{T(Y)} \\
 &= d_Y(f(x_2), f(x_1)) \\
 &= d_X(x_2, x_1) = \overrightarrow{x_2x_1}_{T(X)} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad f \text{ ist Isometrie} \\
 &= \|\overrightarrow{px_1} - \overrightarrow{px_2}\|_{T(x)}.
 \end{aligned}$$

**Behauptung 2.** Ist  $F$  linear, dann ist  $f$  affin. Seien  $x_1, x_2 \in X$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 F(\overrightarrow{x_1x_2}) &= F(\overrightarrow{x_1p} + \overrightarrow{px_2}) \\
 &= F(-\overrightarrow{px_1} + \overrightarrow{px_2}) \\
 &= -F(\overrightarrow{px_1}) + F(\overrightarrow{px_2}) \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad F \text{ ist linear} \\
 &= -\overrightarrow{f(p)f(x_1)} + \overrightarrow{f(p)f(x_2)} \\
 &= \overrightarrow{f(x_1)f(x_2)}.
 \end{aligned}$$

Also ist Abbildung

$$\overrightarrow{x_1x_2} \mapsto \overrightarrow{f(x_1)f(x_2)}$$

linear!

Es genügt also folgendes Lemma zu beweisen

**Lemma 1.11.3.** Seien  $V, W$  euklidisch Vektorräume,  $F: V \rightarrow W$  eine Isometrie mit  $F(0) = 0$ . Dann ist  $F$  linear und injektiv.

Datei 14:  
Euklidische  
affine Räume  
Teil 2

*Beweis von Lemma 1.11.3.*  $F$  ist injektiv: Sei  $v', v \in V$  mit  $F(v) = F(v')$ . Dann

$$\begin{aligned}
 0 &= d_W(F(v), F(v')) = d_V(v, v'), \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad f \text{ Isometrie}
 \end{aligned}$$

also  $v = v'$ .

Zur Linearität von  $F$ :  $F$  ist Isometrie, also gilt  $\forall v_1, v_2 \in V$

$$\underbrace{\|F(v_1) - F(v_2)\|}_{d_W(F(v_1), F(v_2))} = \underbrace{\|v_1 - v_2\|}_{d_V(v_1, v_2)}.$$

Aus  $F(0) = 0$  folgt

$$\|F(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V$$

Berechne für  $v_1, v_2 \in V$ :

$$\|v_1 - v_2\|^2 = \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2\langle v_1, v_2 \rangle.$$

Es gilt auch

$$\underbrace{\|F(v_1) - F(v_2)\|^2}_{\|v_1 - v_2\|^2} = \underbrace{\|F(v_1)\|^2}_{\|v_1\|^2} + \underbrace{\|F(v_2)\|^2}_{\|v_2\|^2} - 2\langle F(v_1), F(v_2) \rangle.$$

Also folgt

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle F(v_1), F(v_2) \rangle \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Seien  $v, v' \in V$ .

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle F(v + v') - F(v) - F(v'), F(v + v') - F(v) - F(v') \rangle}_{\stackrel{?}{=} 0} &= \langle F(v + v'), F(v + v') \rangle \\ &\quad - \langle F(v + v'), F(v) \rangle \\ &\quad - \dots \\ &\quad + \langle F(v'), F(v') \rangle \\ &= \langle v + v', v + v' \rangle \\ &\quad - \langle v + v', v \rangle - \dots \\ &\quad + \langle v', v' \rangle \\ &= \langle v + v' - v - v', v + v' - v - v' \rangle \\ &= \langle 0, 0 \rangle = 0 \quad \forall v, v' \in V, \end{aligned}$$

also gilt  $F(v + v') = F(v) + F(v')$ . Multiplikation mit Skalaren. Sei  $v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \langle F(\lambda v) - \lambda F(v), F(\lambda v) - \lambda F(v) \rangle &= \langle F(\lambda v), F(\lambda v) \rangle - 2\langle F(\lambda v), \lambda F(v) \rangle + \langle \lambda F(v), \lambda F(v) \rangle \\ &= \langle F(\lambda v), F(\lambda v) \rangle - 2\lambda \langle F(\lambda v), F(v) \rangle + \lambda^2 \langle F(v), F(v) \rangle \\ &= \langle \lambda v, \lambda v \rangle - 2\lambda \langle \lambda v, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle = (\lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2) \langle v, v \rangle \\ &= 0, \end{aligned} \quad \square$$

also  $F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V.$   $\square$

**Definition.** Eine Isometrie  $f: X \rightarrow X$  eines euklidischen affinen Raumes  $X$  nennen wir *Kongruenz* (also nach Satz 1.11.2 immer eine Affinität).

**Lemma 1.11.4.** Sei  $f: X \rightarrow X$  eine Affinität eines euklidischen affinen Raumes  $X$ . Dann ist  $f$  eine *Kongruenz* genau dann, wenn die zugehörige lineare Abbildung  $F: T(X) \rightarrow T(X)$  *orthogonal* ist.

*Beweis.*  $f$  ist Isometrie gdw

$$d(f(p), f(q)) = d(p, q) \quad \forall p, q \in X,$$

d. h. gdw

$$\|f(p)f(q)\| = \underbrace{\|\vec{pq}\|}_{\in T(X)} \quad \forall p, q \in X.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass  $F$  orthogonal ist (also das Skalarprodukt erhält)  $\square$

**Bemerkung.** Im  $\mathbb{R}^n$  mit Standardskalarprodukt sind Kongruenzen

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

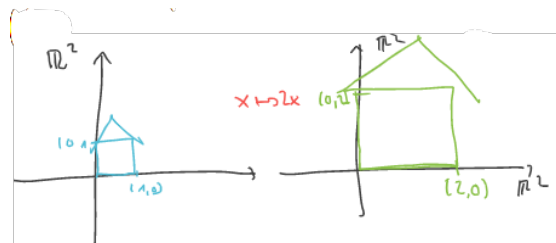
genau durch die Abbildungen der Form

$$f: x \mapsto \boxed{f(0) * A \cdot x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gegeben mit  $A \in O(n)\mathbb{R}$  orthogonal, d. h.  $A^{-1} = {}^t A$ . Slogan: „Kongruenz  $\sim$  orthogonale Abbildung + Translation“.

**Frage.** Kongruenzen erhalten Winkel. Welche *Affinitäten*/ Abbildungen  $f: X \rightarrow X$  eines euklidischen Raumes  $X$  haben diese Eigenschaft?

**Beispiel.**  $\mathbb{R}^2$  mit Standardskalarprodukt.



erhält Winkel, aber nicht Abstände, d. h. ist keine Isometrie des  $\mathbb{R}^2$ .

**Definition.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum,  $f: X \rightarrow X$  eine Abbildung. Sei  $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ . Wir nennen  $f$  eine *Ähnlichkeit* mit (Ähnlichkeits-) Faktor  $\rho$  wenn  $\forall p, q \in X$  gilt

$$d(f(p), f(q)) = \rho \cdot d(p, q).$$

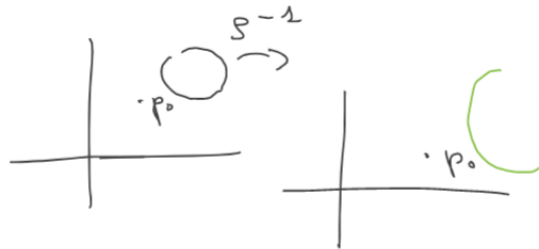
**Korollar 1.11.5 (aus Satz 1.11.2).** Eine Ähnlichkeit  $f: X \rightarrow X$  eines euklidischen affinen Raumes  $X$  ist eine Affinität.

*Beweis.* Sei  $p_0 \in X$ . Wir definieren eine Affinität

$$\rho^{-1}: X \rightarrow X$$

durch  $\rho^{-1}(p_0) = p_0$  und

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}: T(X) &\rightarrow T(X) \\ T(X) \ni v &\mapsto \rho^{-1}v. \end{aligned}$$



Wir betrachten die Abbildung

$$\rho^{-1} \circ f: X \rightarrow X.$$

**Behauptung.**  $\rho^{-1} \circ f$  ist eine Isometrie.

Seien  $p, q \in X$ . Dann gilt

$$d(\rho^{-1} \circ f(p), \rho^{-1} \circ f(q)) = \|\overrightarrow{\rho^{-1} \circ f(p) \rho^{-1} \circ f(q)}\|$$

also

$$\begin{aligned} d(\rho^{-1} \circ f(p), \rho^{-1} \circ f(q)) &= \|\overrightarrow{\rho^{-1} f(p) f(q)}\| \\ &= \rho^{-1} \|\overrightarrow{f(p) f(q)}\| \\ &= d(p, q), \end{aligned}$$

$\uparrow$   
 $f$  ist Ähnlichkeit mit Faktor  $\rho$

also ist nach Satz 1.11.2  $\rho^{-1} \circ f$  injektiv und affin. Damit ist auch  $f$  Affinität.  $\square$

**Vorlesung 9**

Fr 21.05. 10:15

Eine Weitere Eigenschaft von Ähnlichkeiten:

**Satz 1.11.6.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum und  $f: X \rightarrow X$  eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor  $\rho \neq 1$ . Dann besitzt  $f$  genau einen Fixpunkt.

*Beweisidee.* Nach obigem Korollar ist  $f$  eine Affinität. Sei  $F: T(X) \rightarrow T(X)$  die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist  $\frac{1}{\rho}F$  orthogonal, also haben alle Eigenwerte von  $F$  Betrag  $\rho$ .

Nach Wahl eines Koordinatensystem wird  $f$  beschrieben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \underbrace{Ax + b}_{\stackrel{?}{=}x} \end{aligned}$$

mit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  und Fixpunkten beschrieben durch

$$Ax + b = x,$$

also  $(A - I_n)x = -b$ , da 1 kein Eigenwert von  $A$  ist, gilt  $\det(A - I_n) \neq 0$ . □

Ähnlichkeiten erhalten Winkel. Gibt es noch weitere Affinitäten eines euklidischen affinen Raumes, die Winkel erhalten?

**Definition.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum,  $L, L' \subseteq X$  Geraden mit  $L \cap L' \neq \emptyset$ . Wir nennen  $L$  und  $L'$  orthogonal, wenn gilt

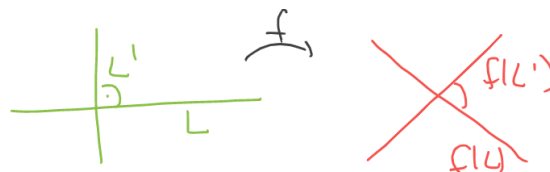
$$\sphericalangle(L, L') = \frac{\pi}{2}.$$

Schreibe auch  $L \perp L'$ .

**Satz 1.11.7.** Sei  $X$  ein euklidischer affiner Raum und  $f: X \rightarrow X$  eine Affinität mit der Eigenschaft, dass für alle Geraden  $L, L'$  mit  $L \cap L' \neq \emptyset$  und  $L \perp L'$  gilt, dass

$$f(L) \perp f(L').$$

Dann ist  $f$  eine Ähnlichkeit.



*Beweis.* Sei  $F: T(X) \rightarrow T(X)$  die zugehörige bijektive lineare Abbildung. Seien  $p, q, q' \in X$  mit  $p \vee q = L$ ,  $p \vee q' = L'$  und  $L \perp L'$ . Dann gilt  $\angle(L, L') = \frac{\pi}{2}$ , also

$$\arccos \frac{|\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq'} \rangle|}{\|\overrightarrow{pq}\| \|\overrightarrow{pq'}\|} = \frac{\pi}{2}$$

d. h.  $\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq'} \rangle = 0$ .



Die Geraden  $f(L)$  und  $f(L')$  sind gegeben durch

$$f(p) \vee f(q) = f(L) \quad f(p) \vee f(q') = f(L')$$

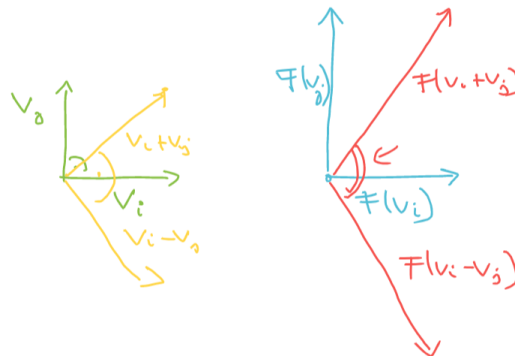
und wir können annehmen (wegen  $f(L) \perp f(L')$ ), dass

$$\underbrace{\langle \overrightarrow{f(p)f(q)}, \overrightarrow{f(p)f(q')} \rangle}_{\substack{\langle \underbrace{\overrightarrow{f(p)f(q)}}_{\underbrace{\quad}_{T(X)}}, \underbrace{\overrightarrow{f(p)f(q')}}_{\underbrace{\quad}_{T(X)}} \rangle}} = 0.$$

Es gilt also, dass für alle  $v, w \in T(X)$  mit  $\langle v, w \rangle = 0$  gilt  $\langle F(v), F(w) \rangle = 0$ . Wir haben den Beweis von Satz 1.11.7 auf folgendes Lemma reduziert.  $\square$

**Lemma 1.11.8.** Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum,  $F: V \rightarrow V$  ein Isomorphismus mit  $F(v) \perp F(w)$  für alle  $v, w \in V$  mit  $v \perp w$ . Dann existiert  $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$  s. d.  $\frac{1}{\rho} \cdot F$  orthogonal ist.

*Beweis.* Sei  $n = \dim(V)$  und  $v_1, \dots, v_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$ , d. h.  $\|v_i\| = 1$ ,  $1 \leq i \leq n$  und  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  für  $i \neq j$ . Sei  $\rho_i := \|F(v_i)\|$ ,  $1 \leq i \leq n$ .



Für  $i \neq j$  gilt

$$\langle v_i + v_j, v_i - v_j \rangle = \underbrace{\|v_i\|^2}_{=1} + \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=0} - \underbrace{\|v_j\|^2}_{=1} = 0,$$

also  $v_i + v_j \perp v_i - v_j$ . Nach Annahme gilt dann auch

$$\begin{aligned} \langle F(v_i), F(v_i) \rangle + \underbrace{\langle F(v_j), F(v_i) \rangle}_{=0, \text{ da } F(v_j) \perp F(v_i)} - \underbrace{\langle F(v_i), F(v_j) \rangle}_{=0} - \langle F(v_j), F(v_j) \rangle &= \langle F(v_i + v_j), F(v_i - v_j) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\underbrace{\|F(v_i)\|^2}_{\rho_i^2} = \underbrace{\|F(v_j)\|^2}_{\rho_j^2} \quad \forall i, j$$

und damit  $\rho_i = \rho_j \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$ . Schreibe  $\rho = \rho_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$  für den gemeinsamen Wert. Dann ist die Abbildung  $\frac{1}{\rho}F$  orthogonal, da  $v_1, \dots, v_n$  auf die Orthonormalbasis  $\frac{1}{\rho}F(v_1), \dots, \frac{1}{\rho}F(v_n)$  abgebildet wird.  $\square$

Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Affinität gegeben durch

$$x \mapsto Ax + b \quad A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{R}^n.$$

Im Obigen haben wir gesehen, dass gilt:  $f$  ist Kongruenz  $\iff A$  ist orthogonal,  $f$  ist Ähnlichkeit  $\iff \frac{1}{\rho}A$  ist orthogonal für ein  $\rho \geq 0$ .

**Frage.** Wie können wir  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  für eine allgemeine Affinität  $f$  mit Hilfe von / bis auf eine orthogonale Matrix möglichst einfach ausdrücken?



Betrachte  $\mathbb{R}^n$  als euklidischen affinen Raum mit Standardskalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Satz 1.11.9 (Hauptachsentransformation von Affinitäten).** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Affinität gegeben durch  $x \mapsto Ax + b$  mit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Dann gibt es orthogonale Matrizen  $S, T \in O(n)$  und eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

mit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ , s. d.

$$A = SDT$$

d. h.

$$f(x) = SDTx + f(0).$$

*Beweis.* Wir bilden die Matrix  $C = {}^tAA$ .

- $C$  ist symmetrisch, da

$${}^tC = {}^t({}^tAA) = {}^tA {}^t{}^tA = {}^tAA = C.$$

- $C$  ist positiv definit, denn  $I_n$  ist positiv definit und daher nach dem Sylvester'schen Trägheitsgesetz auch  $C$ . Aus der Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen (AGLA I) folgt, dass es eine Matrix  $T \in O(n)$  mit

$$TC {}^tT = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n \end{pmatrix},$$

$\beta_1, \dots, \beta_n > 0$ . Wir definieren  $\alpha_i = \sqrt{\beta_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$  und

$$D := \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

Dann gilt

$$T \underbrace{C}_{{}^tAA} {}^tT = D^2 = {}^tDD,$$

also

$$I_n = \underbrace{{}^tA^{-1}{}^tT^tD}_S \underbrace{DTA^{-1}}_{{}^tS}.$$

Sei  $S := {}^tA^{-1}{}^tT^tD$ . Dann gilt  ${}^tSS = I_n$  und  $S \in O(n)$  ist orthogonal. Wir erhalten  ${}^tS = DTA^{-1}$  und  $A = SDT$ .  $\square$

**Korollar 1.11.10.** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Isomorphismus des Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$ . Dann gibt es eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ , s. d. die Vektoren  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  eine Orthogonalbasis bilden.

*Beweis.* Sei  $F$  bezüglich der Standardbasis der  $\mathbb{R}^n$  gegeben durch die Matrix  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . Aus Satz 1.11.9 folgt, dass es orthogonale Matrizen  $S, T \in O(n)$  gibt mit  $A = SDT$  und

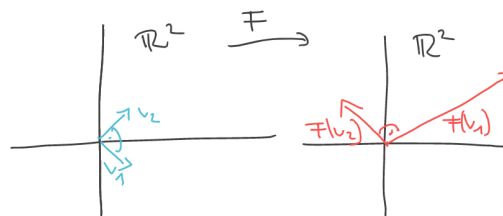
$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$  einer Diagonalmatrix. Sei  $v_i = {}^tTe_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .  $T$  ist orthogonal, also auch  ${}^tT$  und damit ist  $v_1, \dots, v_n$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Es gilt

$$\begin{aligned} F(v_i) &= A^tTe_i \\ &= SD \underbrace{I_n}_{T^tT} e_i \\ &= SDe_i = S(\alpha_i e_i) \\ &= \alpha_i Se_i. \end{aligned}$$

Die Matrix  $S$  ist orthogonal, also sind die Vektoren  $Se_1, \dots, Se_n$  eine Orthonormalbasis. Da  $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ , bilden  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  eine orthogonale Basis der  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Beispiel.**



# Kapitel 2

## Projektive Geometrie

### §2.1 Projektive Räume

#### Vorlesung 10

Datei 18:  
Projektive  
Räume

Sei  $K$  ein Körper und

$$P(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$$

Di 26.05. 10:15

ein quadratisches Polynom der Form

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

mit  $\alpha_{ij} \in K$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Sei

$$Q = \{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0 \}$$

die durch  $P$  beschriebene Quadrik.

Sei  $\lambda \in \star\star$ . Dann gilt für  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \in Q \iff \lambda(x_1, \dots, x_n) \in Q.$$

Denn  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  ist äquivalent zu

$$0 = \lambda^2 P(x_1, \dots, x_n) = \lambda^2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} (\lambda x_i) (\lambda x_j) = P(\lambda(x_1, \dots, x_n)).$$

Mit  $(x_1, \dots, x_n) \in Q$  ist also auch

$$\underbrace{K \cdot (x_1, \dots, x_n)}_{\{ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) \mid \lambda \in K \}} \subseteq Q$$

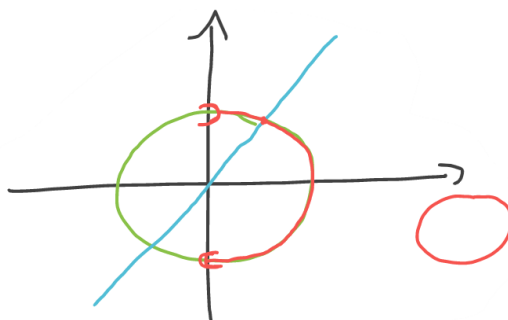
d. h.  $Q$  „besteht aus einer Vereinigung an Geraden“.

**Idee.** Im projektiven Raum identifizieren wir die Punkte der Gerade  $K \cdot (x_1, \dots, x_n)$  zu einem Punkt.

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Wir definieren

$$\mathbb{P}(V) = \{ L \leq V \mid L \text{ ist eindimensionaler Untervektorraum von } V \}.$$

**Beispiel.**  $V = \mathbb{R}^2$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.



$$\dim(\mathbb{P}(V)) = 1.$$

**Bemerkung.** Für  $V = \{0\}$  erhalte

$$\dim(\mathbb{P}(V)) = \dim_K(V) - 1 = 0 - 1 = -1$$

und  $\mathbb{P}(V) = \emptyset$ .

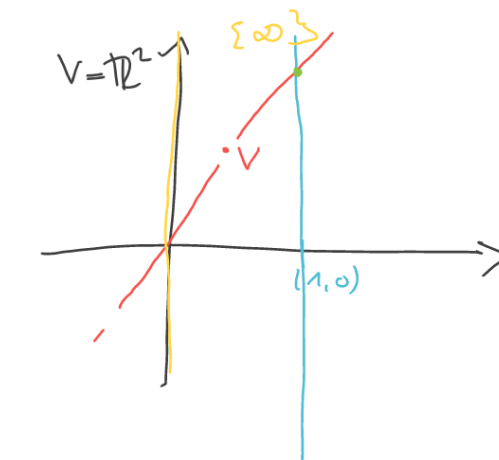
**Beispiel / Definition 2.1.1.** Sei  $K$  ein Körper,  $n \geq 0$ . Dann ist  $\mathbb{P}(K^{n+1})$  die Menge der Geraden durch den Ursprung im  $K^{n+1}$ . Wir bezeichnen

$$\mathbb{P}_n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$$

als  $n$ -dimensionalen projektiven Raum über  $K$ . Weiter definieren wir die projektive Dimension von  $\mathbb{P}(V)$  als  $\dim(\mathbb{P}(V)) := \dim_K(V) - 1$ .

**Bemerkung.** Für einen  $K$ -Vektorraum  $V$  haben wir immer eine Abbildung

$$\begin{aligned} V \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}(V) \\ v &\mapsto K \cdot v. \end{aligned}$$



$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), \sim \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$$

**Definition (homogene Koordinaten).**  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Sei  $K$  ein Körper und  $L \in \mathbb{P}_n(K)$ . Wir nennen ein Tupel

$$(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$$

homogene Koordinaten des Punktes  $L \in \mathbb{P}_n(K)$ , falls

$$K \cdot (x_0, \dots, x_n) = L.$$

Schreibe auch

$$(x_0 : \dots : x_n) := K \cdot (x_0, \dots, x_n).$$

**Bemerkung.** Die homogenen Koordinaten eines Punktes  $L \in \mathbb{P}_n(K)$  sind nur bis auf Multiplikation mit  $\lambda \in K^*$  eindeutig bestimmt, d.h. für  $(x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$  gilt

$$(x_0 : \dots : x_n) = (y_0 : \dots : y_n)$$

gdw

$$K(x_0, \dots, x_n) = K(y_0, \dots, y_n),$$

d. h. wenn  $\exists \lambda \in K^*$  mit

$$(x_0, \dots, x_n) = \lambda(y_0, \dots, y_n).$$

## Unterräume eines projektiven Raums

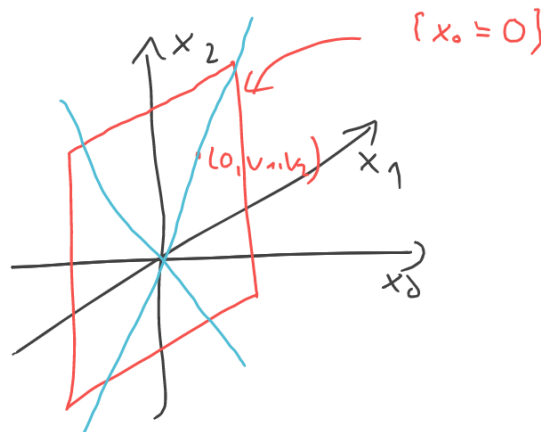
**Beispiel 2.1.1.**  $V = \mathbb{R}^3$ , die Menge der Geraden  $\mathbb{R} \cdot (0, v_1, v_2)$  mit  $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  „sieht genauso aus“ wie

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2).$$

Wir wollen

$$\left\{ \mathbb{R} \cdot (0, v_1, v_2) \mid (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \right\}$$

als projektiven Unterraum erklären.



**Definition.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$ . Wir nennen  $Z$  einen projektiven Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$ , falls es einen  $K$ -Untervektorraum  $W \leq V$  gibt mit  $Z = \mathbb{P}(W)$ . Wir nennen  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  eine

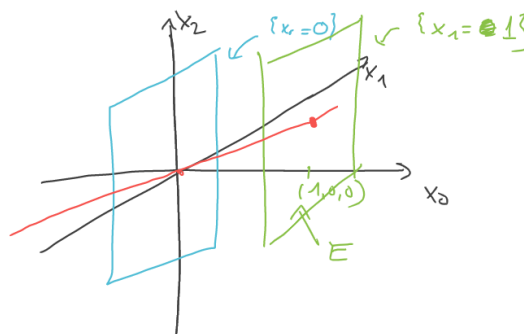
- (projektive) Gerade, wenn  $\dim Z = 1$ ,
- (projektive) Ebene, wenn  $\dim Z = 2$ ,
- (projektive) Hyperebene, wenn  $\dim Z = \dim(\mathbb{P}(V)) - 1$ .

**Bemerkung.** Ist  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  ein projektiver Unterraum mit  $Z = \mathbb{P}(W)$  für einen Untervektorraum  $W \leq V$ , so ist

$$W = \bigcup_{p \in Z} p$$

Vereinigung von Geraden in  $Z$ .

Zurück zum obigen Beispiel:  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $W = \{ (0, x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $Z = \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$  ein projektiver Unterraum. Was bleibt übrig, wenn wir  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathbb{P}(W)$  betrachten?



$\mathbb{P}(W)$ : Geraden, die in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene enthalten sind. Betrachte die affine Ebene

$$E = \left\{ (1, x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Sei  $L \in \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$ . Dann gibt es genau einen Schnittpunkt  $L \cap E$ . Die Abbildung

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W) \rightarrow E \cong \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \\ \text{als affiner Raum über } \mathbb{R} \\ L \mapsto L \cap E \end{array}$$

ist bijektiv.

