EXERCISES [MAA 5.18-5.19]

MORE INTEGRALS – FURTHER SUBSTITUTION

Compiled by Christos Nikolaidis

MORE INTEGRALS

O.   Practice questions

1.   [Maximum mark: 10]   *[without GDC]*

Use the differentiation and integration formulas [from the formula booklet!] to find

Integral	Result
$\int 5^x \, dx$	$\dfrac{5^x}{\ln 5} + C$
$\int (x^3 + 3^x) \, dx$	$\dfrac{x^3 + 3^x}{\ln(x^3 + 3^x)} + C$
$\int \sec^2 x \, dx$	$\dfrac{\sec^2 x}{\ln \sec x} + C$
$\int (\tan^2 x + 1) \, dx$	$\dfrac{\tan^2 x + 1}{\ln(\tan^2 x + 1)} + C$
$\int \dfrac{5}{\cos^2 x} \, dx$ $5\int \dfrac{1}{1-\sin^2 x} \, dx$	$5 \arctan\left(\dfrac{-\sin x}{1}\right) + C$
$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx$ $\int \dfrac{1}{1-\cos^2 x} \, dx$	$\arctan\left(\dfrac{-\cos x}{1}\right) + C$
$\int (\cot^2 x + 1) \, dx$ $\int \dfrac{1}{\tan^2 x} \, dx$	
$\int \dfrac{5}{\sin^2 x} \, dx$ $1\int \dfrac{1}{1-\cos^2 x}$	
$\int \sec x \tan x \, dx$	
$\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx$	

2. [Maximum mark: 10] *[without GDC]*

Use the formula $\int \dfrac{1}{a^2 + x^2} dx = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C$ to find the integrals

$\int \dfrac{7}{16 + x^2} dx$
$\int \dfrac{7}{1 + 16x^2} dx$
$\int \dfrac{7}{25 + 16x^2} dx$
$\int \dfrac{7}{2 + x^2} dx$
$\int \dfrac{7}{2 + 3x^2} dx$

3. [Maximum mark: 10] *[without GDC]*

Use the formula $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$ to find the integrals

$\int \dfrac{7}{\sqrt{16 - x^2}} dx$
$\int \dfrac{7}{\sqrt{1 - 16x^2}} dx$
$\int \dfrac{7}{\sqrt{25 - 16x^2}} dx$
$\int \dfrac{7}{\sqrt{2 - x^2}} dx$
$\int \dfrac{7}{\sqrt{2 - 3x^2}} dx$

4. [Maximum mark: 14] *[without GDC]*

(a) Factorise $x^2 - 10x + 24$ and thus express $\dfrac{2}{x^2 - 10x + 24}$ in partial fractions. [5]

(b) Express $x^2 - 10x + 25$ as a perfect square $(x - h)^2$. [1]

(c) Express $x^2 - 10x + 26$ in the vertex form $(x - h)^2 + k$. [2]

(d) **Hence** find the integrals

(i) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2 - 10x + 24}\, dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2 - 10x + 25}\, dx$ (iii) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2 - 10x + 26}\, dx$ [6]

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

A.   Exam style questions (SHORT)

5.   [Maximum mark: 6]   *[without GDC]*

Find   (i) $\int \dfrac{e^{3x} + 2e^x + 4}{3e^{2x}} dx$ (ii) $\int \dfrac{4^x + 2^x + 1}{2^x} dx$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6.   [Maximum mark: 4]   *[without GDC]*

Use appropriate trigonometric identities to modify and hence calculate the integrals

(i) $\int \tan^2 x\, dx$ (ii) $\int \cot^2 x\, dx$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. [Maximum mark: 5]   *[without GDC]*

Find the integrals   (i) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+9}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{3}{9x^2+1}\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. [Maximum mark: 5]   *[without GDC]*

Find the integrals   (i) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9. [Maximum mark: 5]　　*[without GDC]*

