Hoja de Trabajo No. 5

Introducción a los Algoritmos de Optimización para Ciencia de Datos

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, en cualquier caso, justifique su respuesta.

   a) En general, los algoritmos de optimización nos proveen una expresión matemática *cerrada* para poder resolver un problema de optimización.

   b) La tasa de convergencia de un algoritmo de optimización describe que tan "rápido" dicho algoritmo converge a la solución del problema.

   c) En la práctica, un algoritmo con una tasa de convergencia cuadrática se aproxima más rápido a la solución que uno con tasa de convergencia lineal.

   d) En la práctica, un algoritmo con tasa de convergencia superlineal es comparable a uno con tasa de convergencia cuadrática.

2. Considere la sucesión definida mediante:

$$x_0 = a > 0 \quad \text{y} \quad x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right).$$

   Si $x_k \to \sqrt{a}$ cuando $k \to \infty$, determine la tasa de convergencia (*rate of convergence*) y la constante (*rate constant*) respectiva para la sucesión $\{x_k\}$.

3. (*Problema Extra* $-$ 3 puntos netos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con primera y segunda derivadas continuas. Sea $x^\star$ una solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ con $f'(x^\star) \neq 0$. Demuestre que, si $|x_0 - x^\star|$ es suficientemente pequeña, entonces la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ producida por el *método de Newton* tiene una *tasa de convergencia cuadrática (quadratic convergence rate)* con constante $C = \left|\dfrac{f''(x^\star)}{2f'(x^\star)}\right|$. Asuma que $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge a $x^\star$.