### Allgemein:

Sei  $K$  ein Körper und betrachte im  $K^{n+1}$  den Untervektorraum

$$W := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \mid x_0 = 0 \right\}.$$

Dann ist  $H := \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}_n(K)$  eine (projektive) Hyperebene. Falls

$$(y_0 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}_n(K) \setminus H,$$

dann ist  $y_0 \neq 0$ , also ist

$$(y_0 : \dots : y_n) = \left( 1 : \frac{y_1}{y_0} : \dots : \frac{y_n}{y_0} \right)$$

von der Form  $(1 : x_1 : \dots : x_n)$  mit  $x_1, \dots, x_n \in K$ . Zwei Tupel  $(x_1, \dots, x_n) \neq (x'_1, \dots, x'_n) \in K^n$  induzieren unterschiedliche Projektive Punkte im  $\mathbb{P}_n(K)$ .

$$(1 : x_1 : \dots : x_n) \neq (1 : x'_1 : \dots : x'_n) \in \mathbb{P}_n(K).$$

Aus

$$(1, x_1, \dots, x_n) = \lambda(1, x'_1, \dots, x'_n)$$

folgt  $\lambda = 1$ .

Wir erhalten eine Bijektion

$$\begin{aligned} \phi: K^n &\rightarrow \mathbb{P}_n(K) \setminus H \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n) \end{aligned}$$

und damit eine Einbettung

$$\begin{aligned} \iota: K^n &\rightarrow \mathbb{P}_n(K) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n), \end{aligned}$$

die wir kanonische Einbettung des  $K^n$  in den  $\mathbb{P}_n(K)$  nennen.

### Dimensionsformel als nächstes Ziel

**Lemma 2.1.1.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $(Z_i)_{i \in I}$  eine Familie projektiver Unterräume von  $\mathbb{P}(V)$ ,  $i \in I$  gibt es eine Familie projektiver Unterräume von  $\mathbb{P}(V)$ . Dann ist  $\bigcap_{i \in I} Z_i$  in projektiver Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$ .

*Beweis.* Zu jedem  $Z_i \subseteq \mathbb{P}(V)$ ,  $i \in I$ , gibt es einen  $K$ -Untervektorraum  $W_i \subseteq V$  mit  $Z_i = \mathbb{P}(W_i)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} Z_i &= \bigcap_{i \in I} \{ L \subseteq V \mid \text{Gerade mit } L \subseteq W_i \} \\ &= \bigcap_{i \in I} \{ L \subseteq V \mid \text{Gerade } L \text{ mit } L \subseteq \underbrace{\bigcap_{i \in I} W_i}_{K\text{-Untervektorraum}} \} \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right) \end{aligned} \quad \square$$

**Beispiel 2.1.1.**  $V = \mathbb{R}^3$ , also  $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  die projektive Ebene über  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \iota: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\ (x_1, x_2) &\mapsto (1 : x_1 : x_2) \end{aligned}$$

kanonische Einbettung. Betrachte die projektiven Geraden

$$Z_1 = \{ (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \mid x_1 = 0 \} = \mathbb{P}(W_1)$$



mit

$$W_1 = \left\{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \right\}$$

und  $Z_2 = \mathbb{P}(W_2)$  ist

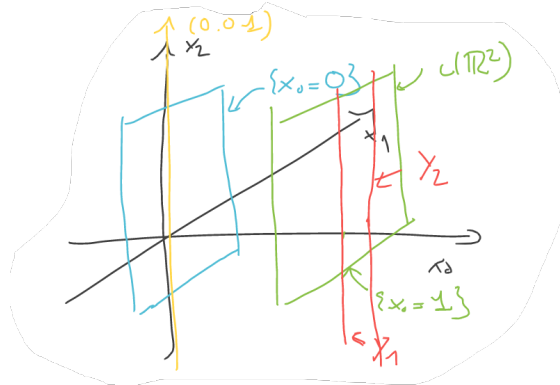
$$W_2 = \left\{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_0 = x_1 \right\}.$$

Seien  $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  die affinen Geraden gegeben durch

$$Y_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \right\}$$

$$Y_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1 \right\}.$$

Dann ist  $Z_1 = \iota(Y_1) \cup \{ (0 : 0 : 1) \}$  und  $Z_2 = \iota(Y_2) \cup \{ (0 : 0 : 1) \}$ . Es ist  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ . ( $Y_1, Y_2$  sind parallele Geraden), aber  $Z_1 \cap Z_2 = \{ (0 : 0 : 1) \}$ . „Wir sagen auch, die Geraden  $Z_1, Z_2$  schneiden sich in dem unendlich fernen Punkt  $(0 : 0 : 1)$ “.



**Bemerkung.** Die Vereinigung von projektiven Unterräumen eines projektiven Raumes  $\dim(V)$  ist im Allgemeinen selbst kein projektiver Unterraum.

**Frage.** Seien  $Z_i, i \in I$  projektive Unterräume von  $\mathbb{P}(V)$ . Finde den kleinsten projektiven Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$ , der  $\bigcup_{i \in I} Z_i$  enthält.

**Definition.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $Z_i, i \in I$  projektive Unterräume von  $\mathbb{P}(V)$ . Wir definieren den Verbindungsraum

$$\bigvee_{i \in I} Z_i := \bigcap_{\substack{Y \subseteq \mathbb{P}(V) \\ \text{proj. Unterraum} \\ \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq Y}} Y.$$

**Bemerkung.**  $\bigvee_{i \in I} Z_i$  ist der kleinste projektive Unterraum  $Y$  von  $\mathbb{P}(V)$  mit  $\bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq Y$ .

**Lemma 2.1.2.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $W_i, i \in I$  Untervektorräume von  $V$ . Dann gilt

$$\bigvee_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}\left(\sum_{i \in I} W_i\right).$$

*Beweis.* Es ist

$$\bigcup_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) \subseteq \mathbb{P}\left(\sum_{i \in I} W_i\right).$$

Sei  $Y = \mathbb{P}(W)$  ein projektiver Unterraum mit

$$\bigcup_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) \subseteq Y$$

wobei  $W \subseteq V$  ein  $K$ -Untervektorraum ist. Dann gilt

$$W_i = \bigcup_{p \in \mathbb{P}(W_i)} p \subseteq \bigcup_{p \in Y} p = W,$$

also  $W_i \subseteq W \quad \forall i \in I$ .  $W$  ist  $K$ -Untervektorraum, also gilt dann auch  $\sum_{i \in I} W_i \subseteq W$  und

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(\sum_{i \in I} W_i\right)}_{\supseteq \mathbb{P}(W_i)} \subseteq \mathbb{P}(W). \quad \square$$

**Vorlesung 11**

Fr 29.05. 10:15

Im Beispiel 2.1.1 haben wir angedeutet, dass sich zwei Geraden im  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  immer schneiden. Ganz allgemein gilt folgender Satz.

**Satz 2.1.3 (Dimensionsformel).** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$  projektive Unterräume. Dann gilt

$$\dim Z_1 \vee Z_2 = \dim Z_1 + \dim Z_2 - \dim(Z_1 \cap Z_2).$$

Falls  $\dim Z_1 + \dim Z_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$ , dann gilt  $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$ .

*Beweis.* Sei  $Z_i = \mathbb{P}(W_i)$ ,  $1 \leq i \leq 2$  mit  $W_1, W_2 \leq V$   $K$ -Untervektorräume. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \dim(Z_1 \vee Z_2) &= \dim(\mathbb{P}(W_1 + W_2)) \\ &\stackrel{\text{Lemma 2.1.2}}{=} \dim_K(W_1 + W_2) - 1 \\ &= \dim_K W_1 + \dim_K W_2 - \dim_K W_1 \cap W_2 \\ &\stackrel{\text{Dimensionsformel für Untervektorräume aus der AGLA I}}{=} (\dim_K(W_1) - 1) + (\dim_K(W_2) - 1) - (\dim_K(W_1 \cap W_2) - 1) \\ &= \dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) - \underbrace{\dim \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)}_{=\mathbb{P}(W_1 \cap W_2)} \\ &\stackrel{\text{Beweis von Lemma 2.1.1}}{=} \dim Z_1 + \dim Z_2 - \dim Z_1 \cap Z_2. \end{aligned}$$

Ist

$$\dim Z_1 + \dim Z_2 \geq \dim(\mathbb{P}(V)) \leq \dim(Z_1 \vee Z_2)$$

dann gilt  $\dim(Z_1 \cap Z_2) \geq 0$ , also  $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$ . □

Datei 19:  
Projektive  
Abbildungen

**§2.2 Projektive Abbildungen**

Sei  $K$  ein Körper,  $V, W$   $K$ -Vektorraum und  $F: V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung.

**Frage.** Unter welchen Voraussetzungen induziert  $F$  eine Abbildung  $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ ?

Wir wollen eine Abbildung  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  definieren durch

$$K \cdot v \mapsto \underbrace{K \cdot F(v)}_{F(K \cdot v)}$$

für  $v \in V \setminus \{0\}$ .  $K \cdot F(v)$  ist ein wohldefiniertes Element in  $\mathbb{P}(W)$  gdw  $F(v) \neq 0$ , d. h. wir müssen  $F$  *injektiv* voraussetzen.

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper  $V, W$   $K$ -Vektorräume. Wir nennen eine Abbildung

$$f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$$

*projektiv*, wenn es eine injektive lineare Abbildung  $F: V \rightarrow W$  gibt mit

$$f(K \cdot v) = K \cdot F(v) \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

Schreibe  $f = \mathbb{P}(F)$ . Ist die projektive Abbildung  $f$  bijektiv, so nennen wir  $f$  *Projektivität*.

**Bemerkung.** Eine projektive Abbildung  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  ist immer injektiv.

**Beispiel.** Für  $m \geq n$  betrachte die Einbettung

$$\begin{aligned} F: K^{n+1} &\hookrightarrow K^{m+1} \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0, \dots, x_n, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

$F$  induziert eine projektive Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{P}_n(K) &\rightarrow \mathbb{P}_m(K) \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto (x_0 : \dots : x_n : 0 : \dots : 0). \end{aligned}$$

Wir nennen  $f$  die kanonische Einbettung des  $\mathbb{P}_n(K)$  in den  $\mathbb{P}_m(K)$ .

$V = \mathbb{R}^3$ ,  $\ell_0, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$  linear unabhängige Linearformen in  $x_0, x_1, x_2$ , d. h.

$$\ell_i(x_0, x_1, x_2) = \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} x_j$$

mit  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R} \forall i, j$  und  $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$ . Dann ist  $f: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (\ell_0(\underline{x}) : \ell_1(\underline{x}) : \ell_2(\underline{x}))$  eine Projektivität der projektiven Ebene über  $\mathbb{R}$ . Als zugehörige lineare Abbildung können wir z. B.

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\underbrace{x_0, x_1, x_2}_{\underline{x}}) &\mapsto (\ell_0(\underline{x}), \ell_1(\underline{x}), \ell_2(\underline{x})) \end{aligned}$$

wählen. Die Abbildung

$$F: (\underbrace{x_0, x_1, x_2}_{\underline{x}}) \mapsto (5\ell_0(\underline{x}), 5\ell_1(\underline{x}), 5\ell_2(\underline{x}))$$

induziert die gleiche projektive

$$f = \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F').$$

**Allgemein:**

Sei  $K$  ein Körper,  $V, W$   $K$ -Vektorräume,  $F: V \rightarrow W$  eine injektive lineare Abbildung und  $\lambda \in K^\star$ . Dann ist

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\lambda F).$$

**Frage.** Gibt es „noch mehr“ lineare Abbildungen  $G: V \rightarrow W$  mit  $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(F)$ ?

**Lemma 2.2.1.** Notation wie oben. Seien  $F, G: V \rightarrow W$  lineare injektive Abbildungen mit  $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(G)$ . Dann ist  $G = \lambda F$  für ein  $\lambda \in K^\star$ .

*Beweis.* Sei  $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(G)$  und  $v_0 \in V \setminus \{0\}$ . Dann gilt

$$K \cdot F(v_0) = \mathbb{P}(F)(Kv_0) = \mathbb{P}(G)(K \cdot v_0) = K \cdot G(v_0),$$

also  $\exists \lambda \in K^\star$  mit  $G(v_0) = \lambda F(v_0)$ . Sei  $v \in V \setminus \{0\}$ . Wir wollen zeigen, dass gilt

$$G(v) = \lambda F(v).$$

Fall a)  $v = \alpha v_0$  mit  $\alpha \in K$ . Dann

$$G(v) = \alpha G(v_0) = \alpha \lambda F(v_0) = \lambda F(v).$$

Fall b)  $v$  und  $v_0$  sind linear unabhängig. Sei

$$G(v) = \mu F(v) \quad \mu \in K^\star$$

und

$$G(v + v_0) = \nu F(v + v_0) \quad \nu \in K^\star.$$

$G$  und  $F$  sind linear, also gilt

$$\begin{aligned} 0 &= G(v + v_0) - G(v) - G(v_0) \\ &= \underbrace{\nu F(v + v_0)}_{F(v) + F(v_0)} - \mu F(v) - \lambda F(v_0) \\ 0 &= \underbrace{(\nu - \mu)}_{=0} F(v) + \underbrace{(\nu - \lambda)}_{=0} F(v_0). \end{aligned}$$

$F$  ist injektiv, also sind  $F(v), F(v_0)$  linear unabhängig. Es folgt

$$\nu - \mu = \nu - \lambda = 0$$

und insbesondere  $\mu = \lambda$  d. h.

$$G(v) = \lambda F(v) \quad \forall v \in V.$$

□

**Bemerkung.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume und  $F$  eine nicht notwendigerweise injektive lineare Abbildung

$$F: V \rightarrow W.$$

Dann ist  $F(K \cdot v)$  für  $v \in V$  genau dann eine Gerade in  $W$  wenn  $F(v) \neq 0$ . Damit induziert  $F$  eine Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{P}(V) \setminus Z &\rightarrow \mathbb{P}(W) \\ K \cdot v &\mapsto K \cdot F(v) \end{aligned}$$

mit  $Z = \mathbb{P}(\text{Ker } F)$ .

**Beispiel.** Die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_0, x_1, x_2) &\mapsto (x_0, x_1) \end{aligned}$$

induziert die Abbildung

$$\begin{aligned} p: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \setminus \{ (0 : 0 : 1) \} &\rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_0 : x_1). \end{aligned}$$

**Erinnerung (Beschreibung von affinen Abbildungen in der affinen Geometrie).**

Seien  $X, Y$  affine Räume über einem Körper  $K$ ,  $\dim(X) = n$  und  $p_0, \dots, p_n$  affin unabhängige Punkte  $X$ . Seien  $q_0, \dots, q_n \in Y$ . Dann gibt es genau eine affine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit

$$f(p_i) = q_i \quad 0 \leq i \leq n.$$

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume. Auf wie vielen „unabhängigen“ Punkten  $p_i \in \mathbb{P}(V)$  muss man Bildpunkte  $q_i \in \mathbb{P}(W)$  vorgeben, s. d. eine eindeutig bestimmte projektive Abbildung

$$f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$$

mit  $f(p_i) = q_i \forall i$  besteht.

**Beispiel.**  $V = K^{n+1}$ . Sei

$$\begin{aligned} p_0 &= (1 : 0 : \dots : 0) \\ p_1 &= (0 : 1 : \dots : 0) \\ &\vdots \\ p_n &= (0 : 0 : \dots : 1) \end{aligned}$$

und  $W = V$ ,  $q_i = p_i \quad \forall 0 \leq i \leq n$ . Seien  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K^*$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f_{(\lambda_0, \dots, \lambda_n)}: \mathbb{P}_n(K) &\rightarrow \mathbb{P}_n(K) \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto (\lambda_0 x_0 : \dots : \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

eine Projektivität mit

$$f_{(\lambda_0, \dots, \lambda_n)}(p_i) = q_i$$

für  $0 \leq i \leq n$ , aber unterschiedliche Tupel  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ ,  $(\mu_0, \dots, \mu_n)$  können unterschiedliche Projektivitäten  $f_{(\lambda_0, \dots, \lambda_n)}$ ,  $f_{(\mu_0, \dots, \mu_n)}$  induzieren. Z. B. ist

$$(\lambda_0 : \dots : \lambda_n) = f_{(\lambda_0, \dots, \lambda_n)}(1 : \dots : 1) \stackrel{?}{=} f_{(\mu_0, \dots, \mu_n)}(1 : \dots : 1) = (\mu_0, \dots, \mu_n).$$

Das gilt genau dann, wenn  $\exists a \in K^*$  mit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = a(\mu_0, \dots, \mu_n)$ .

**Idee.** Wir legen  $f$  fest durch die Bilder der  $n+2$  Punkte

$$\begin{array}{ccc} q_0, \dots, q_n & & \\ \parallel & & \parallel \\ f(p_0) & & f(p_n) \end{array}$$

und  $f((1 : \dots : 1))$ .

**Definition.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $p_0, \dots, p_r \in \mathbb{P}(V)$ . Wir nennen das Tupel  $(p_0, \dots, p_r)$  *projektiv unabhängig*, wenn es *linear unabhängige* Vektoren  $v_0, \dots, v_r \in V$  gibt mit  $p_i = Kv_i$ ,  $0 \leq i \leq r$ .

Datei 20:  
Projektive  
Basis

**Bemerkungen.** Das Tupel  $(p_0, \dots, p_r)$  ist projektiv unabhängig gdw  $\dim(p_0 \vee \dots \vee p_r) = r$ .

**Beispiel.** Im  $\mathbb{P}_n(K)$  sind die Punkte

$$\begin{aligned} p_0 &= (1 : 0 : \dots : 0) \\ &\vdots \\ p_n &= (0 : 0 : \dots : 1) \end{aligned}$$

projektiv unabhängig.

**Definition.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n$  und  $p_0, \dots, p_n, p_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ . Wir nennen das  $(n+2)$ -Tupel  $(p_0, \dots, p_{n+1})$  *projektive Basis* von  $\mathbb{P}(V)$ , wenn je  $n+1$  Punkte davon projektiv unabhängig sind.

**Beispiel.**  $V = K^{n+1}$ . Dann sind

$$\begin{aligned} p_0 &= (1 : 0 : \dots : 0) \\ &\vdots \\ p_n &= (0 : 0 : \dots : 1) \\ p_{n+1} &= (1 : \dots : 1) \end{aligned}$$

eine projektive Basis der  $\mathbb{P}_n(K)$ . Wir nennen  $p_0, \dots, p_{n+1}$  auch kanonische projektive Basis des  $\mathbb{P}(n)K$ .

**Lemma 2.2.2.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $p_0, \dots, p_{n+1}$  eine projektive Basis des  $\mathbb{P}(V)$ . Dann gibt es eine Basis  $v_0, \dots, v_n$  von  $V$ , sodass gilt

$$\begin{aligned} p_i &= K v_i \quad 0 \leq i \leq n \\ p_{n+1} &= K(v_0 + \dots + v_n). \end{aligned}$$

*Beweis.*  $p_0, \dots, p_n$  sind projektiv unabhängig, also gibt es eine Basis  $w_0, \dots, w_n$  des  $K$ -Vektorraums  $V$  mit  $p_i = K \cdot w_i$   $0 \leq i \leq n$ . Sei  $p_{n+1} = K \cdot w$  mit  $w \in V \setminus \{0\}$ . Dann  $\exists \lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$  mit

$$w = \lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_n w_n. \quad \square$$

**Behauptung.**  $\lambda_i \neq 0$  für  $0 \leq i \leq n$ .

Denn angenommen  $\lambda_0 = 0$ . Dann sind die Vektoren

$$w_0, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_n, w$$

linear abhängig  $\nrightarrow$  zu

$$p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n, p_{n+1}$$

projektiv unabhängig. Wähle nun  $v_i = \lambda_i w_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ .



**Vorlesung 12**

Di 02.06. 10:15

Eine Rechtfertigung der Definition des Begriffs „projektive Basis“:

**Satz 2.2.3.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume mit  $\dim(V) = \dim(W) = n$  und  $(p_0, \dots, p_{n+1})$  bzw.  $q_0, \dots, q_{n+1}$  projektive Basen von  $\mathbb{P}(V)$  bzw.  $\mathbb{P}(W)$ .

Dann gibt es genau eine Projektivität

$$f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$$

mit  $f(p_i) = q_i$ ,  $0 \leq i \leq n+1$ .

**Bemerkung.** Ist  $\dim(V) = \dim(W)$ , dann ist jede projektive Abbildung  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  eine Projektivität.

*Beweis von Satz 2.2.3.* Wähle nach Lemma 2.2.2 Basen  $v_0, \dots, v_n$  von  $V$  und  $w_0, \dots, w_n$  von  $W$  mit

$$\begin{aligned} p_i &= K v_i \quad 0 \leq i \leq n \\ p_{n+1} &= K(v_0 + \dots + v_n) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} q_i &= K w_i \quad 0 \leq i \leq n \\ q_{n+1} &= K(w_0 + \dots + w_n). \end{aligned}$$

Sei  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  eine projektive Abbildung mit  $f(p_i) = q_i$ ,  $0 \leq i \leq n+1$  und  $F: V \rightarrow W$  eine zugehörige lineare Abbildung. Aus  $f(p_i) = q_i$  folgt für  $0 \leq i \leq n$

$$f(p_i) = K \cdot F(v_i) = q_i = K \cdot w_i,$$

also  $\exists \lambda_0, \dots, \lambda_n \in K^*$  mit

$$F(v_i) = \lambda_i w_i \quad 0 \leq i \leq n.$$

Aus

$$K \cdot F(v_0 + \dots + v_n) = f(p_{n+1}) = q_{n+1} = K \cdot (w_0 + \dots + w_n)$$

erhalten wir  $\lambda_{n+1} \in K^*$  mit

$$\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_n w_n = F(v_0 + \dots + v_n) = \lambda_{n+1} (w_0 + \dots + w_n).$$

Die Vektoren  $w_0, \dots, w_n \in W$  sind linear unabhängig, also ist

$$\lambda_{n+1} = \lambda_0 = \dots = \lambda_n.$$

Damit ist  $F: V \rightarrow W$  als lineare Abbildung bis auf Skalieren mit  $\lambda_{n+1} \in K^*$  eindeutig bestimmt und damit  $f = \mathbb{P}(F)$  eindeutig bestimmt. Umgekehrt ist die Abbildung  $F: W \rightarrow V$  gegeben durch  $v_i \mapsto w_i$ ,  $0 \leq i \leq n$  ein Isomorphismus und  $\mathbb{P}(F): \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  hat die Eigenschaft, dass

$$\mathbb{P}(F)(p_i) = q_i \quad 0 \leq i \leq n+1. \quad \square$$

**Frage.** Können wir Projektivitäten durch Matrizen beschreiben (ähnlich wie wir es für affine Abbildungen zwischen affinen Räumen gesehen haben)?

Datei 21:  
Projektivitäten  
beschrieben  
durch  
Matrizen

→ Wir benötigen die Wahl eines Koordinatensystems.

Sei  $V$  ein  $n+1$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum mit Basis  $v_0, v_1, \dots, v_n$ . Dann ist

$$\begin{aligned} q_i &= K v_i \quad 0 \leq i \leq n \\ q_{n+1} &= K(v_0 + \dots + v_n). \end{aligned}$$

eine projektive Basis von  $\mathbb{P}(V)$ . Nach Satz 2.2.3 gibt es eine eindeutig bestimmte Projektivität

$$\varphi: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}(V)$$

mit

$$\phi(p_i) = q_i \quad 0 \leq i \leq n+1,$$

wobei

$$\begin{aligned} p_0 &= (1 : \dots : 0) \\ &\vdots \\ p_n &= (0 : \dots : 1) \\ p_{n+1} &= (1 : \dots : 1) \end{aligned}$$

die kanonische Basis der  $\mathbb{P}_n(K)$  ist.

**Definition.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $n = \dim \mathbb{P}(V)$ . Unter einem Koordinatensystem von  $\mathbb{P}(V)$  verstehen wir eine Projektivität

$$f: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}(V).$$

Ist  $f(x_0 : \dots : x_n) = p \in \mathbb{P}(V)$ , dann nennen wir  $(x_0 : \dots : x_n)$  einen homogenen Koordinatenvektor von  $p$ .

**Beschreibung von Projektivitäten durch Matrizen**

**Idee.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume mit  $\dim(V) = n + 1$  und

$$f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$$

eine Projektivität. Wähle Koordinatensysteme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_n(K) & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}_n(K)X \\ \varphi \downarrow & \circlearrowleft & \psi^{-1} \downarrow \psi \\ \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}(Y) \end{array}$$

Dann ist  $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  Projektivität.

**Ziel.** Beschreibe  $g$  mit Hilfe der Sprache von Matrizen.

Sei

$$G: K^{n+1} \rightarrow K^{n+1}$$

ein Isomorphismus mit  $g = \mathbb{P}(G)$  ( $G$  ist bis auf Multiplikation mit Skalaren  $\neq 0$  eindeutig bestimmt).

Dann besteht eine Matrix  $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$  mit  $G(\underline{x}) = \underline{x}$  für alle

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in K^{n+1}.$$

Sei  $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ . Es gilt

$$g(x_0 : \dots : x_n) = ((a_{00}x_0 + \dots + a_{0n}x_n) : (a_{10}x_0 + \dots + a_{1n}x_n) : \dots : (a_{n0}x_0 + \dots + a_{nn}x_n)).$$

**Frage.** Wie verhält sich  $g$  eingeschränkt auf  $\iota(K^n)$ ?

Wir haben die kanonische Einbettung als

$$\begin{aligned} \iota: K^n &\rightarrow \mathbb{P}_n(K) \setminus H \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n), \end{aligned}$$

definiert, mit

$$H = \{ (y_0 : y_1 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid y_0 = 0 \}.$$

Es gilt für  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ .

$$g(\iota(x_1, \dots, x_n)) = (a_{00} + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n : \underbrace{a_{10} + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n}_{\neq 0} : \dots : a_{n0} + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n),$$

also  $g(\iota(x_1, \dots, x_n)) \in \iota(K^n)$  genau dann, wenn

$$a_{00} + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n \neq 0 \quad (2.1)$$

und in dem Fall ist

$$g(\iota(x_1, \dots, x_n)) = \left( \frac{a_{10} + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{00} + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n}, \dots, \frac{a_{n0} + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n}{a_{00} + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n} \right).$$

**Bemerkung.**  $g$  induziert eine Abbildung

$$g|_{\iota(K^n)}: \iota(K^n) \rightarrow \iota(K^n) \subseteq \mathbb{P}_n(K)$$

genau dann, wenn

$$a_{01} = \dots = a_{0n} = 0.$$

Datei 22:  
Zentralpro-  
jektionen

## Zentralprojektionen in der projektiven Geometrie

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $W, W_1, W_2 \subseteq V$   $K$ -Untervektorräume mit

$$V = W \oplus W_1 = W \oplus W_2,$$

dann sind  $Z = \mathbb{P}(W)$ ,  $Z_1 = \mathbb{P}(W_1)$  und  $Z_2 = \mathbb{P}(W_2)$  projektive Unterräume von  $\mathbb{P}(V)$  mit

- i)  $Z \cap Z_1 = Z \cap Z_2 = \emptyset$  und
- ii)  $Z \vee Z_1 = Z \vee Z_2 = \mathbb{P}(V)$ .

Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} f: Z_1 &\rightarrow Z_2 \\ p &\mapsto (Z \vee p) \cap Z_2 \end{aligned}$$

und nennen  $f$  *Zentralprojektion*.

**Behauptung.** Für  $p \in Z_1$  gilt

$$\#((Z \vee p) \cap Z_2) = 1.$$

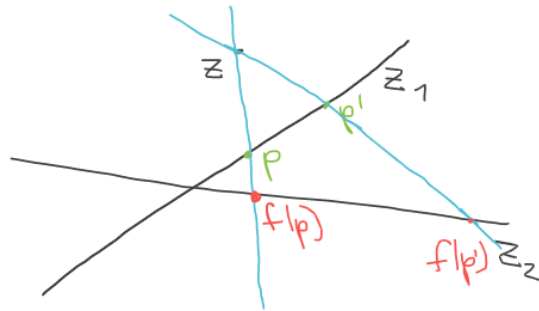
Denn wir berechnen

$$\dim((Z \vee p) \cap Z_2)$$

durch

$$\begin{aligned} \dim((Z \vee p) \cap Z_2) &= \dim(Z \vee p) + \dim Z_2 - \dim(Z \vee p \vee Z_2) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Dimensionsformel} \\ &= \dim(Z \vee p) + \dim Z_2 - \dim \mathbb{P}(V) \\ &= \dim Z + 1 + \dim Z_2 - \dim \mathbb{P}(V) \\ &= 1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

also schneiden  $Z \vee p$  und  $Z_2$  sich in genau einem Punkt.



**Lemma 2.2.4.** Die oben definierte Zentralprojektion  $f$  ist eine Projektivität.

*Beweis.* Notation wie oben. Betrachte die Projektion von  $K$ -Vektorräumen

$$\begin{aligned} P_W: V = W \oplus W_2 &\rightarrow W_2 \\ w + w_2 &\mapsto w_2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$P_W|_{W_1}: W_1 \rightarrow W_2$$

ein Isomorphismus (siehe 1.4). Also erhalten wir eine Projektivität

$$\mathbb{P}(P_W|_{W_1}): \mathbb{P}(W_1) \rightarrow \mathbb{P}(W_2).$$

$\parallel \qquad \qquad \parallel$   
 $Z_1 \qquad \qquad Z_2$

Sei  $p \in \mathbb{P}(W_1)$ . Wir berechnen  $\mathbb{P}(P_W|_{W_1})(p)$ . Sei dazu  $p = K \cdot w_1$  mit  $w_1 \in W_1 \setminus \{0\}$ . Schreibe  $w_1 = w + w_2$  mit  $w \in W$ ,  $w_2 \in W_2$ . Dann ist

$$\mathbb{P}(P_W|_{W_1})(p) = K \cdot w_2 \in Z_2.$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned}
 (Z \vee p) \cap Z_2 &= \mathbb{P}(W + K \cdot w_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \\
 &= \mathbb{P}(W + K(w + w_2)) \cap \mathbb{P}(W_2) \\
 &= \mathbb{P}(W + K \cdot w_2) \cap \mathbb{P}(W_2) \\
 &= \mathbb{P}((W + K \cdot w_2) \cap W_2) \\
 &= \mathbb{P}(K \cdot W_2) = K \cdot w_2. \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad W \cap W_2 = \{0\}
 \end{aligned}$$

Also ist

$$f(p) = K \cdot w_2 = \mathbb{P}(P_W|_{W_1})(p).$$

und damit

$$f = \mathbb{P}(P_W|_{W_1})$$

eine Projektivität.

□

## Vorlesung 13

Fr 05.06. 10:15

## §2.3 Zusammenhänge zwischen affiner und projektiver Geometrie

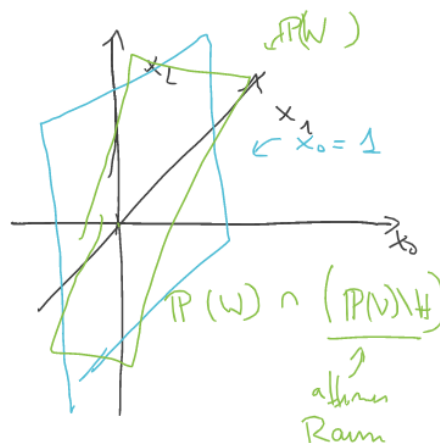
**Motivation.** Im  $\mathbb{P}_n(K)$  haben wir die kanonische Einbettung

$$\begin{aligned}\iota: K^n &\rightarrow \mathbb{P}_n(K) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)\end{aligned}$$

definiert und gesehen, dass  $K^n$  unter  $\iota$  bijektiv auf  $\mathbb{P}_n(K) \setminus \{x_0 = 0\}$  abgebildet wird.

**Frage.** Entferne in einem allgemeinen projektiven Raum  $\mathbb{P}(V)$  eine Hyperebene  $H$

- Inwiefern kann man  $\mathbb{P}(V) \setminus H$  als *affinen Raum* auffassen?
- Inwiefern übertragen sich andere Strukturen, z. B. projektive Unterräume?



**Satz 2.3.1.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $H \subseteq \mathbb{P}(V)$  eine Hyperebene. Setze  $X := \mathbb{P}(V) \setminus H$ . Dann gibt es einen  $K$ -Vektorraum  $T(X)$  und eine einfach transitive Gruppenoperation

$$\tau: T(X) \rightarrow \text{Bij}(X),$$

sodass  $(X, T(X), \tau)$  ein affiner Raum ist mit folgenden Eigenschaften:

- a) Ist  $Z \in \mathbb{P}(V)$  ein projektiver Unterraum mit  $Z \not\subseteq H$ . Dann ist  $Z \cap X \subseteq X$  ein affiner Unterraum von  $X$  und es gilt

$$\begin{aligned}\dim(Z \cap X) &= \dim Z \\ \dim(Z \cap H) &= \dim Z - 1.\end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\alpha: \left\{ \begin{array}{l} \text{proj. Unterräume von } \mathbb{P}(V), \text{ die} \\ \text{nicht in } H \text{ enthalten sind} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{nicht-leere affine Unterräume von} \\ X \end{array} \right\}$$

$$Z \mapsto Z \cap X$$

ist bijektiv.

- b) Sei  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  eine Projektivität mit  $f(H) = H$ . Dann ist  $f|_X: X \rightarrow X$  eine Affinität. Die Abbildung

$$\beta: \{ \text{Projektivitäten } f \text{ von } \mathbb{P}(V) \text{ mit } f(H) = H \} \rightarrow \{ \text{Affinitäten von } X \}$$

$$f \mapsto f|_X$$

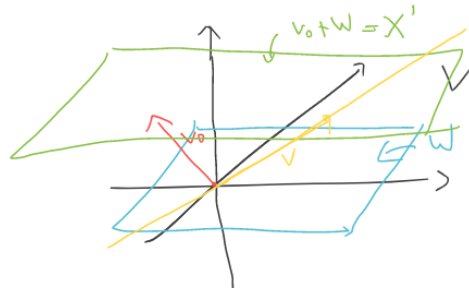
ist eine Bijektion.

*Beweis.* Konstruktion des affinen Raumes  $(X, T(X), \tau)$  Sei  $H = \mathbb{P}(W)$  mit  $W \subseteq V$  ein  $K$ -Vektorraum. Wähle  $v_0 \in V \setminus W$  und definiere den affinen Unterraum

$$X' := V_0 + W \subseteq V$$

mit  $(V, V, \tau)$  als affiner Raum.

$\uparrow$   
Translation



Wir definieren eine Abbildung

$$\sigma: X' \rightarrow X$$

$$X' \ni v \mapsto K \cdot v.$$

Für  $x \in X'$  ist  $K \cdot v \notin \mathbb{P}(W) = H$ , da  $v \in W$ . Also ist  $\sigma: X' \rightarrow X$  eine wohldefinierte Abbildung. Wir zeigen, dass  $\sigma$  eine Bijektion ist.

$\sigma$  ist injektiv: Seien  $v, v' \in X'$  mit  $K \cdot v = K \cdot v'$ . Dann wären  $v$  und  $v'$  linear abhängig, aber  $X'$  enthält keine linear abhängigen Vektoren.



$\sigma$  ist surjektiv Sei  $p \in \mathbb{P}(V) \setminus H$  gegeben durch  $p = K \cdot v$  mit  $v \in V \setminus W$ .

**Behauptung.** Dann ist

$$p \cap X' \neq \emptyset.$$

Verwende die Dimensionsformel für affine Unterräume. Falls  $X' \cap p = \emptyset$ , dann

$$\begin{aligned} \dim(X' \vee p) &= \dim X' + \dim p - \dim(T(X') \cap T(p)) + 1 \\ &\stackrel{\parallel}{\underset{\dim V}{=}} \dim(V) - 1 + 1 - \dim(\underbrace{W \cap K \cdot v}_{=\{0\}}) + 1 \\ &= \dim V - 0 + 1 \quad \nless. \end{aligned}$$

Also ist  $p \cap X' \neq \emptyset$  und nach der Dimensionsformel für affine Unterräume folgt  $\#(p \cap X') = 1$ , und

$$p \cap X' \mapsto K \cdot (p \cap X') = p. \quad \stackrel{\parallel}{\underset{\sigma(p \cap X')}{=}}$$

**Idee.** Verwende  $\sigma$  um die Struktur von  $X'$  als affinen Raum auf  $X$  zu übertragen.

$X'$  ist ein affiner Raum  $(X', T(X'), \tilde{\tau})$  mit  $T(X') = W$  und Gruppenoperation

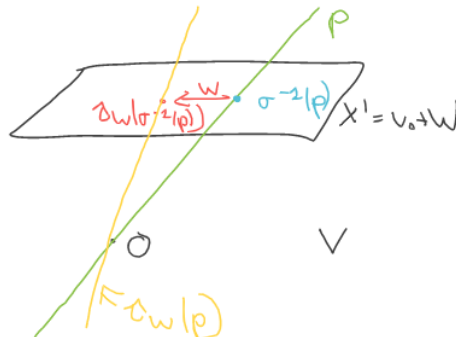
$$\begin{aligned} \tilde{\tau}: W &\mapsto \text{Bij}(X') \\ w &\mapsto \tilde{\tau}_w \\ \tilde{\tau}_w: X' &\rightarrow X' \\ x &\mapsto w + x \end{aligned}$$

Wir setzen  $T(X) = W$  und definieren eine Gruppenoperation

$$\begin{aligned} \tau: W &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ w &\mapsto \tau_w. \end{aligned}$$

durch

$$\tau_{w(p)} := \sigma \left( \tilde{\tau}_w(\underbrace{\sigma^{-1}(p)}_{\in X'}) \right).$$



Dann ist  $(X, T(X), \tau)$  affiner Raum und

$$\sigma: X' \rightarrow X$$

Affinität.

a) Sei  $Z = \mathbb{P}(U)$  projektiver Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$  mit  $U \leq V$   $K$ -Untervektorraum und  $Z \not\subseteq H$ , also  $Z \cap X \neq \emptyset$ . Dann ist  $X' \cap U$  affiner Unterraum von  $X'$  und

$$Z \cap X = \sigma(X' \cap U)$$

affiner Unterraum von  $X$ .

**Berechnung von  $\dim(Z \cap X)$  und  $\dim(Z \cap H)$**

Sei  $\dim(V) = n + 1$ . Es ist  $X' \cap U \neq \emptyset$ , also folgt von der affinen Dimensionsformel

$$n + 1 = \dim(U \vee X') = \dim U + \underbrace{\dim n}_{=n} - \dim(U \cap X').$$

Es folgt

$$\dim(U \cap X') = \dim U - 1$$

und

$$\dim(Z \cap X) = \dim(\sigma(X' \cap U)) = \dim U - 1 = \dim Z.$$

↑  
als projektiver Raum

Aus  $Z \not\subseteq H$  folgt  $Z \vee H = \mathbb{P}(V)$ . Aus der projektiven Dimensionsformel folgt

$$n = \dim Z \vee H = \dim Z + \underbrace{\dim(H)}_{=n-1} - \dim Z \cap H,$$

also

$$\dim Z \cap H = \dim Z - 1.$$

Wir wollen zeigen, das

$$\alpha: \left\{ \begin{array}{l} \text{proj. Unterräume von } \mathbb{P}(V), \text{ die} \\ \text{nicht in } H \text{ enthalten sind} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{nicht-leere affine Unterräume von} \\ X \end{array} \right\}$$

$$Z \mapsto Z \cap X$$

eine Bijektion ist. Wir konstruieren dazu eine Umkehrabbildung  $\alpha'$ . Sei  $\emptyset \neq Y \subseteq X$  affiner Unterraum und

$$Y' := \sigma^{-1}(Y).$$

Dann ist  $Y'$  affiner Unterraum von  $X'$  und

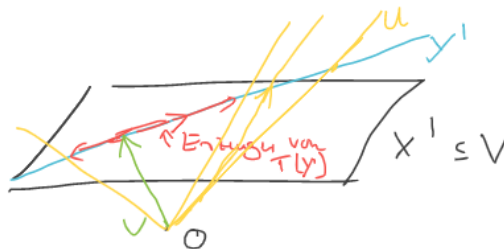
$$T(Y') \subseteq T(X') = W$$

Untervektorraum. Sei  $v \in Y'$ . Definiere

$$U := K \cdot v + T(Y').$$

Wegen  $v \in Y' \subseteq X'$  gilt sogar  $v \notin W$  und

$$U = K \cdot v \oplus T(Y').$$



Sei  $\bar{Y} := \mathbb{P}(U)$ . Dann ist  $\bar{Y}$  projektiver Unterraum von  $\mathbb{P}(V)$ . Sei

$$\alpha'(Y) := \bar{Y}.$$

Dann ist  $\alpha'$  Umkehrabbildung zu  $\alpha$ , denn

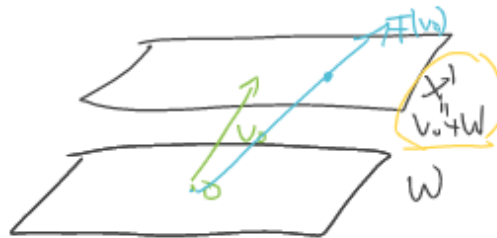
$$\alpha'(\alpha(Z)) = Z \cap X = Z$$

und

$$\alpha(\alpha'(Y)) = \bar{Y} \cap X = Y.$$

b) Sei  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  Projektivität mit  $f = \mathbb{P}(F)$  für einen Isomorphismus  $F: V \rightarrow V$ . Wir nehmen an, dass  $f(H) = H$ , also  $F(W) = W$  nach Skalieren von  $F$  können wir annehmen, dass

$$F(v_0) \in X'.$$



Es gilt dann

$$F(X') = X'.$$

**Behauptung.**  $F|_{X'}: X' \rightarrow X'$  ist Affinität mit zugehöriger linearen AB Abbildung

$$F|_W: T(X') \rightarrow T(X').$$

$\parallel$   
 $W$

denn: sind  $x_1, x_2 \in X' \subseteq V$ , dann

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F|_{x'}(x_1)F|_{X'}(x_2)} &= \overrightarrow{F(x_1)F(x_2)} \\ &= F(x_2) - F(x_1) \\ &= F(x_2 - x_1) \\ &= F(\overrightarrow{x_1x_2}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

und  $F$  ist bijektiv.

Damit ist auch

$$f|_X: X \rightarrow X$$

Affinität, denn

$$f|_X = \sigma \circ F|_{x'} \circ \sigma^{-1}.$$

Wir müssen nun zeigen, dass die Abbildung

$$\beta: \{ \text{Projektivitäten } f \text{ von } \mathbb{P}(V) \text{ mit } f(H) = H \} \rightarrow \{ \text{Affinitäten von } X \}$$

$$f \mapsto f|_X$$

eine Bijektion ist. Wir konstruieren eine Umkehrabbildung  $\beta'$ . Sei  $g: X \rightarrow X$  Affinität, mit zugehöriger linearer Abbildung

$$G: W \rightarrow W.$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$T(X) \quad T(X)$$

Wegen  $v_0 \notin W$  gilt

$$V = W \oplus K \cdot v_0.$$

Wir definieren einen Isomorphismus  $\tilde{G}: V \rightarrow V$  durch

$$\tilde{G}|_W = G$$

$$\tilde{G}(v_0) = \sigma^{-1}(g(\sigma(v_0)))$$

und setzen  $\bar{g} = \mathbb{P}(\tilde{G})$ . Dann gilt  $\bar{g}|_X = g$ ,  $\bar{g}(H) = H$  und  $\overline{f|_X} = f$ , also ist  $\beta^{-1}(g) = \bar{\beta}$  invers zu  $\beta$ .  $\square$

**Bemerkung (ohne Beweis).** Im Satz 2.3.1 haben wir gezeigt, wie man das Komplement

$$\mathbb{P}(V) \setminus H \quad H \subseteq \mathbb{P}(V) \text{ Hyperebene}$$

als affinen Raum verstehen kann. Man kann auch zeigen, dass jeder affine Raum Resultat solch einer Konstruktion ist. D. h. für einen beliebigen affinen  $(X, T(X), \tau)$  gibt es einen projektiven Raum  $\mathbb{P}(V)$ , eine Hyperebene  $H \subseteq \mathbb{P}(V)$  und eine Affinität

$$X \rightarrow \mathbb{P}(V) \setminus H,$$

wobei  $\mathbb{P}(V) \setminus H$  wie in Satz 2.3.1 als affiner Raum verstanden wird.

**Vorlesung 14**

Di 09.06. 10:15

## §2.4 Invarianten von Projektivitäten

Datei 25:  
Doppelver-  
hältnis

**Erinnerung (Das Teilverhältnis in der affinen Geometrie).**  $X$  ein affiner Raum über  $K$ ,  $p_0 \neq p_1 \in X$ . Dann ist  $(p_0, p_1)$  eine affine Basis für die affine Gerade

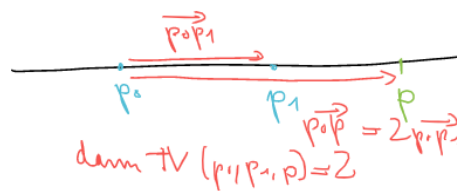
$$p_0 \vee p_1 =: Y.$$

Es gibt ein eindeutig bestimmtes Koordinatensystem

$$\varphi: K \rightarrow Y$$

mit  $\varphi(0) = p_0$ ,  $\varphi(1) = p_1$ . Für  $p \in Y$  setzen wir

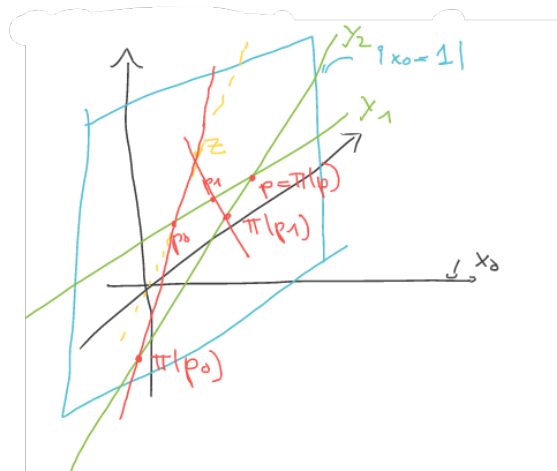
$$\text{TV}(p_0, p_1, p) = \varphi^{-1}(p).$$

**Beispiel.**

Wir können  $X$  in einen projektiven Raum  $\mathbb{P}(V)$  über  $K$  einbetten (siehe letzter Abschnitt).

**Frage.** Das Teilverhältnis bleibt mit Affinitäten invariant, gilt dies auch für Projektivitäten, nach Einbettung in einen projektiven Raum?

**Beispiel.** Zentralprojektionen  $\pi$



Im Allgemeinen wird das Teilverhältnis *nicht* unter Projektivitäten erhalten.

**Frage.** Konstruktion einer natürlichen projektiven Invarianten?

**Idee.** Wir verwenden projektive Koordinatensysteme statt affiner Koordinatensysteme.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  eine projektive Gerade. Dann ist  $(p_0, p_1, p_2)$  eine projektive Basis von  $Z$  und es besteht ein eindeutig bestimmtes Koordinatensystem

$$\mathcal{K} := \mathbb{P}_1(K) \rightarrow Z$$

mit

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(1 : 0) &= p_0 \\ \mathcal{K}(0 : 1) &= p_1 \\ \mathcal{K}(1 : 1) &= p_2.\end{aligned}$$

Sei  $p \in Z$ . Wir definieren das *Doppelverhältnis* von  $p_0, p_1, p_2, p$  als

$$\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p) := \mathcal{K}^{-1}(p) \in \mathbb{P}_1(K).$$

**Beispiel.**  $Z = \mathbb{P}_1(K)$  mit  $p_0 = (1 : 0)$ ,  $p_1 = (0 : 1)$ ,  $p_2 = (1 : 1)$ . Dann ist

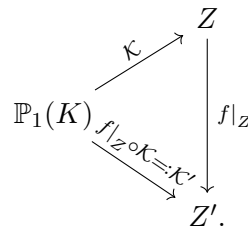
$$\text{DV}(p_0, p_1, p_2, (\lambda : \mu)) = (\lambda : \mu).$$

Das Doppelverhältnis ist invariant unter Projektivitäten:

**Satz 2.4.1.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume und  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  eine Projektivität. Seien  $p_0, p_1, p_2, p \in \mathbb{P}(V)$  Punkte, die in einer gemeinsamen Geraden enthalten sind und  $p_0, p_1, p_2$  paarweise verschieden. Dann gilt

$$\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p) = \text{DV}(f(p_0), f(p_1), f(p_2), f(p)).$$

*Beweis.* Sei  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  die Gerade mit  $p_0, p_1, p_2, p \in Z$  und  $Z' = f(Z) \subseteq \mathbb{P}(W)$ . Sei  $\mathcal{K}: \mathbb{P}_1(K) \rightarrow K$  das Koordinatensystem mit  $\mathcal{K}(1:0) = p_0$ ,  $\mathcal{K}(0:1) = p_1$ ,  $\mathcal{K}(1:1) = p_2$ .



Dann ist  $f|_Z: Z \rightarrow Z'$  Projektivität und  $\mathcal{K}' := f|_Z \circ \mathcal{K}$  eine Projektivität mit

$$\mathcal{K}'(1:0) = f(p_0)$$

$$\mathcal{K}'(0:1) = f(p_1)$$

$$\mathcal{K}'(1:1) = f(p_2).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \text{DV}(f(p_0), f(p_1), f(p_2), f(p)) &= \mathcal{K}'^{-1}(f(p)) \\ &= \mathcal{K}^{-1}(p) \\ &= \text{DV}(p_0, p_1, p_2, p). \end{aligned}$$

□

### Berechnung des Doppelverhältnisses aus homogenen Koordinaten

Sei  $K$  ein Körper und seien  $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{P}_1(K)$  paarweise verschieden und  $p_3 \in \mathbb{P}_1(K)$ . Wir nehmen an, dass  $p_0, p_1, p_2, p_3$  in homogenen Koordinaten

$$p_i = (\lambda_i : \mu_i), \quad 0 \leq i \leq 3$$

gegeben sind.

**Ziel.** Berechne  $\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3)$  aus  $\lambda_0, \dots, \lambda_3, \mu_0, \dots, \mu_3$ .

Datei 26:  
Berechnung  
Doppelver-  
hältnis



**Schritt 1**

Sei  $\mathcal{K}: \mathbb{P}_1(K) \rightarrow \mathbb{P}_1(K)$  das Koordinatensystem gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(1:0) &= p_0 \\ \mathcal{K}(0:1) &= p_1 \\ \mathcal{K}(1:1) &= p_2.\end{aligned}$$

Sei  $A: K^2 \rightarrow K^2$  ein Isomorphismus mit Matrix  $A \in \mathrm{GL}_2(K)$  und  $\mathbb{P}(A) = \mathcal{K}$ . Wir bestimmen explizit eine solche Matrix  $A$ . Aus

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in K^\star \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}$$

und

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^\star \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$$

folgt, dass es  $\rho, \rho' \in K^\star$  gibt mit

$$A = \begin{pmatrix} \rho\lambda_0 & \rho'\lambda_1 \\ \rho\mu_0 & \rho'\mu_1 \end{pmatrix}.$$

Aus  $\mathcal{K}(1:1) = p_2$  folgt

$$\left. \begin{aligned} \rho\lambda_0 + \rho'\lambda_1 &= \rho''\lambda_2 \\ \rho\mu_0 + \rho'\mu_1 &= \rho''\mu_2 \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

für ein  $\rho'' \in K^\star$ . Das System (\*) kann z. B. gelöst werden durch

$$\begin{aligned}\rho'' &= \det \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{pmatrix} \\ \rho &= \det \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \\ \rho' &= \det \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 \det \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} & \lambda_1 \det \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} \\ \mu_0 \det \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} & \mu_1 \det \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

und  $K^{-1}: \mathbb{P}_1(K) \rightarrow \mathbb{P}_1(K)$  gegebene durch  $K^{-1} = \mathbb{P}(A^{-1})$  mit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \mu_1 \det \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} & -\lambda_1 \det \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} \\ -\mu_0 \det \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} & \lambda_0 \det \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{-1}(\lambda_3 : \mu_3) &= K \cdot A^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \\ &= K \cdot \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_3 & \mu_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir formulieren das Resultat im folgenden Lemma:

**Lemma 2.4.2.** Seien  $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_1(K)$  mit  $p_0, p_1, p_2$  paarweise verschieden und

$$p_i = (\lambda_i : \mu_i), \quad 0 \leq i \leq 3 -$$

Dann gilt

$$\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \left( \det \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_0 \\ \mu_2 & \mu_0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_3 & \mu_0 \end{pmatrix} \right).$$

**Beispiel.** Seien  $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{P}_1(K)$  paarweise verschieden. Nach Lemma 2.4.2 ist

$$\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p) = (0 \quad 1)$$

genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{pmatrix} = 0$$

d. h.  $(\lambda_3 : \mu_3) = (\lambda_1 : \mu_1)$ . Wir erhalten also die Aussage zurück

$$\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p) = (0 : 1)$$

genau dann, wenn  $p_1 = p$ .

