

Vorlesungsmitschrift

DIFF II

Prof. Dr. Dorothea Bahns

Henry Ruben Fischer

Auf dem Stand vom 29. Juli 2020

Disclaimer

Nicht von Professor Bahns durchgesehene Mitschrift, keine Garantie auf Richtigkeit ihrerseits.

Inhaltsverzeichnis

1. Metrische Räume	6
1.I. Charakterisierung topologischer Grundbegriffe in metrischen Räumen . . .	17
1.II. Vollständigkeit	19
1.III. Betrachtungen in vollständigen metrischen Räumen	21
1.IV. Stetige Abbildungen auf metrischen Räumen	27
1.V. Kompaktheit	30
1.VI. Äquivalenz von Metriken	36
2. Normierte Vektorräume	38
2.I. Stetige Abbildungen in normierten Vektorräumen	44
2.I.1. Lineare Abbildungen	44
2.II. Vektorräume mit Skalarprodukt	49
3. Differenzierbarkeit in \mathbb{R}^n	55
3.I. Geometrische Anschauung, partielle Ableitung	59
3.II. Beispiele und Erläuterungen	63
3.III. Implizite Funktionen	72
3.IV. Der Satz von der Umkehrabbildung	81
3.V. Lokale Extrema unter Nebenbedingungen	88
3.VI. Höhere Ableitungen, Taylorformel	92
3.VII. Der Laplace-Operator	95
3.VIII. Taylor-Formel, lokale Extrema	100
3.IX. Lokale Extrema	103
4. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	109
4.I. Tangential- und Normalraum	130
4.II. Flächenbemessung auf Untermannigfaltigkeiten	138
5. Differentialgleichungen	143
5.I. Geometrische Interpretation	143
5.II. Existenz- und Eindeutigkeitssatz	145
5.III. Lineare Differentialgleichungen	160
5.IV. Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten	172

6. Lebesgue-Integration	182
6.I. Etwas Maßtheorie	190
6.II. Weitere Folgerungen	192
6.III. Messbare Funktionen	196
6.IV. Zum Verhältnis von Lebesgue- / Riemann-Integral	197
6.V. Produkt-Maße	200
6.VI. Der Transformationssatz	207
 7. Integration auf Untermannigfaltigkeiten	 214
7.I. Der Integralsatz von Gauß	220
7.II. Tensorkalkül und Differentialformen	228
7.III. Koordinatendarstellung	231
7.IV. Zusammenhang zu Integration auf Untermannigfaltigkeiten	233
 Definitionen	 239
 Wichtige Sätze	 240

Vorlesungsverzeichnis

1.	Mo 20.04. 10:15	6
2.	Do 23.04. 10:15	16
3.	Mo 27.04. 10:15	25
4.	Do 30.04. 10:15	36
5.	Mo 04.05. 10:15	44
6.	Do 07.05. 10:15	55
7.	Mo 11.05. 10:15	63
8.	Do 14.05. 10:15	74
9.	Mo 17.05. 10:15	80
10.	Do 21.05. 10:15	88
11.	Mo 25.05. 10:15	100
12.	Do 28.05. 10:15	109
13.	Do 04.06. 10:15	122
14.	Mo 08.06. 10:15	130
15.	Do 11.06. 10:15	143
16.	Mo 15.06. 10:15	153
17.	Do 18.06. 10:15	162
18.	Mo 15.06. 10:15	171
19.	Do 25.10. 10:15	182
20.	Mo 29.06. 10:15	190
21.	Do 02.07. 10:15	199
22.	Mo 06.07. 10:15	207
23.	Do 09.07. 10:15	214
24.	Mo 13.07. 10:15	223
25.	Do 16.07. 10:15	231

Vorlesung 25

Do 16.07. 10:15

Definition 7.17. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen (n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m). Ein *Tensorfeld* auf U (s -fach kontravariant, r -fach kovariant) ist eine Abbildung

$$\alpha: U \ni a \mapsto \alpha(a) \in T_r^s(T_a U).$$

Eine *Differentialform* von Grad r ist eine Abbildung

$$\omega: U \ni a \mapsto \omega(a) \in \Lambda^r(T_a U^*)$$

$\Omega^r(U) = \{ \omega \text{ Differentialform vom Grad } r \}$. α wird C^k genannt, falls

$$U \ni a \mapsto \alpha(a)(u_1, \dots, u_r, w^1, \dots, w^s) \in \mathbb{R}$$

für jedes fest gewählte Tupel

$$(u_1, \dots, u_r, w^1, \dots, w^s) \in (T_a U)^r \times (T_a U^*)^s$$

C^k ist.

