Математический анализ
Расчётно-графическая работа № 1
«Последовательность и её предел»
Вариант №1

Выполнили:
Кириченко Тимофей (13.1)
Атдаев Санджар (13.1)
Белогубов Григорий (10.1)
Преподаватель:
Правдин Константин
Ментор:
Кузьмина Анастасия

Место выполнения:
г. Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д. 49А
12.10.2023

Задание 1. Метод математической индукции

ИТМО

Условие

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом n ∈ N:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad \text{при} \quad n > 1$$

План

1. Проверьте утверждение для первых номеров n, например, для n = 1 (база индукции).
2. Предположите, что утверждение верно при n = k (индукционное предположение).
3. Покажите, что из справедливости индукционного предположения для номера n = k следует справедливость этого утверждения для номера n = k + 1 (шаг индукции).
4. Сделайте вывод.

Задание 1. Решение

1. Для $n = 1: \quad \frac{1}{2} \not> \frac{13}{24}; \quad \frac{12}{24} \not> \frac{13}{24}$

   Для $n = 2: \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24}; \quad \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$

2. Для $n = k: \quad \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$

3. Для $n = k+1: \quad \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}$

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} \;\Big|\; + \quad \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} + \frac{13}{24} > \frac{13}{24}$$

$$\frac{k+1}{(k+1)(2k+1)(2k+2)} > 0$$

4. Т.к в процессе математической индукции было установлено, что разность между элементами **n=k**+1 и **n=k** положительна, то можно сказать, что условие выполняется при любом n ∈ N

Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности

ИТМО

Условие

Вещественная последовательность задана рекуррентно: $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, где $x_1 \in R$. Исследуйте её предел при $n \to \infty$ в зависимости от значения x_1.

План

1. Предположите, что предел существует, и найдите его. Доказательство существования предела будет проведено в п. 6).

2. Какими могут быть значения x_1? Укажите множество возможных значений x_1. Докажите ваш ответ аналитически.

3. При каком значении x_1 последовательность является стационарной? Докажите это аналитически.

4. Выделите характерные случаи для значений x_1 (с точки зрения монотонности) и проиллюстрируйте их графиками последовательности.

5. Докажите аналитически ограниченность и монотонность последовательности для каждого характерного случая. Сделайте заключение о существовании предела по теореме Вейерштрасса.

Задание 2. Решение

1. Предположим, что предел существует: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+x_n} = 2$
2. $-2 \leq x_1 < +\infty \Leftrightarrow x \in [-2; +\infty)$

Если $x_1 < -2$, то мы получим $\lim$ последовательности комплексных чисел, что не входит во множество рациональных чисел.

3. При $x_1 = 2$ - последовательность будет стационарной.

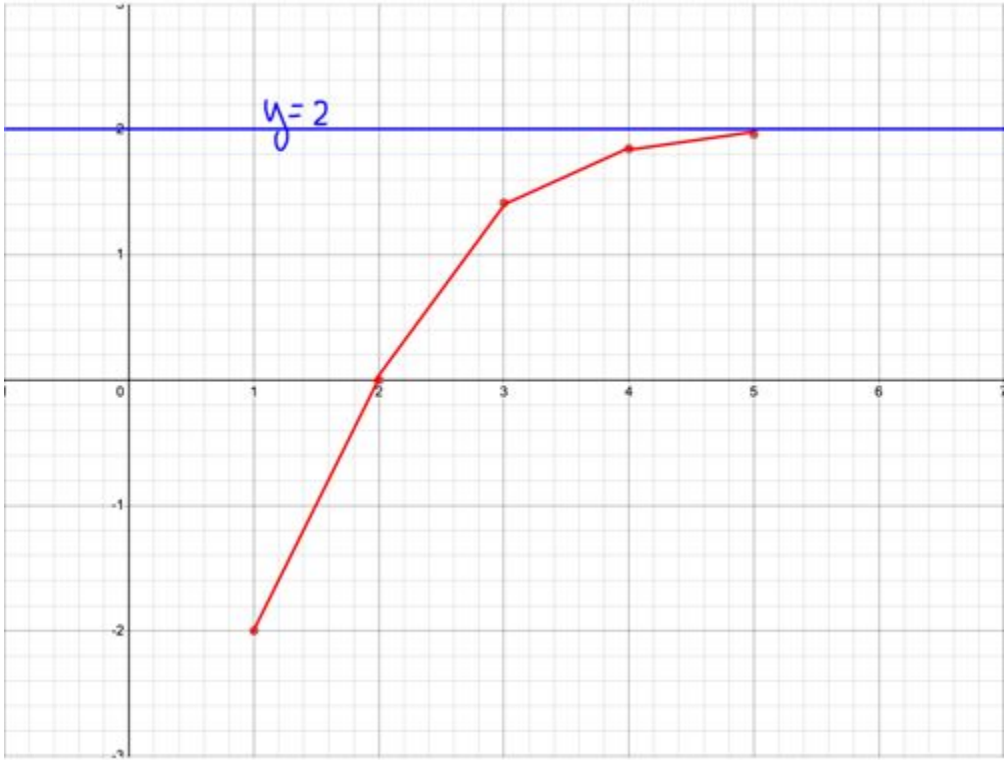
Если $\sqrt{2+x_k} = \sqrt{2+x_{k+1}}$, тогда $x_k = x_{k+1}$, значит

