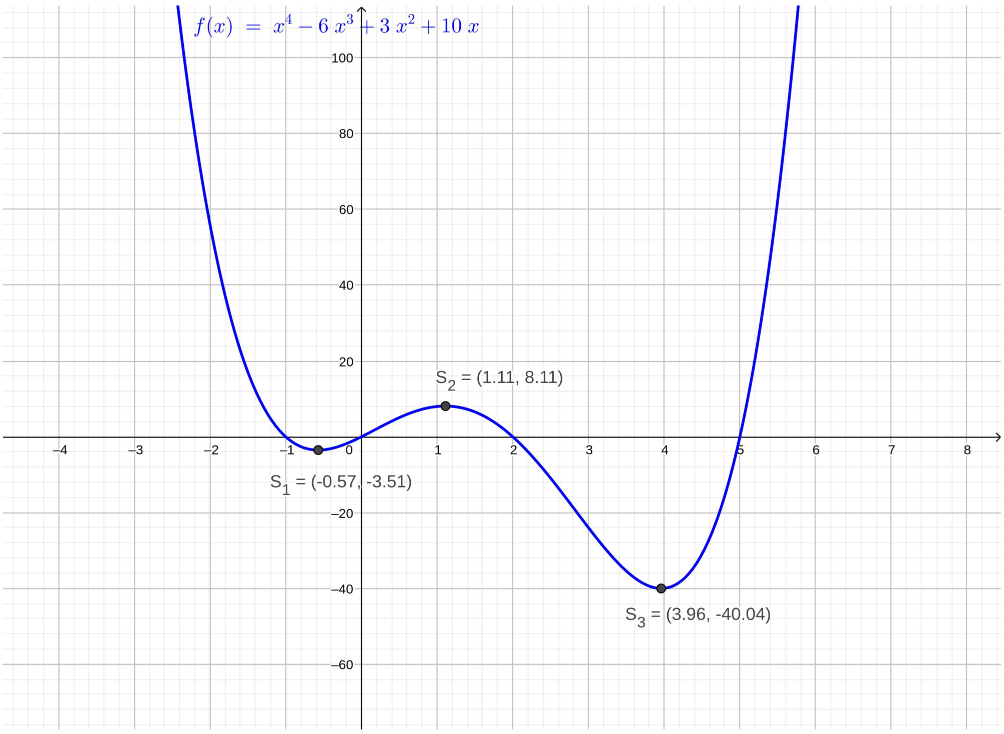
Universidad Galileo
Postgrado en Análisis y Predicción de Datos
Algoritmos en la Ciencia de Datos