Speziell ist $\omega \in \Omega(U)$ C^k falls

$$U \ni a \mapsto \omega(a)(u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}$$

C^k ist für jedes $(u_1, \dots, u_r) \in (T_a U)^r$.

Bemerkung. i) Tensorfelder und Differentialformen vom Grad 0 sind Funktionen

ii) Ein einfach kontravariantes Tensorfeld ist ein Vektorfeld: $\alpha(a) \in T_1(T_a U^*)$

$$\alpha(a) \in (T_a U^*)^* \approx T_a U,$$

$$\alpha(a) = \sum_{i=1}^m \alpha(a)^i e_i$$

mit (e_1, \dots, e_m) eine Basis von $T_a U$.

7.III. Koordinatendarstellung

Sei $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ die kanonische Parametrisierung von U , $\varphi(x) = x$. Dann ist (vgl. 4.10)

$$T_x U = \text{Span}(e_1, \dots, e_m)$$

\uparrow
 kanonische Einheits-Basis

Die dazu duale Basis bezeichnet man mit dx^1, \dots, dx^m . Es gilt für $v = \sum v^i e_i \in T_x U$:

$$dx^j(v) = v^j.$$

Nach Bemerkung ?? nach ?? ist

$$\left\{ dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r} \mid j_i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

eine Basis von $\Omega^r(U)$ also

$$\omega \in \Omega^r(U) \implies \omega = \sum \omega_{j_1 \dots j_r} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r}$$

mit Funktionen $\omega_{j_1 \dots j_r}: U \rightarrow \mathbb{R}$. Beachte: ω ist genau dann C^k wenn $\omega_{j_1 \dots j_r}$ C^k ist.

Beispiel. $m = 2$, $u, v \in T_a U \cong \mathbb{R}^2$

$$dx^1 \wedge dx^2(u, v) = \det \begin{pmatrix} dx^1(u) & dx^1(v) \\ dx^2(u) & dx^2(v) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{pmatrix}$$

Definition 7.18. Sei $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 , $U \subset \mathbb{R}^m$ offen mit $\varphi(U) = V$ offen. Sei $\omega \in \Omega^r(V)$. Dann definiert

$$(\varphi^* \omega)(t)(v_1, \dots, v_r) := \omega(\varphi(t))(D\varphi(t)v_1, \dots, D\varphi(t)v_r) \quad \forall t \in U, \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m$$

r -Form auf U , $\varphi^* \omega \in \Omega^r(U)$, den sogenannten *pullback* (Zurückziehung) von ω unter φ .

In Koordinaten:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Dann ist $\varphi^* \omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_r}$ mit

$$d\varphi^i = \sum_{k=1}^m \partial_k \varphi^i dt^k \quad (*)$$

Beweis durch Nachrechnen. $\varphi^* \omega$ ist also tatsächlich in $\Omega^r(U)$.

Definition 7.19. *Cartan-Ableitung* (äußere Ableitung) $U \subset \mathbb{R}^n$. $f \in \Omega^0(U)$ sei C^k mit $k \geq 1$. Dann setze:

$$df := \sum_{j=1}^m \partial_j f dx^j \quad (\text{Siehe oben } (*))$$

$\omega \in \Omega^r(U)$ sei C^k mit $k \geq 1$. Dann setze:

$$d\omega := \sum_{q \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d(\omega_{i_1 \dots i_r}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

$$d\omega \in \Omega^{r+1}(U)$$

Beispiel 7.20. $\omega = p dx + q dy$

$$\begin{aligned} d\omega &= (\partial_1 p dx + \partial_2 p dy) \wedge dx + (\partial_1 q dx + \partial_2 q dy) \wedge dy \\ &= (\partial_1 q - \partial_2 p) dx \wedge dy \end{aligned}$$

$d\omega = 0$ falls $\partial_1 q = \partial_2 p$ Integrabilitätsbedingung bei den *exakten* DGLn

Das ist insbesondere der Fall, wenn $\omega = d(f)$, $f(x, y)$, $\partial_1 f = p$, $\partial_2 f = q$ $f \in C^2$.
Beachten Sie die Ähnlichkeit zum Satz von Gauß in 2 Dimensionen \rightsquigarrow später mehr.

Bemerkung / Definition 7.21. Teilweise längere Rechnungen zeigen: $\omega, \tilde{\omega} \in C^k$, $k \geq 1$.