**Bemerkung.** Aus Lemma 2.4.2 können wir weitere Symmetrieeigenschaften des Doppelverhältnisses ableiten. Seien dazu  $p_0, p_1, p_2, p_3$  paarweise verschieden. Dann ist z. B.

$$\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \text{DV}(p_1, p_0, p_3, p_2),$$

denn

$$\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) = (s : t)$$

ist äquivalent zu

$$\text{DV}(p_1, p_0, p_2, p_3) = (t : s).$$

**Frage.** Sei  $n \geq 1$ ,  $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_n(K)$  in einer Geraden enthalten mit  $p_0, p_1, p_2$  paarweise verschieden und

$$p_i = (x_0^{(i)} : x_1^{(i)} : \dots : x_n^{(i)}) \quad 0 \leq i \leq 3$$

in homogenen Koordinaten. Wie können wir aus den homogenen Koordinaten  $\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3)$  berechnen?

**Idee.** Sei  $Z \subseteq \mathbb{P}_n(K)$  die projektive Gerade, die  $p_0, p_1, p_2, p_3$  enthält. Verwende eine Zentralprojektion

$$f: Z \rightarrow \mathbb{P}_1(K) \subseteq \mathbb{P}_n(K)$$

einer der projektiven Unterräume  $\mathbb{P}(\{(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \mid x_k = 0 \text{ für } k \notin \{i, j\}\})$  für  $i \neq j$

um das Problem auf den eindimensionalen Fall zurückzuführen durch

$$\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \text{DV}(f(p_0), f(p_1), f(p_2), f(p_3)).$$

Sei  $Z = \mathbb{P}(W)$  mit  $W \subseteq K^{n+1}$  2-dimensionaler  $K$ -Untervektorraum. Sei für  $i \neq j$

$$V_{ij} = \{(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \mid x_k = 0 \text{ für } k \notin \{i, j\}\}$$

und

$$\hat{V}_{ij} = \{(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \mid x_i = x_j = 0\}.$$

Dann ist  $K^{n+1} = V_{ij} \oplus \hat{V}_{ij}$  und die Projektion

$$\begin{array}{c} P: K^{n+1} \rightarrow V_{ij} \\ \parallel \\ V_{ij} \oplus \hat{V}_{ij} \end{array}$$

induziert eine Zentralprojektion

$$f: Z \rightarrow \mathbb{P}(V_{ij})$$

genau dann, wenn

$$K^{n+1} = W \oplus \hat{V}_{ij}.$$

Aus Dimensionsgründen ist dies äquivalent zu

$$K^{n+1} = W + \hat{V}_{ij}.$$

**Lemma 2.4.3.** Seien  $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_n(K)$  in einer Gerade enthalten und  $p_0, p_1, p_2$  paarweise verschieden. Sei

$$p_k = (x_0^{(k)} : \dots : x_n^{(k)}) \quad 0 \leq k \leq 3$$

in homogenen Koordinaten.

Seien  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$  gegeben mit

$$\det \begin{pmatrix} x_i^{(0)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(0)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Dann gilt

$$\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \left( \det \begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(0)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(0)} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_i^{(3)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(3)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(1)} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_i^{(3)} & x_i^{(0)} \\ x_j^{(3)} & x_j^{(0)} \end{pmatrix} \right).$$

**Vorlesung 15**

Fr 12.06. 10:15

**Zusammenhang Doppelverhältnis  $\leftrightarrow$  Teilverhältnis**

Seien  $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_1(K)$  paarweise verschieden und  $p_i = (1 : \mu_i)$  für  $0 \leq i \leq 3$  (wir schließen also hier den Punkt  $(0 : 1)$  aus). Dann gilt nach Lemma 2.4.2

$$\begin{aligned} \text{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) &= \left( \underbrace{(\mu_0 - \mu_2)}_{\neq 0} (\mu_1 - \mu_3) : (\mu_1 - \mu_2) \underbrace{(\mu_0 - \mu_3)}_{\neq 0} \right) \\ &= \left( \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_0 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_0 - \mu_2} \right) \\ &= (\text{TV}(\mu_3, \mu_0, \mu_1) : \text{TV}(\mu_2, \mu_0, \mu_1)). \end{aligned}$$

Also können wir in diesem Fall das Doppelverhältnis als „Verhältnis von Teilverhältnissen“ verstehen.

**Bemerkungen.** Ist  $p_0 = (0 : 1)$  und  $p_i = (1 : \mu_i)$  für  $1 \leq i \leq 3$  paarweise verschieden, so gilt nach Lemma 2.4.2

$$\begin{aligned} \text{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) &= (\mu_1 - \mu_3 : \mu_1 - \mu_2) \\ &= \left( \frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} : 1 \right) \\ &= (\text{TV}(\mu_1, \mu_2, \mu_3) : 1). \end{aligned}$$

Datei 27:  
Desargues  
Pappos**Zwei Anwendungen des Doppelverhältnisses**

**Satz 2.4.4 (Desargues).** Sei  $\mathbb{P}(V)$  eine projektive Ebene und

$$p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3$$

paarweise verschieden, sodass die Geraden

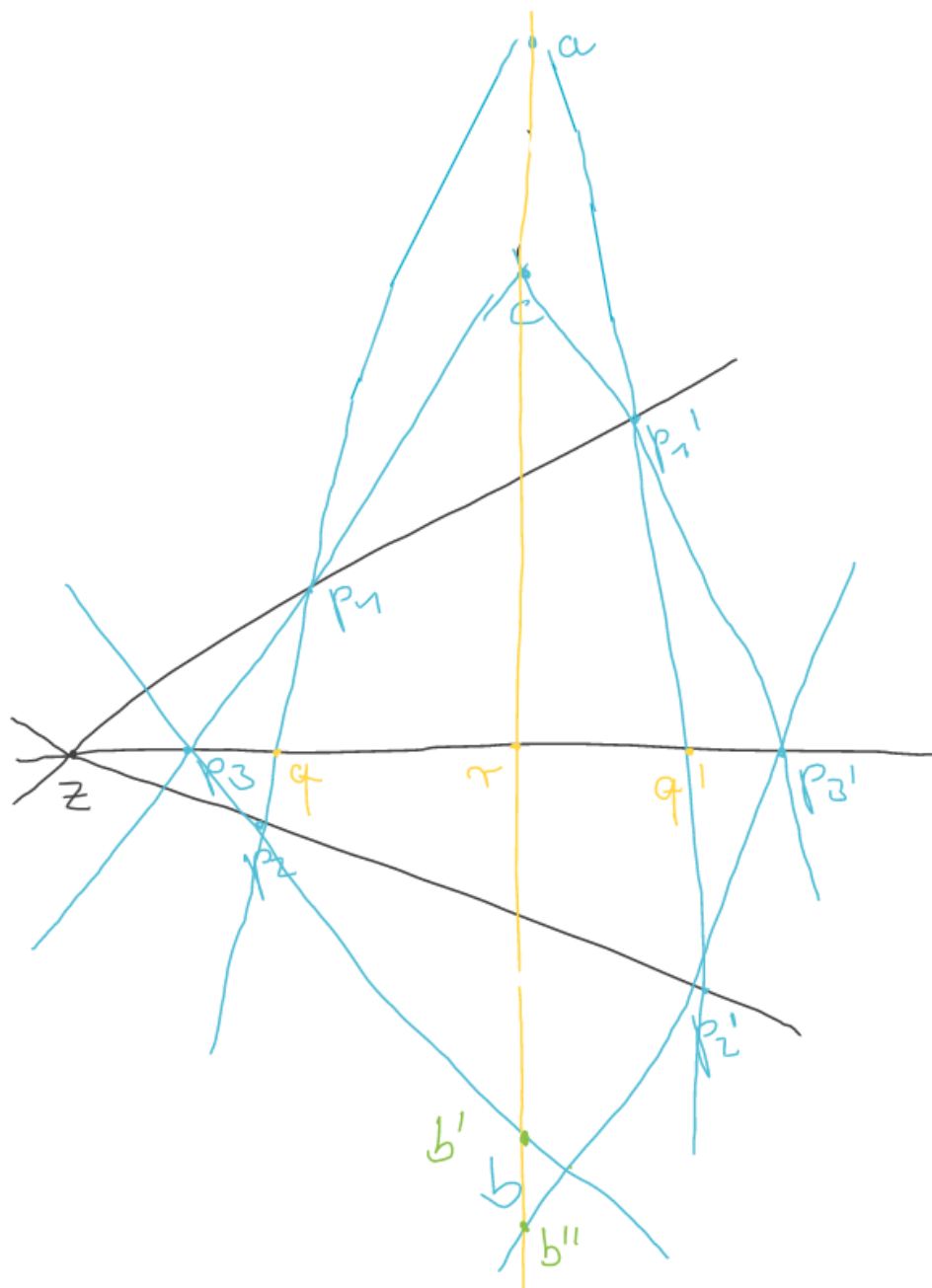
$$p_1 \vee p'_1, p_2 \vee p'_2, p_3 \vee p'_3$$

sich paarweise in einem gemeinsamen Punkt  $z$  schneiden.

Dann sind die Schnittpunkte

$$\begin{aligned} a &:= (p_1 \vee p_2) \cap (p'_1 \vee p'_2) \\ b &:= (p_2 \vee p_3) \cap (p'_2 \vee p'_3) \\ c &:= (p_3 \vee p_1) \cap (p'_3 \vee p'_1) \end{aligned}$$

in einer Geraden enthalten.



*Beweis.* Sei

$$\begin{aligned} q &:= (p_1 \vee p_2) \cap (p_3 \vee p'_3) \\ q' &:= (p_1 \vee p'_2) \cap (p_3 \vee p'_3) \\ r &:= (a \vee c) \cap (p_3 \vee p'_3) \\ b' &:= (a \vee c) \cap (p_2 \vee p_3) \\ b'' &:= (a \vee c) \cap (p'_2 \vee p'_3) \end{aligned}$$

**Ziel.** Wir zeigen  $b' = b''$ , denn dann ist

$$b' \cap b'' \in (a \vee c) \cap \underbrace{(p_2 \vee p_3) \cap (p'_2 \vee p'_3)}_b.$$

Die Punkte  $a$ ,  $c$  und  $r$ , sind paarweise verschieden, es genügt also zu zeigen, dass

$$DV(a, c, r, b') = DV(a, c, r, b'').$$

Betrachte die Zentralprojektion

$$f_1: a \vee c \rightarrow a \vee p_1$$

mit Zentrum  $p_3$ . Es folgt

$$DV(a, c, r, b') = DV(a, p_1, q, p_2).$$

Verwende als Nächstes die Zentralprojektion

$$f_2: a \vee p_1 \rightarrow a \vee p'_1$$

mit Zentrum  $z$  und erhalte

$$DV(a, p_1, q, p_2) = DV(a, p'_1, q', p'_2)$$

und danach die Zentralprojektion

$$f_3: a \vee p'_1 \rightarrow a \vee c$$

mit Zentrum  $p'_3$ . Dann ist

$$DV(a, p'_1, q', p'_2) = DV(a, c, r, b''),$$

also

$$DV(a, c, r, b') = DV(a, c, r, b'').$$

□

**Satz 2.4.5 (Pappos).** Seien  $z, z' \subset \mathbb{P}(V)$  verschiedene Geraden in einer projektiven Ebene und

$$p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3$$

paarweise verschiedene Punkte mit

$$\begin{aligned} p_1, p_2, p_3 &\in Z \\ p'_1, p'_2, p'_3 &\in Z'. \end{aligned}$$

Dann sind die Punkte

$$\begin{aligned} a &:= (p_1 \vee p'_2) \cap (p'_1 \vee p_2) \\ b &:= (p_2 \vee p'_3) \cap (p'_2 \vee p_3) \\ c &:= (p_3 \vee p'_1) \cap (p'_3 \vee p_1) \end{aligned}$$

in einer Geraden enthalten.

*Beweis.* Wir definieren

$$\begin{aligned} r &:= Z \cap Z' \\ q &:= (a \vee c) \cap Z \\ q' &:= (a \vee c) \cap Z' \\ b' &:= (a \vee c) \cap (p_2 \vee p'_3) \\ b'' &:= (a \vee c) \cap (p'_2 \vee p_3). \end{aligned}$$

Falls

$$r \in \{p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3\},$$

z. B.  $r = p_1$ , dann sind  $a, b, c$  in der Geraden  $p'_1 \vee b$  enthalten. Ebenso können wir

$$a \in \{p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3\}$$

Wir nehmen also an

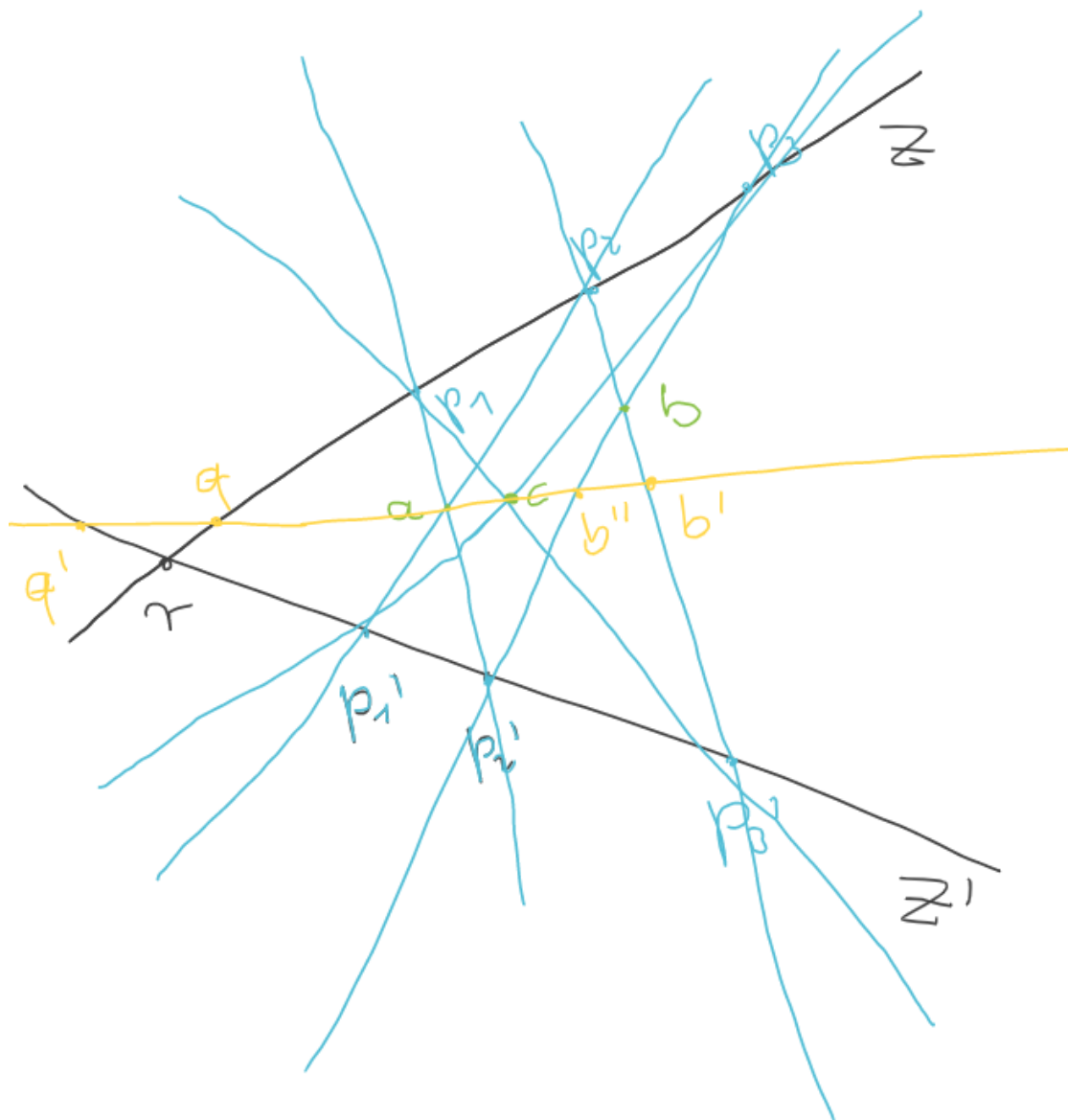
$$a, r \notin \{p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3\}.$$

**Ziel.** Zeige, dass  $b' = b''$ .

Wir verwenden Zentralprojektionen

$$f_1: a \vee c \rightarrow \underbrace{p_1 \vee p_2}_Z$$





mit Zentrum  $p'_3$ ,

$$DV(q, c, q', b') = DV(q, p_1, r, p_2).$$

Danach

$$f_2: \underbrace{p_1 \vee p_2}_Z \rightarrow Z'$$

mit Zentrum  $a$ ,

$$DV(q, p_1, r, p_2) = DV(q', p'_2, r, p'_1).$$

Verwende dann die Zentralprojektion

$$f_3: Z' \rightarrow a \vee c$$

mit Zentrum  $p_3$ ,

$$DV(q', p'_2, r, p'_1) = DV(q', b'', q, c).$$

Nach Symmetrie gilt

$$DV(q', b'', q, c) = DV(q, c, q', b'')$$

und damit  $b' = b''$ . □

Datei 28:  
Hauptsatz  
projektive  
Geometrie

## §2.5 Hauptsatz der projektiven Geometrie

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume und

$$f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$$

eine Projektivität. Ist  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  eine projektive Gerade, so ist auch

$$f(Z) \subseteq \mathbb{P}(W)$$

eine projektive Gerade.

**Frage.** Welche bijektiven Abbildungen

$$g: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$$

haben die Eigenschaft, dass Geraden auf Geraden abgebildet werden?

**Definition.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume und  $g: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  eine bijektive Abbildung, sodass  $\forall p, p' \in \mathbb{P}(V)$

$$f(p \vee p') \subseteq f(p) \vee f(p').$$

Dann nennen wir  $g$  Kollineation.

**Beispiel.** Sei  $K$  ein Körper mit Automorphismus  $\alpha$  und  $F: V \rightarrow W$  eine injektive lineare Abbildung, d. h.

$$\begin{aligned} F(v + v') &= F(v) + F(v') \quad \forall v, v' \in V \\ F(\lambda v) &= \alpha(\lambda)F(v) \quad \forall \lambda \in K \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Dann induziert  $F$  eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F): \mathbb{P}(V) &\rightarrow \mathbb{P}(W) \\ \mathbb{P}(V) \ni K \cdot v &\mapsto K \cdot F(v) \quad v \in V \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

**Definition.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume. Wir nennen eine Abbildung

$$f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$$

*semiprojektiv*, falls es eine injektive semilineare Abbildung  $F: V \rightarrow W$  gibt mit

$$f = \mathbb{P}(F).$$

Falls  $f$  außerdem bijektiv ist, so nennen wir  $f$  Semiprojektivität.

**Bemerkung.** Ist  $F: V \rightarrow W$  semilinear, so gilt

$$F(K \cdot v) = K \cdot F(v),$$

d.h.

$$\begin{aligned} F(K \cdot v) &= \{ F(\lambda v) \mid \lambda \in K \} \\ &= \{ \alpha(\lambda)F(v) \mid \lambda \in K \} \\ &= \{ \lambda F(v) \mid \lambda \in K \} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \alpha \text{ ist bijektiv} \\ &= K \cdot F(v). \end{aligned}$$

**Beispiel.** Betrachte den Körper

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$$

mit Automorphismus

$$a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2} \quad a, b \in \mathbb{Q}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} F: \mathbb{Q}(\sqrt{2})^3 &\rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})^3 \\ (a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2}, a_3 + b_3\sqrt{2}) &\mapsto (a_1 - b_1\sqrt{2}, a_2 - b_2\sqrt{2}, a_3 - b_3\sqrt{2}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

eine semilineare Abbildung, die eine Semiprojektivität

$$\mathbb{P}(F): \mathbb{P}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$$

induziert.

**Frage.** Ist  $\mathbb{P}(F)$  eine Projektivität über  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ?

**Lemma 2.5.1.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume,  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  eine semiprojektive Abbildung und  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  ein projektiver Unterraum. Dann ist  $f(Z) \subseteq \mathbb{P}(W)$  ein projektiver Unterraum mit

$$\dim f(Z) = \dim Z.$$

*Beweis.* Sei  $Z = \mathbb{P}(U)$  mit  $U \leq V$   $K$ -Untervektorraum,

$$\dim(U) = \dim Z + 1 = r.$$

Sei  $F: V \rightarrow W$  injektiv, semilinear zum Automorphismus  $\alpha$  und  $f = \mathbb{P}(F)$ . Sei  $v_1, \dots, v_r \in U$  eine Basis von  $U$  als  $K$ -Vektorraum. Wir berechnen

$$\begin{aligned} F(U) &= F(K \cdot v_1 + \dots + K v_r) \\ &= \{ F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \} \\ &= \{ \alpha(\lambda_1) F(v_1) + \dots + \alpha(\lambda_r) F(v_r) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \} = \{ \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_r F(v_r) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad F \text{ ist semilinear} \\ &= K \cdot F(v_1) + \dots + K \cdot F(v_r) \end{aligned}$$

ist  $K$ -Untervektorraum von  $W$ . Es ist  $\dim(F(U)) = r$ , da  $F$  injektiv + semilinear ist. Verwende nun

$$f(Z) = \mathbb{P}(F(U)). \quad \square$$

**Satz 2.5.2 (Hauptsatz der projektiven Geometrie).** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume mit  $\dim(V) = \dim(W) \geq 3$  und  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  eine Kollineation. Dann ist  $f$  eine Semiprojektivität.

**Bemerkung.** Im Fall  $K = \mathbb{R}$  folgt sogar, dass  $f$  eine Projektivität ist, d.h. für reelle projektive Räume der Dimension  $\geq 2$  sind die Begriffe Kollineation und Projektivität gleichbedeutend.

**Vorlesung 16**

Di 16.06. 10:15

*Beweis von Satz 2.5.2.* Im Folgenden sei  $K$  ein Körper,  $V, W$   $K$ -Vektorräume mit  $\dim(V) = \dim(W) \geq 3$  und  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  eine Kollineation.

**Lemma 2.5.3.** Seien  $p_0, \dots, p_r \in \mathbb{P}(V)$ . Dann ist

$$f(p_0 \vee \dots \vee p_r) \subseteq f(p_0) \vee \dots \vee f(p_r).$$

*Beweis.* Induktion über  $r$ .

$r = 0$   $f(p_0) \subseteq f(p_0)$  ✓.

$r \geq 1$   $p \in (p_0 \vee \dots \vee p_{r-1}) \vee p_r$  mit  $p_i = K \cdot v_i$ ,  $v_i \in V$ ,  $0 \leq i \leq r$ .

Dann ist

$$p_0 \vee \dots \vee p_{r-1} \vee p_r = \mathbb{P}(K \cdot v_0 + \dots + K \cdot v_r)$$

und

$$\exists p' \in p_0 \vee \dots \vee p_{r-1} = \mathbb{P}(K v_0 + \dots + K v_{r-1})$$

mit  $p \in p' \vee p_r$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f(p) &\in f(p') \vee f(p_r) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad f \text{ ist Kollineation} \\ &\in f(p_0) \vee \dots \vee f(p_{r-1}) \vee f(p_r). \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 2.5.4.** Sei  $\dim(V) = \dim(W) = n + 1$ . Dann gibt es Basen  $v_0, \dots, v_n$  von  $V$  und  $w_0, \dots, w_n$  von  $W$  mit der Eigenschaft

$$f(K \cdot v_i) = K \cdot w_i \quad 0 \leq i \leq n$$

und

$$f(K \cdot (v_0 + v_i)) = K \cdot (w_0 + w_i) \quad 1 \leq i \leq n.$$

*Beweis.* Wähl eine Basis  $v_0, \dots, v_n$  von  $V$  und  $w'_0, \dots, w'_n \in W$ , sodass

$$f(K \cdot v_i) = K \cdot w'_i \quad 0 \leq i \leq n.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W) &= f(\mathbb{P}(V)) \\ &= f(K \cdot v_0 \vee \dots \vee K \cdot v_n) \\ &\subseteq f(K \cdot v_0) \vee \dots \vee f(K \cdot v_n) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Lemma 2.5.3} \\ &= \mathbb{P}(K \cdot w'_0 + \dots + K \cdot w'_n), \end{aligned}$$

also ist  $w'_0, \dots, w'_n$  eine Basis von  $W$ . Es gilt

$$K \cdot (v_0 + v_i) \in K \cdot v_0 \vee K \cdot v_i,$$

also, da  $f$  Kollineation,

$$\begin{aligned} f(K \cdot (v_0 + v_i)) &\in \underbrace{f(K \cdot v_0)}_{K \cdot w'_0} \vee \underbrace{f(K \cdot v_i)}_{K \cdot w'_i} \\ &\in K \cdot w'_0 \vee K \cdot w'_i, \end{aligned}$$

also  $\exists \lambda_i, \mu_i \in K, 1 \leq i \leq n$  mit

$$\begin{aligned} f(K(v_0 + v_i)) &= K(\mu_i w'_0 + \lambda_i w'_i) \\ &= K(w'_0 + \mu_i^{-1} \lambda_i w'_i). \end{aligned}$$

Außerdem ist  $\lambda_i, \mu_i \neq 0 \quad \forall i$ , denn aus  $\lambda_i = 0, \mu_i \neq 0$  folgt z. B.

$$f(K \cdot (v_0 + v_i)) = K \cdot w'_0 = f(K \cdot v_0),$$

□

$\nRightarrow f$  ist bijektiv.

Also ist  $\lambda_i, \mu_i \in K^* \quad \forall 1 \leq i \leq n$ .

Setze nun  $w_0 := w'_0$  und  $w_i = \underbrace{\lambda_i \mu_i^{-1}}_{\in K^*} w'_i, 1 \leq i \leq n$ .

Im Folgenden seien  $v_0, \dots, v_n \in V$  und  $w_0, \dots, w_n \in W$  wie in Lemma 2.5.4, d. h.  $v_0, \dots, v_n$  ist Basis von  $V$ ,  $w_0, \dots, w_n$  ist Basis von  $W$  mit

$$\begin{aligned} f(K \cdot v_i) &= K \cdot w_i \quad 0 \leq i \leq n \\ f(K \cdot (v_0 + v_i)) &= K(w_0 + w_i) \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

**Lemma 2.5.5.** Es gibt eine injektive Abbildung

$$\alpha: K \rightarrow K$$

mit  $\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 1$ , und

$$f(K \cdot (v_0 + \lambda v_i)) = K \cdot (w_0 + \alpha(\lambda) w_i) \quad 1 \leq i \leq n \quad \forall \lambda \in K.$$

*Beweis.* Sei  $1 \leq i \leq n$  fest,  $\lambda \in K$ . Setze

$$p = K(v_0 + \lambda v_i).$$

Dann ist  $p \in K \cdot v_0 \vee K \cdot v_i$ , also  $f(p) \in K \cdot w_0 \vee K \cdot w_i$ . Aus  $p \neq K \cdot v_i$  folgt  $f(p) \neq K \cdot w_i$  und es gibt  $\alpha_i(\lambda) \in K$  mit

$$f(p) = K \cdot (w_0 + \alpha_i(\lambda)w_i).$$

Definiere  $\alpha_i: K \rightarrow K$ ,  $\lambda \mapsto \alpha_i(\lambda)$ ,  $\alpha_i$  ist injektiv, denn für  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ist

$$K \cdot (v_0 + \lambda_1 v_i) \neq K \cdot (v_0 + \lambda_2 v_i).$$

Nach Konstruktion von  $v_0, \dots, v_n, w_0, \dots, w_n$  gilt  $\alpha_i(0) = 0$  und  $\alpha_i(1) = 1$ .