Rodrigo Rafael Chang Papa
Carné: 19000625

Hoja de trabajo No. 1

Ejercicio 1

a. Gráfica de la función

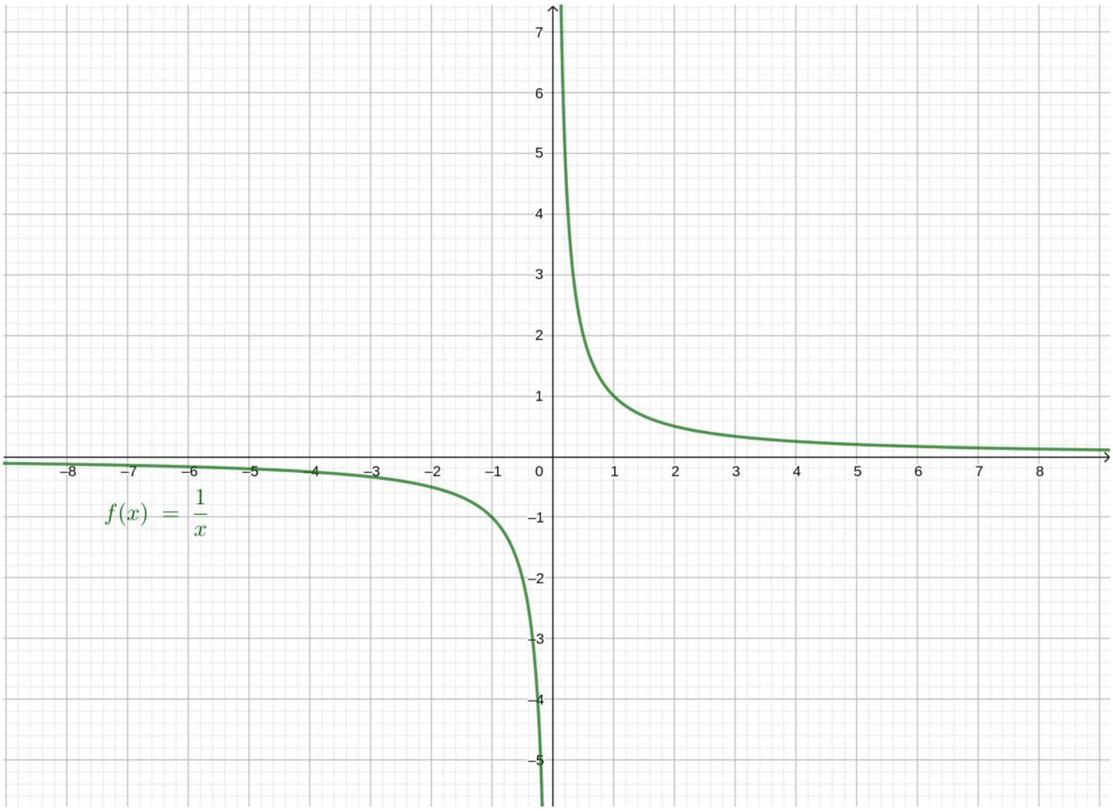


b. Los máximos y mínimos locales fueron localizados utilizando el comando Resuelve del software Geogebra. Se encuentra que la función exhibe máximo local en x=1.11. Además, exhibe un mínimo local en x=-0.57 y un mínimo global en x=3.96.

c. Como se observa, solamente existe el mínimo global, si se considera todo el dominio de la función.

Ejercicio 2

Por ejemplo, una función que no exhibe ni mínimo global, ni máximo global podría ser f(x)=1/x.



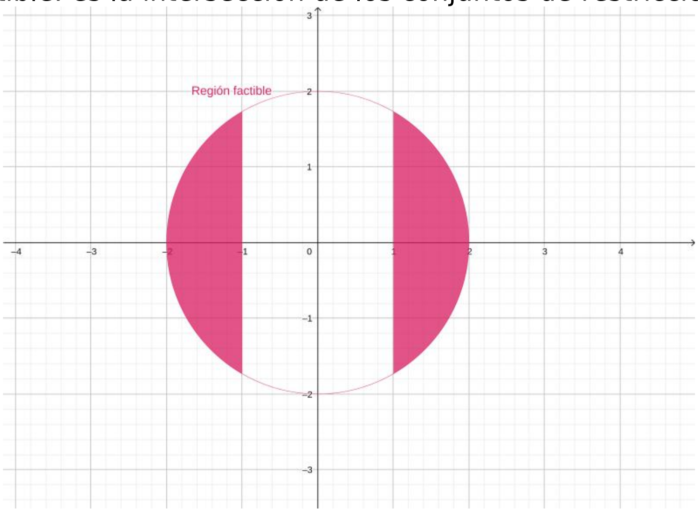
Ejercicio 3

Dado el problema de optimización:

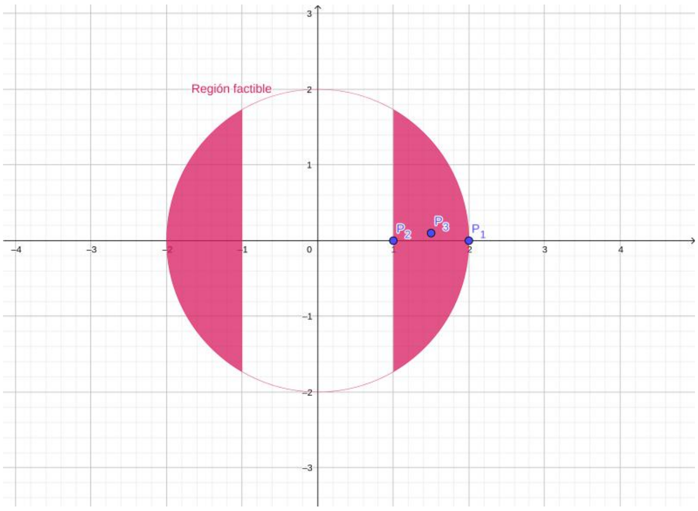
$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x,y) = x \\ \text{s.t.} \quad & x^2 + y^2 \leq 4 \\ & x^2 \geq 1. \end{aligned}$$