$d: \Omega^r(U) \rightarrow \Omega^{r+1}(U)$ ist linear

$$d(\omega \wedge \tilde{\omega}) = d\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^r \omega \wedge d\tilde{\omega} \text{ für } \omega \in \Omega^r(U)$$

$$d(d\omega) = 0, \omega \in C^k, k \geq 2.$$

$\omega \in \Omega^r(U)$ heißt *geschlossen* falls $d\omega = 0$ und *exakt* falls $\exists \alpha \in \Omega^{r-1}(U)$ s.d. $d\alpha = \omega$.
 α heißt *Potential* für ω . $U \subset \mathbb{R}^m$ Ist $d\omega = 0$, U sternförmig, d.h. \exists Punkt $a \in U$ s.d. die Verbindungslinien von a zu allen Punkten von U in U liegen, so \exists Potential.
Die Konstruktion funktioniert im wesentlichen so, wie bei den exakten DGLn (Partielle Integration entlang der Verbindungslinien). *Lemma von Poincaré*

Bemerkung 7.22. Zusammenhang zu Differentialgleichungen:

i) Exakte DGLn: Schreibe statt $g(x, y)y' + h(x, y) = 0$

$$\omega := g(x, y) dy + h(x, y) dx.$$

Die Integrabilitätsbedingung impliziert $d\omega = 0 \implies$ (auf sternförmigem Gebiet)
 $\exists f$ s.d. $\omega = df$ (also exakt), $g = \partial_y f$, $h = \partial_x f$, Satz über implizite Funktionen:
 $\exists x \mapsto y(x)$ s.d. $f(x, y(x)) = 0 \rightarrow$ die Lösung $y(x)$ der DGL.

ii) Merkregel bei DGLn mit getrennten Variablen. Schreibe statt $y' = f(x)g(y)$

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

7.IV. Zusammenhang zu Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Definition 7.23. $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$. ω heißt *integrierbar* über $V \subset U$ falls $f|_V$ integrierbar ist. Man setzt dann:

$$\int_V \omega := \int_V f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m := \int_V f(x) dx$$

Lemma 7.24. $U, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi(U) = V$, Diffeomorphismus auf V . Sein $K \subset U$ kompakt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(K)} \omega &= \int_K \varphi^* \omega \quad \text{falls } \det \varphi > 0 \\ &= - \int_K \varphi^* \omega \quad \text{falls } \det \varphi < 0 \end{aligned}$$

Beweis. $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \implies \varphi^* \omega = (f \circ \varphi) \det d\varphi dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ (nachrechnen). Die Behauptung folgt mit der Transformationsformel

$$\int_{\varphi(K)} \omega = \int_{\varphi(K)} f dx = \int_K f(\varphi(y)) |\det d\varphi(y)| dy \quad \square$$

Diese Definition können wir auf beliebige *orientierbare Untermannigfaltigkeiten* übertragen. Orientierbar: \exists Beschreibung durch lokale Parametrisierungen

$$\{ \varphi: U_i \rightarrow V_i \mid i \in I \}$$

s. d.

$$\Phi_{ij} := \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j: \varphi_j^{-1}(V_i \cap V_j) \rightarrow \varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$$

$\det d\Phi_{ij} > 0$ erfüllt.

Wählt man eine Basis $(\partial_j \psi)_{j=1 \dots m}$ von $T_a M$ und ist $a \in \varphi(U) \cap \psi(\tilde{U})$ so ist $((\partial_j \psi)_{j=1, \dots, m})$ gleich orientiert, d. h. der Basiswechsel A hat positive Determinante:

$$d\varphi = (d(\underbrace{\varphi^{-1} \circ \psi}_{\Phi_{\varphi\psi}}))^{-1} \cdot d\psi \quad (\text{Kettenregel})$$

Bemerkung 7.25. Ist M Hyperfläche, also $\dim(M) = n - 1$, $M \subset \mathbb{R}^n$, so ist Orientierbarkeit zur Existenz eines stetigen Einheitsnormalenvektorfeldes:

Beweis. „ \implies “ \exists genau 2 Einheitsnormalenvektoren bei $a = \varphi(t_0) \in M$. Wähle den, für den $(\nu(a), \partial_1 \varphi(t_0), \dots, \partial_{n-1} \varphi(t_0))$ die selbe Orientierung hat wie (e_1, \dots, e_n) (*).