$x_k = \sqrt{2+x_k}; \mathrm{x}_k^2 - 2 - x_k = 0; x_{k1} = 2$ и $x_{k2} = -1$ но $-1 \notin [0; +\infty)$

ОДЗ: $x_k \geq 0$

Задание 2. Решение

4. При $x_1 < 2:$

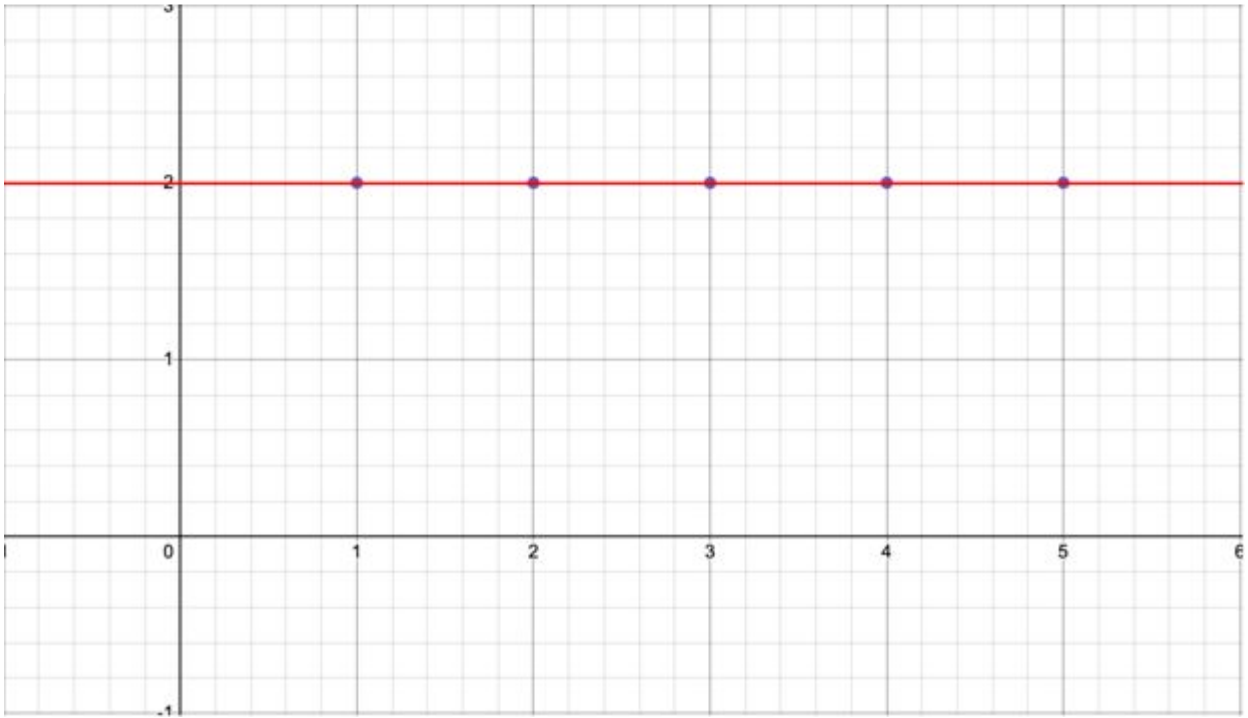


Задание 2. Решение

4. При $x_1 > 2:$

Задание 2. Решение

4. При $x_1 = 2:$



Задание 2. Решение

5. При $x_1 \geq 2:$ ограничено снизу 2

МИ: $x_1 \geq 2,]x_k \geq 2 : x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}, \sqrt{2+x_k} \geq \sqrt{2+2} \Rightarrow \sqrt{2+x_k} \geq 2 \Rightarrow x_{k+1} \geq 2$

При $-2 \leq x_1 \leq 2:$ ограничено сверху 2

МИ: $x_1 \leq 2, x_1 \geq -2,]x_k \leq 2 : x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}, \sqrt{2+x_k} \leq \sqrt{2+2} \Rightarrow \sqrt{2+x_k} \leq 2 \Rightarrow x_{k+1} \leq 2$

Доказать 1) невозрастание $x_1 \geq 2$ и 2) неубывание $x_1 \leq 2$:

1. $\sqrt{2+x_n} \leq x_n, x_n \geq -2; x_n \geq 2$

2. $\sqrt{2+x_n} \geq x_n, x_n \geq -2; -2 \leq x_n \leq 2$

$$1. \sqrt{2+x_n} \leq x_n, x_n \geq -2$$

$$x_n - \sqrt{2+x_n} \geq 0$$

$$\frac{(x_n - \sqrt{2+x_n})(x_n + \sqrt{2+x_n})}{x_n + \sqrt{2+x_n}} \geq 0$$

$$\frac{x_n^2 - 2 - x_n}{x_n + \sqrt{2+x_n}} \geq 0$$

$$x_n^2 - 2 - x_n \geq 0$$

$$x_n \geq 2$$

$$2. x_n - \sqrt{2+x_n} \leq 0$$

$$\frac{x_n^2 - 2 - x_n}{x_n + \sqrt{2+x_n}} \leq 0$$

$$-2 \leq x_n \leq 2$$