Wir zeigen nun  $\alpha_i = \alpha_j$  für  $1 \leq i, j \leq n$ . Seien  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ . Für  $\lambda \in K^*$  betrachte

$$p := K \cdot (v_i - v_j) = K \cdot (v_0 + \lambda v_i - (v_0 + \lambda v_j)).$$

Dann ist

$$p \in K \cdot v_i \vee K \cdot v_j$$

und

$$p \in K \cdot (v_0 + \lambda v_i) \vee K \cdot (v_0 + \lambda v_j),$$

also  $f(p) \in K \cdot w_i \vee K \cdot w_j$  und

$$f(p) \in K(w_0 + \alpha_i(\lambda)w_i) \vee K \cdot (w_0 + \alpha_j(\lambda)w_j).$$

Sei  $w \in W$  mit  $f(p) = K \cdot w$ . Dann  $\exists \mu_i, \mu_j, \beta_i, \beta_j \in K$  mit

$$\begin{aligned} w &= \mu_i w_i + \mu_j w_j \\ &= \beta_i(w_0 + \alpha_i(\lambda)w_i) + \beta_j(w_0 + \alpha_j(\lambda)w_j). \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von  $w_0, w_1, \dots, w_n$  folgt

$$\beta_i = -\beta_j \quad \mu_i = \beta_i \alpha_i(\lambda) \quad \mu_j = \beta_j \alpha_j(\lambda),$$

also

$$f(p) = K \cdot (\alpha_i(\lambda)w_i - \alpha_j(\lambda)w_j).$$

$p$  ist von  $\lambda \in K^*$  unabhängig, also

$$\begin{aligned} f(p) &= K \cdot (\alpha_i(1)w_i - \alpha_j(1)w_j) \\ &= K \cdot (w_i - w_j) \\ &= K \cdot (\alpha_i(\lambda)w_i - \alpha_j(\lambda)w_j) \quad \forall \lambda \in K^*. \end{aligned}$$

Also  $\alpha_i(\lambda) = \alpha_j(\lambda) \quad \forall \lambda \in K$ . □

**Lemma 2.5.6.** Notation wie oben. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Dann ist

$$f(K(v_0 + \lambda_1 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n)) = K \cdot (w_0 + \alpha(\lambda_1)w_1 + \cdots + \alpha(\lambda_n)w_n).$$

*Beweis.* Wir zeigen induktiv für  $1 \leq r \leq n$ , dass

$$f(K \cdot (v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r)) = K \cdot (w_0 + \alpha(\lambda_1) w_1 + \cdots + \alpha(\lambda_r) w_r) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K.$$

$r = 1 \rightarrow$ Lemma 2.5.5  $\checkmark$ .

$$r \geq 2 \text{ Sei}$$

$$p := K \cdot (v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r)$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ . Dann ist

$$p \in K(v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{r-1} v_{r-1}) \vee K \cdot v_r$$

und

$$p \in K(v_0 + \lambda_r v_r) \vee K \cdot v_1 \vee \dots \vee K \cdot v_{r-1},$$

also

$$f(p) \in K \cdot (w_0 + \alpha(\lambda_1)w_1 + \cdots + \alpha(\lambda_{r-1})w_{r-1}) \vee K \cdot w_r$$

und

$$f(p) \in K(w_0 + \alpha(\lambda_r)w_r) \vee K \cdot w_1 \vee \dots \vee K \cdot v_{r-1}.$$

Daraus folgt die Existenz von  $\beta, \beta_1, \dots, \beta_{r-1} \in K$  mit

$$\begin{aligned} f(p) &= K \cdot (w_0 + \alpha(\lambda_1)w_1 + \cdots + \alpha(\lambda_{r-1})w_{r-1} + \beta \cdot w_r) \\ &\quad \qquad\qquad\qquad = \overset{\uparrow}{\alpha(\lambda_r)} \\ &= K \cdot (w_0 + \alpha(\lambda_r)w_r + \beta_1w_1 + \cdots + \beta_{r-1}w_{r-1}) \rightarrow \beta = \alpha(\lambda_r). \end{aligned}$$

**Lemma 2.5.7.** Sei  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \setminus \{0\}$ . Dann ist

$$f(K \cdot (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)) = K(\alpha(\lambda_1)w_1 + \cdots + \alpha(\lambda_n)w_n).$$

*Beweis.* Sei  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$  und

$$p = K \cdot (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n).$$

Es ist

$$f(p) \in K \cdot w_1 \vee \dots \vee K \cdot w_n$$

und

$$f(p) \in K \cdot w_0 \vee K \cdot (w_0 + \alpha(\lambda_1)w_1 + \cdots + \alpha(\lambda_n)w_n),$$



denn

$$K \in Kv_0 \vee K(v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n).$$

Also  $\exists \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_0, \beta \in K$  mit

$$f(p) = K \cdot (\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n)$$

und

$$f(p) = K \cdot (\underbrace{\beta_0}_{-\beta} w_0 + \beta(w_0 + \alpha(\lambda_1)w_1 + \cdots + \alpha(\lambda_n)w_n)).$$

Es folgt  $\beta_0 = -\beta$  und

$$f(p) = K \cdot (\alpha(\lambda_1)w_1 + \cdots + \alpha(\lambda_n)w_n). \quad \square$$

**Lemma 2.5.8.** Die Abbildung  $\alpha: K \rightarrow K$  aus Lemma 2.5.5 ist ein Körperautomorphismus von  $K$ .

**Erinnerung.**  $\alpha: K \rightarrow K$  ist injektiv,  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(1) = 1$ ,

$$f(K \cdot (v_0 + \lambda v_i)) = K(w_0 + \alpha(\lambda)w_i) \quad \forall \lambda \in K \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

*Beweis von Lemma 2.5.8.* •  $\alpha$  ist surjektiv. Für  $\mu \in K$  ist

$$q := K \cdot (w_0 + \mu w_1) \in \mathbb{P}(W),$$

also

$$\exists p = K \cdot (\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n) \in \mathbb{P}(V)$$

mit  $f(p) = q$ , also  $\lambda_0 \neq 0$ , daher

$$p = K \cdot \left( v_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} v_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_0} v_n \right)$$

und

$$\begin{aligned} q &= f(p) = K \cdot (w_0 + \mu w_1) \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 2.5.6}}}{=} K \cdot \left( w_0 + \alpha\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)w_1 + \cdots + \alpha\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right)w_n \right), \end{aligned}$$

und daher  $\mu = \alpha\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)$ .

Datei 29:  
Hauptsatz  
projektive  
Geometrie  
Teil 2

- Wir zeigen  $\alpha(\lambda + \mu) = \alpha(\lambda) + \alpha(\mu) \quad \lambda, \mu \in K$ :

Seien  $\lambda, \mu \in K$ . Dann ist

$$p := K \cdot (v_0 + (\lambda + \mu)v_1 + v_2) \in K \cdot (v_0 + \lambda v_1) \vee K(\mu v_1 + v_2).$$

Also gilt nach Anwendung von  $f$

$$f(p) \in K \cdot (w_0 + \alpha(\lambda)w_1) \vee K(\alpha(\mu)w_1 + w_2),$$

also  $\exists \beta, \beta' \in K$  mit

$$w_0 + \alpha(\lambda + \mu)w_1 + w_2 = \beta(w_0 + \alpha(\lambda)w_1) + \beta'(\alpha(\mu)w_1 + w_2),$$

denn

$$f(p) = K \cdot (w_0 + \alpha(\lambda + \mu)w_1 + w_2),$$

$w_0, w_1, w_2$  sind linear unabhängig, also

$$\begin{aligned} \beta &= 1 = \beta' \\ \alpha(\lambda + \mu) &= \alpha(\lambda) + \alpha(\mu). \end{aligned}$$

- Wir zeigen  $\alpha(\lambda \cdot \mu) = \alpha(\lambda)\alpha(\mu) \quad \forall \lambda, \mu \in K$ .

Für  $\lambda = 0$  gilt

$$\alpha(0 \cdot \mu) = \alpha(0) = 0 = 0 \cdot \alpha(\mu) = \alpha(0) \cdot \alpha(\mu).$$

Wir können also annehmen, dass  $\lambda \neq 0$ .

Betrachte

$$p := K \cdot (v_0 + \lambda\mu v_1 + \lambda v_2) \in K \cdot v_0 \vee K(\mu v_1 + v_2).$$

Also

$$f(p) = K \cdot (w_0 + \alpha(\lambda\mu)w_1 + \alpha(\lambda)w_2) \in K \cdot w_0 \vee K(\alpha(\mu)w_1 + w_2).$$

Es gibt also  $\beta, \beta' \in K$  mit

$$w_0 + \alpha(\lambda\mu)w_1 + \alpha(\lambda)w_2 = \beta w_0 + \beta'(\alpha(\mu)w_1 + w_2).$$

Daraus folgt  $\beta = 1$ ,  $\beta' = \alpha(\lambda)$  und  $\alpha(\lambda\mu) = \underbrace{\alpha(\lambda)\alpha(\mu)}_{\beta'}$ . □

**Lemma 2.5.9.** Sei

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in K^{n+1} \setminus \{ (0, \dots, 0) \}.$$

Dann ist

$$f(K \cdot \underbrace{(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n)}_{\in V}) = K \cdot (\alpha(\lambda_0)w_0 + \dots + \alpha(\lambda_n)w_n).$$

*Beweis.* Ist  $\lambda_0 = 0$ , so verwende Lemma 2.5.7. Wir können also  $\lambda \neq 0$  annehmen. Nach Lemma 2.5.6

$$\begin{aligned} f(K \cdot (\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)) &= f\left(K \cdot \left(v_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} v_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_0} v_n\right)\right) \\ &= K \cdot \left(w_0 + \alpha\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)w_1 + \dots + \alpha\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right)w_n\right) \\ &\stackrel{\text{Lemma 2.5.8}}{=} K \cdot \left(w_0 + \frac{\alpha(\lambda_1)}{\alpha(\lambda_0)}w_1 + \dots + \frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha(\lambda_0)}w_n\right) \\ &= K \cdot (\alpha(\lambda_0)w_0 + \alpha(\lambda_1)w_1 + \dots + \alpha(\lambda_n)w_n). \quad \square \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} F: V &\rightarrow W \\ \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n &\mapsto \alpha(\lambda_0)w_0 + \dots + \alpha(\lambda_n)w_n \end{aligned}$$

ist semilinear und injektiv und es gilt  $f = \mathbb{P}(F)$ . Damit ist  $f$  eine Semiprojektivität und Satz 2.5.2 bewiesen.  $\square$

**Vorlesung 17**

Fr 19.06. 10:15

**§2.6 Dualität**Datei 30:  
Dualität

Sei  $K$  ein Körper und  $L \subseteq \mathbb{P}_2(K)$  eine projektive Gerade. Seien  $(x_0, x_1, x_2)$  homogene Koordinaten in  $\mathbb{P}_2(K)$  und  $L = \mathbb{P}(U)$  mit  $U \subseteq K^3$  ein 2-dimensionaler Untervektorraum. Dann gibt es  $(a_0, a_1, a_2) \in K^3$ , sodass  $U \leq K^3$  gegeben ist durch

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

und

$$L = \{ (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(K) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \}.$$

Ist  $\lambda \in K^\star$ , so definiert das Tupel  $(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2)$  ebenfalls die Gerade

$$L = \{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}_2(K) \mid \lambda a_0x_0 + \lambda a_1x_1 + \lambda a_2x_2 = 0 \}.$$

Wir verstehen  $(a_0 : a_1 : a_2)$  als Element in  $\mathbb{P}_2(K)$  und erhalten eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{ \text{projektive Geraden } L \subseteq \mathbb{P}_2(K) \} &\leftrightarrow \{ \text{Punkte in } \mathbb{P}_2(K) \} \\ L = \{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}_2(K) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \} &\leftrightarrow (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}_2(K). \end{aligned}$$

Ist  $p = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}_2(K)$  eine Punkt, so können wir die projektive Gerade

$$\{ (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}_2(K) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \}$$

zuordnen. Wir erhalten eine Bijektion

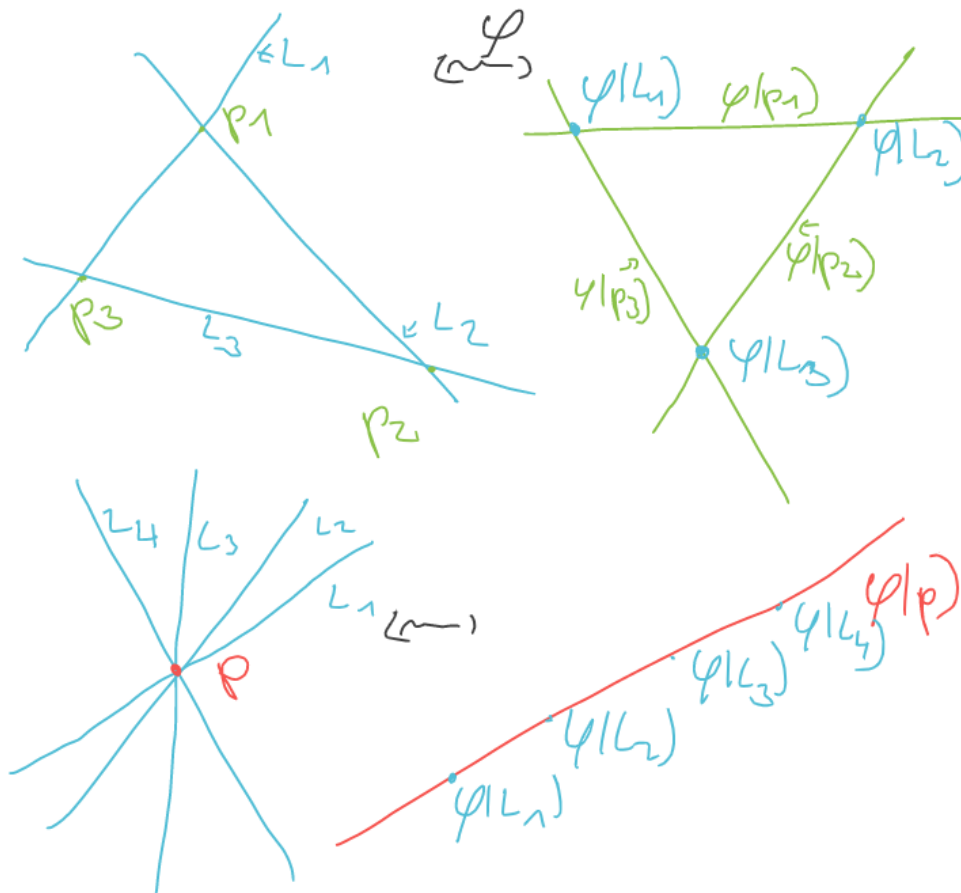
$$\begin{aligned} \varphi: \{ \text{projektive Unterräume von } \mathbb{P}_2(K) \} &\rightarrow \{ \text{projektive Unterräume von } \mathbb{P}_2(K) \} \\ \emptyset &\mapsto \mathbb{P}_2(K) \\ \mathbb{P}_2(K) &\mapsto \emptyset \end{aligned}$$

$$L = \{ (x_0 : x_1 : x_2) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \} \mapsto (a_0 : a_1 : a_2)$$

$$\mathbb{P}_2(K) \ni (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \{ (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}_2(K) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \}.$$

Ist  $p \in \mathbb{P}_2(K)$  und  $L \subset \mathbb{P}_2(K)$  eine projektive Gerade, so gilt

$$p \in L \iff \varphi(L) \in \varphi(p)$$

**Dualisierung des Satzes von Desargues.**

**Erinnerung (Satz von Desargues).** Seien  $p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3 \in \mathbb{P}_2(K)$  paarweise verschiedene Punkte, sodass die Geraden  $p_1 \vee p'_1, p_2 \vee p'_2, p_3 \vee p'_3$  sich paarweise in einem Punkt  $z$  schneiden. Dann liegen die Schnittpunkte

$$a := (p_1 \vee p_2) \cap (p'_1 \vee p'_2)$$

$$b := (p_2 \vee p_3) \cap (p'_2 \vee p'_3)$$

$$c := (p_3 \vee p_1) \cap (p'_3 \vee p'_1)$$

auf einer gemeinsamen Geraden  $L$ .

Wir „dualisieren“ den Satz von Desargues. Sei  $\varphi$  wie oben definiert. Setze

$$\begin{aligned} Z_i &= \varphi(p_i) \quad 1 \leq i \leq 3 \\ Z'_i &= \varphi(p'_i) \quad 1 \leq i \leq 3. \end{aligned}$$

Dann sind  $Z_1, Z_2, Z_3, Z'_1, Z'_2, Z'_3$  paarweise verschiedene Geraden mit

$$\begin{aligned} Z_1 \cap Z'_1 &= \varphi(p_1 \vee p'_1) \\ Z_2 \cap Z'_2 &= \varphi(p_2 \vee p'_2) \\ Z_3 \cap Z'_3 &= \varphi(p_3 \vee p'_3). \end{aligned}$$

Die Punkte  $Z_1 \cap Z'_1, Z_2 \cap Z'_2, Z_3 \cap Z'_3$  sind enthalten in der Geraden  $\varphi(Z)$ , mit

$$z = (p_1 \vee p'_1) \cap (p_2 \vee p'_2) \cap (p_3 \vee p'_3).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \phi((p_1 \vee p_2) \cap (p'_1 \vee p'_2)) &= \varphi(p_1 \vee p_2) \vee \varphi(p'_1 \vee p'_2) \\ &= (Z_1 \cap Z_2) \vee (Z'_1 \cap Z'_2) \\ \varphi(b) &= (Z_2 \cap Z_3) \vee (Z'_2 \cap Z'_3) \\ \varphi(c) &= (Z_3 \cap Z_1) \vee (Z'_3 \cap Z'_1). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Desargues liegen  $a, b, c$  auf einer Geraden, d. h.  $\varphi(a), \varphi(b)$  und  $\varphi(c)$  schneiden sich in einem Punkt.

Seien  $Z_1, Z_2, Z_3, Z'_1, Z'_2, Z'_3$  paarweise verschiedene Geraden, sodass die Schnittpunkte  $Z_1 \cap Z'_1, Z_2 \cap Z'_2, Z_3 \cap Z'_3$  paarweise verschieden sind und auf einer Geraden liegen. Dann gibt es paarweise verschiedene Punkt  $p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3 \in \mathbb{P}_2(K)$ , die die Annahmen des Satzes von Desargues erfüllen. Wähle dazu

$$\begin{aligned} p_i &:= \varphi^{-1}(Z_i) \quad 1 \leq i \leq 3 \\ p'_i &:= \varphi^{-1}(Z'_i) \quad 1 \leq i \leq 3. \end{aligned}$$

**Satz 2.6.1 (Dualer Satz von Desargues).** Seien  $Z_1, Z_2, Z_3, Z'_1, Z'_2, Z'_3$  paarweise verschiedene Geraden, sodass die Schnittpunkte  $Z_1 \cap Z'_1, Z_2 \cap Z'_2, Z_3 \cap Z'_3$  paarweise verschieden sind und auf einer Geraden liegen. Dann gehen die Geraden  $(Z_1 \cap Z_2) \vee (Z'_1 \cap Z'_2), (Z_2 \cap Z_3) \vee (Z'_2 \cap Z'_3), (Z_3 \cap Z_1) \vee (Z'_3 \cap Z'_1)$  durch einen gemeinsamen Punkt.

**Bemerkung.** Nach Dualisierung erhalten wir also die Umkehrung zum Satz von Desargues.

**Satz 2.6.2 (Brianchon).** (dual zum Satz von Pappos) Seien  $p, p' \in \mathbb{P}_2(K)$  unterschiedliche Punkte und  $Z_1, Z_2, Z_3, Z'_1, Z'_2, Z'_3 \subseteq \mathbb{P}_2(K)$  paarweise verschiedene Geraden

$$\begin{aligned} p &= Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 \\ p' &= Z'_1 \cap Z'_2 \cap Z'_3. \end{aligned}$$

Dann gehen die Geraden  $(Z_1 \cap Z'_2) \vee (Z'_1 \cap Z_2)$ ,  $(Z_2 \cap Z'_3) \vee (Z'_2 \cap Z_3)$  und  $(Z_3 \cap Z'_1) \vee (Z'_3 \cap Z_1)$  durch einen gemeinsamen Punkt.

*Beweis.* Die Punkte  $\varphi(Z_1), \varphi(Z_2), \varphi(Z_3), \varphi(Z'_1), \varphi(Z'_2), \varphi(Z'_3)$  sind paarweise verschieden und es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(Z_1), \varphi(Z_2), \varphi(Z_3) &\in \varphi(p) \\ \varphi(Z'_1), \varphi(Z'_2), \varphi(Z'_3) &\in \varphi(p'). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Pappos sind die Punkte

$$\begin{aligned} a &:= (\varphi(Z_1) \vee \varphi(Z'_2)) \cap (\varphi(Z'_1) \vee \varphi(Z_2)) \\ b &:= (\varphi(Z_2) \vee \varphi(Z'_3)) \cap (\varphi(Z'_2) \vee \varphi(Z_3)) \\ c &:= (\varphi(Z_3) \vee \varphi(Z'_1)) \cap (\varphi(Z'_3) \vee \varphi(Z_1)) \end{aligned}$$

in einer Geraden  $L$  enthalten. Es ist

$$\begin{aligned} a &= \varphi(Z_1 \cap Z'_2) \cap \varphi(Z'_1 \cap Z_2) \\ &= \varphi((Z_1 \cap Z'_2) \vee (Z'_1 \cap Z_2)). \end{aligned}$$

□

Also gehen die Geraden  $(Z_1 \cap Z'_2) \vee (Z'_1 \cap Z_2)$ ,  $(Z_2 \cap Z'_3) \vee (Z'_2 \cap Z_3)$  und  $(Z_3 \cap Z'_1) \vee (Z'_3 \cap Z_1)$  durch einen gemeinsamen Punkt.

Die an Anfang dieses Abschnitts konstruierte Bijektion

$$\varphi: \{ \text{projektive Unterräume von } \mathbb{P}_2(K) \} \rightarrow \{ \text{projektive Unterräume von } \mathbb{P}_2(K) \}$$

ist ein Beispiel für eine Korrelation.

**Definition.** Sei  $\mathbb{P}(V)$  ein projektiver Raum mit  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Schreibe  $\mathcal{P}(V)$  für die Menge von projektiven Unterräumen von  $V$ . Wir nennen eine bijektive Abbildung

$$\sigma: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$$

eine Korrelation in  $\mathbb{P}(V)$ , falls es für alle  $Z, Z' \in \mathcal{P}(V)$  gilt

$$Z' \subseteq Z \iff \sigma(Z') \supseteq \sigma(Z).$$

Datei 31:  
Korrelationen

**Bemerkung.** Ist  $\varphi: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$  eine Korrelation, dann auch  $\sigma^{-1}$ .

**Lemma 2.6.3.** Sei  $\mathbb{P}(V)$  ein projektiver Raum,  $\sigma: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$  eine Korrelation und  $Z, Z' \in \mathcal{P}(V)$  projektive Unterräume. Dann gilt

- i)  $\dim \sigma(Z) = \dim \mathbb{P}(V) - (\dim Z + 1)$
- ii)  $\sigma(Z \cap Z') = \sigma(Z) \vee \sigma(Z')$
- iii)  $\sigma(Z \vee Z') = \sigma(Z) \cap \sigma(Z')$ .

*Beweis.* i) Sei  $n := \dim \mathbb{P}(V)$ ,  $k := \dim Z$ . Wähle projektive Unterräume  $Z_i$ ,  $-1 \leq i \leq n$  mit  $Z_{-1} = \emptyset$ ,  $Z_k = Z$ ,  $Z_n = \mathbb{P}(V)$  und  $\dim Z_i = i$ ,  $-1 \leq i \leq n$  und

$$\emptyset = Z_{-1} \subseteq Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \cdots \subseteq \underbrace{Z_k}_{=Z} \subseteq Z_{k+1} \subseteq \cdots \subseteq Z_n = \mathbb{P}(V).$$

Dann ist  $Z_i \neq Z_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  und

$$\sigma(Z_{-1}) \supseteq \sigma(Z_0) \supseteq \sigma(Z_1) \supseteq \cdots \supseteq \sigma(Z_k) \supseteq \cdots \supseteq \sigma(Z_n).$$

Da  $\sigma$  Bijektion ist, gilt  $\sigma(Z_i) \neq \sigma(Z_{i+1})$ ,  $-1 \leq i \leq n$ , also  $\dim \sigma(Z_i) \geq \dim \sigma(Z_{i+1}) + 1$ . Daraus folgt

$$\dim \sigma(Z) = \dim(\mathbb{P}(V)) - (\dim Z + 1).$$

ii) Seien  $Z, Z' \in \mathcal{P}(V)$ . Es ist  $Z \cap Z' \subseteq Z, Z'$ , also

$$\sigma(Z \cap Z') \supseteq \sigma(Z), \sigma(Z').$$

$\sigma(Z \cap Z')$  ist projektiver Raum, also

$$\sigma(Z \cap Z') \supseteq \sigma(Z) \vee \sigma(Z').$$

Aus

$$\sigma(Z), \sigma(Z') \subseteq \sigma(Z) \vee \sigma(Z')$$

folgt nach Anwendung von  $\sigma^{-1}$

$$Z \cap Z' \supseteq \sigma^{-1}(\sigma(Z) \vee \sigma(Z'))$$

und damit

$$\sigma(Z \cap Z') \subseteq \sigma(Z) \vee \sigma(Z').$$

iii) Es ist  $Z, Z' \subseteq \sigma(Z) \cap \sigma(Z')$ , also  $\sigma(Z \vee Z') \subseteq \sigma(Z) \cap \sigma(Z')$ . Wende nun  $\sigma^{-1}$  an auf

$$\sigma(Z) \cap \sigma(Z') \subseteq \sigma(Z), \sigma(Z')$$

und erhalte

$$Z \vee Z' \subseteq \sigma^{-1}(\sigma(Z) \cap \sigma(Z')),$$

also

$$\sigma(Z \vee Z') \subseteq \sigma(Z) \cap \sigma(Z').$$

□



**Vorlesung 18**

Di 23.06. 10:15

**Frage.** Wie können wir für einen allgemeinen projektiven Raum  $\mathbb{P}(V)$  Korrelationen konstruieren?

Datei 32:  
Dualräume**2.6.1 Dualräume**

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Wir nennen

$$V^* := \{ \varphi: V \rightarrow K \mid \varphi \text{ ist } K\text{-linear} \}$$

den Dualraum zu  $V$ .