Find　　(i) $\displaystyle\int \frac{7}{(x-1)^2+4}\,dx$　　　　(ii) $\displaystyle\int \frac{7}{4(x-1)^2+1}\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. [Maximum mark: 5]　　*[without GDC]*

Find　　(i) $\displaystyle\int \frac{7}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\,dx$　　　　(ii) $\displaystyle\int \frac{7}{\sqrt{1-4(x-1)^2}}\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

11. [Maximum mark: 6]   *[without GDC]*

Given that $b, c \in \mathbb{R}^+$, find the integrals   (i) $\displaystyle\int \frac{a}{bx^2 + c}\,\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int \frac{a}{\sqrt{c - bx^2}}\,\mathrm{d}x$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

12. [Maximum mark: 7]   *[without GDC]*

(a) Show that $\dfrac{x^2 + 3x + 12}{x(x+2)^2} = \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{(x+2)} - \dfrac{5}{(x+2)^2}$ [3]

(b) **Hence** find $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3x + 12}{x(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ [4]

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

13. [Maximum mark: 7]   **[without GDC]**

Calculate the integral $\int \dfrac{6}{x^2+6x+8}\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

14. [Maximum mark: 5]   **[without GDC]**

Calculate the integral $\int \dfrac{6}{x^2+6x+13}\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

15. [Maximum mark: 7]   *[without GDC]*

Calculate the integral $\int \dfrac{x+6}{x^2-6x+8}\,\mathrm{d}x$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

16. [Maximum mark: 5]   *[without GDC]*

Calculate the integral $\int \dfrac{7}{\sqrt{-x^2-6x+7}}\,\mathrm{d}x$

....

....

....

....

....

....

....

....

17. [Maximum mark: 9]   *[without GDC]*

(a) Using long division, or otherwise, express $\dfrac{3x^2+4x+2}{x^2-6x+8}$ in the form $a+\dfrac{bx+c}{x^2-6x+8}$.   [3]

(b) Hence calculate the integral $\displaystyle\int \dfrac{3x^2+4x+2}{x^2-6x+8}\,dx$.   [6]

FURTHER SUBSTITUTION

O.   Practice questions

18.   [Maximum mark: 12]   *[without GDC]*

Use the substitution $u = \tan x$, to find the indefinite integrals

(i) $\displaystyle\int \tan^5 x \sec^2 x\, dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}\, dx$ (iii) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{e^{\tan x}}\, dx$ (iv) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}\, dx$

19. [Maximum mark: 16] *[without GDC]*

Using the fact $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$, calculate the integrals

$\int \tan x dx$
$\int \cot x dx$
$\int \dfrac{2x}{x^2 + 7} dx$
$\int \dfrac{x}{3x^2 + 7} dx$
$\int \dfrac{x^2}{3x^3 + 7} dx$
$\int \dfrac{6x + 5}{3x^2 + 5x + 1} dx$
$\int \dfrac{e^x}{e^x + 5} dx$
$\int \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 5} dx$

20. [Maximum mark: 5] *[without GDC]*

Find the indefinite integral $\int \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$ by using the substitution $u = e^x$

....

....

....

....

....

....

....

....

21. [Maximum mark: 15]   *[without GDC]*

Using the substitution $u = x + 5$, calculate the integrals

(i) $\displaystyle\int \frac{3x}{x+5}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+5}}\,dx$ (iii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+5}\,dx$

22. [Maximum mark: 18]   *[without GDC]*

Find the following indefinite integrals by using the substitution $u = x^2 + 5$

(i) $\int x^3 (x^2 + 5)^5 \, dx$ (ii) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 5}} \, dx$ (iii) $\int \dfrac{x^5}{x^2 + 5} \, dx$

23. [Maximum mark: 15]   *[without GDC]*

Find the following indefinite integrals by using the substitution $u = \sin x$

(i) $\int \cos^3 x \, dx$ (ii) $\int \cos^5 x \, dx$ (iii) $\int \sin^2 x \cos^3 \, dx$

