# Laboratorio No. 1

## Introducción a la Implementación de Algoritmos de Optimización

**Instrucciones:**

- Resuelva cada una de los ejercicios que se le solicitan a continuación utilizando Python.
- Para su entrega debe subir al GES un archivo *.zip* con una carpeta por cada ejercicio y su respectivo código en un archivo con extensión *.py*. Si usted no entrega en este formato, su ejercicio no será calificado.

---

En este laboratorio implementaremos dos métodos (Newton-Raphson y Bisección) para la resolución de *ecuaciones no lineales* de la forma:

$$f(x) = 0,$$

en donde, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Luego, aplicaremos estos algoritmos para resolver problemas de optimización sencillos y finalmente, estimaremos sus tasas de convergencia.

### Parte I – Método de Newton-Raphson

1. Implemente un algoritmo para determinar la *derivada* de una función polinomial de una variable por medio de *diferencias finitas*.

2. Implemente el algoritmo de *Newton-Raphson*. Para ello, la función $f(x)$ debe ser ingresada por el usuario en forma de "string", por ejemplo si su ecuación es $f(x) = 3x^2 + 2x + 4 = 0$, el usuario ingresará "*3x^2 + 2x + 4*". Considere como criterio para detener su algoritmo (stopping criteria) $|f(x_k)| < \epsilon$. La precisión deseada $\epsilon$ debe ser ingresada por el usuario. Recuerde que, en este método, la secuencia $\{x_k\}$ se genera mediante la ecuación:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

3. Considere el problema de optimización:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \; g(x)$$

en donde, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ni} \; g(x) = 4x^4 - 4x + 1$.

   *a*) Resuelva este problema de optimización utilizando el método de Newton-Raphson. Despliegue una tabla que muestre claramente las distintas iteraciones que realizó.

   *b*) ¿Es global o local el mínimo que encontró mediante su algoritmo? Justifique su respuesta.

4. Estime la tasa de convergencia (*rate of convergence R*) y la constante (*rate constant C*) utilizando una *regresión lineal*. Para ello, recuerde que definimos la tasa de convergencia mediante el siguiente límite:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = C.$$

Asumiendo un comportamiento "ideal", podemos escribir:

$$|e_{k+1}| = C\,|e_k| \quad \text{para todo } k.$$

Al aplicar logaritmo natural a ambos miembros de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\underbrace{\ln|e_{k+1}|}_{y} = r\,\underbrace{\ln|e_k|}_{x} + \ln C.$$

Por tanto, dada la sucesión de errores $\{e_k\}$ (generada por su programa), podemos utilizar una regresión lineal de la forma $y = \alpha x + \beta$ para estimar $r$ y $C$. No olvide que: $e_k = |x_k - x^\star|$.

## Parte II – Método de Bisección

Investigue cómo funciona el método de bisección y repita *todos* los incisos descritos en la Parte I. Finalmente, realice un análisis de comparación entre los dos métodos estudiados en este laboratorio, auxíliese de gráficos y del análisis empírico de las tasas de convergencia para justificar su respuesta.