Vorlesungsmitschrift

DIFF II

Prof. Dr. Dorothea Bahns

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 29. Juli 2020

Disclaimer

Nicht von Professor Bahns durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit ihrerseits.

Inhaltsverzeichnis

Vorlesungsverzeichnis

Vorlesung 25

Do 16.07. 10:15

Definition 7.17. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen (n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$). Ein *Tensorfeld* auf U (s-fach kontravariant, r-fach kovariant) ist eine Abbildung

$$\alpha\colon U \ni a \mapsto \alpha(a) \in T_r^s(\mathrm{T}_a\, U).$$

Eine *Differentialform* von Grad r ist eine Abbildung

$$\omega\colon U \ni a \mapsto \omega(a) \in \Lambda^r(\mathrm{T}_a\, U^\star)$$

$\Omega^r(U) = \{\, \omega \text{ Differentialform vom Grad } r \,\}$. α wird C^k genannt, falls

$$U \ni a \mapsto \alpha(a)(u_1, \ldots, u_r, w^1, \ldots, w^s) \in \mathbb{R}$$

für jedes fest gewählte Tupel

$$(u_1, \ldots, u_r, w^1, \ldots, w^s) \in (\mathrm{T}_a\, U)^r \times (\mathrm{T}_a\, U^\star)^s$$

C^k ist.

Speziell ist $\omega \in \Omega(U)$ C^k falls

$$U \ni a \mapsto \omega(a)(u_1, \ldots, u_r) \in \mathbb{R}$$

C^k ist für jedes $(u_1, \ldots, u_r) \in (\mathrm{T}_a\, U)^r$.

Bemerkung. i) Tensorfelder und Differentialformen vom Grad 0 sind Funktionen

ii) Ein einfach kontravariantes Tensorfeld ist ein Vektorfeld: $\alpha(a) \in T_1(\mathrm{T}_a\, U^\star)$

$$\alpha(a) \in (\mathrm{T}_a\, U^\star)^* \approx \mathrm{T}_a\, U,$$
$$\alpha(a) = \sum_{i=1}^m \alpha(a)^i e_i$$

mit $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von $\mathrm{T}_a\, U$.

7.III. Koordinatendarstellung

Sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ die kanonische Parametrisierung von U, $\varphi(x) = x$. Dann ist (vgl. 4.10)

$$\mathrm{T}_x\, U = \mathrm{Span}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kanonische Einheits-Basis}}}{e_1, \ldots, e_m})$$

Die dazu duale Basis bezeichnet man mit $dx^1, \dots, dx^m$. Es gilt für $v = \sum v^i e_i \in \mathrm{T}_x\, U$:

$$dx^j(v) = v^j.$$

Nach Bemerkung **??** nach **??** ist

$$\left\{\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \;\middle|\; j_i \in \{\, 1, \dots, n \,\} \right\}$$

eine Basis von $\Omega^r(U)$ also

$$\omega \in \Omega^r(U) \implies \omega = \sum \omega_{j_1 \cdots j_r}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}$$

mit Funktionen $\omega_{j_1 \cdots j_r} \colon U \to \mathbb{R}$. Beachte: ω ist genau dann C^k wenn $\omega_{j_1 \cdots j_r}$ C^k ist.

Beispiel. $m = 2$, $u, v \in \mathrm{T}_a\, U \cong \mathbb{R}^2$

$$dx^1 \wedge dx^2(u,v) = \det \begin{pmatrix} dx^1(u) & dx^1(v) \\ dx^2(u) & dx^2(u) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{pmatrix}$$

Definition 7.18. Sei $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n$ C^1, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen mit $\varphi(U) = V$ offen. Sei $\omega \in \Omega^r(V)$. Dann definiert

$$(\varphi^\star \omega)(t)(v_1, \dots, v_r) \coloneqq \omega(\varphi(t))(D\varphi(t)v_1, \dots, D\varphi(t)v_r) \quad \forall\, t \in U,\ \forall\, v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m$$

r-Form auf U, $\varphi^\star\omega \in \Omega^r(U)$, den sogenannten *pullback (Zurückziehung)* von ω unter φ.