a. El problema de optimización no es lineal debido a que las restricciones en la región factible son no lineales. Las restricciones corresponden a un círculo (R1) y a un área del plano donde el valor absoluto de x es mayor que 1 (R2).

b. Región factible: es la intersección de los conjuntos de restricción R1 y R2.

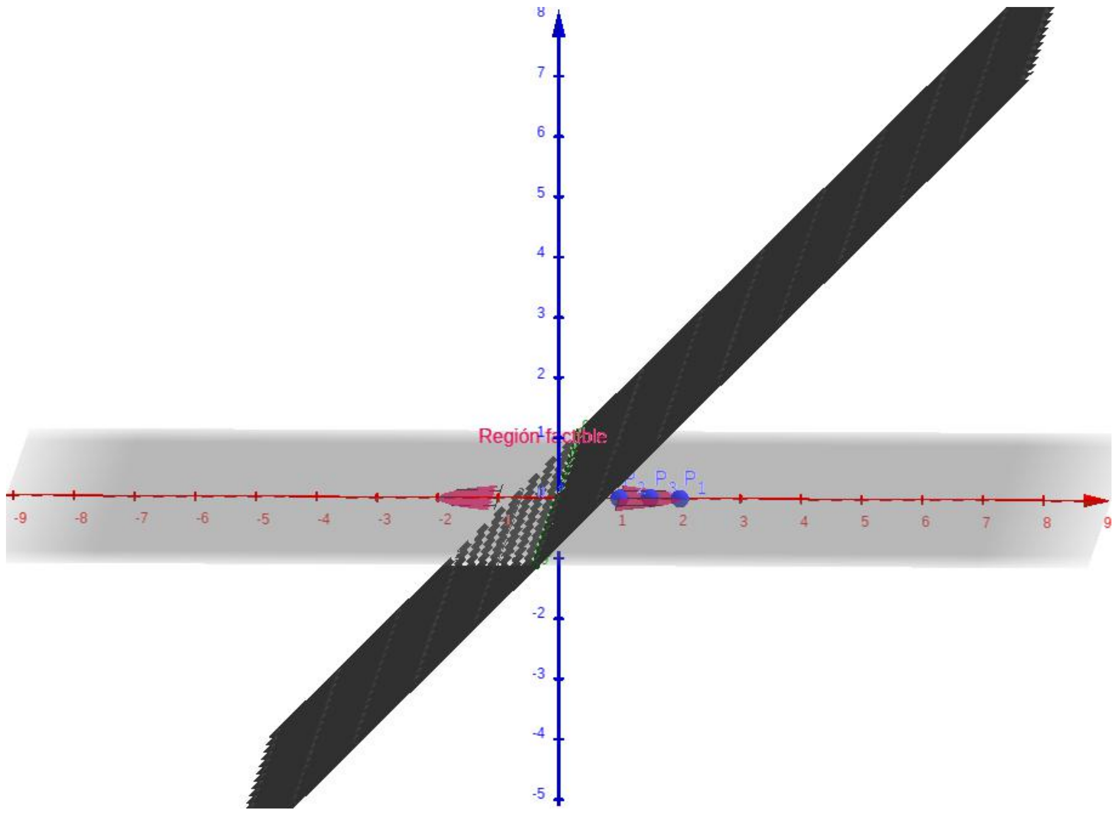


c. Conjunto activo



- El conjunto activo para el punto P1 es la restricción R1 (del círculo).
- El conjunto activo para el punto P2 es la restricccióni R2 (área donde abs(x) es mayor que 1).
- El conjunto activo para el punto P3 es vacío, es decir, no hay restricciones de igualdad que se verifiquen en este punto.

d. Debido a que la función es creciente en la dirección de x, es claro que la solución se da en el punto (-2,0), es decir, en la esquina más a la izquierda del círculo. Vea la siguiente gráfica.



