• **1.** Determinar qué propiedades (reflexividad, simetría, antisimetría o transitividad) cumplen las siguientes relaciones y determinar cuáles son una relación de equivalencia o de orden (parcial o total).

a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x - y \textit{ es múltiplo de 3}\}$

Reflexividad. Como 0 es múltiplo de cualquier número y ademas $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x - x = 0$, entonces R satisface reflexividad.

Simetría. Si $(x - y)$ es un múltiplo de 3, entonces $(y - x)$ también será múltiplo de 3, en particular el inverso de (x, y). De lo anterior decimos que R satisface la simetría.

Antisimetría. La antisimetría no se cumple en R, basta dar el contraejemplo $(3, 6)$ y $(6, 3)$ donde $3 \neq 6$.

Transitividad. Finalmente, la relación satisface la transitividad pues $\forall$ $(x - y), (y - z)$ que es múltiplo de 3, también el número $(x - z)$ satisface el ser múltiplo de 3.

Por lo tanto R es de equivalencia.

b) $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Reflexividad. Como $\forall x \in A,\ \exists (x, x) \in R$ decimos que R es reflexiva.

Simetría. Como $(1, 2), (3, 4) \in R$ y $(2, 1), (4, 3) \in R$ entonces R es simétrica, para los pares (x, x) la simetría es por vacuidad.

Antisimetría. No se satisface.

Transitividad.

$$\begin{gathered}(1, 1), (1, 2) \sim (1, 2)\\(2, 2), (2, 1) \sim (2, 1)\\(1, 2), (2, 1) \sim (1, 1)\\(2, 1), (1, 2) \sim (2, 2)\end{gathered}$$

Para el caso de 3 y 4 es similar, así R es transitiva.

Por lo tanto R es de equivalencia.

c) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Reflexividad. Como $\forall x \in A,\ \exists (x, x) \in R$ decimos que R es reflexiva.

Simetría. Como $(1, 2) \in R$ y $(2, 1) \notin R$, entonces R no es simétrica.

Antisimetría. No se satisface.

Transitividad. El caso trascendente es que $\exists (1, 2), (2, 3) \in R$ y también $(1, 3) \in R$

Por lo tanto R no es de equivalencia.

d) La relación en $A = \mathbb{R}$ definida por $a \sim b \iff a \leq b$

Por definición de $\leq$ entonces todo numero es igual a si mismo por lo que $(a, a) \in R$, lo que hace a R reflexiva.

como no puede ser $a \sim b$, si a menor que b, que pase $b \sim a$ por lo que R no es simétrica.

R es una relación que cumple antisimetría pues si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$.

También por definición de $\leq$ satisface la transitividad.

Sim embargo al no haber mínimos ni cotas en $\mathbb{R}$ no podemos hablar de un orden total.

e) La relación en $A = P(X)$ definida por $A \sim B \iff A \subseteq B$

Como todo conjunto esta contenido en si mismo entonces $A \sim A$, por lo que R es reflexiva.

Sin embargo la simetría no se cumple pues si $A \subseteq B$ no necesariamente $B \subseteq A$.

La antisimetría se cumple de manera similar al problema anterior, pues si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.

Lo mismo ocurre con la transitividad pues si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Ademas hay un mínimo que es el conjunto $\varnothing$, por lo que estamos en un orden parcial.

• **2.** Demostrar que la siguiente relación es de equivalencia e indicar quién es el conjunto cociente asociado. Sea $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ y R la relación definida en A tal que $(a, b) \sim (c, d)$ si y sólo si $ad = bc$.

P.d R es reflexiva, simétrica y transitiva.

R es reflexiva.

$\forall (a, b) \in A$ se debe satisfacer que $(a, b) \sim (a, b)$

$$\begin{aligned} (a, b) &\sim (a, b) \\ ab &= ba \text{ (por conmutación en } ba) \\ ab &= ab \end{aligned}$$

Así, decimos que R es reflexiva.

R es simétrica.

Si $(a, b) \sim (c, d)$ entonces se deberá satisfacer que $(c, d) \sim (a, b)$

$$
\begin{aligned}
(a, b) &\sim (c, d) \\
ad &= cb \\
cb &= ad \ \textit{(por conmutación en ad)} \\
cb &= da \\
(c, d) &\sim (a, b)
\end{aligned}
$$

Así, R es simétrica.

