Álgebra Superior I: Tarea 01

Rendón Ávila Jesús Mateo

March 16, 2025

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Profesora: Cristina Angélica Núñez Rodríguez

1. Determinar qué propiedades (reflexividad, simetría, antisimetría o transitividad) cumplen las siguientes relaciones y determinar cuáles son una relación de equivalencia o de orden (parcial o total).

a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x - y \text{ } \textit{es múltiplo de 3}\}$

Reflexividad. Como 0 es múltiplo de cualquier número y ademas $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x - x = 0$, entonces R satisface reflexividad.

Simetría. Si $(x - y)$ es un múltiplo de 3, entonces $(y - x)$ también será múltiplo de 3, en particular el inverso de (x, y). De lo anterior decimos que R satisface la simetría.

Antisimetría. La antisimetría no se cumple en R, basta dar el contraejemplo $(3, 6)$ y $(6, 3)$ donde $3 \neq 6$.

Transitividad. Finalmente, la relación satisface la transitividad pues $\forall$ $(x - y), (y - z)$ que es multiplo de 3, también el número $(x - z)$ satisface el ser múltiplo de 3.

Por lo tanto R es de equivalencia.

b) $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Reflexividad. Como $\forall x \in A,\ \exists (x, x) \in R$ decimos que R es reflexiva.

Simetría. Como $(1, 2), (3, 4) \in R$ y $(2, 1), (4, 3) \in R$ entonces R es simétrica, para los pares (x, x) la simetría es por vacuidad.

Antisimetría. No se satisface.

Transitividad.

$$\begin{aligned}
(1, 1), (1, 2) &\sim (1, 2) \\
(2, 2), (2, 1) &\sim (2, 1) \\
(1, 2), (2, 1) &\sim (1, 1) \\
(2, 1), (1, 2) &\sim (2, 2)
\end{aligned}$$

Para el caso de 3 y 4 es similar, así R es transitiva.

Por lo tanto R es de equivalencia.

c) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Reflexividad. Como $\forall x \in A,\ \exists (x, x) \in R$ decimos que R es reflexiva.

Simetría. Como $(1, 2) \in R$ y $(2, 1) \notin R$, entonces R no es simétrica.

Antisimetría. No se satisface.

Transitividad. El caso trascendente es que $\exists (1, 2), (2, 3) \in R$ y tmabién $(1, 3) \in R$

Por lo tanto R no es de equivalencia.

d) La relación en $A = \mathbb{R}$ definida por $a \sim b \iff a \leq b$

e) La relación en $A = P(X)$ definida por $A \sim B \iff A \subseteq B$

2. Demostrar que la siguiente relación es de equivalencia e indicar quién es el conjunto cociente asociado. Sea $A = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ y R la relación definida en A tal que $(a,b) \sim (c,d)$ si y sólo si $ad = bc$.

P.d R es reflexiva, simétrica y transitiva.

R es reflexiva.

$\forall (a,b) \in A$ se debe satisfacer que $(a,b) \sim (a,b)$

$$\begin{aligned} (a,b) &\sim (a,b) \\ ab &= ba \text{ (por conmutación en ba)} \\ ab &= ab \end{aligned}$$

Así, decimos que R es reflexiva.

R es simétrica.

Si $(a,b) \sim (c,d)$ entonces se deberá satisfacer que $(c,d) \sim (a,b)$

$$\begin{aligned} (a,b) &\sim (c,d) \\ ad &= cb \\ cb &= ad \text{ (por conmutación en ad)} \\ cb &= da \\ (c,d) &\sim (a,b) \end{aligned}$$

Así, R es simétrica.

R es transitiva.

Si $(a,b) \sim (c,d)$ y $(c,d) \sim (e,f)$ entonces se deberá satisfacer que $(a,b) \sim (e,f)$

$$\begin{aligned} (a,b) &\sim (c,d) \\ ad &= bc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c,d) &\sim (e,f) \\ cf &= de \end{aligned}$$

Por propiedades de los $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} ad \bullet cf &= bc \bullet de \text{ (por cancelación del producto en } \mathbb{Z}) \\ af &= be \\ (a,b) &\sim (e,f) \end{aligned}$$

Así concluimos que f es transitiva.

$\therefore$ R es de equivalencia.

3. Diga cuál de las siguientes relaciones son funciones (justifica tu respuesta):

a) $R \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ definida como:

$$R = \{(1,2),(2,2),(3,3),(2,3),(1,1)\}$$

No es función pues 1 está relacionado con 1 y 2 y también 2 está relacionada con 2 y 3.

b) $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida como:

$$S = \{(n,m) \mid n < m\}$$

Es facil ver que si n está en el dominio de S y $n = 1$, entonces para cualquier $m > 1$ en el codominio tendremos que $n = 1$ va a satisfacer el estar relacionado con $m > 1$, con lo que S no es función.

c) $T \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ definida como:

$$T = \{((n,m), n+m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Como no puede ser que $m \neq m$ o $n \neq n$, el valor para $n + m$ debe ser unico.

Pensemos en una m' que satisfaga $n + m = n + m'$

$$\begin{aligned} n + m &= n + m' \\ m &= m' \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre con una n' por lo que $n + m$ es un valor único.

$\therefore$ f es función pues $n + m$ es un valor unico para cualquier $n, m \in \mathbb{Z}$.

4. Sea $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$, con regla de correspondencia:

$$f(\frac{a}{b}) = a$$

Para toda $a.b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$. ¿Será que f está bien definida?. Justifica tu respuesta.

5. Sea $f : A \longrightarrow B$ y sean $Y_1, Y_2 \subseteq B$. Demuestra lo siguiente:

a) $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$

b) $f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2]$

c) $f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$

d) $f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[Y_1] = f^{-1}[B \backslash Y_1]$

6. Da un contraejemplo de una función $f : A \longrightarrow B$ y $X_1, X_2 \subseteq A$ tales que:

$$f[X_1 \cap X_2] \neq f[X_1] \cap f[X_2]$$

7. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones. Demuestre lo siguiente:

a) si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva

b) si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva

c) si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

8. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones invertibles.

a) Demuestre que $g \circ f$ es invertibles

b) Demuestre que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

9. Sea $f : A \longrightarrow B$ inyectiva. Demostrar que si B es finito entonces A es finito y $\#A \leq \#B$

10. Sea $f : A \longrightarrow B$ suprayectiva. Demostrar que si A es finito entonces B es finito y $\#B \leq \#A$