Universidad Galileo
Postgrado en Análisis y Predicción de datos
Algoritimos en la Ciencia de Datos

Nombre: Rodrigo Rafael Chang Papa
Carné: 19000625

Hoja de trabajo No. 5

Ejercicio 1

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, en cualquier caso, justifique su respuesta.

a) En general, los algoritmos de optimización nos proveen una expresión matemática *cerrada* para poder resolver un problema de optimización.

b) La tasa de convergencia de un algoritmo de optimización describe que tan "rápido" dicho algoritmo converge a la solución del problema.

c) En la práctica, un algoritmo con una tasa de convergencia cuadrática se aproxima más rápido a la solución que uno con tasa de convergencia lineal.

d) En la práctica, un algoritmo con tasa de convergencia superlineal es comparable a uno con tasa de convergencia cuadrática.

Respuestas:

a) **Falso**: en general, los algoritmos de optimización nos permiten encontrar una solución numérica a un problema, debido a que la solución cerrada puede no existir o ser muy complicada de calcular.

b) **Verdadero**: la tasa de convergencia nos da la razón (cociente) entre la magnitud de los errores en la iteración k+1 sobre la magnitud de los errores en la iteración k, en el límite cuando el número de iteraciones tiende al infinito. Es una expresión matemática que describe una propiedad intrínseca (límite) de un algoritmo iterativo, en este caso, la "rapidez" con la que la secuencia de salida converge a una solución.

c) **Verdadero**: en general, sin importar el valor de la constante de convergencia (C), es preferible un algoritmo con convergencia cuadrática, ya que se aproximará a la solución en menos iteraciones.

d) **Verdadero:** de acuerdo con el ejemplo dado en clase, el orden de magnitud entre las iteraciones necesarias para un algoritmo superlineal puede llegar a ser el mismo que el de un algoritmo con tasa de convergencia cuadrática. Sin embargo, la tasa de convergencia cuadrática sigue siendo el tipo de convergencia más rápida y es deseable en un algoritmo, si es posible obtenerla.

Ejercicio 2

Considere la sucesión definida mediante:

$$x_0 = a > 0 \quad \text{y} \quad x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right).$$

Si $x_k \to \sqrt{a}$ cuando $k \to \infty$, determine la tasa de convergencia (*rate of convergence*) y la constante (*rate constant*) respectiva para la sucesión $\{x_k\}$.

$$e_k = x_k - \sqrt{a}$$

$$\begin{aligned}
e_{k+1} &= x_{k+1} - \sqrt{a} \\
&= \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) - \sqrt{a} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x_k^2 + a}{x_k}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{a} - \frac{1}{2}\sqrt{a} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x_k^2 + a}{x_k} - 2\sqrt{a}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x_k^2 - 2\sqrt{a}\,x_k + a}{x_k}\right)
\end{aligned}$$

$$e_{k+1} = \frac{1}{2x_k} \cdot \underbrace{(x_k - \sqrt{a})^2}_{e_k^2}$$

$$|e_{k+1}| = \left|\frac{1}{2x_k} e_k^2\right|$$

Así: $$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \left|\frac{1}{2x_k}\right|$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{2x_k}\right| = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Por lo tanto, la sucesión tiene tasa de convergencia cuadrática con constante 1/(2*sqrt(a)).

Ejercicio 3 - Problema extra

(*Problema Extra* – 3 puntos netos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con primera y segunda derivadas continuas. Sea $x^\star$ una solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ con $f'(x^\star) \neq 0$. Demuestre que, si $|x_0 - x^\star|$ es suficientemente pequeña, entonces la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ producida por el *método de Newton* tiene una *tasa de convergencia cuadrática (quadratic convergence rate)* con constante $C = \left|\dfrac{f''(x^\star)}{2f'(x^\star)}\right|$. Asuma que $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge a $x^\star$.

Primero obtenemos un polinomio de Taylor de grado 1 alrededor de x_k. Utilizando una de las formas del residuo (que conlleva la utilización de la derivada de segundo orden) podemos volver la aproximación una identidad.

- $f \in C^2((a,b))$
- $\exists\, x^* \in (a,b) : f(x^*) = 0 \,,\ f'(x^*) \neq 0$
- Asumimos que $x_k \to x^*$ conforme $k \to \infty$
- Secuencia de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (1)$$

- Utilizando un polinomio de Taylor alrededor de x_k:

$$f(x) = f(x_k) + (x - x_k) f'(x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^2 f''(\xi_k)$$

para $\xi_k \in (x_k, x^*)$

Si $x = x^*$

$$\underbrace{f(x^*)}_{=0} = f(x_k) + \underbrace{(x^* - x_k)}_{-e_k} f'(x_k) + \frac{1}{2}\underbrace{(x^* - x_k)^2}_{-e_k^2} f''(\xi_k)$$

$$0 = f(x_k) - (x_k - x^*) f'(x_k) + \frac{1}{2}(x_k - x^*)^2 f''(\xi_k)$$

$$\div f'(x_k)$$

$$0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - (x_k - x^*) + \frac{\frac{1}{2}(x_k - x^*)^2 f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \qquad (2)$$

Si evaluamos el polinomio de Taylor en x*, tenemos que f(x*)=0. Despejando obtenemos:

De ① : $$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = -x_{k+1} + x_k$$

En ② :

$$0 = -x_{k+1} + \cancel{x_k} - \cancel{x_k} + x^* + \frac{1}{2}(x_k - x^*)^2 \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} - x^* = \frac{(x_k - x^*)^2 f''(\xi_k)}{2 f'(x_k)}$$

$$\underbrace{x_{k+1} - x^*}_{e_{k+1}} = \frac{f''(\xi_k)}{2 f'(x_k)} \cdot (\underbrace{x_k - x^*}_{e_k})^2$$

$$|e_{k+1}| = \left| \frac{f''(\xi_k)}{2 f'(x_k)} \right| \cdot e_k^2$$

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \left| \frac{f''(\xi_k)}{2 f'(x_k)} \right|$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \left| \lim_{k \to \infty} \frac{f''(\xi_k)}{2 f'(x_k)} \right|$$

Utilizando la secuencia generada por el algoritmo de Newton, podemos expresar la ecuación como el cociente que nos interesa: entre las magnitudes de los errores, el siguiente y el k-ésimo. Obteniendo el límite tenemos lo que se muestra arriba.

Ahora, para resolver el límite nos valdremos de los supuestos. Como las aproximaciones se acercan a x*, puesto que tenemos que x_k converge a x*, entonces Xi se aproxima a x*. Además, por la continuidad de f’(x), tenemos que f’(x_k) converge a f’(x*). Por lo que el límite queda como:

Como ξ_k está entre x_k y x^*.

Si $|x_0 - x^*|$ es pequeña, $\xi_0 \approx x^*$, de esta forma,

$\xi_k \to x^*$ cuando $k \to \infty$, pues $x_k \to x^*$.

Asimismo, cuando $k \to \infty$, $f'(x_k) \to f'(x^*)$, por la continuidad de f'.

Luego:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \left| \lim_{k \to \infty} \frac{f''(\xi_k)}{2 f'(x_k)} \right|$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \left| \frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)} \right|$$

Por lo tanto, el método de Newton tiene una tasa de convergencia cuadrática, con

$$C = \left| \frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)} \right|$$

$\blacksquare$