ニュートン補間と補間誤差

山内優弥

July 24, 2025

補間問題の定義と基本定理

Definition (多項式補間問題)

$n+1$ 個の平面上の集合 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ $(x_i \neq x_j\ (i \neq j))$ が与えられたとき，以下の条件を満たす次数 n 以下の多項式 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ を見出す問題.

$$p(x_i) = y_i \quad \text{for all } i = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

Theorem (補間多項式の存在と一意性 (Unisolvence Theorem))

与えられた $n+1$ 個の相異なる節点 $x_0, \ldots, x_n$ と $y_0, \ldots, y_n$ に対し，補間条件 *(1)* を満たす次数 n 以下の多項式 $p(x)$ は，必ず存在し，かつ一意に定まる.

証明.

求める多項式を $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ とする．補間条件 (1) を代入すると，係数 $a_0, \ldots, a_n$ に関する連立一次方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

この係数行列はヴァンデルモンド行列 V である．節点 x_i が互いに異なるため，その行列式は $\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n}(x_j - x_i) \neq 0$ となる．よって V は正則であり，方程式 (2) は唯一の解を持つ．従って，係数ベクトルが一意に定まる．すなわち，補間多項式の存在と一意性が示された． □

ニュートン形式による構築

Definition (差分商 (Divided Differences))

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の差分商は以下のように再帰的に定義される.

- **0 階:** $f[x_i] := f(x_i)$
- **k 階:** $f[x_i,\dots,x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1},\dots,x_{i+k}]-f[x_i,\dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$

これは関数の離散的な高階微分と見なすことができ, f が k 回微分可能ならば, $f[x_0,\dots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$ となる ξ が存在する.

1,2 階の場合の例

例えば, $n=1,2$ のとき, 差分商は次のように計算される.

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0},\ f[x_0,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_0]}{x_2-x_0},\ f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1},$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}.$$

Theorem (ニュートン補間多項式)

f の補間多項式 $p(x)$ は，差分商を係数とする以下の形式で表現できる．

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i) \quad (3)$$

証明（数学的帰納法）.

$p_k(x)$ を最初の $k+1$ 個の点を通る補間多項式とする．
$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)$ の形で書けると仮定する．$j \leq k-1$ に対して，$p_k(x_j) = p_{k-1}(x_j) = f(x_j)$ が成り立つ．$p_k(x_k) = f(x_k)$ となるように c_k を定めると，$c_k = f[x_0, \ldots, x_k]$ となることが示される． □

利点

データ点 (x_{n+1}, y_{n+1}) を追加する際，既存の係数はそのままで新しい項を追加するだけで済む．

補間誤差

Theorem (補間誤差の一般形)

元の関数 $f(x)$ が C^{n+1} 級であるとき，補間誤差 $E(x) = f(x) - p(x)$ は，あるξ（x と節点を含む区間に存在する）を用いて以下で与えられる．

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad (4)$$

証明（ロルの定理）．

関数 $g(t) := f(t) - p(t) - C \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$ を考える．$g(x) = 0$ となるように定数 C を選ぶ．$g(t)$ は $n+2$ 個の根 $(x, x_0, \ldots, x_n)$ を持つ．ロルの定理を $n+1$ 回適用すると，$g^{(n+1)}(\xi) = 0$ となる ξ が存在する．$p(x)$ は n 次以下の多項式なので $p^{(n+1)}(t) \equiv 0$．よって，$f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)! = 0$ となり，C が求まる． □