**Bemerkung.**  $V^*$  ist selbst wieder ein  $K$ -Vektorraum.

Sei  $v_1, \dots, v_n$  Basis von  $V$  und  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung  $v_i^* \in V^*$  mit

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

**Lemma 2.6.4.** Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis des  $K$ -Vektorraums  $V$ . Dann ist  $v_1^*, \dots, v_n^*$  (wie oben definiert) Basis von  $V^*$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi \in V^*$ . Dann ist  $\varphi$  eindeutig bestimmt durch die Bilder  $\varphi(v_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Sei

$$\varphi' = \varphi(v_1)v_1^* + \dots + \varphi(v_n)v_n^*.$$

Dann ist  $\varphi'(v_i) = \varphi(v_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , also  $\varphi = \varphi'$  und  $v_1^*, \dots, v_n^*$  spannen  $V^*$  auf. Seien umgekehrt  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit

$$\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* \equiv 0.$$

Dann gilt nach Auswertung auf  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq n$

$$(\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_i) = \lambda_i = 0.$$

Also sind  $v_1^*, \dots, v_n^*$  linear unabhängig. □

**Bemerkung.** Es gilt insbesondere

$$\dim(V) = \dim(V^*).$$

**Definition.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $W \subseteq V$  ein  $K$ -Untervektorraum. Wir definieren den orthogonalen Raum

$$W^\circ := \{ \varphi \in V^* \mid \varphi(W) = 0 \}.$$

**Beispiel.** Sei  $V = K^3$  mit kanonischer Basis  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  und dualer Basis  $e_1^*, e_2^*, e_3^*$ . Dann können wir jedes  $\varphi \in V^*$  schreiben als  $a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^*$  mit  $(a_1, a_2, a_3) \in K^3$ . Insbesondere  $V^* \cong V$ . Sei  $W = \{ \lambda(x_1, x_2, x_3) \mid \lambda \in K \}$  für ein  $(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \setminus \{0\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} W^\circ &= \left\{ (a_1, a_2, a_3) \in K^3 \mid (a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^*)(W) = 0 \right\} \\ &= \left\{ (a_1, a_2, a_3) \in K^3 \mid (a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^*)(x_1, x_2, x_3) = 0 \right\} \\ &= \left\{ (a_1, a_2, a_3) \in K^3 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

**Lemma 2.6.5.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein  $K$ -Untervektorraum. Dann gilt

$$\dim(U^\circ) = \dim(V) - \dim(U).$$

*Beweis.* Sei  $k = \dim(U)$  und  $v_1, \dots, v_k$  Basis von  $U$ . Seien  $v_{k+1}, \dots, v_n \in V$  so gewählt, dass  $v_1, \dots, v_n$  Basis von  $V$  ist. Sei  $v_1^*, \dots, v_n^*$  die zu  $v_1, \dots, v_n$  duale Basis.

**Behauptung 2.6.1.**  $U^\circ = \text{Span}(v_{k+1}^*, \dots, v_n^*)$ .

Sei  $\varphi \in \text{Span}(v_{k+1}^*, \dots, v_n^*)$ , d. h.

$$\varphi = \lambda_{k+1} v_{k+1}^* + \dots + \lambda_n v_n^*$$

mit  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K$ . Dann ist  $\varphi(u) = 0 \quad \forall u \in U$ , also  $\varphi \in U^\circ$ . Sei umgekehrt  $\varphi \in U^\circ$ . Schreibe  $\varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Da  $\varphi \in U^\circ$ , gilt

$$\varphi(v_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq k,$$

also  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$  und  $\varphi \in \text{Span}(v_{k+1}^*, \dots, v_n^*)$ . Da  $v_{k+1}^*, \dots, v_n^*$  linear unabhängig sind, gilt

$$\dim(U^\circ) = n - k = \dim(V) - \dim(U). \quad \square$$

**Frage.** Was erhalten wir, wenn wir den Dualraum zum Dualraum  $(V^*)^*$ .

**Definition.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Wir nennen  $V^{**} := (V^*)^*$  den *Bidualraum* zu  $V$ . Sei  $v \in V$ . Dann induziert  $v$  eine Abbildung

$$\begin{aligned} V^* &\rightarrow K \\ \varphi &\rightarrow \varphi(v). \end{aligned}$$

Wir definieren damit die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \iota: V &\rightarrow V^{**} \\ v &\rightarrow w \end{aligned}$$

durch  $\iota_v(\varphi) = \varphi(v) \quad \forall \varphi \in V^*$ .

**Satz 2.6.6.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Dann ist die kanonische Abbildung

$$\iota: V \rightarrow V^{**}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen. Für jede Untervektorraum  $W \leq V$  gilt

$$(W^\circ)^\circ = \iota(W).$$

*Beweis.*  $\iota$  ist injektiv. Sei  $v \in V \setminus \{0\}$ . Ergänze  $v$  zu einer Basis von  $V$  durch  $v, v_2, \dots, v_n$ . Dann ist  $v^*, v_2^*, \dots, v_n^*$  Basis von  $V^*$  und  $\iota_v(v^*) = v^*(v) = 1$ , also  $\iota_v \neq 0$ . Es ist

$$\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = V^*,$$

also ist  $\iota$  ein Isomorphismus.

Sei  $W \leq V$  ein  $K$ -Untervektorraum. Dann ist  $\iota(W) \subseteq (W^\circ)^\circ$ , denn für  $w \in W$  und  $\varphi \in W^\circ$  gilt  $\iota_w(\varphi) = \varphi(w) = 0$ . Es ist

$$\begin{aligned} \dim(W^\circ) &= \dim(V^*) - \dim(W) \\ &= \dim(V) - (\dim(V) - \dim(W)) \\ &= \dim(W), \end{aligned}$$

also  $\iota(W) = (W^\circ)^\circ$ . □

**Frage.** Was bedeutet Dualität für die zu  $V$  und  $V^*$  gehörenden projektiven Räume?

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit dualen Vektorraum  $V^*$ . Elemente von  $\mathbb{P}(V^*)$  haben die Form  $K \cdot \varphi$  mit  $\varphi: V \rightarrow K$  eine lineare Abbildung  $\neq 0$ . Sei

$$W := \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \}.$$

Dann ist auch für  $\lambda \in K \setminus \{0\}$

$$W = \{ v \in V : (\lambda\varphi)(v) = 0 \}$$

und  $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$  ist eine projektive Hyperebene. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{P}(V^*) &\rightarrow \{ \text{Hyperebenen in } \mathbb{P}(V) \} \\ K \cdot \varphi &\mapsto \mathbb{P}(\{ v \in V : \varphi(v) = 0 \}). \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\alpha$  ist bijektiv, d. h.

$$\text{Punkte in } \mathbb{P}(V^*) \leftrightarrow \text{Hyperebenen in } \mathbb{P}(V).$$

**Idee.** Wähle eine Projektivität

$$\mathbb{P}(V^*) \cong \mathbb{P}(V)$$

oder etwas allgemeiner:

Sei  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$  eine Semiprojektivität induziert durch eine semilineare bijektive Abbildung  $F: V \rightarrow V^*$ , d.h.  $f = \mathbb{P}(F)$ . Sei  $Z \subseteq \mathbb{P}(V)$  projektiver Unterraum der Form  $Z = \mathbb{P}(W)$  mit  $W \leq V$  ein  $K$ -Untervektorraum.

Dann ist  $F(W) \subseteq V^*$  ebenfalls  $K$ -Untervektorraum mit  $\dim(W) = \dim(F(W))$  und  $F(W)^\circ \subseteq V^{**}$   $K$ -Untervektorraum der Dimension

$$\dim(F(W)^\circ) = \dim(V) - \dim(F(W)) = \dim(V) - \dim(W).$$

Wir verwenden die kanonische Abbildung  $\iota: V \rightarrow V^{**}$ , um  $V$  und  $V^{**}$  mit einander zu identifizieren.

Dann ist

$$F(W)^\circ = \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \quad \forall \varphi \in F(W) \}.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \sigma_f: \mathcal{P}(V) &\rightarrow \mathcal{P}(V) \\ Z = \mathbb{P}(W) &\mapsto \mathbb{P}(F(W)^\circ). \end{aligned}$$

**Lemma 2.6.7.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$  eine Semiprojektivität, induziert durch eine bijektive semilineare Abbildung  $F: V \rightarrow V^*$ . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma_f: \mathcal{P}(V) &\rightarrow \mathcal{P}(V) \\ Z = \mathbb{P}(W) &\mapsto \mathbb{P}(F(W)^\circ). \end{aligned}$$

eine Korrelation.

*Beweis.* Seien  $W, W' \leq V$   $K$ -Untervektorraum mit

$$F(W)^\circ = F(W')^\circ.$$

Dann ist

$$F(W) = (F(W)^\circ)^\circ = \left( F(W')^\circ \right)^\circ = F(W'),$$

also  $W = W'$  und  $\sigma_f$  ist injektiv.

Sei nun  $U \leq V$   $K$ -Untervektorraum. Dann ist

$$F^{-1}(U^\circ) \subseteq V \tag{2.4}$$

$K$ -Untervektorraum mit

$$\sigma_f(\mathbb{P}(F^{-1}(U^\circ))) = \mathbb{P}(U)$$

also  $\sigma_f$  surjektiv.

Für zwei projektive Unterräume  $Z = \mathbb{P}(W), Z' = \mathbb{P}(W') \in \mathcal{P}(V)$  gilt

$$\begin{aligned} Z' \subseteq Z &\iff W' \subseteq W \\ &\iff F(W') \subseteq F(W) \\ &\iff F(W')^\circ \supseteq F(W)^\circ \\ &\iff \sigma_f(Z') \supseteq \sigma_f(Z). \end{aligned} \quad \square$$

**Beispiel.** Sei  $V = K^3$  mit Basis  $e_1, e_2, e_3$  und  $e_1^*, e_2^*, e_3^*$  zugehörige Basis von  $V^*$  mit  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ . Sei  $F: V \rightarrow V^*$ ,  $K$ -linear, gegeben durch

$$e_i \mapsto e_i^* \quad 1 \leq i \leq 3$$

und

$$f = \mathbb{P}(F): \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*). \\ \parallel \qquad \parallel \\ \mathbb{P}_2(K) \qquad \mathbb{P}_2(K)$$

Dann ist  $\sigma_f: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$  die am Anfang dieses Abschnitts verwendete Korrelation.

**Satz 2.6.8.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim_K(V) \geq 3$ . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \beta: \{ \text{Semiprojektivitäten } f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \} &\rightarrow \{ \text{Korrelationen } \sigma: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V) \} \\ f &\mapsto \sigma_f \end{aligned}$$

bijektiv. (Notation wie oben).

*Beweisidee.* Wir konstruieren eine Umkehrabbildung

$$\gamma: \{ \text{Korrelationen } \sigma: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V) \} \rightarrow \{ \text{Semiprojektivitäten } f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \}.$$

Sei  $\sigma: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$  eine Korrelation und  $p \in \mathbb{P}(V)$ . Nach Lemma 2.6.3 ist

$$\dim(\sigma(p)) = \dim(\mathcal{P}(V)) - 1,$$

also  $\sigma(p) \subseteq \mathbb{P}(V)$  Hyperebene. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\begin{aligned} f_\sigma &:= \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*) \\ p &\mapsto \sigma(p) \end{aligned}$$

indem wir Hyperebenen in  $\mathbb{P}(V)$  mit Punkten in  $\mathbb{P}(V^*)$  wie oben identifizieren.

**Ziel.** Zeige, dass  $f_\sigma$  eine Semiprojektivität ist.

Seien  $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{P}(V)$  in einer Geraden  $L \subseteq \mathbb{P}(V)$  enthalten. Dann  $\sigma(p_0), \sigma(p_1), \sigma(p_2) \supseteq \sigma(L)$ , wobei  $\dim(\sigma(L)) = \dim(\mathbb{P}(V)) - 2$ . Also sind  $\sigma(p_0), \sigma(p_1), \sigma(p_2)$  kollinear.

Es folgt, dass  $f_0$  eine Kollineation ist und nach dem Hauptsatz der projektiven Geometrie ist  $f_0$  Semiprojektivität. Definiere  $\gamma(\sigma) := f_\sigma$ . Dann ist  $\gamma$  Umkehrabbildung zu  $\beta$ .  $\square$

**Vorlesung 19**

Fr 26.06. 10:15

**§2.7 Quadriken**Datei 34:  
Projektive  
Quadriken  
Teil 1

Sei  $K$  ein Körper und  $Z \subseteq \mathbb{P}_n(K)$  ein projektiver Unterraum. Dann ist  $Z = \mathbb{P}(W)$  für  $Z \subseteq \mathbb{P}_n(K)$  ein projektiver Unterraum. Dann ist  $Z = \mathbb{P}(W)$  für  $W \leq K^{n+1}$  ein  $K$ -Untervektorraum. Sei  $W$  gegeben durch

$$W = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \mid a_{i0}x_0 + \dots + a_{in}x_n = 0, \quad 1 \leq i \leq r \right\}$$

für Koeffizienten  $a_{ij} \in K$ ,  $1 \leq i \leq r$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Wir können  $Z$  auffassen als

$$Z = \left\{ \underbrace{((x_0 : \dots : x_n))}_{\in Z} \in \mathbb{P}_n(K) : a_{i0}x_0 + \dots + a_{in}x_n = 0 \quad 1 \leq i \leq r \right\}.$$

**Frage.** Was passiert, wenn wir die *linearen* Formen  $a_{i0}x_0 + \dots + a_{in}x_n$  durch allgemeine Polynome in  $x_0, \dots, x_n$  ersetzen.

*In diesem Abschnitt:*  $r = 1$  und wir ersetzen die Linearform  $a_{10}x_0 + \dots + a_{1n}x_n = 0$  durch ein *quadratisches Polynom*.

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper. Wir nenne einen Ausdruck der Form

$$P(x_0, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

mit  $\alpha_{ij} \in K$ ,  $0 \leq i \leq j \leq n$  ein homogenes Polynom zweiten Grades / eine quadratische Form in den Unbestimmten  $x_0, \dots, x_n$ .

**Beispiel.**  $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$  ist ein homogenes Polynom zweiten Grades, aber  $x_0^2 + x_1^2 + 2x_2$  nicht.

**Bemerkungen.** i) Quadratische Formen in den Unbestimmten  $x_0, \dots, x_n$  können parametrisiert werden durch Tupel

$$(\alpha_{ij})_{0 \leq i \leq j \leq n} \in K^{\binom{n+2}{2}},$$

also durch  $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$  Koeffizienten.

ii) Jedes Polynom  $P(x_0, \dots, x_n) \in K[x_0, \dots, x_n]$  induziert eine Abbildung

$$K^{n+1} \rightarrow K \quad (2.5)$$

$$K^{n+1} \ni (t_0, \dots, t_n) \mapsto P(t_0, \dots, t_n) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} t_i t_j \in K \quad (2.6)$$

Sei  $P(x_0, \dots, x_n)$  eine quadratische Form und betrachte die Nullstellenmenge

$$X = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \mid P(x_0, \dots, x_n) = 0 \right\}.$$

Für  $(x_0, \dots, x_n) \in X \setminus \{0\}$  ist dann die gesamte Gerade  $K \cdot (x_0, \dots, x_n)$  in  $X$  enthalten, denn für  $\lambda \in K$  ist

$$P(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^2 \underbrace{P(x_0, \dots, x_n)}_{=0} = 0$$

**Definition.** Wir nennen eine Teilmenge  $C \subseteq K^{n+1}$  ein Kegel falls für jedes  $(x, \dots, x_n) \in C$  und  $\lambda \in K$  gilt

$$(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \in C.$$

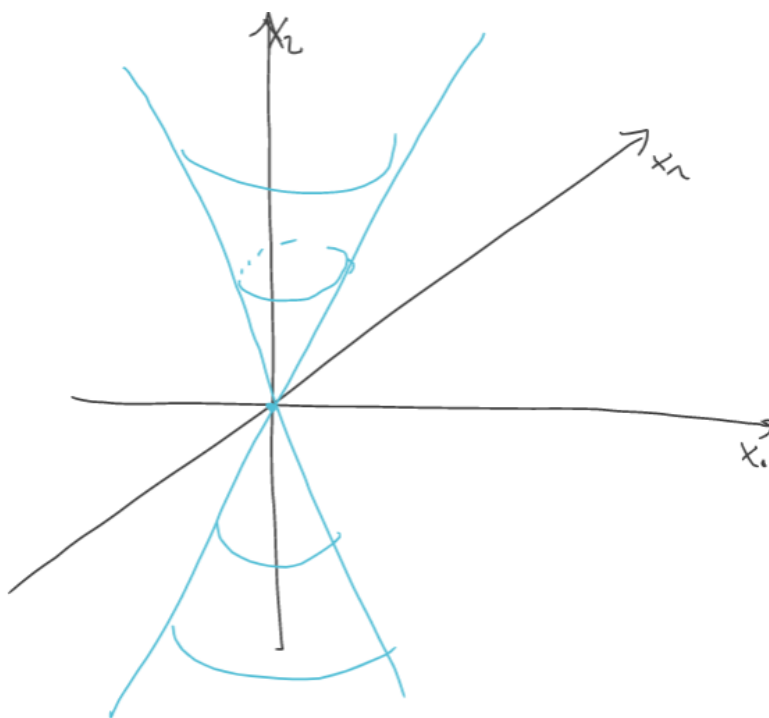
**Bemerkung.** Jeder Kegel  $C \neq \emptyset$  enthält  $(0, \dots, 0)$ .

**Beispiel 2.7.1.** Sei  $P = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$  und

$$C = \left\{ (x_0, x_1, x_2) \in K^3 \mid P(x_0, x_1, x_2) = 0 \right\}.$$

Dann ist  $C$  ein Kegel.

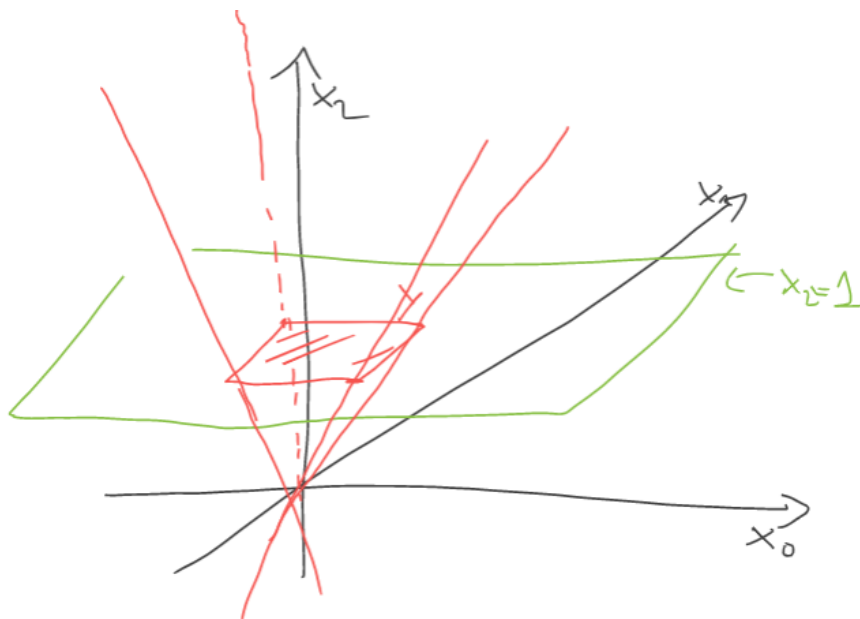




**Beispiel 2.7.2.** Sei  $Y \subseteq K^2$  und

$$X := \left\{ (ty_1, ty_2, t) \in K^3 \mid t \in K, (y_1, y_2) \in Y \right\}.$$

Dann ist  $X \subseteq K^3$ .



Sei  $C \subseteq K^{n+1}$  ein Kegel. Dann definieren wir

$$\mathbb{P}(C) := \{ K \cdot v \in \mathbb{P}_n(K) \mid K \cdot \subseteq C \}.$$

**Definition.** Sei  $P(x_0, \dots, x_n)$  ein homogenes Polynom zweiten Grades mit Koeffizienten in einem Körper  $K$ ,

$$C := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \mid P(x_0, \dots, x_n) = 0 \right\}.$$

Dann nennen wir  $Q := \mathbb{P}(C)$  eine (projektive) Quadrik.

**Bemerkung.** Ist  $P(x_0, \dots, x_n)$  eine quadratische Form, dann schreiben wir auch

$$Q = \{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid P(x_0, \dots, x_n) = 0 \}.$$

**Konvention.** Sei für den Rest des Abschnitts 2.7  $K$  ein Körper mit  $\text{char}(K) \neq 2$ .

### Matrixdarstellung von projektiven Quadriken

**Beispiel.** Betrachte die projektive Quadrik

$$Q = \left\{ (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(K) \mid x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \right\}$$

Dann können wir  $Q$  auch schreiben als  $Q = \mathbb{P}(C)$  mit

$$C = \left\{ (x_0, x_1, x_2) \in K^3 \mid x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Im Allgemeinen: Sei

$$P(x_0, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

ein homogenes Polynom zweiten Grades über einem Körper  $K$  ( $\text{char } K \neq 2$ ). Wir definieren eine Matrix

$$A = (\alpha_{ij})_{0 \leq i, j \leq n} \in M_{(n+1) \times (n+1)}(K)$$

durch

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ii} & i = j \\ \frac{1}{2} \alpha_{ij} & i < j \\ \frac{1}{2} \alpha_{ji} & i > j. \end{cases}$$

Schreibe  $\underline{x} = (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1}$ . Dann ist

$$P(x_0, \dots, x_n) = {}^t \underline{x} A \underline{x}.$$

Sei  $Q = \mathbb{P}(C)$  mit

$$C = \left\{ \underline{x} \in K^{n+1} \mid {}^t \underline{x} A \underline{x} = 0 \right\}$$

und

$$Q = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid {}^t \underline{x} A \underline{x} = 0 \right\}.$$

**Bemerkung.** i) Für  $\lambda \in K^\star$  gilt auch

$$Q = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid {}^t \underline{x} (\lambda \cdot A) \underline{x} = 0 \right\}.$$

ii) Wir können  $A$  als symmetrische Bilinearform  $S$  auffassen, indem wir

$$S(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t \underline{x} A \underline{y}$$

setzen für  $\underline{x}, \underline{y} \in K^{n+1}$ .

**Lemma 2.7.1.** Sei  $K$  ein Körper,  $\text{char } K \neq 2$ ,  $f: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K)$  eine Projektivität und  $Q \subseteq \mathbb{P}_n(K)$  eine Quadrik. Dann ist auch  $f(Q) \subseteq \mathbb{P}_n(K)$  eine Quadrik.

*Beweis.* Sei  $f = \mathbb{P}(F)$  für einen Vektorraumisomorphismus  $F: K^{n+1} \rightarrow K^{n+1}$ . Sei  $S \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$  die Matrix, die  $F$  in der Standardbasis beschreibt, d. h.  $F(\underline{x}) = S \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in K^{n+1}$ . Sei  $A \in \mathrm{M}_{(n+1) \times (n+1)}(K)$  eine symmetrische Matrix, sodass gilt

$$Q = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid {}^t \underline{x} A \underline{x} = 0 \right\}.$$

Dann ist  $f(Q) = \mathbb{P}(F(C))$  mit

$$\begin{aligned} F(C) &= \left\{ F(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \mid {}^t x A \underline{x} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \underbrace{S \cdot \underline{x}}_{=\underline{y} \Rightarrow \underline{x} = S^{-1} \underline{y}} \in K^{n+1} \mid {}^t \underline{x} A \underline{x} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \underline{y} \in K^{n+1} \mid {}^t y^t S^{-1} A S^{-1} \underline{y} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Die Matrix  ${}^t S^{-1} A S^{-1}$  ist symmetrisch und es ist

$$f(Q) = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid P'(\underline{x}) = 0 \right\}$$

mit  $P'(\underline{x}) = {}^t \underline{x} {}^t S^{-1} A S^{-1} \underline{x}$ . □

**Ziel.** Verwende Koordinatentransformation  $f: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K)$  wie in Lemma 2.7.1 um eine projektive Quadrik  $Q$  in „möglichst einfacher Form“ zu beschreiben.

Ist  $Q = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid {}^t \underline{x} A \underline{x} = 0 \right\}$  für eine symmetrische Matrix  $A \in \mathrm{M}_{(n+1) \times (n+1)}(K)$ , so suchen wir eine Transformationsmatrix  $T \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ , sodass

$${}^t T A T$$

möglichst einfache Gestalt hat.

**Bemerkung.** Für  $K = \mathbb{R}$  entspricht dies einem Basiswechsel für die symmetrische Bilinearform  $s(\underline{x}, \underline{y}) := {}^t \underline{x} A \underline{y}$ .

## Hauptachsenform

Datei 35:  
Projektive  
Quadriken  
Teil 2

**Satz 2.7.2.** Sei  $Q \subseteq \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  eine Quadrik. Dann gibt es eine Koordinatentransformation

$$f: \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$$

und ganze Zahlen  $-1 \leq k \leq m \leq n$ , sodass

$$f(Q) = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid x_0^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2 = 0 \right\}.$$

Zu einer Quadrik  $Q \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  gibt es eine Koordinatentransformation  $g: \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  und eine ganze Zahl  $-1 \leq m \leq n$  mit

$$g(Q) = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \mid x_0^2 + \dots + x_m^2 = 0 \right\}$$

**Bemerkung.** Im Fall  $K = \mathbb{R}$  kann man Satz 2.7.2 aus der Hauptachsenform für symmetrische reelle Matrizen ableiten. Allgemeiner zeigen wir folgendes Resultat:

**Lemma 2.7.3.** Sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char } K \neq 2$ ,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum der Dimension  $n$  und  $s: V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform. Dann existiert eine Basis  $v_1, \dots, v_n \in V$  mit

$$s(v_i, v_j) = 0 \quad i \neq j.$$

*Beweis.* Induktion nach  $\dim(V) = n$ .

$n = 0, n = 1$  ✓.