In Koordinaten:

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega_{i_1 \cdots i_r}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Dann ist $\varphi^\star\omega = \sum \omega_{i_1 \cdots i_r} \circ \varphi d\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_k}$ mit

$$d\varphi^i = \sum_{k=1}^m \partial_k \varphi^i\, dt^k \tag{$*$}$$

Beweis durch Nachrechnen. $\varphi^\star\omega$ ist also tatsächlich in $\Omega^r(U)$.

Definition 7.19. *Cartan-Ableitung* (äußere Ableitung) $U \subset \mathbb{R}^n$. $f \in \Omega^0(U)$ sei C^k mit $k \geq 1$. Dann setze:

$$df \coloneqq \sum_{j=1}^m \partial_j f\, dx^j \quad \text{(Siehe oben } (*))$$

$\omega \in \Omega^r(U)$ sei C^k mit $k \geq 1$. Dann setze:

$$d\omega \coloneqq \sum_{q \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} d(\omega_{i_1 \cdots i_r}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

$d\omega \in \Omega^{r+1}(U)$

Beispiel 7.20. $\omega = p\,dx + q\,dy$

$$\begin{aligned} d\omega &= (\cancel{\partial_1 p\,dx} + \partial_2 p\,dy) \wedge dx + (\partial_1 q\,dx + \cancel{\partial_2 q\,dy}) \wedge dy \\ &= (\partial_1 q - \partial_2 p)\,dx \wedge dy \end{aligned}$$

$d\omega = 0$ falls $\partial_1 q = \partial_2 p$ Integrabilitätsbedingung bei den *exakten* DGLn

Das ist insbesondere der Fall, wenn $\omega = d(f), f(x,y), \partial_1 f = p, \partial_2 f = q \quad f \in C^2$. Beachten Sie die Ähnlichkeit zum Satz von Gauß in 2 Dimensionen $\rightsquigarrow$ später mehr.

Bemerkung / Definition 7.21. Teilweise längere Rechnungen zeigen: $\omega, \tilde{\omega}$ C^k, $k \geq 1$.

$d\colon \Omega^r(U) \to \Omega^{r+1}(U)$ ist linear

$d(\omega \wedge \tilde{\omega}) = d\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^r \omega \wedge \tilde{\omega}$ für $\omega \in \Omega^r(U)$

$d(d\omega) = 0$, ω C^k, $k \geq 2$.

$\omega \in \Omega^r(U)$ heißt *geschlossen* falls $d\omega = 0$ und *exakt* falls $\exists\, \alpha \in \Omega^{r-1}(U)$ s. d. $d\alpha = \omega$. α heißt *Potential* für ω. $U \subset \mathbb{R}^m$ Ist $d\omega = 0$, U sternförmig, d. h. $\exists$ Punkt $a \in U$ s. d. die Verbindungslinien von a zu allen Punkten von U in U liegen, so $\exists$ Potential. Die Konstruktion funktioniert im wesentlichen so, wie bei den exakten DGLn (Partielle Integration entlang der Verbindungslinien). *Lemma von Poincaré*

Bemerkung 7.22. Zusammenhang zu Differentialgleichungen:

i) Exakte DGLn: Schreibe statt $g(x,y)y' + h(x,y) = 0$

$$\omega := g(x,y)\,dy + h(x,y)\,dx.$$

Die Integrabilitätsbedingung impliziert $d\omega = 0 \implies$ (auf sternförmigem Gebiet) $\exists\ f$ s. d. $\omega = df$ (also exakt), $g = \partial_y f$, $h = \partial_x f$, Satz über implizite Funktionen: $\exists\ x \mapsto y(x)$ s. d. $f(x, y(x)) = 0 \to$ die Lösung $y(x)$ der DGL.