R es transitiva.

Si $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$ entonces se deberá satisfacer que $(a, b) \sim (e, f)$

$$
\begin{aligned}
(a, b) &\sim (c, d) \\
ad &= bc
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(c, d) &\sim (e, f) \\
cf &= de
\end{aligned}
$$

Por propiedades de los $\mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
ad \bullet cf &= bc \bullet de \ \textit{(por cancelación del producto en } \mathbb{Z}) \\
af &= be \\
(a, b) &\sim (e, f)
\end{aligned}
$$

Así concluimos que f es transitiva.

$\therefore R$ es de equivalencia ■

El conjunto cociente asociado es $A/R = \{[(a, b)]_R \mid (a, b) \in A\}$, por la definición de la relación entonces:

$$A/R = \{\{(c, d)\} \mid (a, b) \in A \ y \ ad = bc\}$$

Por lo anterior podemos decir que los elementos de A/R son los $\mathbb{Q}$.

- **3.** Diga cuál de las siguientes relaciones son funciones (justifica tu respuesta):

a) $R \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ definida como:

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 1)\}$$

No es función pues 1 está relacionado con 1 y 2 y también 2 está relacionada con 2 y 3.

b) $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida como:

$$S = \{(n, m) \mid n < m\}$$

Es fácil ver que si n está en el dominio de S y $n = 1$, entonces para cualquier $m > 1$ en el codominio tendremos que $n = 1$ va a satisfacer el estar relacionado con $m > 1$, con lo que S no es función.

c) $T \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ definida como:

$$T = \{((n, m), n + m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Como no puede ser que $m \neq m$ o $n \neq n$, el valor para $n + m$ debe ser único.

Pensemos en una m' que satisfaga $n + m = n + m'$

$$\begin{aligned} n + m &= n + m' \\ m &= m' \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre con una n' por lo que $n + m$ es un valor único.

$\therefore$ f es función pues $n + m$ es un valor único para cualquier $n, m \in \mathbb{Z}$.

- **4.** Sea $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$, con regla de correspondencia:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = a$$

Para toda $a.b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$. ¿Será que f está bien definida?. Justifica tu respuesta.

Como en $\mathbb{Q}$ se tiene que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, si aplicamos la regla de correspondencia:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 \\ f\left(\frac{2}{4}\right) &= 2 \\ f\left(\frac{3}{6}\right) &= 3 \end{aligned}$$

Como $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq f\left(\frac{2}{4}\right) \neq f\left(\frac{3}{6}\right)$ y ademas $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ podemos decir que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= 3 \end{aligned}$$

De lo anterior decimos que f no está bien definida.

- **5.** Sea $f : A \longrightarrow B$ y sean $Y_1, Y_2 \subseteq B$. Demuestra lo siguiente:

Para este ejercicio vamos a fijar la siguiente definición:

Definiciones

Def. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $X \subseteq A$
La **imagen directa** de X bajo f es el conjunto:

$$f[X] = \{y \in B \mid \exists x \in X \ \ tal\ que\ f(x) = y\}$$

Def. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $Y \subseteq B$
La **imagen inversa** de Y bajo f es el conjunto:

$$f^{-1}[Y] = \{x \in A \mid \exists y \in Y \ \ tal\ que\ f(x) = y\}$$

a) $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$

Sea $x \in f^{-1}[\varnothing]$, por definición de imagen inversa, existe $y \in \varnothing$ tal que

$$f(x) = y \ \textbf{!}$$

Como no puede ser $y \in \varnothing$, entonces $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$ ■

b) $f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2]$

$\subseteq$) $f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] \subseteq f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2]$

Sea $x \in f^{-1}[Y_1 \cup Y_2]$, por definición imagen inversa, entonces existe $y \in Y_1 \cup Y_2$ tal que:

$$f(x) = y$$

Por definición de unión, si $y \in Y_1 \cup Y_2$, entonces $y \in Y_1$ o $y \in Y_2$