$n \geq 2$  Fall a)  $s(v, v) = 0$  für alle  $v \in V$ . Für beliebige  $v_1, v_2 \in V$  berechnen wir

$$s(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \left( \underbrace{s(v_1 + v_2, v_1 + v_2)}_{=0} - \underbrace{s(v_1, v_1)}_{=0} - \underbrace{s(v_2, v_2)}_{=0} \right) = 0.$$

Wähle nun eine beliebige Basis für  $V$ .

Fall b) Es existiert eine Vektor  $v_1 \in V$  mit  $s(v_1, v_1) \neq 0$ . Sei

$$W := \{ w \in V \mid s(v_1, w) = 0 \}.$$

**Behauptung 2.7.1.** Es gilt  $V = K \cdot v_1 \oplus W$ .

denn:

- $K \cdot v_1 \cap W = \{ 0 \}$
- für  $v \in V$  ist  $\tilde{v} = \frac{s(v_1, v)}{s(v_1, v_1)} \cdot v_1 \in K \cdot v_1$  und

$$S(v_1, v - \tilde{v}) = s(v_1, v) - s(v_1, v_1) \cdot \frac{s(v_1, v)}{s(v_1, v_1)} = 0$$

also  $v - \tilde{v} \in W$  und  $v \in K \cdot v_1 + W$ .

Aus  $V = K v_1 \oplus W$  folgt

$$\dim(W) = n - 1.$$

Nach Induktionsannahme existiert eine Basis  $v_2, \dots, v_n$  von  $W$  mit  $s(v_i, v_j) = 0$  für  $2 \leq i, j \leq n$ . Nach Konstruktion von  $W$  gilt auch

$$s(v_i, v_j) = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

und  $v_1, \dots, v_n$  ist Basis von  $V$ . □

**Vorlesung 20**

Di 30.06. 10:15

*Beweis von Satz 2.7.2.* Sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char } K \neq 2$ ,  $A \in M_{(n+1) \times (n+1)}(K)$  eine symmetrische Matrix und

$$Q = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid {}^t \underline{x} A \underline{x} = 0 \right\}.$$

Sei  $s: K^{n+1} \times K^{n+1} \rightarrow K$  die durch  $s(\underline{x}, \underline{y}) := {}^t \underline{x} A \underline{y}$  definierte symmetrische Bilinearform. Nach Lemma 2.7.3 existiert eine Basis  $v_0, \dots, v_n$  von  $K^{n+1}$  mit

$${}^t v_i A v_j = s(v_i, v_j) = 0 \quad i \neq j \quad 0 \leq i, j \leq n.$$

Fall  $K = \mathbb{R}$  Nach Permutation der Indizes  $0 \leq i \leq n$  können wir annehmen, dass es ganze Zahlen  $-1 \leq k \leq m \leq n$  gibt mit

$${}^t v_i A v_i = \begin{cases} > 0 & 0 \leq i \leq k \\ < 0 & k+1 \leq i \leq m \\ = 0 & m+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Setze

$$\underline{w}_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|{}^t v_i A v_i|}} v_i & 0 \leq i \leq m \\ v_i & m+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Definiere eine Matrix  $S \in GL_{n+1}(K)$  durch  $S^{-1} = (\underline{w}_0, \dots, \underline{w}_n)$ . Dann induziert  $S$  einen Isomorphismus  $F: K^{n+1} \rightarrow K^{n+1}$  und die Projektivität  $f = \mathbb{P}()$  hat die Eigenschaft

$$f(Q) = \left\{ (y_0 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid y_0^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_m^2 = 0 \right\}.$$

Fall  $K = \mathbb{C}$  Nach Permutation der Indizes  $0 \leq i \leq n$  können wir annehmen, dass es eine ganze Zahl  $-1 \leq m \leq n$  gibt mit

$${}^t v_i A v_i = \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq i \leq m \\ = 0 & m < i \leq n. \end{cases}$$

Wähle  $\lambda_i \in C^*$ ,  $0 \leq i \leq m$ , mit

$$\lambda_i^2 \underbrace{({}^t v_i A v_i)}_{\neq 0} = 1.$$

Setze

$$\underline{w}_i = \begin{cases} \lambda_i v_i & 0 \leq i \leq m \\ v_i & m < i \leq n. \end{cases}$$

Definiere wie oben

$$S^{-1} := (\underline{w}_0, \dots, \underline{w}_n) \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}). \quad (2.7)$$

Die zu  $\mathrm{pNiceMatrixS}$  gehörende Koordinatentransformation hat dann die Eigenschaft

$$f(Q) = \left\{ (y_0 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \mid y_0^2 + \dots + y_m^2 = 0 \right\}. \quad \square$$

Lemma 2.7.3 ist auch für Körper  $K \neq \mathbb{R}, \mathbb{C}$  nützlich.

**Beispiel.** Sei  $p$  eine Primzahl  $\neq 2$  und  $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Betrachte eine Quadrik  $Q \subseteq \mathbb{P}_n(K)$  gegeben durch

$$Q = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid {}^t \underline{x} A \underline{x} = 0 \right\}$$

mit einer symmetrischen Matrix

$$A \in \mathrm{M}_{n+1 \times n+1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Nach Lemma 2.7.3 gibt es eine Koordinatentransformation

$$f: \mathbb{P}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad (2.8)$$

sodass

$$f(Q) = \left\{ (y_0 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid {}^t \underline{y} D \underline{y} = 0 \right\}$$

mit einer Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \beta_0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n \end{pmatrix},$$

$\beta_i \in K, 0 \leq i \leq n$ . Sei  $\Gamma = \{x^2 \mid x \in K^*\} \subseteq K^*$ . Dann ist  $|\Gamma| = \frac{p-1}{2}$ , denn die Abbildung

$$\begin{aligned} K^* &\rightarrow \Gamma \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern  $\{\pm 1\}$  und induziert eine Bijektion

$$K^* \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \Gamma.$$

In der Matrix  $D$  können wir die Indizes so umordnen, dass es ganze Zahlen  $-1 \leq k \leq m \leq n$  gibt mit

$$\beta \begin{cases} \in \Gamma & 0 \leq i \leq k \\ \in K^* \setminus \Gamma & k+1 \leq i \leq m \\ = 0 & m+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$



Für  $0 \leq i \leq k$  wähle  $\lambda_i \in K^\star$  mit  $\beta_i = \lambda_i^2$ . Sei  $r \in K^\star \setminus \Gamma$ . Für  $k+1 \leq i \leq m$  wähle  $\lambda_i \in K$  mit  $\beta_i = r\lambda_i^2$ . Setze

$$\begin{aligned} y_i &:= \lambda_i^{-1} z_i & 0 \leq i \leq m \\ y_i &:= z_i & m < i \leq n. \end{aligned}$$

Nach Anwendung dieser Koordinatentransformation hat die Quadrik  $Q$  die Form

$$\left\{ (z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid z_0^2 + \dots + z_k^2 + r(z_{k+1}^2 + \dots + z_m^2) = 0 \right\}.$$

**Bemerkung.** In Satz 2.7.2 können wir jede Quadrik  $Q \subseteq \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  nach einer Koordinatentransformation auf eine der Formen

$$x_0^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2 = 0 \quad (*)$$

mit  $-1 \leq k \leq m \leq n$  reduzieren.

Unterschiedliche Polynome  $(*)$  können die gleiche Quadrik  $Q$  beschreiben. Sei  $-1 \leq m \leq n$  fest und z. B. führt dann  $k = m$  auf

$$\begin{aligned} Q &= \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid x_0^2 + \dots + x_m^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid x_0 = \dots = x_m = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid -x_0^2 - \dots - x_m^2 = 0 \right\}, \end{aligned}$$

dies entspricht der Wahl  $k = -1$  und  $m$  wie oben.

**Definition.** Wir nennen zwei Quadriken  $Q, Q' \subseteq \mathbb{P}_n(K)$  geometrisch äquivalent, wenn es eine Projektivität  $f: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K)$  gibt mit  $f(Q) = Q'$ .

**Ziel 2.7.1.** Klassifiziere Quadriken  $Q \subseteq \mathbb{P}_n(K)$  für  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  bis auf geometrische Äquivalenz.

**Lemma 2.7.4.** Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ ,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$s, s': V \times V \rightarrow K$$

symmetrische Bilinearformen. Sei angenommen

$$\begin{aligned} C &:= \{ v \in V \mid s(v, v) = 0 \} \\ &= \{ v \in V \mid s'(v, v) = 0 \}. \end{aligned}$$

Angenommen, es gibt Elemente  $v_0 \in C$ ,  $w \in V$  mit

$$S(v_0, w) \neq 0.$$

Dann  $\exists \rho \in K^\star$  mit  $S' = \rho \cdot S$ .

Datei 36:  
Projektive  
Quadriken  
Teil 3

**Beispiel.**  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$s(\underline{x}, \underline{y}) = \lambda_0 x_0 y_0 + \lambda_1 x_1 y_1 + \cdots + \lambda_m x_m y_m$$

mit  $m \leq n$  und  $\lambda_0, \dots, \lambda_m > 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} C &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda_0 x_0^2 + \cdots + \lambda_m x_m^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = \cdots = x_m = 0 \right\} \end{aligned}$$

und jede Bilinearform

$$s'(\underline{x}, \underline{y}) = \lambda'_0 x_0 y_0 + \cdots + \lambda'_m x_m y_m$$

mit  $\lambda'_0, \dots, \lambda'_m$  induziert den gleichen Kegel  $C$ .

**Bemerkung.** Seien  $s, V$  wie in Lemma 2.7.4 Setzte

$$V_0 := \{ v \in V \mid s(v, w) = 0 \quad \forall w \in W \}.$$

Dann gilt  $V_0 \subseteq C = \{ v \in V \mid s(v, v) = 0 \}$  und  $V_0 \subseteq V$  ist  $K$ -linearer Untervektorraum. Die Existenz von  $v_0 \in C$ ,  $w \in V$  mit  $s(v_0, w) \neq 0$  ist dann äquivalent zu  $V_0 \subsetneq C$ .

*Beweis.* Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$  und setze

$$q(v) := s(v, v), \quad q'(v) := s'(v, v) \quad \forall v \in V.$$

Sei  $v_0 \in C$ , sodass  $s(v_0, w) \neq 0$  für mindestens ein  $w \in V$ . Für  $w \in V$  definiere die Gerade

$$g_w := \{ w + \lambda v_0 \mid \lambda \in K \}.$$

Wir berechnen die Schnittpunkte von  $g_w$  mit  $C$ . Es ist

$$\begin{aligned} w + \lambda v_0 \in C &\iff q(\underbrace{w + \lambda v_0}_{\parallel}) = 0 \\ &\quad \underbrace{q(w) + 2\lambda s(v_0, w) + \lambda^2 q(v_0)}_{=0} \\ &\iff q(w) + 2\lambda s(v_0, w) = 0. \end{aligned}$$

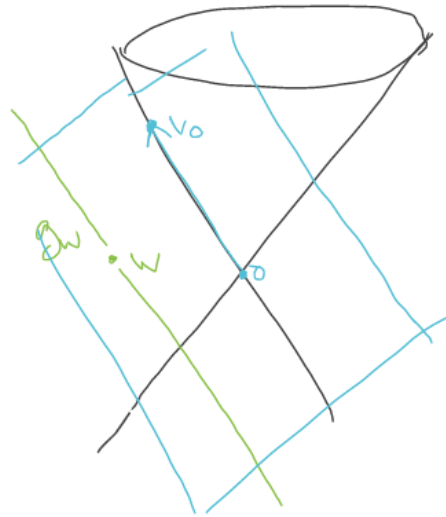
Es gilt  $|g_w \cap C| = 1$  genau dann, wenn  $s(v_0, w) \neq 0$ . Wir können genauso mit  $s'$  anstatt  $s$  argumentieren und erhalten

$$s(v_0, w) = 0 \iff s'(v_0, w) = 0$$

für  $w \in V$ .

Definiere

$$\begin{aligned} H &:= \{ w \in V \mid s(v_0, w) = 0 \} \\ &= \{ w \in V \mid s'(v_0, w) = 0. \} \end{aligned}$$



$H$  ist eine Hyperebene. Also  $\exists \rho \in K^\star$  mit

$$s'(v_0, w) = \rho \cdot s(v_0, w) \quad \forall w \in V. \quad (1)$$

Nach obigen Überlegungen hat für  $w \in V$  die Gleichung

$$2\lambda s(v_0, w) + q(w) = 0$$

die gleiche Lösungsmenge wie

$$2\lambda s'(v_0, w) + q'(w) = 0.$$

Daraus folgt

$$s(v_0, w)q'(w) = s'(v_0, w)q(w) \quad \forall w \in W. \quad (2)$$

Aus (2) und (2) folgt

$$q'(w) = \rho \cdot q(w) \quad \forall w \in V \setminus H.$$

Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} h: V &\rightarrow K \\ w &\mapsto q'(w) - \rho q(w). \end{aligned}$$

$h$  ist stetig und erfüllt  $h|_{W \setminus H} = 0$ . Daraus folgt  $h(w) = 0 \quad \forall w \in W$ , also  $q'(w) = \rho \cdot q(w) \quad \forall w \in V$ .

Für beliebige Vektoren  $v, w \in V$  berechnen wir

$$\begin{aligned} s'(v, w) &= \frac{1}{2}(s'(v+w, v+w) - s'(v, v) - s'(w, w)) \\ &= \frac{1}{2}(q'(v+w) - q'(v) - q'(w)) \\ &= \frac{1}{2}\tau(q(v+w) - q(v) - q(w)) \\ &= \rho(s(v, w)). \end{aligned} \quad \square$$

**Definition / Erinnerung.** Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix. Wir definieren die Signatur von  $A$  als

$$\text{sign } A := \#\text{positive Eigenwerte von } A - \#\text{negative Eigenwerte von } A \quad (2.10)$$

(jeweils mit Vielfachheit).

**Satz 2.7.5 (Klassifikations-Theorem für reelle und komplexe projektive Quadriken).**

Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$  und  $A_1, A_2 \in M_{(n+1) \times (n+1) \times (n+1) \times (n+1)}(K)$  symmetrische Matrizen. Definiere

$$Q_i := \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid {}^t \underline{x} A_i \underline{x} = 0 \right\} \quad i = 1, 2.$$

**Fall  $K = \mathbb{R}$**  Die Quadriken  $Q_1$  und  $Q_2$  sind geometrisch äquivalent genau dann, wenn

$$\text{rang } A_1 = \text{rang } A_2$$

und

$$|\text{sign } A_1| = |\text{sign } A_2|.$$

**Fall  $K = \mathbb{C}$**   $Q_1$  und  $Q_2$  sind geometrisch äquivalent genau dann, wenn

$$\text{rang } A_1 = \text{rang } A_2$$

**Korollar 2.7.6.** Jede Quadrik in  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  ist genau eine der Quadriken

$$\left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid x_0^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2 = 0 \right\}$$

mit  $-1 \leq \frac{m-1}{2} \leq k \leq m \leq n$  geometrisch äquivalent.

Jede Quadrik in  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  ist genau eine der Quadriken

$$\left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid x_0^2 + \dots + x_m^2 = 0 \right\}$$

mit  $-1 \leq m \leq n$  geometrisch äquivalent.

*Beweis von Satz 2.7.5 für  $K = \mathbb{R}$ .* Seien  $A_1, A_2 \in M_{(n+1) \times (n+1) \times (n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R})$  symmetrische Matrizen mit  $\text{rang } A_1 = \text{rang } A_2$  und  $|\text{sign } A_1| = |\text{sign } A_2|$ . Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation reeller symmetrischer Matrizen, existieren  $S_1, S_2 \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$  mit

$$B_i := {}^t S_i^{-1} A_i S_i^{-1},$$

und

$$B_i = \begin{pmatrix} I_{k_i+1} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{m_i-k_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei  $-1 \leq k_i \leq m_i \leq n$  und  $I_l$  die  $l$ -dimensionale Einheitsmatrix ist.

Nach dem Sylversterschen Trägheitssatz (AGLA I) folgt

$$m_1 + 1 = \text{rang } A_1 = \text{rang } A_2 = m_2 + 1.$$

und

$$|2k_1 + 1 - m_1| = |\text{sign}(A_1)| = |\text{sign}(A_2)| = |2k_2 + 1 - m_2|.$$

Sei  $m = m_1 = m_2$  und  $k$  gegeben durch

$$2k + 1 - m = |2k_1 + 1 - m| = 2|2k_2 + 1 - m|.$$

Dann sind

$$Q_i = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t x A_i {}^t x = 0 \right\} \quad i = 1, 2$$

geometrisch äquivalent zu

$$Q = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid x_0^2 + \dots + x_k^2 - x_{k-1}^2 - \dots - x_m^2 = 0 \right\}.$$

Seien  $Q_1, Q_2$  geometrisch äquivalent. Wir können annehmen, dass  $Q_1$  gegeben ist durch

$$Q_1 = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid x_0^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2 = 0 \right\}$$

mit  $-1 \leq \frac{m-1}{2} \leq k \leq m \leq n$ , d. h.

$$Q_1 = \left\{ (x_0 : \dots : x_j) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t \underline{x} A_1 \underline{x} = 0 \right\}$$

mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} I_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei

$$Q_2 = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t \underline{x} A_2 \underline{x} = 0 \right\}$$

und  $f: \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  eine Projektivität mit  $f(Q_2) = Q_1$ . Dann gibt es  $T \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ , sodass

$$f(Q_2) = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t \underline{x} T A_2 T \underline{x} = 0 \right\}.$$

Sei  $A' := {}^t T A_2 T$ . Sei  $k \neq m$ . Dann ist  $0 \leq k < m$  und die Vektoren

$$\begin{aligned} v_0 &:= \left( \underbrace{\phantom{1,0,\dots,n,1,0,\dots,0}}_{m \text{ Einträge } 1,0,\dots,n,1,0,\dots,0} \right) \\ w &:= (1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

erfüllen

$${}^t v_0 A_1 v_0 = 0 \quad {}^t v_0 A_1 w = 1.$$

Aus Lemma 2.7.4 folgt, dass

$$A' = \rho A_1 \quad \rho \in \mathbb{R}^*.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{rang} A' &= \mathrm{rang}(A_1) \\ |\mathrm{sign} A'| &= |\mathrm{sign} A_1| \end{aligned}$$

und nach dem Sylversterschen Trägheitsgesetz folgt

$$\mathrm{rang} A_2 = \mathrm{rang} A' = \mathrm{rang} A_1$$

und

$$|\mathrm{sign} A_2| = |\mathrm{sign} A'| = |\mathrm{sign} A_1|.$$

Sei  $k = m$ , also

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid x_0^2 + \dots + x_m^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid x_0 = \dots = x_m = 0 \right\} \end{aligned}$$

projektiver Unterraum der Dimension  $n - m - 1$ . Also ist auch  $f(Q_2)$  projektiver Unterraum der Dimension  $n - m - 1$ . Daraus folgt

$$\mathrm{rang}(A') = |\mathrm{sign} A'| = m + 1$$

und nach dem Sylversterschen Trägheitsgesetz

$$\begin{aligned} \mathrm{rang} A_2 &= \mathrm{rang} A' = m + 1 = \mathrm{rang} A_1 \\ |\mathrm{sign} A_2| &= |\mathrm{sign} A'| = m + 1 = |\mathrm{sign} A_1|. \end{aligned}$$

□

**Vorlesung 21**

Fr 03.07. 10:15

## Kapitel 3

### Exkurs: Exponentialabbildungen von Matrizen

Datei 37:  
Exponential-  
abbildungen  
Matrizen



**Motivation (mathematisches Pendel).**

$$F_{\text{tan}} = -mg \sin \alpha(t).$$

Für kleine Winkel  $\alpha(t)$  ersetze  $\sin \alpha(t)$  durch  $\alpha(t)$  und erhalte

$$\alpha''(t) = -g\alpha(t).$$

Sei  $v(t) = \alpha'(t)$  und erhalte

$$\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Allgemeiner sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ ,  $y_0 \in \mathbb{C}^n$ .

**Ziel.** Finde eine differenzierbare Funktion  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit  $\frac{dy}{dt} = A \cdot y(t)$  und  $y(0) = y_0$ .



**Spezialfall** ( $n = 1$ ). Setze  $(t) = y_0 e^{\overbrace{A}^{\mathbb{C}\mathbb{R}} t}$ .

**Idee** ( $n \geq 1$ ). Definiere

$$e^{At} := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}$$

( $A^0 := I_n$ ) und setze  $y(t) = e^{At} y_0$ .

**Formal:**

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\overbrace{A A^{i-1}}^{A A^{i-1}} t^{i-1}}{(i-1)!} = A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}. \quad (3.1)$$

**Frage.** Unter welchen Voraussetzungen konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}?$$

→ Wie kann man  $e^{At}$  für  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  berechnen? → Berechne  $\frac{d}{dt} e^{At}$ .

Sei im Folgenden  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ .

**Definition.** Für  $A \in M_{n \times n}(K)$  definiere

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots$$

Weiter definiere  $A^0 := I_n$  für alle  $A \in M_{n \times n}(K)$ .

**Lemma 3.0.1.** Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ . Dann ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  absolut konvergent (bzgl. einer Norm auf  $M_{n \times n}(K)$ ).

*Beweis.*  $M_{n \times n}(K) \simeq K^{n^2}$  als  $K$ -Vektorraum, als ind alle Normen auf  $M_{n \times n}(K)$  äquivalent. Sei  $\|\cdot\|$  die Operatornorm auf  $M_{n \times n}(K)$ , d. h.

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

mit  $\|x\|$  und  $\|Ax\|$  der euklidischen Norm. Für  $A, B \in M_{n \times n}(K)$  ist

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=K_1}^{K_2} \frac{A^k}{k!} \right\| &\leq \sum_{k=K_1}^{K_2} \frac{\overbrace{\|A^k\|}^{\leq \|A\|^k}}{k!} \\ &\leq \sum_{k=K_1}^{K_2} \frac{\overbrace{\|A\|}^{\in \mathbb{R}}^k}{k!} \rightarrow 0 \quad (K_1 \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

also ist  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  absolut konvergent.  $\square$

**Korollar 3.0.2.** Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$  und  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M_{n \times n}(K)$  gegeben durch  $t \mapsto e^{tA}$ . Dann ist  $\varphi$  eine differenzierbare Kurve mit

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

*Beweis.* Nach der absoluten Konvergenz gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} &= \frac{d \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}}{dt} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{t^{k-1} A^k}{k!} \\ &= A e^{tA}. \end{aligned} \quad \square$$

### Weitere Eigenschaften der Exponentialabbildung

**Lemma 3.0.3.** Seien  $A, B \in M_{n \times n}(K)$  und  $T \in GL_n(K)$ . Dann gilt

- a)  $e^0 = I_n$ .
- b)  $e^{tA} = t(e^A)$  bzw.  $\overline{e^A} = e^{\overline{A}}$  (für  $A \in M_{n \times n}(C)$ ).
- c)  $e^{TAT^{-1}} = T e^A T^{-1}$ .
- d)  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$  für  $A, B \in M_{n \times n}(K)$  mit  $AB = BA$ .
- e)  $e^A$  ist invertierbar mit  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$  und  $e^{mA} = (e^A)^m$  für  $n \in \mathbb{Z}$ .

Beweis. a)

$$e^0 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = I_n,$$

da  $A^0 := I_n$  für alle  $A \in M_{n \times n}(K)$ .

b)

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t(A^k)}{k!} \\ &= t \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \\ &= t(e^A), \end{aligned}$$

genauso für  $e^{\bar{A}}$ .

c)

$$\begin{aligned} e^{TAT^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{TAT^{-1}TAT^{-1}\dots}^{I_n}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{TA^kT^{-1}}{k!} \\ &= Te^AT^{-1}. \end{aligned}$$

d) Sei  $AB = BA$ . Betrachte

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{A^l B^{k-l}}{k!} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad AB=BA \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{A^l B^{k-l}}{l!(k-l)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^l B^{k-l}}{l! \underbrace{(k-l)!}_{l'!}} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{A^l B^{l'}}{l! (l')!} = e^A \cdot e^B
\end{aligned}$$

e) Für  $m \geq 0$  folgt

$$e^{mA} = (e^A)^m$$

induktiv aus d), denn  $(m-1)A$  und  $A$  kommutieren. Weiter ist

$$I_n = e^0 = e^{A-A} = e^A \cdot e^{-A}$$

$\uparrow$   
c)

nach d) also  $e^{-A} = (e^A)^{-1}$ . □

**Bemerkungen.** • Insbesondere

$$e^A \in \text{GL}_n(K)$$

für alle  $A \in M_{n \times n}(K)$ .

- Im Allgemeinen ist  $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ . Betrachte z. B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nachrechnen ergibt

$$e^{A+B} = I_3 + A + B + \frac{1}{2}C$$

und

$$\begin{aligned}
e^A \cdot e^B &= (I_3 + A)(I_3 + B) \\
&= I_3 + A + B + C.
\end{aligned}$$

**Satz 3.0.4.** Seien  $A, B \in M_{n \times n}(K)$  fest und  $t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für  $|t| \leq 1$

$$e^{tA} e^{tB} - e^{t(A+B)} = \frac{t^2}{2}(AB - BA) + O(t^3).$$

*Beweis.* Aus der Reihenentwicklung erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{t(A+B)} &= I_n + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A+B)^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k(A+B)^k}{k!}}_{=O(t^3)} \\ &= I_n + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + O(t^3) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{tB} &= \left( I_n + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + O(t^3) \right) \left( I_n + tB + \frac{t^2}{2}B^2 + O(t^3) \right) \\ &= I_n + tA + tB + t^2AB + \frac{1}{2}t^2(A^2 + B^2) + O(t^3). \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiele (zur Berechnung der Exponentialabbildung).** i) Sei  $D \in M_{n \times n}(K)$  eine Diagonalmatrix mit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

ii) Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$  mit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} = -\beta^2 \cdot I_2 \\ A^3 &= -\beta^2 A \\ A^4 &= \beta^4 I_2. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k \beta^{2k} A + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k \beta^{2k} I_2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} e^A &= \sin(\beta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \cos(\beta) I_2 \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

iii) Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad A^n = 0$$

und

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 0 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Frage.** Wie kann man für eine allgemeine Matrix  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  die Exponentialabbildung  $e^A$  explizit berechnen?

**Idee.** Reduziere nach Konjugation auf die Beispiele i) und iii).

**Erinnerung (Jordansche Normalform).** Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  mit paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Dann gibt es eine invertierbare Matrix  $T \in GL_n(\mathbb{C})$  mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{r_1} + N_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_k I_{r_k} + N_k} \end{pmatrix},$$

wobei  $r_1 + \dots + r_k = n$  und

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

mit  $* \in \{0, 1\}$ .