ii) Merkregel bei DGLn mit getrennten Variablen. Schreibe statt $y' = f(x)g(y)$

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$$

7.IV. Zusammenhang zu Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Definition 7.23. $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\omega = f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$. ω heißt *integrierbar* über $V \subset U$ falls $f|_V$ integrierbar ist. Man setzt dann:

$$\int_V \omega := \int_V f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m := \int_V f(x)\,dx$$

Lemma 7.24. $U, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$, $\varphi(U) = V$, Diffeomorphismus auf V. Sein $K \subset U$ kompakt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(K)} \omega &= \int_K \varphi^\star \omega \quad \text{falls} \det \varphi > 0 \\ &= -\int_K \varphi^\star \omega \quad \text{falls} \det \varphi < 0 \end{aligned}$$

Beweis. $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \implies \varphi^\star \omega = (f \circ \omega) \det d\varphi\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ (nachrechnen). Die Behauptung folgt mit der Transformationsformel

$$\int_{\varphi(K)} \omega = \int_{\varphi(K)} f\, dx = \int_K f(\varphi(y)) |\det d\varphi(y)|\, dy \qquad \square$$

Diese Definition können wir auf beliebige *orientierbare Untermannigfaltigkeiten* übertragen. Orientierbar: $\exists$ Beschreibung durch lokale Parametrisierungen

$$\{\, \varphi\colon U_i \to V_i \mid i \in I \,\}$$

s. d.

$$\Phi_{ij} := \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j\colon \varphi^{-1}(V_i \cap V_j) \to \varphi^{-1}(V_i \cap V_j)$$

$\det d\Phi_{ij} > 0$ erfüllt.

Wählt man eine Basis $(\partial_j \psi)_{j=1\cdots m}$ von $\mathrm{T}_a\, M$ und ist $a \in \varphi(U) \cap \psi(\tilde{U})$ so ist $\big((\partial_j \psi)_{j=1,\dots,m}\big)$ gleich orientiert, d. h. der Basiswechsel A hat positive Determinante:

$$d\varphi = \big(\, d(\underbrace{\varphi^{-1} \circ \psi}_{\Phi_{\varphi\psi}})\big)^{-1} . \, d\psi \quad \text{(Kettenregel)}$$

Bemerkung 7.25. Ist M Hyperfläche, also $\dim(M) = n-1$, $M \subset \mathbb{R}^n$, so ist Orientierbarkeit zur Existenz eines stetigen Einheitsnormalenvektorfeldes:

Beweis. „$\implies$“ $\exists$ genau 2 Einheitsnormalenvektoren bei $a = \varphi(t_0) \in M$. Wähle den, für den $(\nu(a), \partial_1 \varphi(t_0), \dots, \partial_{n-1}\varphi(t_0))$ die selbe Orientierung hat wie $(e_1, \dots, e_n)$ $(*)$.

„$\impliedby$“ Ist $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$ stetiges Einheitsnormalenvektorfeld so ist durch $(*)$ eine Orientierung vorgegeben. Solche Parametrisierungen gibt es, da man durch Umsortieren der Komponentenfunktionen $(*)$ erreichen kann. $\square$

Beispiel 7.26. G aus dem Satz von Gauß ist also orientierbar, das Möbiusband dagegen nicht.

Bemerkung 7.27. Das Übertragen des Integrals über m-Formen auf m-dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeiten funktioniert wie zuvor:

- Zunächst für $m = n$ (siehe oben)
- Dann für $K \subset M \subset \mathbb{R}^m$ $(n \geq m)$. K kompakt unter der Annahme, dass

  $$\exists\, \varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$$

  mit $K \subset \varphi(U)$. Mit 7.18 folgt:

  $$\int_K \omega := \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^\star \omega$$

  ist eine sinnvolle Definition, die von der Wahl von φ nicht abhängt:

  $$\varphi = \psi \circ (\underbrace{\psi^{-1} \circ \varphi}_{\det d \cdots > 0})$$

- Dann für $K \subset M$ mit $\{\, \varphi_i\colon U_i \to V_i \,\}_{i \in I}$ eine Beschreibung von M durch gleich orientierte Parametrisierungen. K kompakt $\implies$ endlich viele $U_1, \ldots, U_l$ überdecken $K \implies$ Integralbegriff mit Hilfe einer untergeordneten Teilung der Eins.