„ \impliedby “ Ist $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetiges Einheitsnormalenvektorfeld so ist durch (*) eine Orientierung vorgegeben. Solche Parametrisierungen gibt es, da man durch Umsortieren der Komponentenfunktionen (*) erreichen kann. \square

Beispiel 7.26. G aus dem Satz von Gauß ist also orientierbar, das Möbiusband dagegen nicht.

Bemerkung 7.27. Das Übertragen des Integrals über m -Formen auf m -dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeiten funktioniert wie zuvor:

- Zunächst für $m = n$ (siehe oben)
- Dann für $K \subset M \subset \mathbb{R}^m$ ($n \geq m$). K kompakt unter der Annahme, dass

$$\exists \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit $K \subset \varphi(U)$. Mit 7.18 folgt:

$$\int_K \omega := \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \omega$$

ist eine sinnvolle Definition, die von der Wahl von φ nicht abhängt:

$$\varphi = \psi \circ \underbrace{(\psi^{-1} \circ \varphi)}_{\det d\psi > 0}$$

- Dann für $K \subset M$ mit $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ eine Beschreibung von M durch gleich orientierte Parametrisierungen. K kompakt \implies endlich viele U_1, \dots, U_l überdecken $K \implies$ Integralbegriff mit Hilfe einer untergeordneten Teilung der Eins.

Beispiel 7.28. $\omega = (\partial_1 g - \partial_2 f) dx \wedge dy$ auf $U \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt für $G \subset U$ wie im Satz von Gauß

$$\int_G \omega = \int_{\partial G} \langle F, \nu \rangle ds(t)$$

mit $F = \begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}$

$$ds(t) = \sqrt{\det d\gamma} dt = \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{E}} dt, \quad \nu(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\gamma'\|_{\mathbb{E}}}$$

Also

$$\begin{aligned} \int_G \omega &= \int_{\partial G} \langle Fv, d \rangle s(t) \\ &= \int_a^b (F_1(\gamma(t))\gamma'_2(t) - F_2(\gamma(t))\gamma'_1(t)) dt \\ &= \int_{\partial G} F_1 dy - F_2 dx \\ &\quad \uparrow \\ &\quad dx^i = d(\gamma_i(t)) = \gamma'_i dt \\ &= \int_{\partial G} \underbrace{g dy + f dx}_{=: \alpha} \end{aligned}$$

Notation aus 243. Es ist $\omega = d\alpha = (\partial_1 g - \partial_2 f) dx \wedge dy$. Also schreibt sich der Satz von Gauß hier:

$$\int_G d\alpha = \int_{\partial G} \alpha$$

Das ist kein Zufall! (siehe unten)

Zunächst etwas Vorarbeit:

Satz 7.29. Sei M orientierbare, m -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n mit Rand. Dann ist auch die $(m-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ∂M orientierbar.

Beweis-Idee. Sei $\varphi: U \rightarrow V$ Parametrisierung ($U \subset \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{m-1}$ offen) s. d. $\varphi(U \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) = V \cap \partial M \neq \emptyset$ und $\{\varphi, \varphi_i\}_j$ sei eine Beschreibung von M durch orientierte Parametrisierung.

Betrachte die letzte Spalte von $d\varphi$, also

$$d\varphi(t_0).e_m =: v, \quad \varphi(t_0) = p \in \partial M$$

Eine Basis (w_1, \dots, w_{m-1}) von $T_p(\partial M)$ ist dann so zu wählen, dass die Basis (v, w_1, \dots, w_{m-1}) von $T_p M$ gleich orientiert ist wie die Orientierung von $T_p M$. \square

Bemerkung. Mann nennt diese Orientierung als die von der Orientierung von M induzierte.

Beispiel 7.30.

$\overline{D}(v, w)$ orientiert wie \mathbb{R}^2 mit $(e_1, e_2) \implies w \nwarrow$

\implies Der Rand wird von den orientierten Parametrisierungen gegen Uhrzeigersinn durchlaufen.