Caso $y \in Y_1$. Como existe $y \in Y_1$ de forma que $f(x) = y$, por definición de imagen inversa concluimos que:

$$x \in f^{-1}[Y_1]$$

Caso $y \in Y_2$. Como existe $y \in Y_2$ de forma que $f(x) = y$, por definición de imagen inversa concluimos que:

$$x \in f^{-1}[Y_2]$$

Así podemos decir que $x \in f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2]$

$\therefore f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] \subseteq f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2]$

$\supseteq$) $f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2] \subseteq f^{-1}[Y_1 \cup Y_2]$

Sea $x \in f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2]$, por definición de unión

$$x \in f^{-1}[Y_1] \text{ o } x \in f^{-1}[Y_2]$$

Si $x \in f^{-1}[Y_1]$, por definición de imagen inversa, entonces existe $y \in Y_1$ tal que $f(x) = y$

Si $x \in f^{-1}[Y_2]$, por definición de imagen inversa, entonces existe $y \in Y_2$ tal que $f(x) = y$

como $y \in Y_1$ o $y \in Y_2$, entonces $y \in Y_1 \cup Y_2$ de forma que $f(x) = y$, por definición de imagen inversa concluimos que:

$$x \in f^{-1}[Y_1 \cup Y_2]$$

Así $f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2] \subseteq f^{-1}[Y_1 \cup Y_2]$

$\therefore f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2]$ $\blacksquare$

c) $f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$

$\subseteq$) $f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] \subseteq f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$

Sea $x \in f^{-1}[Y_1 \cap Y_2]$, por definición de imagen inversa, existe $y \in Y_1 \cap Y_2$ tal que

$$f(x) = y$$

Por definición de intersección, $y \in Y_1$ y $y \in Y_2$.

Por $y \in Y_1$ de forma que $f(x) = y$, entonces $x \in f^{-1}[Y_1]$.

Por $y \in Y_2$ de forma que $f(x) = y$, entonces $x \in f^{-1}[Y_2]$.

Como $x \in f^{-1}[Y_1]$ y $x \in f^{-1}[Y_2]$, entonces $x \in f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$

$\therefore f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] \subseteq f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$

$\supseteq$) $f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2] \subseteq f^{-1}[Y_1 \cap Y_2]$

Sea $x \in f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$, por definición de intersección:

$$x \in f^{-1}[Y_1] \text{ y } x \in f^{-1}[Y_2]$$

Por $x \in f^{-1}[Y_1]$ de forma que $f(x) = y$, por definición de imagen inversa existe $y \in Y_1$

Por $x \in f^{-1}[Y_2]$ de forma que $f(x) = y$, por definición de imagen inversa existe $y \in Y_2$

Así $y \in Y_1 \cap Y_2$, como $f(x) = y$, entonces $x \in f^{-1}[Y_1 \cap Y_2]$

$\therefore f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2] \subseteq f^{-1}[Y_1 \cap Y_2]$

$\therefore f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$ ■

d) $f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[Y_1] = f^{-1}[B \backslash Y_1]$

$\subseteq)$ $f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[Y_1] \subseteq f^{-1}[B \backslash Y_1]$

Sea $x \in f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[Y_1]$ por definición de imagen inversa, existe $y \in f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[Y_1]$ tal que $f(x) = y$

Por definición de diferencia, entonces $x \in f^{-1}[B]$ y $x \notin f^{-1}[Y_1]$. Así, de nuevo por definición de imagen inversa tenemos que:

Como $x \in f^{-1}[B]$, entonces existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

Como $x \notin f^{-1}[Y_1]$, entonces $f(x) \neq y$.

De lo anterior podemos afirmar que $y \in B \backslash Y_1$ de forma que $f(x) = y$, por definición de imagen inversa, entonces:

$$x \in f^{-1}[B \backslash Y_1]$$

Así $f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[Y_1] \subseteq f^{-1}[B \backslash Y_1]$

$\supseteq)$ $f^{-1}[B \backslash Y_1] \subseteq f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[Y_1]$

Sea $x \in f^{-1}[B \backslash Y_1]$, por definición de imagen inversa, entonces existe $y \in B \backslash Y_1$ tal que $f(x) = y$.