Beispiel 7.28. $\omega = (\partial_1 g - \partial_2 f)\, dx \wedge dy$ auf $U \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt für $G \subset U$ wie im Satz von Gauß

$$\int_G \omega = \int_{\partial G} \langle F, \nu \rangle\, ds(t)$$

mit $F = \left(\begin{smallmatrix} g \\ -f \end{smallmatrix}\right)$

$$ds(t) = \sqrt{\det d\gamma}\, dt = \|\gamma'(t)\|_{\mathrm{E}}\, dt, \quad \nu(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\gamma\|_{\mathrm{E}}}$$

Also

$$\begin{aligned}
\int_G \omega &= \int_{\partial G} \langle Fv, d \rangle s(t) \\
&= \int_a^b \left(F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\right) dt \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ dx^i = d(\gamma_i(t)) = \gamma_i'\, dt}}{=} \int_{\partial G} F_1\, dy - F_2\, dx \\
&= \int_{\partial G} \underbrace{g\, dy + f\, dx}_{=:\alpha}
\end{aligned}$$

Notation aus 243. Es ist $\omega = d\alpha = (\partial_1 g - \partial_2 f)\, dx \wedge dy$. Also schreibt sich der Satz von Gauß hier:

$$\int_G d\alpha = \int_{\partial G} \alpha$$

Das ist kein Zufall! (siehe unten)

Zunächst etwas Vorarbeit:

Satz 7.29. Sei M orientierbare, m-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ mit Rand. Dann ist auch die $(m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ∂M orientierbar.

Beweis-Idee. Sei $\varphi\colon U \to V$ Parametrisierung ($U \subset \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{m-1}$ offen) s. d. $\varphi(U \cap \{\, 0 \,\} \times \mathbb{R}^{m-1} = V \cap \partial M \neq$ und $\{\, \varphi, \varphi_i \,\}_j$ sei eine Beschreibung von M durch orientierte Parametrisierung.

Betrachte die letzte Spalte von $d\varphi$, also

$$d\varphi(t_0).e_m =: v, \quad \varphi(t_0) = p \in \partial M$$

Eine Basis $(w_1, \ldots, w_{m-1})$ von $T_p(\partial M)$ ist dann so zu wählen, dass die Basis $(v, w_1, \ldots, w_{m-1})$ von T_pM gleich orientiert ist wie die Orientierung von T_pM. □

Bemerkung. Mann nennt diese Orientierung als die von der Orientierung von M induzierte.

Beispiel 7.30.

$\overline{D}$ (v, w) orientiert wie $\mathbb{R}^2$ mit (e_1, e_2) $\implies$ $w \nwarrow$

$\implies$ Der Rand wird von den orientierten Parametrisierungen gegen Uhrzeigersinn durchlaufen.

Satz 7.31 (Spezialfall des Satzes von Stokes). Sei $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ C^1 und mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}\omega$ ($\operatorname{supp}\omega = \overline{\{\, * \,\} p \in \mathbb{R}^m | \omega(p) \neq \text{Nullform}}$ in Koordinaten: $\omega_{i_1 \cdots i_{m-1}}$ hat kompakte Träger). Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^m_-} d\omega = \int_{\partial \mathbb{R}^m_-} \omega$$

wobei $\mathbb{R}^m_- = \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{m-1}$, $\partial \mathbb{R}^m_- = \{\, 0 \,\} \times \mathbb{R}^{m-1}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \omega &= \sum \omega_{i_1 \cdots i_{m-1}}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{m-1}} \\ &=: \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \alpha_j\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\widehat{dx^j}}_{\text{fehlt}} \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned}$$