Satz 7.31 (Spezialfall des Satzes von Stokes). Sei $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m) C^1$ und mit kompaktem Träger $\text{supp } \omega$ ($\text{supp } \omega = \overline{\{ * \} p \in \mathbb{R}^m | \omega(p) \neq \text{Nullform in Koordinaten: } \omega_{i_1 \dots i_{m-1}}}$ hat kompakte Träger). Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^m_-} d\omega = \int_{\partial \mathbb{R}^m_-} \omega$$

wobei $\mathbb{R}^m_- = \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{m-1}$, $\partial \mathbb{R}^m_- = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \omega &= \sum \omega_{i_1 \dots i_{m-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{m-1}} \\ &=: \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \alpha_j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^m \end{aligned}$$

Kompakter Träger $\implies \exists K$ kompakt s.d. $\alpha_j|_{\mathbb{R}^m \setminus K} = 0 \forall j$

$$\begin{aligned}
 d\omega &= \sum_{j=1}^m (\partial_1 \alpha_j) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \\
 \varphi: \mathbb{R}^{m-1} &\rightarrow \partial \mathbb{R}_-^m, \quad (t^1 \cdots t^{m-1}) \mapsto (0, t^1, \dots, t^{m-1}) \\
 \varphi^* \omega &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} (\alpha_j \circ \varphi) d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\varphi^j} \wedge \cdots \wedge d\varphi^m \\
 d\varphi^1 &= 0 \quad (\varphi^1(t) = 0 \forall t) \\
 d\varphi^j &= dt^{j-1} \quad (\varphi^j(t) = t^{j-1}) \text{ für } j \geq 2 \\
 \implies \varphi^* \omega &= (\alpha_1 \circ \varphi) dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^{m-1} \\
 \implies \int_{\partial \mathbb{R}_-^m} \omega &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \alpha_1(0, t^1, \dots, t^{m-1}) dt
 \end{aligned}$$

Linke Seite:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_-^m} d\omega &= \int_{\mathbb{R}_-^m} \left(\sum_{j=1}^m \partial_j \alpha_j \right) dx \\
 \int_{\mathbb{R}_{\leq 0}} \partial_1 \alpha_1(x) dx^1 &= \int_{-\infty}^0 \partial_1 \alpha_1(x) dx^1 = \alpha_1(0, x^2, \dots, x^m) \\
 \int_{\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{m-2}} &\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \partial_j \alpha_j(x) dx_j}_{=0} \right) dx_1 \cdots \widehat{dx_j} \cdots dx_m
 \end{aligned}$$

\implies Beh. □

Satz 7.32 (Integralsatz von Stokes). Sei M orientierte m -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n mit Rand ∂M , der die induzierte Orientierung trägt. Sei $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ mit kompaktem Träger und C^1 . Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Beweisidee. Sei $\varphi: U \rightarrow M$ globale Parametrisierung von $\text{supp } \omega$ (sonst: Zerlegung der Eins). Setze $\varphi^* \omega$ durch 0 fort zu einer Differentialform auf ganz \mathbb{R}_-^m .

- Ist U offen in \mathbb{R}^m ist $\varphi(U) \cap \partial M = \emptyset$. Beide Seiten sind 0.

- Ist U offen in \mathbb{R}_-^m also $\varphi(U) \cap \partial M \neq \emptyset$, gilt

$$\begin{aligned}
 \int_M d\omega &= \int_U \varphi^*(d\omega) = \int_U \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Nachrechnen!}}}{d(\varphi^*\omega)} \\
 &= \int_{\mathbb{R}_-^m} d(\varphi^*\omega) \stackrel{7.31}{=} \int_{\partial \mathbb{R}_-^m} \varphi^*\omega \\
 &= \int_{\partial U} \varphi^*\omega \stackrel{\substack{\uparrow \\ \varphi|_{\partial U}}}{=} \int_{\varphi(\partial M)} \omega = \int_{\partial M} \omega
 \end{aligned}
 \quad \square$$

Beispiel. Satz von Gauß, . . .

Beispiel. $n = 3$ $\omega = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3$

$$\begin{aligned}
 d\omega &= (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) dx^2 \wedge dx^3 \\
 &\quad + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) dx^3 \wedge dx^1 \\
 &\quad + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) dx^1 \wedge dx^2
 \end{aligned}$$

Koeffizienten heißen auch Rotation von $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

$$M \text{ 2-dim } \subset \mathbb{R}^3$$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad \text{Kurvenintegral vgl. Beispiel nach 7.24}$$

$$\begin{aligned}
 \int f_1 dx^1 + \cdots + f_3 dx^3 &= \int (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + f_3(\gamma(t))\gamma_3'(t)) dt \\
 &= \int \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt
 \end{aligned}$$

Definitionen

Cartan-Ableitung, 232

234

Differentialform, 231

Potential, 233

Integralsatz von Stokes, 237

pullback (Zurückziehung), 232

orientierbare Untermannigfaltigkeiten,

Tensorfeld, 231

Wichtige Sätze

Spezialfall des Satzes von Stokes, 236