Задание 3. Исследование сходимости

ИТМО

Условие

Дана последовательность a_n.
Исследуйте её поведение при $n \to \infty$.

$$a_n = \frac{4}{1\cdot 9} + \frac{4}{9\cdot 17} + \ldots + \frac{4}{(8n-7)\cdot(8n+1)}$$

План

1. Вычислите предел A последовательности при $n \to \infty$.
2. Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.
3. Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) последовательности:
   a. вспомните определение предела последовательности, запишите его через ε, n_0 и неравенство;
   b. выберите три различных положительных числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$;
   c. для каждого такого числа изобразите на графике соответствующую ε-окрестность предела A («ε-трубу»);
   d. для каждого выбранного ε найдите на графике номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, после которого всечлены последовательности попадают в ε-окрестность, или установите, что такого номера нет.

Задание 3. Решение

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{1*9}+\frac{4}{9*17}+\dots+\frac{4}{(8n-7)(8n+1)}\right)=4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1*9}+\frac{1}{9*17}+\dots+\frac{1}{(8n-7)(8n+1)}\right)$$

$$\triangleleft\ \frac{1}{(8k-7)(8k+1)}+\frac{1}{(8k+1)(8k+9)}=\frac{2}{(8k-7)(8k+9)};\quad \frac{4}{(8n-7)(8n+1)}=\frac{2}{(8n-7)(8n-3)}+\frac{2}{(8n-3)(8n+1)}$$

