Confronto tra Model Predictive Control (MPC) e Linear Quadratic Regulator (LQR)

Pogliacomi Riccardo

1 Introduzione

Il controllo ottimale è una strategia fondamentale per la gestione di sistemi dinamici. Due approcci molto diffusi sono il **Linear Quadratic Regulator (LQR)** e il **Model Predictive Control (MPC)**. In questo documento, analizziamo il funzionamento di entrambi i metodi e li confrontiamo.

2 Linear Quadratic Regulator (LQR)

2.1 Legenda LQR

- x: Vettore di stato
- u: Vettore di controllo
- Q: Matrice di peso sugli stati
- R: Matrice di peso sugli input
- K: Matrice di guadagno del LQR
- P: Soluzione dell'equazione di Riccati

L'**LQR** è un metodo di controllo ottimale per sistemi lineari, che mira a minimizzare una funzione di costo quadratica:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \tag{1}$$

dove:

- x è il vettore di stato,
- u è il vettore di controllo,
- Q è una matrice semidefinita positiva che penalizza gli stati indesiderati,
- R è una matrice definita positiva che penalizza l'energia del controllo.

Per trovare il controllo ottimale, si parte dalla dinamica del sistema lineare:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2}$$

2.2 Equazione di Riccati

L'equazione di Riccati è un'equazione differenziale matriciale fondamentale nel controllo ottimale. La sua forma algebrica stazionaria è:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{3}$$

dove P è una matrice simmetrica che rappresenta la soluzione dell'equazione di Riccati.

L'equazione di Riccati deriva dal principio di ottimalità di Bellman ed è risolta per trovare il guadagno ottimale K. Essa garantisce che il controllo minimizzi la funzione di costo sopra definita. La matrice P può essere ottenuta risolvendo l'equazione di Riccati con metodi numerici o analitici per sistemi semplici.

Una volta trovata P, il guadagno ottimale è dato da:

$$K = R^{-1}B^T P \tag{4}$$

Il controllo ottimale risulta quindi:

$$u = -Kx \tag{5}$$

Una volta calcolata la matrice K, questa può essere utilizzata in tempo reale senza dover ricalcolare l'ottimizzazione.

3 Model Predictive Control (MPC)

3.1 Legenda MPC

- x: Vettore di stato
- u: Vettore di controllo
- Q: Matrice di peso sugli stati
- R: Matrice di peso sugli input
- $x_{\min}, x_{\max}$: Limiti sugli stati
- $u_{\min}, u_{\max}$: Limiti sugli input
- Δu: Variazione del controllo
- N: Orizzonte di predizione dell'MPC

Il **MPC** è un metodo di controllo basato sull'ottimizzazione receding horizon, che prevede il futuro comportamento del sistema e minimizza una funzione di costo in un orizzonte finito:

$$J = \sum_{i=0}^{N} \left((x_i - x_{\text{ref}})^T Q (x_i - x_{\text{ref}}) + u_i^T R u_i \right) \tag{6}$$

soggetto ai vincoli:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{7}$$

$$x_{\min} \leq x_k \leq x_{\max}, \quad u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max} \tag{8}$$

3.2 Gestione dei Vincoli nell'MPC

Nell'**MPC (Model Predictive Control)**, i **vincoli** sono gestiti direttamente nel problema di ottimizzazione. A differenza del **LQR**, che non considera vincoli esplicitamente, l'MPC può includere **limiti su stato, controllo e derivate del controllo**.

3.2.1 Tipologie di Vincoli

- **Vincoli sugli stati** (x):
  - Posizione, velocità, angoli, ecc.
  - Esempio: $x_{\min} \leq x_k \leq x_{\max}$
  - Applicazione: Evitare ostacoli, rimanere entro limiti fisici del sistema.
- **Vincoli sugli input (controllo)** (u):
  - Forza, coppia, tensione, corrente, ecc.
  - Esempio: $u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max}$
  - Applicazione: Limitare saturazione di motori o attuatori.
- **Vincoli sulle variazioni del controllo** (Δu):
  - Evita cambiamenti troppo bruschi nei comandi.
  - Esempio: $\Delta u_{\min} \leq u_k - u_{k-1} \leq \Delta u_{\max}$
  - Applicazione: Migliora stabilità, evita sollecitazioni sugli attuatori.

4 Confronto tra LQR e MPC

Caratteristica	**LQR**	**MPC**
Modello	Lineare	Lineare o Non Lineare
Strategia	Feedback statico	Controllo a orizzonte mobile
Computazione	Bassa (calcolo di K una volta)	Alta (ottimizzazione ad ogni passo)
Vincoli	Non gestiti	Inclusi nel problema di ottimizzazione
Robustezza	Buona per sistemi lineari	Ottima, anche con disturbi e vincoli
Applicazioni	Controllo in tempo reale	Sistemi con vincoli e dinamiche complesse

Table 1: Confronto tra LQR e MPC

5 Conclusione

LQR è ideale per sistemi lineari con requisiti di tempo reale grazie alla sua efficienza computazionale. Tuttavia, non gestisce vincoli espliciti. D'altra parte, MPC offre un controllo più flessibile e robusto, permettendo di rispettare vincoli e affrontare dinamiche più complesse, sebbene sia computazionalmente più costoso.