Por definición de diferencia:

$$y \in B, \text{ y}$$
$$y \notin Y_1$$

Como $y \in B$ de forma que $f(x) = y$, entonces $x \in f^{-1}[B]$.

Como $y \notin Y_1$, entonces$f(x) \neq y$ de forma que $x \notin f^{-1}[Y_1]$.

De lo anterior podemos decir que $x \in f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[B]$.

$\therefore f^{-1}[B \backslash Y_1] \subseteq f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[Y_1]$
$\therefore f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[Y_1] = f^{-1}[B \backslash Y_1]$. ■

- **6.** Da un contraejemplo de una función $f : A \longrightarrow B$ y $X_1, X_2 \subseteq A$ tales que:

$$f[X_1 \cap X_2] \neq f[X_1] \cap f[X_2]$$

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 4, 9, 16\}$. Si $f : A \longrightarrow B$ con regla $f(a) = a^2$.

digamos que $X_1 = \{2, 3, 4\}$ y $X_2 = \{1, 2, 3\}$, la intersección $X_1 \cap X_2 = \{2, 3\}$.

Las imágenes directas de los conjuntos anteriores son:

$$f[X_1] = \{4, 9, 16\}$$
$$f[X_2] = \{1, 4, 9\}$$

Entonces $f[X_1 \cap X_2] = \{4, 9\}$.

Si hacemos la intersección de $f[X_1] = \{4, 9, 16\}$ con $f[X_2] = \{1, 4, 9\}$, tendremos que:

$$f[X_1] \cap f[X_2] = \{4, 9\}$$

De lo anterior vemos que $f[X_1 \cap X_2] = f[X_1] \cap f[X_2] = \{4, 9\}$. Por lo que hemos dado un contraejemplo valido que contradice la no igualdad dada.

- **7.** Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones. Demuestre lo siguiente:

a) si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva

Sea x_1 y x_2 de forma que:

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_1)$$

como g es inyectiva, entonces:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Como f es inyectiva, entonces:

$$x_1 = x_2$$

$\therefore g \circ f$ es inyectiva ■

b) si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva

sea $z \in C$ cualquiera, entonces por ser g suprayectiva:

$$\exists y \in B \text{ tal que}$$
$$g(y) = z$$

También, sea $y \in B$ cualquiera, entonces por ser f suprayectiva:

$$\exists x \in A \text{ tal que}$$
$$f(x) = y$$

por igualdad de $f(x) = y$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

Así $g \circ f$ es suprayectiva. ■

c) si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Para probar que $g \circ f$ es biyectiva, hay que probar que es inyectiva y sobreyectiva, lo cual se ha hecho en los dos incisos anteriores considerando f y g inyectivas y suprayectivas.

Así $g \circ f$ es biyectiva ■

- **8.** Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones invertibles.

a) Demuestre que $g \circ f$ es invertible

Para esta demostración vamos a fijar la siguiente definición:

Definiciones

Def. Sea f una función tal que $f : A \longrightarrow B$, diremos que f es invertible si existe una función $g : B \longrightarrow A$ que satisface:

$$g \circ f = 1_A \text{ y}$$
$$f \circ g = 1_b$$

denotaremos por f^{-1} a dicha función g, y le llamaremos la función inversa de f.

Como f es invertible, enotnces existe f^{-1} tal que satisface:

$$f^{-1} \circ f = 1_A \text{ y}$$
$$f \circ f^{-1} = 1_B$$

De igual forma, como g es invertible, enotnces existe g^{-1} tal que satisface:

$$g^{-1} \circ g = 1_B \text{ y}$$
$$g \circ g^{-1} = 1_C$$

P.d. Hay que exhibir una funcíon h que satisfaga:

$$h \circ (g \circ f) = 1_A \text{ y}$$
$$(g \circ f) \circ h = 1_C$$

Sabemos que $g \circ f : A \longrightarrow C$, por lo que debe ser $h : C \longrightarrow A$.

Cómo f y g son invertibles enotnces $f^{-1} : B \longrightarrow A$ y $g^{-1} : C \longrightarrow B$, así propongamos:

$$h = f^{-1} \circ g^{-1}$$

De lo anterior $h : C \longrightarrow A$.

