Rodrigo Rafael Chang Papa

19000625

1) Dadas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinar si son convexas, cóncavas:

a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ es convexa, ya que $f''(x) > 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 6x + 4$

$f''(x) = 6 > 0$

De hecho, es estrictamente convexa.

b) $f(x) = 7x - 15$, es cóncava y convexa (no estrictamente), ya que:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = 7(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + 15$$

$$= 7\alpha x_1 + 7(1-\alpha)x_2 + 15\alpha + (1-\alpha)15$$

$$= \alpha(7x_1 + 15) + (1-\alpha)(7x_2 + 15)$$

$$= \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

(2) (a) $f(x) = x^3$, sobre $\mathcal{X} = [\emptyset, \infty)$

Dado que $f'(x) = 3x^2$, entonces $f''(x) = 6x$.

Sea $x_0 \in \mathcal{X}$, entonces $x_0 \geq \emptyset$, lo que implica que $f''(x_0) \geq \emptyset$, es decir, $f(x)$ es convexa sobre $\mathcal{X} = [\emptyset, \infty)$.

(b) Si $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, entonces

$$f''(x_0) \geq \emptyset \quad \text{si} \quad x_0 \geq \emptyset \quad \text{y}$$

$$f''(x_0) < \emptyset \quad \text{si} \quad x_0 < \emptyset,$$

por lo tanto, la función no es convexa, ni cóncava sobre el dominio $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

(3) $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$, $y > 0$

$f_x = \frac{2x}{y}$ $\qquad f_{xx} = \frac{2}{y}$ $\qquad f_{xy} = -\frac{2x}{y^2}$

$f_y = -\frac{x^2}{y^2}$ $\qquad f_{yy} = \frac{2x^2}{y^3}$ $\qquad f_{yx} = -\frac{2x}{y^2}$

Matriz Hessiana:

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/y & \frac{-2x}{y^2} \\ \frac{-2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{bmatrix}$$

Obteniendo los menores:

$|\nabla^2 f|_1 = f_{xx} = 2/y \geq 0$ si $y > 0$.

$|\nabla^2 f|_2 = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx} = \frac{4x^2}{y^4} - \frac{4x^2}{y^4} = 0 \geq 0$

$\therefore$ La matriz Hessiana es positiva semidefinida (PSD) y f es convexa.

(4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 3x_1 x_2 + 7x_2^2 - 25x_1 + 31x_2 - 29$$

(a) Determinar si el problema $\min_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$ es convexo.

Dado que $\mathbb{R}^2$ es convexo, probaremos que $f(x_1, x_2)$ es una función convexa.

$f_{x_1} = 16x_1 + 3x_2 - 25$ $\qquad$ $f_{x_2} = 3x_1 + 14x_2 + 31$

$f_{x_1x_2} = 3$ $\qquad$ $f_{x_2x_1} = 3$

$f_{x_1x_1} = 16$ $\qquad$ $f_{x_2x_2} = 14$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 16 & 3 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} |\nabla^2 f|_1 &= 16 > 0 \\ |\nabla^2 f|_2 &= |\nabla^2 f| = (16)(14) - 9 \\ &= 215 > 0 \end{aligned}$$

Como $|\nabla^2 f|_1 > 0$ y $|\nabla^2 f|_2 > 0$, entonces la matriz Hessiana es positiva definida, y así, f es estrictamente convexa en todo su dominio. Por lo tanto, $\min_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$ es un problema convexo.

(b) Acerca de la solución global: como la función objetivo es estrictamente convexa, cualquier mínimo local x^* en este problema convexo, será también un mínimo global y x^* será único.

(5)

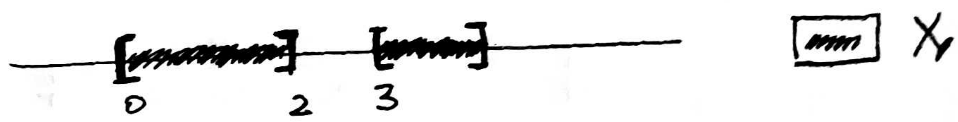
(a) La unión de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

FALSO

<u>Contraejemplo</u>: sea $X_1 = [0,2]$ y $X_2 = [3,4]$

entonces: $X = X_1 \cup X_2 = [0,2] \cup [3,4]$, el cual,

claramente es un conjunto no convexo:



En todo caso, es la suma o la intersección de conjuntos convexos la que resulta en un conjunto convexo.

(b) $\max\limits_{(x,y)\in \mathcal{X}} \; x+y$, donde $\mathcal{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

Dado que $\mathcal{X}$ es un conjunto compacto, al ser cerrado y acotado el teorema de Weierstass garantiza que la función continua $f(x,y) = x+y$ definida sobre $\mathcal{X}$ alcanza mínimo y máximo absoluto sobre $\mathcal{X}$.

Por lo tanto, el problema de optimización $\max\limits_{(x,y)\in \mathcal{X}} x+y$ <u>posee solución</u>. (VERDADERO)

(c) FALSO, el problema de optimización:

$$\min_{x \in [1,2]} 2e^{x} + 3$$ sí tiene solución.

Nuevamente, dado que $f(x) = 2e^{x} + 3$ es continua sobre $[1, 2]$ y este conjunto es compacto, el teorema de Weierstrass garantiza que existen $x_* = \underset{x \in [1,2]}{\text{argmin}}\, f(x)$ y $x^* = \underset{x \in [1,2]}{\text{argmax}}\, f(x)$, como soluciones al mínimo y máximo global en $[1, 2]$.

En este caso, es fácil encontrar x^* y x_*. Como f es estrictamente creciente en $[1, 2]$, entonces:

$$x_* = 1 \quad \text{y} \quad x^* = 2 .$$