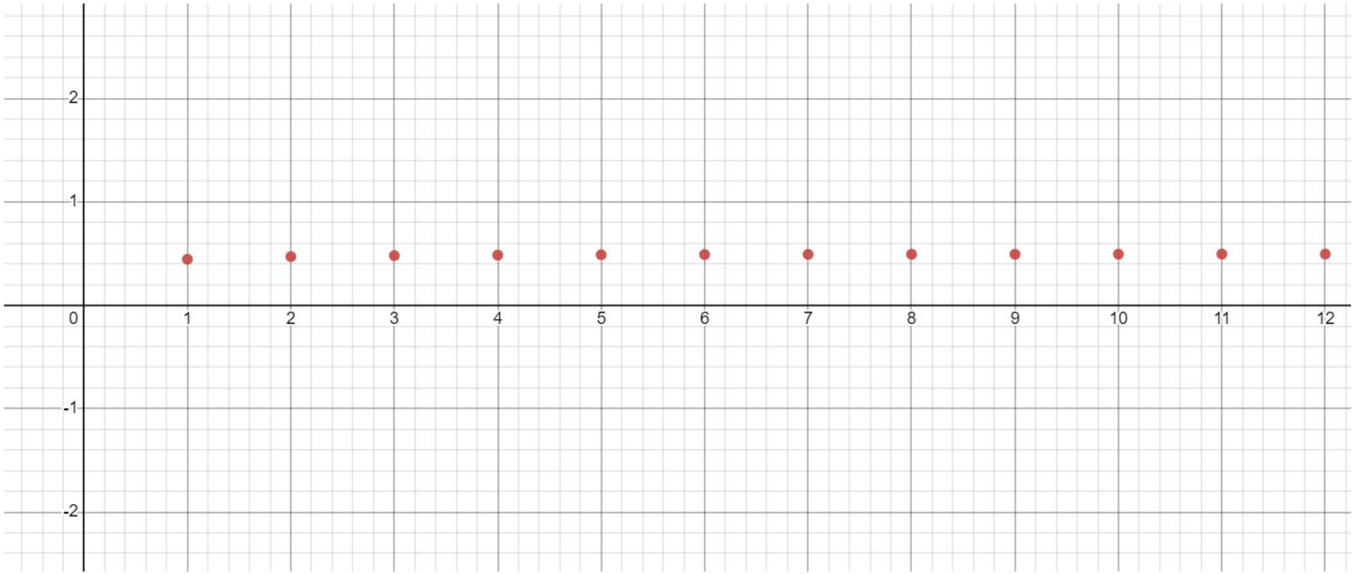
$$\frac{4}{(8n-7)(8n+1)}=\frac{1}{(8n-7)(8n-5)}+\frac{1}{(8n-5)(8n-3)}+\frac{1}{(8n-3)(8n-1)}+\frac{1}{(8n-1)(8n+1)}$$

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1*3}-\frac{2}{3*5}+\dots+\frac{2}{(8n-1)(8n+1)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\dots+\frac{1}{8n(8n+1)}\right)$$

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{8n}-\frac{1}{8n+1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{8n+1}\right)=\frac{1}{2}*1=\frac{1}{2}$$

Задание 3. Решение

2.



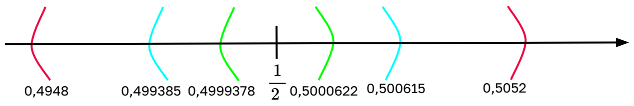
Задание 3. Решение

3. Так как существует конечный предел равный $\frac{1}{2}$, можно утверждать, что последовательность сходящаяся

a. Последовательность {a□} имеет предел А, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство:
|a□ - A| < ε.

b. $\varepsilon_1 = 0.0052$; $\varepsilon_2=0.000615$; $\varepsilon_3 = 0.0000622$: $0.0052 > 0.000615 > 0.0000622$ (истина)