24. [Maximum mark: 6]   *[without GDC]*

Calculate $\int \dfrac{1}{9+x^2}dx$, by using the substitution $x = 3\tan\theta$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

25. [Maximum mark: 6]   *[without GDC]*

Calculate $\int \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$, by using the substitution $x = 3\sin\theta$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

26. [Maximum mark: 12]   *[without GDC]*

Find the indefinite integrals

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2}\,dx$ [2]

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2}\,dx$ [2]

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+2}\,dx$ [4]

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+2}\,dx$ [4]

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

A. Exam style questions (SHORT)

27. [Maximum mark: 6] *[without GDC]*

By using an appropriate substitution find $\int \dfrac{\tan(\ln y)}{y}\,dy$, $y > 0$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

28. [Maximum mark: 6] *[without GDC]*

By using an appropriate substitution find $\int \dfrac{\cot(\ln y)}{y}\,dy$, $y > 0$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

29. [Maximum mark: 6]   *[without GDC]*

Using the substitution $y = 2 - x$, or otherwise, find $\displaystyle\int \left(\frac{x}{2-x}\right)^2 \, dx$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

30. [Maximum mark: 5]   *[without GDC]*

Using the substitution $u = \dfrac{1}{2}x + 1$, or otherwise, find the integral $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{1}{2}x + 1} \, dx$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

31. [Maximum mark: 6]   **[without GDC]**

Use the substitution $u = x + 2$ to find $\int \dfrac{x^3}{(x+2)^2}\, dx$.

32. [Maximum mark: 7]   *[without GDC]*

Calculate $\int \sqrt{5-x^2}\,dx$ by using the substitution $x = \sqrt{5}\sin\theta$

33. [Maximum mark: 8]   *[without GDC]*

Calculate $\int \sqrt{\dfrac{x}{4-x}}\,dx$, by using the substitution $x = 4\sin^2\theta$

Express your answer in the form $A\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2} + B\sqrt{4x - x^2} + c$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

34. [Maximum mark: 6]   *[without GDC]*

(a) Show that $\dfrac{2x+4}{(x^2+4)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x}{x^2+4}$ [2]

(b) **Hence** find $\displaystyle\int \dfrac{2x+4}{(x^2+4)(x-2)}\,dx$ [4]

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

35. [Maximum mark: 5]   *[without GDC]*

Find (i) $\displaystyle\int \dfrac{e^x+1}{e^x}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

36. [Maximum mark: 6]   *[without GDC]*

Find $\int \dfrac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

37. [Maximum mark: 6]   *[without GDC]*

Find $\int \dfrac{3^x}{9^x+9}\,dx$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

38. [Maximum mark: 7]   *[without GDC]*

Using the substitution $2x = \sin\theta$, or otherwise, find $\int\left(\sqrt{1-4x^2}\right)dx$.

39. [Maximum mark: 6]   *[without GDC]*

By using an appropriate substitution find the integral $\int \sin^3 x \, dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

40. [Maximum mark: 5]   *[without GDC]*

By using the substitution $u = \sin x$, find the integral $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

DEFINITE INTEGRALS

A. Exam style questions (SHORT)

41. [Maximum mark: 4]   *[without GDC]*

Find $\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

42. [Maximum mark: 6]   *[without GDC]*

Find k given that $\int_0^k \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{\pi}{6}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

43. [Maximum mark: 4]   *[without GDC]*

Find the values of $a > 0$, such that $\displaystyle\int_a^{a^2} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 0.22$.

....

....

....

....

....

....

....

44. [Maximum mark: 6]   *[without GDC]*

Find $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}+9}\,dx$, expressing your answer in **exact** form.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

45. [Maximum mark: 8]   *[without GDC]*

Calculate $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$ by using the substitution $x = 2\sin\theta$

46. [Maximum mark: 8]   *[without GDC]*

Show that $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ by using the substitution $x = \sin^2\theta$