Filtro Complementare per Quaternioni

Autore: Riccardo Pogliacomi

1 Introduzione

Il filtro complementare per quaternioni è un metodo efficace per stimare l'orientamento in uno spazio tridimensionale utilizzando i dati provenienti da sensori come giroscopi, accelerometri e magnetometri. Questo articolo esplorerà la teoria alla base del filtro, le formule utilizzate e l'implementazione.

2 Teoria dei Quaternioni

I quaternioni sono un'estensione dei numeri complessi e forniscono una rappresentazione conveniente per le rotazioni nello spazio tridimensionale. Un quaternione è rappresentato come:

$$q = w + xi + yj + zk$$

dove w è la parte scalare e x, y, z sono le parti vettoriali.

La norma di un quaternione q è data da:

$$\|q\| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

Un quaternione normalizzato ha norma 1 e viene utilizzato per rappresentare le rotazioni.

2.1 Rotazione di un Vettore

Per ruotare un vettore v utilizzando un quaternione q, il vettore deve essere rappresentato come un quaternione puramente vettoriale $v' = 0 + xi + yj + zk$. La rotazione è effettuata tramite la seguente formula:

$$v_{\text{rot}} = qv'q^{-1}$$

dove q^{-1} è l'inverso del quaternione q.

2.2 Matrice di Rotazione

Un quaternione può essere convertito in una matrice di rotazione R in questo modo:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2(y^2 + z^2) & 2(xy - wz) & 2(xz + wy) \\ 2(xy + wz) & 1 - 2(x^2 + z^2) & 2(yz - wx) \\ 2(xz - wy) & 2(yz + wx) & 1 - 2(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

Dove $q = [w, x, y, z]$.

La matrice di rotazione R può essere utilizzata per ruotare un vettore v nel seguente modo:

$$v_{\text{rot}} = R \cdot v$$

2.3 Conversione da Angoli di Eulero a Quaternioni

Gli angoli di Eulero (ϕ, θ, ψ), rappresentano rotazioni attorno agli assi x, y e z, rispettivamente. I quaternioni possono essere ottenuti da questi angoli con la seguente formula:

$$q = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

3 Modelli di Sensori

Il filtro utilizza tre tipi di sensori:

- **Giroscopio**: misura la velocità angolare ω (in rad/s) e fornisce informazioni sull'orientamento a breve termine.
- **Accelerometro**: misura l'accelerazione $\mathbf{a}$ (in m/s^2) e aiuta a determinare l'orientamento a lungo termine. Le letture dell'accelerometro devono essere normalizzate:
$$\mathbf{a}_{\text{norm}} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$$
- **Magnetometro**: fornisce informazioni sulla direzione del campo magnetico terrestre $\mathbf{m}$ (in uT). Anche queste letture devono essere normalizzate:
$$\mathbf{m}_{\text{norm}} = \frac{\mathbf{m}}{\|\mathbf{m}\|}$$

4 Algoritmo del Filtro Complementare

Il filtro complementare utilizza i dati dei sensori per aggiornare il quaternione di orientamento. I passaggi principali includono:

4.1 Aggiornamento del Giroscopio

Per calcolare la nuova orientazione basata sul giroscopio, si utilizza la velocità angolare:

$$\Delta q = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\|\omega\| dt}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\|\omega\| dt}{2}\right)\frac{\omega}{\|\omega\|} \end{bmatrix}$$

Dove Δq rappresenta la variazione del quaternione dovuta alla rotazione del giroscopio in un intervallo di tempo dt.

La nuova stima del quaternione diventa:

$$q_{\text{gyro}} = q_{\text{prev}} \cdot \Delta q$$

4.2 Aggiornamento dell'Accelerometro e del Magnetometro

Dopo aver calcolato l'orientamento con il giroscopio, si calcolano i quaternioni di riferimento basati sui dati dell'accelerometro e del magnetometro. I roll e pitch possono essere calcolati come:

$$\text{pitch} = \arcsin(-a_x)$$

$$\text{roll} = \arctan 2(a_y, a_z)$$

Per il magnetometro, l'orientamento può essere ottenuto tramite:

$$\text{heading} = \arctan 2(m_y, m_x)$$

Il quaternione basato sull'orientamento accelerometrico e magnetometrico è quindi calcolato come:

$$q_{\text{acc}} = \text{quaternion}(roll, pitch, heading)$$

4.3 Combinazione dei Quaternioni

Per combinare i quaternioni ottenuti dal giroscopio e quelli calcolati dall'accelerometro e magnetometro, si utilizza l'interpolazione sferica (SLERP):

$$q = (1 - \beta)q_{\text{gyro}} + \beta q_{\text{acc}}$$

dove β è un parametro che determina il contributo dei dati del giroscopio rispetto a quelli dell'accelerometro e del magnetometro.

5 Conclusione

Il filtro complementare per quaternioni è una tecnica potente per stimare l'orientamento in applicazioni che utilizzano sensori IMU. Combinando i dati di giroscopio, accelerometro e magnetometro, il filtro fornisce un risultato robusto e affidabile per l'orientamento tridimensionale.