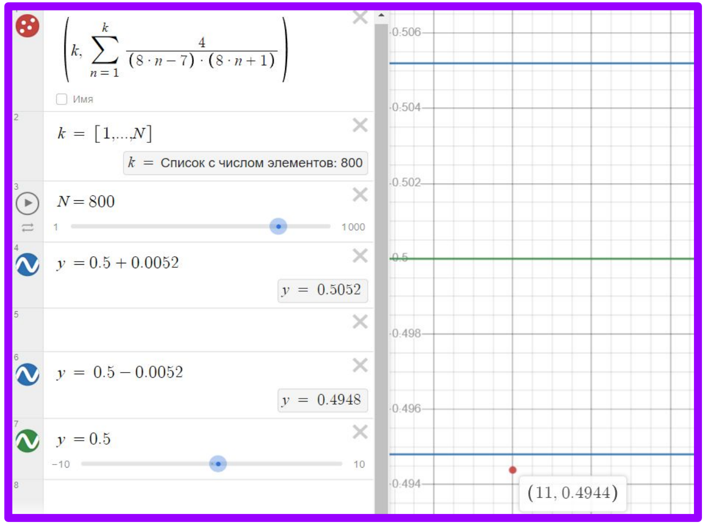
c.



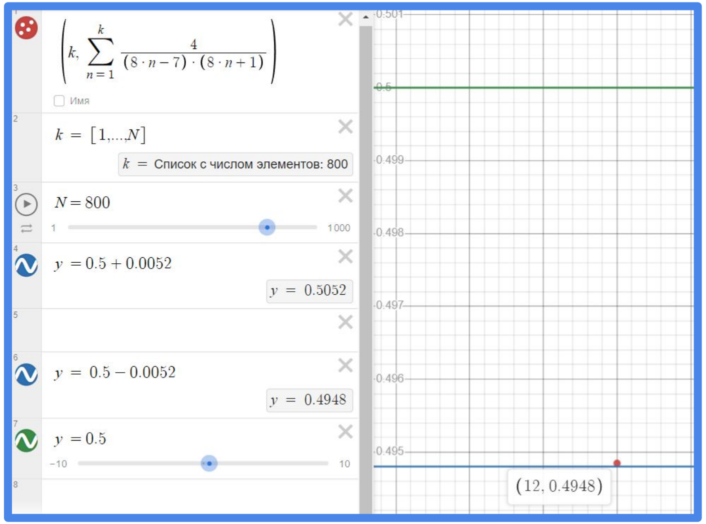
Задание 3. Решение

d. Для $n_0 > 10$ при $\varepsilon_1 = 0.0052$

$n_0 = 11$, т.к. после него все члены последовательности попадают в ε-окрестность