Por f sabemos que $f(x) = y$ y por ser invertible, entonces $f^{-1}(y) = x$.

Para g sabemos que $g(y) = z$ y por ser invertible, entonces $g^{-1}(z) = y$.

Como ya sabemos que efectivamente f^{-1} y g^{-1} son inversas de f y g, vamos a hacer la composición $h \circ (g \circ f)$, usando la propuesta que hicimos par h:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x))$$
$$h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$
$$h(g(f(x))) = h(g(y))$$
$$h(g(y)) = h(z)$$

vamos a probar que $h(z) = x$ usando las inversas que ya mostramos para f y g usando a h:

Como $h = f^{-1} \circ g^{-1}$, entonces:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$$
$$f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y)$$
$$f^{-1}(y) = x$$

Como h(z) = x, entonces h es inversa izquierda de $g \circ f$.

Ahora veremos que h cumpla con:

$$(g \circ f) \circ h = z$$

Como sabemos que f^{-1} y g^{-1} son inversas de f y g, vamos a hacer la composición de $(g \circ f) \circ h = z$:

$$((g \circ f) \circ h)(z) = (g \circ f)(h(z))$$
$$(g \circ f)(h(z)) = (g \circ f)(x)$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$g(f(x)) = g(y)$$
$$g(y) = z$$

Como $(g \circ f) \circ h = z$, entonces h es inversa izquierda de $g \circ f$.

Así podemos decir que $h = (g \circ f)^{-1}$

$\therefore g \circ f$ es invertible $\blacksquare$

b) Demuestre que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Retomando lo que probamos en el inciso anterior, sabemos que $(g \circ f)^{-1} = h = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Pero vamos a desarrollar mas para no vernos tan flojos.

Como $g \circ f : A \longrightarrow C$, sabemos que $(g \circ f)^{-1} : C \longrightarrow A$

$$(g \circ f)^{-1}(z) = x$$

Ahora, vamos a ver la composición $f^{-1} \circ g^{-1}$, usando lo obtenido en el inciso anterior:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ g^{-1}(z) &= f^{-1}(g^{-1}(z)) \\ f^{-1}(g^{-1}(z)) &= f^{-1}(y) \\ f^{-1}(y) &= x \end{aligned}$$

De lo anterior vemos que se cumple la igualdad $(g \circ f)^{-1} = h = f^{-1} \circ g^{-1}$.

$\therefore (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ■

- **9.** Sea $f : A \longrightarrow B$ inyectiva. Demostrar que si B es finito entonces A es finito y $\#A \leq \#B$

P.d. A es un conjunto finito y $\#A \leq \#B$.

Como f es una función inyectiva, entonces $\forall x_1, x_2 \in A$ si $f(x_1) = f(x_2)$ afirmamos que $x_1 = x_2$.

También por ser B finito, entonces $\#B = n$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Por ser f función decimos que $Dom(f) = A$ y ademas $Im(f) \subseteq B$.

De lo anterior

$$\begin{aligned} \#Dom(f) &= \#A \text{ y} \\ \#Im(f) &\leq \#B \end{aligned}$$

Por inyectividad tenemos que $\#Im(f) = \#Dom(f)$.

Así $\#A \leq \#B$ ■

- **10.** Sea $f : A \longrightarrow B$ suprayectiva. Demostrar que si A es finito entonces B es finito y $\#B \leq \#A$

P.d. B es un conjunto finito y $\#A \leq \#B$.

Como f es una función biyectiva, entonces $\forall b \in B$, $\exists a \in A$ tal que $f(a) = b$, *i.e* $Im(f) = B$

también por ser A finito, entonces $\#A = n$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Por ser f función decimos que $Dom(f) = A$, así el dominio es finito, ademas sabemos que $\#Im(f) \leq \#Dom(f)$.

De lo anterior

$$\begin{aligned} \#Dom(f) &= \#A \text{ y} \\ \#Im(f) &= \#B \text{ y} \\ \#Im(f) &\leq \#Dom(f) \\ \#B &\leq \#A \end{aligned}$$

Así queda demostrado que si $f : A \longrightarrow B$ es una función suprayectiva y A es finito, entonces B es finito y $\#B \leq \#A$ ■