Indicaciones de la tarea.

Sobre la entrega de las tareas.

1. Las tareas se pueden entregar en equipos de a lo más 4 personas.
2. Si se detectan ejercicios iguales o lo suficientemente similares para ser considerados como copias, no se les evaluará la tarea a ninguno de los equipos involucrados.
3. La tarea puede ser entregada de manera física o virtual. En ambos casos, debe ser legible o no se evaluará la misma.
4. En caso de entregarla de manera digital, deberá ser en formato PDF y sólo PDF.
5. Sólo pueden obtener a lo mucho 100 puntos con los ejercicios regulares y hasta 15 puntos extra con los ejercicios extra.
6. No se aceptan tareas después del plazo establecido. Si alguna tarea no fue entregada a más tardar en la fecha y hora de entrega, no se garantiza que será calificada.
7. En caso de que ustedes necesiten un plazo mayor para entregarla, pónganse en contacto con el profesor y tratamos de llegar a un acuerdo

Álgebra Superior II

Tarea 1. Enteros

1. (+7) Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo. Demuestra mediante el uso de definiciones que R es conmutativo si y sólo si para todo $x, y \in R$ se cumple que $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

2. Considera la relación $\sim$ usada para definir a $\mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$. Demuestra que:
   (a) (+7) $\overline{(k,0)} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a = k+n \text{ y } b = n\}$.
   (b) (+4) Usando el inciso previo, escribe por extensión el conjunto $\overline{(15,5)}$.

3. Muestra los siguientes incisos referentes a orden en $\mathbb{Z}$.
   (a) (+6) Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$ tales que $a \leq b$. Usando definiciones, prueba que si $0 < n$, entonces $a^n \leq b^n$.
   (b) (+6) Si $a \leq 0$ y $0 < b$, entonces $ab \leq a$.
   (c) (+6) Si $a \leq b$ y $c < d$, muestra con definiciones que $a - d < b - c$.

4. Calcula el cociente y el residuo de los siguientes incisos.
   (a) (+2) 175 entre 46.
   (b) (+2) 20145 entre 1050.
   (c) (+2) -326 entre 40.

5. Muestra los siguientes incisos referentes a divisibilidad en $\mathbb{Z}$.
   (a) (+6) Sean a y b dos enteros. Muestra que $|a| \mid b$ si y sólo si $a \mid b$ y $-a \mid b$.
   (b) (+6) Muestra usando definiciones que si $a \mid b$ y $a \mid b + c$, entonces $a \mid c$.
   (c) (+6) Muestra usando definiciones que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq n$, entonces $a - b \mid a^n - b^n$.

6. (+8) Muestra mediante inducción matemática lo siguiente. Si $a \mid b_1$, $a \mid b_2, \ldots, a \mid b_n$, entonces $a \mid b_1 + \cdots + b_n$.
   (+4) Usando lo anterior, muestra que si $a \mid b_1$, $a \mid b_2, \ldots, a \mid b_n$, entonces para toda $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a \mid c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n$

7. (+7) Sean a y b dos enteros. Muestra que si $13 \mid 5a + 8b$, entonces $13 \mid 31a - 5b$.

8. (+7) Sean a y b dos enteros no nulos y $d \in \mathbb{Z}^+$ tal que $d \mid a$ y $d \mid b$. Muestra que $\frac{ab}{d} = \frac{ba}{d}$.

9. Calcula los siguientes incisos.
   (a) (+2) Calcula 723 en base 7.
   (b) (+2) Calcula 27 en base 2.
   (c) (+3) Calcula $(1076)_8 + (2076)_8$.

10. (+7) Un profesor de matemáticas califica los exámenes de la siguiente manera: el primer problema vale un punto, el segundo 2, el tercero 4, el cuarto 8 y así sucesivamente. Un problema, o está bien o está mal, no hay término medio. Un alumno aprueba si al menos la mitad de todos los problemas están bien. Un estudiante obtuvo en el examen de junio, que constaba de 10 problemas, 581 puntos. Determina qué problemas hizo bien y si aprobó el examen o no.

Extras Resuelve los siguientes ejercicios:

1. (+15) Demuestra que para toda $b \in \mathbb{N}$, el número $(10101)_b$ es divisible por $(111)_b$.

2. (+10) Sean $(R, +, \cdot)$ un anillo conmutativo, 0 el neutro aditivo de R y 1 el neutro multiplicativo de R. Muestra que $R = \{0\}$ si y sólo si $1 = 0$.