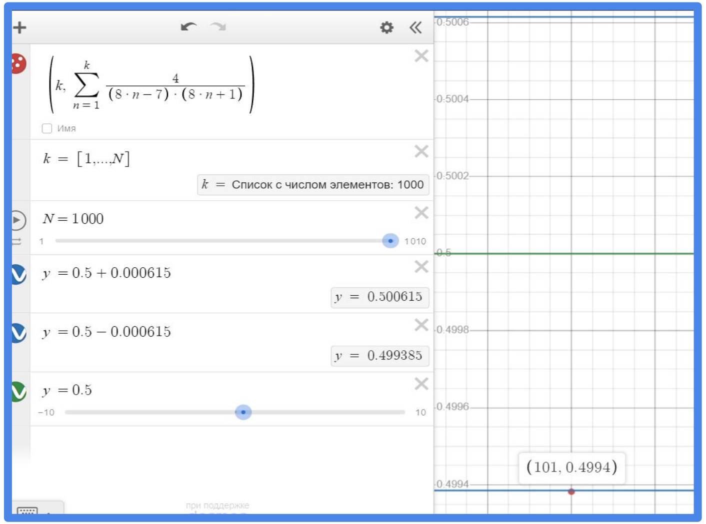
n = 12 уже входит в эпсилон окрестность



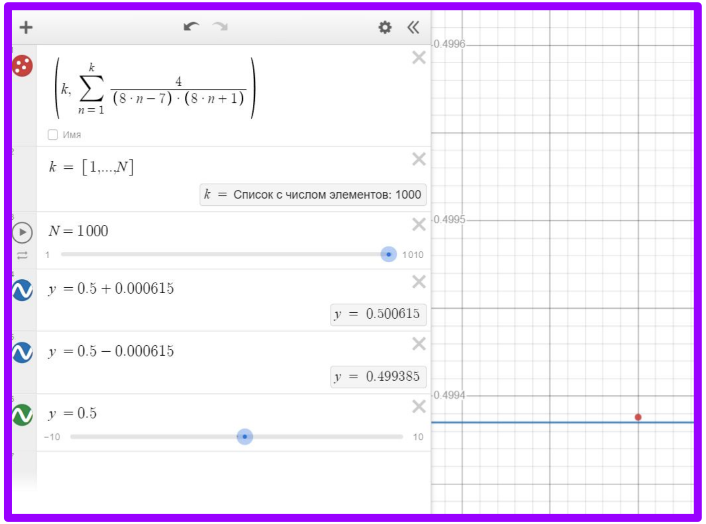
Задание 3. Решение

d. Для $n_0 > 100$ при $\varepsilon_2 = 0.000615$

$n_0 = 101$, т.к. после него все члены последовательности попадают в ε-окрестность



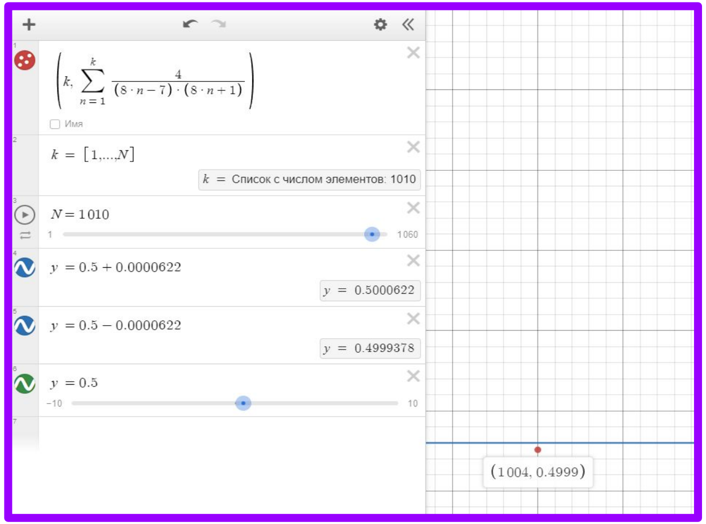
n = 102 уже входит в эпсилон окрестность



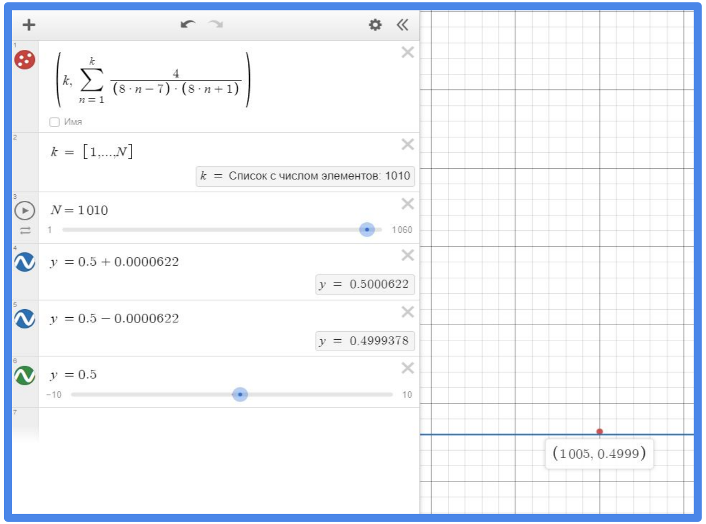
Задание 3. Решение

d. Для $n_0 > 1000$ при $\varepsilon_3 = 0.0000622$

$n_0 = 1004$, т.к. после него все члены последовательности попадают в ε-окрестность



n = 1005 уже входит в эпсилон окрестность



Оценочный лист

Кириченко Тимофей - 30%

Атдаев Санджар - 30%

Белогубов Григорий - 40%

Спасибо за внимание!

ITsMOre than a UNIVERSITY