Región factible
P_2
P_3
P_1

Ejercicio 4

En el problema del modelo de regresión: sea Y la presión arterial sistólica (en mm Hg), X1 la edad de la persona (en años) y X2 el peso (en lbs) de la persona. Entonces, la función de costo para los coeficientes de regresión está dada por:

Sea $Y^{(i)}$ la presión arterial de la persona i, $X_2^{(i)}$ su edad y $X_3^{(i)}$ su peso. Entonces, la función de costo está dada por:

a) $$C(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^{7} \left(Y^{(i)} - \beta_0 - \beta_1 X_2^{(i)} - \beta_2 X_3^{(i)} \right)^2$$

b) El problema de optimización podría plantearse como:

$$\min_{\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{7} \left(Y^{(i)} - \beta_0 - \beta_1 X_2^{(i)} - \beta_2 X_3^{(i)} \right)^2$$

c) Debido a que en los datos, los valores de edad son los mismos que los de la presión arterial sistólica, una solución trivial corresponde al caso en que b0=0, b1=1 y b2=0. En otras palabras, el costo puede reducirse a cero, debido a que Y = X2 para todos los valores observados.

Por otro lado, se considera una implementación en R utilizando los valores de presión dados en el problema:

```{r}
library(tibble)

edad <- c(16,25,39,45,49,64,70)
peso <- c(140, 149, 165, 170, 165, 159, 144)
presion <- c(16, 25, 39, 45, 49, 64, 70)

data <- tibble(Edad = edad, Peso = peso, Presion = presion)
data
```

Edad <dbl>	Peso <dbl>	Presion <dbl>
16	140	16
25	149	25
39	165	39
45	170	45
49	165	49
64	159	64
70	144	70

Ahora se implementa la función de costo:

Creamos la función de costo:

```{r}
costo.fn <- function(b, data) {
  b0 <- b[1]
  b1 <- b[2]
  b2 <- b[3]
  costo <- sum((data$Presion - b0 - b1*data$Edad - b2*data$Peso)^2)
  return(costo)
}

# Prueba de la función de costo
costo.fn(c(0,1,1), data)
```

```
[1] 171168
```

Al optimizar con la función *optim* se encuentra que el algoritmo converge (el valor $convergence = 0 indica la convergencia), a pesar de que no encontró la solución trivial que encontramos anteriormente. Posiblemente requiere ajustar el número de iteraciones, o la tolerancia en la búsqueda del óptimo:

```
Ahora vamos a minimizar utilizando la función *optim* del paquete base, que
permite optimizar funciones de varias variables.

```{r}

optimizador <- optim(c(1,0,0), function(x) costo.fn(x, data))
optimizador
```
```

```
$par
[1]  1.077648455  1.000386580 -0.006996741

$value
[1] 0.038501

$counts
function gradient
      96       NA

$convergence
[1] 0

$message
NULL
```

Ahora se realiza la implementación cambiando los datos de presión por valores comprendidos en un rango que puede ser considerado como normal:

```r
library(tibble)

edad <- c(16,25,39,45,49,64,70)
peso <- c(140, 149, 165, 170, 165, 159, 144)
presion <- sample(c(110:130), 7)

data <- tibble(Edad = edad, Peso = peso, Presion = presion)
data
```

Edad <dbl>	Peso <dbl>	Presion <int>
16	140	118
25	149	128
39	165	116
45	170	114
49	165	110
64	159	120
70	144	117

7 rows

Ahora, corriendo el algoritmo de optimización:

```r
optimizador <- optim(c(150,0,0), function(x) costo.fn(x, data))
optimizador
```

```
$par
[1] 154.14486647  -0.05962629  -0.21763688

$value
[1] 132.1173

$counts
function gradient
     186       NA

$convergence
[1] 0

$message
NULL
```

Los resultados coinciden con los obtenidos por un modelo de regresión con la función lm:

```{r}
model <- lm(Presion ~ ., data)
model$coefficients
```

```
 (Intercept)         Edad         Peso 
154.13905530  -0.05957831  -0.21760372 
```