Kompakter Träger $\implies \exists\, K$ kompakt s.d. $\alpha_j|_{\mathbb{R}^m\setminus K} = 0\,\forall\, j$

$$d\omega = \sum_{j=1}^{m} (\partial_1 \alpha_j)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

$$\varphi\colon \mathbb{R}^{m-1} \to \partial\mathbb{R}^{m-1}_{-}, \quad \left(t^1 \cdots t^{m-1}\right) \mapsto \left(0, t^1, \ldots, t^{m-1}\right)$$

$$\varphi^*\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} (\alpha_j \circ \varphi)\, d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\varphi^j} \wedge \cdots \wedge d\varphi^m$$

$$d\varphi^1 = 0 \quad (\varphi^1(t) = 0\,\forall\, t)$$

$$d\varphi^j = dt^{j-1} \quad (\varphi^j(t) = t^{j-1}) \text{ für } j \geq 2$$

$$\implies \varphi^*\omega = (\alpha_1 \circ \varphi)\, dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^{m-1}$$

$$\implies \int_{\partial\mathbb{R}^m_{-}} \omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \alpha_1(0, t^1, \ldots, t^{m-1})\, dt$$

Linke Seite:

$$\int_{R^m_{-}} d\omega = \int_{\mathbb{R}^m_{-}} \left(\sum_{j=1}^{m} \partial_j \alpha_j \right) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}_{\leq 0}} \partial_1 \alpha_1(x)\, dx^1 = \int_{-\infty}^{0} \partial_1 \alpha_1(x)\, dx^1 = \alpha_1(0, x^2, \ldots, x^m)$$

$$\int_{\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{m-2}} \Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \partial_j \alpha_j(x)\, dx_j}_{=0} \Bigg) dx_1 \cdots \widehat{dx_j} \cdots dx_m$$

$\implies$ Beh. $\square$

Satz 7.32 (Integralsatz von Stokes). Sei M orientierte m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit Rand ∂M, der die induzierte Orientierung trägt. Sei $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ mit kompaktem Träger und C^1. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Beweisidee. Sei $\varphi\colon U \to M$ globale Parametisierung von $\operatorname{supp}\omega$ (sonst: Zerlegung der Eins). Setze $\varphi^*\omega$ durch 0 fort zu einer Differentialform auf ganz $\mathbb{R}^m_{-}$.

- Ist U offen in $\mathbb{R}^m$ ist $\varphi(U) \cap \partial M = \varnothing$. Beide Seiten sind 0.

- Ist U offen in $\mathbb{R}^m_-$ also $\varphi(U) \cap \partial M \neq \varnothing$, gilt

$$\begin{aligned}\int_M d\omega = \int_U \varphi^*(d\omega) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nachrechnen!}}}{=} \int_U d(\varphi^*\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m_-} d(\varphi^*\omega) \overset{7.31}{=} \int_{\partial\mathbb{R}^m_-} \varphi^*\omega \\ &= \int_{\partial U} \varphi^*\omega \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi|_{\partial U}}}{=} \int_{\varphi(\partial M)} \omega = \int_{\partial M} \omega \qquad \square\end{aligned}$$

Beispiel. Satz von Gauß,. . . .

Beispiel. $n = 3 \quad \omega = f_1\, dx^1 + f_2\, dx^2 + f_3\, dx^3$

$$\begin{aligned}d\omega = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)\, dx^2 \wedge dx^3 \\ + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3)\, dx^3 \wedge dx^1 \\ + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\, dx^1 \wedge dx^2\end{aligned}$$

Koeffizienten heißen auch Rotation von $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

$$M \quad \text{2-dim} \ \subset \mathbb{R}^3$$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad \text{Kurvenintegral vgl. Beispiel nach 7.24}$$

$$\begin{aligned}\int f_1\, dx^1 + \dots + f_3\, dx^3 &= \int \big(f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + f_3(\gamma(t))\gamma_3'(t)\big)\, dt \\ &= \int \langle f(\gamma(t), \gamma'(t)), d\rangle t\end{aligned}$$

Definitionen

Wichtige Sätze