### Anwendung auf die Berechnung des Exponentialabbildung

Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  und  $T \in GL_n(\mathbb{C})$  mit  $T^{-1}AT = D + N$  mit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_k \\ 0 & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $* \in \{0, 1\}$ . Dann  $DN = ND$ .

Wir erhalten

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{T(t(D+N))T^{-1}} \\ &= Te^{t(D+N)}T^{-1} \\ &= Te^{tD+tN}T^{-1} \\ &= Te^{tD} \cdot e^{tN}T^{-1}. \end{aligned}$$

Für  $e^{tD}$  und  $e^{tN}$  verwende die Beispiele i) und iii)

**Eine weitere Folgerung aus der Jordanschen Normalform**

**Definition.** Sei  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Setze  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

**Bemerkung.** Es gilt

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad \forall A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C}).$$

**Lemma 3.0.5.** Sei  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Dann ist

$$\det e^A = e^{\text{tr} A}.$$

*Beweis.* Sei  $T \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , sodass  $T^{-1}AT = D + N$  in Jordanscher Normalform ist. Es ist

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(TT^{-1}A) = \text{tr}(T^{-1}AT) = \text{tr}(D + N)$$

und

$$\det e^A = \det e^{T(D+N)T^{-1}} = \det(Te^{D+N}T^{-1}) = \det e^{D+N}.$$

Es genügt also das Lemma für  $D + N$  nachzuweisen. Sei

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Direkte Rechnung ergibt

$$\det e^{D+N} = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = e^{\text{tr}(D+N)}.$$

□



**Vorlesung 22**

Di 07.07. 10:15

# Kapitel 4

## Multilineare Algebra

Datei 38:  
 Tensorpro-  
 dukte Teil  
 1

### §4.1 Tensorprodukte

**Erinnerung.** Sei  $K$  ein Körper und  $V, W$   $K$ -Vektorräume. Wir nennen eine Abbildung

$$\begin{aligned}
 \varphi: V \times W &\rightarrow K \\
 (v, w) &\mapsto \varphi(v, w)
 \end{aligned}$$

*bilinear*, wenn  $\forall v, v' \in V, w, w' \in W, \lambda \in K$  gilt

$$\begin{aligned}
 \varphi(v + v', w) &= \varphi(v, w) + \varphi(v', w) \\
 \varphi(v, w + w') &= \varphi(v, w) + \varphi(v, w') \\
 \varphi(\lambda v, w) &= \lambda \varphi(v, w) = \varphi(v, \lambda w).
 \end{aligned}$$

**Beispiele.** i)  $V = W = K^n, A \in M_{n \times n}(K)$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 \varphi: K^n \times K^n &\rightarrow K \\
 (\underline{x}, \underline{y}) &\mapsto {}^t \underline{x} A \underline{y}
 \end{aligned}$$

bilinear.

ii)  $V = W = K^2$  Interpretiere  $V \times W$  als  $M_{2 \times 2}(K)$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 \varphi: V \times W &\rightarrow K \\
 (\underline{x}, \underline{y}) &\mapsto \det(\underline{x}, \underline{y}) \\
 &\uparrow \\
 &\text{Spaltenvektoren}
 \end{aligned}$$

bilinear.

iii) Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit Dualraum  $V^*$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} V^* \times V &\rightarrow K \\ (\varphi, v) &\mapsto \varphi(v) \end{aligned}$$

ist bilinear.

iv) Sei  $V = W = M_{n \times n}(K)$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: V \times W &\rightarrow V \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

ist nach obiger Definition nur für  $n = 1$  eine bilineare Abbildung.

Wir verallgemeinern den Begriff „bilineare Abbildung“ zu

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper und  $U, V, W$   $K$ -Vektorräume. Wir nennen eine Abbildung

$$\varphi: V \times W \rightarrow U$$

bilinear, falls für jedes  $v \in V$  und  $w \in W$  die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_V: W &\rightarrow U & w &\mapsto \varphi(v, w) \\ \varphi_W: V &\rightarrow U & u &\mapsto \varphi(u, w) \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$\text{Bil}(V, W; U) := \{ \varphi: V \times W \rightarrow U \mid \varphi \text{ ist bilinear} \}.$$

**Bemerkungen.** i)  $\text{Bil}(V, W; U)$  ist ein  $K$ -Vektorraum mit

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)(v, w) &:= \varphi_1(v, w) + \varphi_2(v, w) \\ (\lambda\varphi)(v, w) &= \lambda\varphi(v, w). \end{aligned}$$

ii) Seien  $V, W, U, U'$   $K$ -Vektorräume,  $\varphi: V \times W \rightarrow U$  bilinear und  $\psi: U \rightarrow U'$  linear. Dann ist die Abbildung

$$\psi \circ \varphi: V \cup W \rightarrow U'$$

bilinear.

iii) (Beispiel) Sei  $K$  ein Körper,

$$V = W = \{ P(x) \in K[x] \mid \text{grad } P(x) \leq d \}.$$

und

$$U = \{ P(x) \in K[x] \mid \text{grad } P(x) \leq 2d \}.$$

Dan sind  $U, V, W$   $K$ -Vektorräume der Dimension

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(W) = d + 1 \\ \dim(U) &= 2d + 1 \end{aligned}$$

mit Basen  $1, x, \dots, x^d$  bzw.  $1, x, \dots, x^{2d}$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: V \times W &\rightarrow U \\ (P, Q) &\mapsto P \cdot Q \end{aligned}$$

ist bilinear.

iv)  $V = K[x]$ ,  $W = K[y]$  als  $\infty$ -dimensionale  $K$ -Vektorräume,  $U = K[x, y]$ . Betrachte

$$\begin{aligned} \varphi: V \times W &\rightarrow U \\ (P(x), Q(y)) &\mapsto P(x)Q(y). \end{aligned}$$

Dann ist  $\varphi$  eine bilineare Abbildung.

**Erinnerung.** Eine  $K$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  ist eindeutig bestimmt durch die Bilder  $f(v_1), \dots, f(v_n)$ , falls  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  ist.

**Frage.** Welche Daten muss man angeben um eine bilineare Abbildung  $\varphi: V \times W \rightarrow U$  eindeutig zu beschreiben?

**Idee.** Sei  $v_1, \dots, v_n$  Basis von  $V$  und  $w_1, \dots, w_m$  Basis von  $W$ . Schreibe  $v \in V$  und  $w \in W$  als

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \\ w &= \sum_{j=1}^m \mu_j w_j \end{aligned}$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in K$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi(v, w) &= \varphi\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i}_v, \underbrace{\sum_{j=1}^m \mu_j w_j}_w\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m \mu_j \varphi(v_i w_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j \varphi(v_i, w_j),\end{aligned}$$

d. h.  $\varphi(v, w)$  ist eindeutig bestimmt sobald wir  $\varphi(v_i, w_j)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$  kennen. Wählen wir  $\varphi(v_i, w_j) \in U$  beliebig (für einen  $K$ -Vektorraum  $U$ ), dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}V \times W &\rightarrow U \\ \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^m \mu_j w_j\right) &\mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j \varphi(v_i, w_j)\end{aligned}$$

bilinear.

**Lemma 4.1.1.** Sei  $K$  ein Körper,  $V, W, U$  endlich-dimensionale  $K$ -Vektorräume mit Basen  $v_1, \dots, v_n \in V$  und  $w_1, \dots, w_m \in W$ . Seien  $u_{ij} \in U$  für  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Dann gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$\varphi: V \times W \rightarrow U$$

mit der Eigenschaft

$$\varphi(v_i, w_j) = u_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m.$$

**Frage.** Gibt es eine vergleichbare Beschreibung für  $\infty$ -dimensionale Vektorräume?

**Definition.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $v_i \in V \quad \forall i \in I$ . Wir definieren

$$\text{Span}_K(v_i)_{i \in I} := \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in K \quad \forall i \in I \mid \lambda_i = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in I \right\}.$$

**Bemerkung.**  $\text{Span}_K(v_i)_{i \in I} \subseteq V$  ist ein  $K$ -Untervektorraum.

**Beispiel.** Sei  $V = K[t]$ ,  $I = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $v_i = t^i$ ,  $t^0 := 1$ . Dann ist

$$\text{Span}_K(v_i)_{i \in I} = K[t].$$

**Definition.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum  $(v_i)_{i \in I}$  eine Familie von Elementen  $v_i \in V$ . Wir nennen  $(v_i)_{i \in I}$  *linear unabhängig*, falls jede endliche Teilfamilie von  $(v_i)_{i \in I}$  linear unabhängig ist.

**Beispiel.** In  $V = K[t]$  ist die Familie  $(t^{2i})_{i \geq 0}$  linear unabhängig.

**Definition.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $v_i \in V$  für  $i \in I$ . Wir nennen  $(v_i)_{i \in I}$  *Erzeugendensystem* von  $V$ , falls

$$V = \text{Span}_K(v_i)_{i \in I}.$$

Weiter nennen wir  $(v_i)_{i \in I}$  *Basis* von  $V$ , falls  $(v_i)_{i \in I}$  linear unabhängig und ein Erzeugendensystem ist.

**Beispiel.**  $(t^i)_{i \geq 0}$  ist Basis von  $K[t]$ .

**Satz 4.1.2 (ohne Beweis).** Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Wir können Lemma 4.1.1 verallgemeinern zu

**Lemma 1'.** Sei  $K$  ein Körper,  $V, W, U$   $K$ -Vektorräume,  $(v_i)_{i \in I}$  Basis von  $V$  und  $(w_j)_{j \in J}$  Basis von  $W$ . Seien  $u_{ij} \in U \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J$ . Dann gibt es genau eine bilineare Abbildung  $\varphi: V \times W \rightarrow U$  mit

$$\varphi(v_i, w_j) = u_{ij} \quad \forall i \in I, \quad j \in J.$$

*Beweis.* Es gilt  $V = \text{Span}_K(v_i)_{i \in I}$ , d. h. jedes  $v \in V$  kann man schreiben in der Form

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \quad \lambda_i \in K$$

mit  $\lambda_i = 0$  für alle  $i \in I$  außerhalb einer endlichen Teilmenge von  $I$ .

**Notation.** Wir schreiben  $\sum'_{i \in I} \lambda_i v_i$  für eine Summe in der nur endlich viele  $\lambda_i \neq 0$  sind.

Sei  $\varphi: V \times W \rightarrow U$  eine bilineare Abbildung mit

$$\varphi(v_i, w_j) = u_{ij} \quad \forall i \in I, \quad j \in J.$$

Seien  $v \in V, w \in W$  beliebig. Dann ist

$$\sum'_{i \in I} \lambda_i v_i$$

und

$$w = \sum_{j \in J} \mu_j w_j$$

mit  $\lambda_i, \mu_j \in K \quad \forall i \in I, j \in J$ . Nach der Bilinearität von  $\varphi$  gilt

$$\begin{aligned} \varphi(v, w) &= \varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i, \sum_{j \in J} \mu_j w_j\right) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi\left(v_i, \sum_{j \in J} \mu_j w_j\right) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \lambda_i \mu_j \varphi(v_i, w_j). \end{aligned}$$

Es gibt also höchstens eine bilineare Abbildung  $\varphi: V \times W \rightarrow U$  mit  $\varphi(v_i, w_j) = u_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J$ . Umgekehrt definiert

$$\begin{aligned} \varphi: V \times W &\rightarrow U \\ \left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i, \sum_{j \in J} \mu_j w_j\right) &\mapsto \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j u_{ij} \end{aligned}$$

eine solche Abbildung. □

**Erinnerung.** Ist  $f: V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung zwischen den  $K$ -Vektorräumen  $V, W$ , so ist  $f(V) \subseteq W$  ein  $K$ -Untervektorraum.

**Achtung.** Für bilineare Abbildungen  $\varphi: V \times W \rightarrow U$  muss  $\varphi(V \times W) \subseteq U$  im Allgemeinen kein  $K$ -Untervektorraum von  $U$  sein.

**In Beispiel iii)**

$$\begin{aligned} U &= \{ P(x) \in K[x], \text{grad } P(x) \leq 2d \} \\ \varphi: V \times W &\rightarrow U \\ (P(x), Q(x)) &\mapsto P(x) \cdot Q(x). \end{aligned}$$

Dann ist  $\varphi(x^i, x^j) = x^{i+j}$  für  $0 \leq i, j \leq d$  und

$$\text{Span}_K(\text{Im } \varphi) = U,$$

aber z.B. über  $K = \mathbb{Q}, d = 1$

$$U \ni t^2 + 3 \notin \text{Im } \varphi.$$

Datei 39:  
Tensorpro-  
dukte Teil  
2

**Beispiel.** iii)

$$\begin{aligned}\varphi: K[x] \times K[y] &\rightarrow K[x, y] \\ (P(x), Q(y)) &\mapsto P(x)Q(y), \\ \varphi(x^i, y^j) &= x^i y^j \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\end{aligned}$$

und  $x^i y^j$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  spannen  $K[x, y]$  als  $K$ -Vektorraum auf, *aber* das Polynom  $xy + 1 \notin \text{Im } \varphi$ .

**Bemerkung.** Die Abbildung

$$\begin{aligned}\psi: K[x] \times K[y] &\rightarrow K[z] \\ (P(x), Q(y)) &\mapsto P(z)Q(z).\end{aligned}$$

faktoriert über  $\varphi$  aus Beispiel iii), d. h. es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K[x] \times K[y] & \xrightarrow{\varphi} & K[x, y] \\ & \searrow \psi & \downarrow f \\ & & K[z] \end{array}$$

mit der *linearen* Abbildung

$$\begin{aligned}f: K[x, y] &\rightarrow K[z] \\ P(x, y) &\mapsto P(z, z) \in K[z].\end{aligned}$$

Auch jede andere bilineare Abbildung

$$\tilde{\psi}: K[x] \times K[y] \rightarrow U$$

in einem  $K$ -Vektorraum  $U$  faktoriert über  $\varphi$ .



**Vorlesung 23**

Do 09.07. 10:15

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper,  $V, W, T$   $K$ -Vektorräume und  $\eta: V \times W \rightarrow T$  eine bilineare Abbildung. Wir sagen, dass  $\eta$  die universelle Eigenschaft  $\otimes$  hat, falls gilt: Für jeden  $K$ -Vektorraum  $U$  und jede bilineare Abbildung  $\varphi: V \times W \rightarrow U$  gibt es genau eine lineare Abbildung  $f: T \rightarrow U$ , sodass  $\varphi = f \circ \eta$ , d. h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\eta} & T \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! f \\ & & U \end{array}$$

kommutiert.

**Bemerkung.** Hat  $\eta: V \times W \rightarrow T$  die universelle Eigenschaft  $\otimes$ , so gilt  $\text{Span}_K(\text{Im } \varphi) = T$ .

**Beispiel.** Sei  $V = K$  und  $W$  ein  $K$ -Vektorraum. Dann hat die Abbildung

$$\begin{aligned} \eta: K \times W &\rightarrow W \\ (\lambda, w) &\mapsto \lambda \cdot w \end{aligned}$$

die universelle Eigenschaft  $\otimes$ . Für eine beliebige bilineare Abbildung  $\varphi: K \times W \rightarrow U$  setze

$$\begin{aligned} f: W &\rightarrow U \\ w &\mapsto \varphi(1, w). \end{aligned}$$

Dann gilt für alle  $\lambda \in K, w \in W$

$$f(\eta(\lambda, w)) = f(\lambda w) = \lambda f(w) = \lambda \varphi(1, w) = \varphi(\lambda, w),$$

$\uparrow$   
 $\varphi$  bilinear

also kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K \times W & \xrightarrow{\eta} & W \\ & \searrow \varphi & \downarrow f \\ & & U \end{array}$$

**Lemma 4.1.3.** Seien  $V, W, T, \tilde{T}$   $K$ -Vektorräume und  $\eta: V \times W \rightarrow T, \tilde{\eta}: V \times W \rightarrow \tilde{T}$  bilineare Abbildungen mit der universellen Eigenschaft  $\otimes$ .

Dann gibt es einen Isomorphismus  $f: T \rightarrow \tilde{T}$  von  $K$ -Vektorräumen mit  $f \circ \eta = \tilde{\eta}$ .

*Beweis.* Nach der universellen Eigenschaft  $\otimes$  von  $\eta$  und  $\tilde{\eta}$  gibt es lineare Abbildung

$$f: T \rightarrow \tilde{T}, \quad g: \tilde{T} \rightarrow T,$$

sodass

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\eta} & T \\ & \searrow \tilde{\eta} & \uparrow g \downarrow f \\ & & U \end{array}$$

kommutiert, d. h.  $f \circ \eta = \tilde{\eta}$  und  $\eta = g \circ \tilde{\eta}$ , also folgt  $(f \circ g) \circ \tilde{\eta} = \tilde{\eta}$ , und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & \tilde{T} \\ & \searrow \tilde{\eta} & \downarrow f \circ g \\ & & \tilde{T} \end{array}$$

kommutiert. Nach der universellen Eigenschaft  $\otimes$  on  $\tilde{\eta}$  folgt  $f \circ g = \text{Id}_{\tilde{T}}$ . Ebenso gilt  $f \circ f = \text{Id}_T$ .  $\square$

**Frage.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume. Gibt es immer eine bilineare Abbildung  $\eta: V \times W \rightarrow T$  in einem  $K$ -Vektorraum  $T$  mit der universellen Eigenschaft  $\otimes$ ?

**Idee.** Sind  $V, W$  endlich-dimensionaler Vektorräume mit Basen  $v_1, \dots, v_n \in V$  und  $w_1, \dots, w_m \in W$ , dann ist eine bilineare Abbildung  $\varphi: V \times W \rightarrow U$  eindeutig bestimmt durch die Bilder  $\varphi(v_i, w_j)$  (für einen  $K$ -Vektorraum  $U$ ).

Verwende die Tupel  $(v_i w_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  als Basis für den  $K$ -Vektorraum  $T$  mit der bilinearen Abbildung

$$\begin{aligned} \eta: V \times W &\rightarrow T \\ (v_i, w_j) &\mapsto (v_i, w_j). \end{aligned}$$

**Satz 4.1.4.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume. Dann gibt es einen  $K$ -Vektorraum  $T$  und eine bilineare Abbildung  $V \times W \rightarrow T$ , welche die universelle Eigenschaft  $\otimes$  hat. Falls  $\dim(V), \dim(W) < \infty$ , dann gilt  $\dim(T) = (\dim(V))(\dim(W))$ .

*Beweis.* Sei  $(v_i)_{i \in I}$  Basis von  $V$  und  $(w_j)_{j \in J}$  Basis von  $W$ .

Setze

$$T := \{ \tau: I \times J \rightarrow K \mid \tau(i, j) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } (i, j) \in I \times J \}.$$

Dann ist  $T$  ein  $K$ -Vektorraum unter punktwiser Addition / Multiplikation mit Skalaren

$$\begin{aligned} (\lambda\tau)(i, j) &= \lambda\tau(i, j) \\ (\tau + \tau')(i, j) &= \tau(i, j) + \tau'(i, j) \quad \forall \tau, \tau' \in T \quad \forall \lambda \in K \quad (i, j) \in I \times J. \end{aligned}$$

Definiere  $\tau_{i_0, j_0} \in T$  für  $(i_0, j_0) \in I \times J$  durch

$$\tau_{i_0, j_0}(i, j) = \begin{cases} 1 & (i, j) = (i_0, j_0) \\ 0 & (i, j) \neq (i_0, j_0). \end{cases}$$

Dann ist

$$T = \text{Span}_K((\tau_{ij})_{(i,j) \in I \times J}),$$

denn für  $\tau \in T$  ist.

$$\tau = \sum_{(i,j) \in I \times J} \underbrace{\tau(i, j)}_{\in K} \underbrace{\tau_{ij}}_T.$$

Die Familie  $(\tau_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$  ist linear unabhängig, denn aus

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{ij} \tau_{ij} = 0$$

folgt

$$\underbrace{\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{ij} \tau_{ij}(i', j')}_{\lambda_{i', j'}} = 0 \quad \forall (i', j') \in I \times J,$$

also  $\lambda_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in I \times J$ . Damit ist  $(\tau_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$  Basis von  $T$ . Falls  $\dim(V), \dim(W) < \infty$  gilt insbesondere

$$\dim(T) = (\dim(V))(\dim(W)).$$

Sei  $\eta: V \times W \rightarrow T$  die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$\eta(v_i, w_j) = \tau_{ij} \quad \forall (i, j) \in I \times J.$$

wir zeigen:

$\eta: V \times W \rightarrow T$  hat die universelle Eigenschaft. Sei  $\varphi: V \times W \rightarrow U$  eine bilineare Abbildung in einen  $K$ -Vektorraum  $U$ , setze

$$u_{ij} := \varphi(v_i, w_j) \quad \forall (i, j) \in I \times J$$

und sei  $f: T \rightarrow U$  die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit  $f(\tau_{ij}) = u_{ij} \quad \forall (i, j) \in I \times J$ . Seien  $v \in V, w \in W$  und schreibe

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$$

$$w = \sum_{j \in J} \mu_j w_j$$

mit  $\lambda_i, \mu_j \in K, i \in I, j \in J$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (f \circ \eta)(v, w) &= f \left( \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \lambda_i \mu_j \eta(v_i, w_j) \right) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \eta \text{ ist bilinear} \\ &= f \left( \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \lambda_i \mu_j \tau_{ij} \right) \\ &= \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \mu_j u_{ij} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad f \text{ linear, } f(\tau_{ij}) = u_{ij} \\ &= \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \mu_j \varphi(v_i, w_j) \\ &= \varphi(v, w), \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \varphi \text{ bilinear} \end{aligned}$$

also  $f \circ \eta = \varphi$ , d. h.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\eta} & T \\ & \searrow \varphi & \downarrow f \\ & & U \end{array}$$

kommutiert.

Ist  $g: T \rightarrow U$  eine weitere  $K$ -lineare Abbildung  $\varphi = g \circ \eta$ , dann gilt

$$u_{ij} = \varphi(v_i, w_j) = g(\tau_{ij}) \quad \forall (i, j) \in I \times J,$$

also  $f = g$ . □

**Definition.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume. Ein *Tensorprodukt* von  $V$  auf  $W$  ist eine bilineare Abbildung  $\eta: V \times W$  in einem  $K$ -Vektorraum  $T$ , welche die universelle Eigenschaft  $\otimes$  hat.

Schreibe auch

$$\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes W$$

für das bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ .

Für  $v \in V$ ,  $w \in W$  schreibe  $v \otimes w$  für  $\otimes(v, w)$ .

**Beispiele.** • Sei  $V = W = K[t]$ . Dann ist

$$\begin{aligned} V \otimes W &= K[t] \otimes K[t] \\ &\simeq K[t_1, t_2] \\ \otimes: V \times W &\rightarrow t_1[t_2]. \end{aligned}$$

ist gegeben durch

$$t^i \otimes t^j = t_1^i t_2^j, \quad i, j \geq 0.$$

- Sei  $W = \mathbb{R}^n$  und  $V = \mathbb{C}$ ,  $K = \mathbb{R}$ . Dann ist die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \eta: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (\lambda, \underline{x}) &\mapsto \lambda \underline{x} \end{aligned}$$

ein Tensorprodukt von  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^n$ , also

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n.$$

Wir betrachten  $\mathbb{C}^n$  als  $2n$ -dimensionalen Vektorraum mit Basis

$$\begin{array}{ccccccc} e_1, \dots, e_n, & i e_1, \dots, & i e_n. \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ 1 \otimes e_1 & 1 \otimes e_n & i \otimes e_1 & i \otimes e_n & & & \end{array}$$

**Bemerkung.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume und  $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes W$  ein Tensorprodukt. Im Allgemeinen hat nicht jedes Element aus  $V \otimes W$  die Form  $v \otimes w$  für  $v \in V$ ,  $w \in W$ . Sei z. B.  $V = W$  ein  $K$ -Vektorraum  $2 \leq \dim(V) < \infty$  und  $v_1, v_2, \dots, v_n$  Basis von  $V$ . Dann ist

$$v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \in V \otimes V.$$

Angenommen

$$v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 = v \otimes w$$

mit  $v, w \in V$ . Schreibe  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ ,  $w = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$ . Dann ist

$$\begin{aligned} v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 &= \otimes \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j v_i \otimes v_j. \end{aligned}$$

Die Elemente  $v_i \otimes v_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , bilden eine Basis von  $V \otimes W$ , also folgt nach Koeffizientenvergleich  $\lambda_1 \mu_1 = 0$ ,  $\lambda_1 \mu_2 = 1$ ,  $\lambda_2 \mu_1 = 1$ ,  $\lambda_2 \mu_2 = 0$ ,  $\nabla$ .

### Weitere Eigenschaften des Tensorprodukts

**Lemma 4.1.5.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume mit Tensorprodukt  $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes W$ . Dann gilt für  $v, v' \in V$ ,  $w, w' \in W$ ,  $\lambda \in K$ , dass

i)

$$\begin{aligned} v \otimes w + v' \otimes w &= (v + v') \otimes w \\ v \otimes w + v \otimes w' &= v \otimes (w + w') \end{aligned}$$

ii)  $(\lambda \cdot v) \otimes w = v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w)$ .

*Beweis.* Folgt aus der Bilinearität der Abbildung  $\otimes(v, w) = v \otimes w$ . □

**Lemma 4.1.6.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume mit Tensorprodukt

$$\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes W,$$

$v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $w_1, \dots, w_n \in W$  und  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig mit

$$\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = 0$$

in  $V \otimes W$ . Dann gilt  $w_0 = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

*Beweis.* Für  $1 \leq i \leq n$  definiere lineare Abbildungen  $f_i: V \rightarrow K$  mit  $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Seien  $g_i: W \rightarrow K$ ,  $1 \leq i \leq n$ , beliebige lineare Abbildungen. Setze

$$\varphi(v, w) := \sum_{i=1}^n f_i(v) g_i(w).$$

Dann ist  $\varphi: V \times W \rightarrow K$  bilinear, also  $\exists!$  lineare Abbildung  $h: V \otimes W \rightarrow K$  mit  $\phi = h \circ \otimes$ .

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ & \searrow \varphi & \downarrow h \\ & & K, \end{array}$$

d. h.

$$\begin{aligned} 0 &= h\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i}_{=0}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n h(v_i \otimes w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \phi(v_i, w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{f_j(i)}_{\delta_{ij}} g_j(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g_i(w_i). \end{aligned} \tag{*}$$

Da (??) für alle linearen Abbildungen

$$g_i: W \rightarrow K, \quad 1 \leq i \leq n$$

gilt, folgt  $w_i = 0, 1 \leq i \leq n$ . □

**Korollar 4.1.7.** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume mit Tensorprodukt

$$\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes W$$

und  $v \in V \setminus \{0\}, w \in W \setminus \{0\}$ . Dann ist  $v \otimes w \neq 0$  in  $V \otimes W$ .