**Indicaciones de la tarea.**

**Sobre la entrega de las tareas.**

1. Las tareas se pueden entregar en equipos de a lo más 4 personas.
2. Si se detectan ejercicios iguales o lo suficientemente similares para ser considerados como copias, no se les evaluará la tarea a ninguno de los equipos involucrados.
3. La tarea puede ser entregada de manera física o virtual. En ambos casos, debe ser legible o no se evaluará la misma.
4. En caso de entregarla de manera digital, deberá ser en formato PDF y sólo PDF.
5. Sólo pueden obtener a lo mucho 100 puntos con los ejercicios regulares y hasta 10 puntos extra con los ejercicios extra.
6. No se aceptan tareas después del plazo establecido. Si alguna tarea no fue entregada a más tardar en la fecha y hora de entrega, no se garantiza que será calificada.
7. En caso de que ustedes necesiten un plazo mayor para entregarla, pónganse en contacto con el profesor y tratamos de llegar a un acuerdo
8. Los ejercicios que deben ser resueltos mediante algoritmos, deben usar los algoritmos vistos en clase o en las notas del curso para que sean considerados. Además, deben explicar cada paso del algoritmo.

# Álgebra Superior II

## Tarea 2. Divisibilidad

1. (+6) Sean $a$ un número par y $b$ un número impar. Muestra que $\mathrm{mcd}(a, b)$ es impar.
2. (+5) Un grupo de 23 viajeros llega a un campamento y encuentra 63 montones de sacos, cada montón con el mismo número de sacos, y un montón adicional con 7 sacos (en total hay 64 montones). Si sabemos que los viajeros no podían cargar con más de 50 sacos cada uno y pudieron repartírselos por igual y sin abrirlos, ¿cuántos sacos había en cada uno de los montones?
3. (+6) Demuestra que si $a$ y $b$ son enteros no nulos, entonces $\mathrm{mcd}(a, b) \mid \mathrm{mcm}(a, b)$.
4. (+6) Muestra que si $p$ y $q$ son dos primos distintos, entonces para todo $a, b \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que $\mathrm{mcd}(p^a, q^b) = 1$.
5. (+8) Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ una colección de enteros. Muestra que si para todo $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ con $i \neq j$ se satisface que $\mathrm{mcd}(a_i, a_j) = 1$, entonces $\mathrm{mcd}(a_k,\, a_1 \cdot a_2 \cdots a_{k-1}) = 1$.

   *Hint. Por contradicción y usen que algún primo divide a* $\mathrm{mcd}(a_k,\, a_1 \cdot a_2 \cdots a_{k-1})$
6. (+8) Sean $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ una colección de enteros tales que para todo $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ con $i \neq j$ se satisface que $\mathrm{mcd}(a_i, a_j) = 1$. Muestra por inducción que si para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ se cumple que $a_i \mid b$, entonces $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \mid b$.
7. (+6) Sea $p$ un número primo. Muestra que si $k \in \mathbb{Z}$ es tal que $k < p$, entonces $p \nmid k!$
8. (+8) Sean $c \neq 0$ y $k \geq 2$. Muestra mediante inducción matemática que si $a_1, \ldots, a_k$ es una colección de enteros no nulos, entonces $\mathrm{mcm}(ca_1, ca_2, \ldots, ca_k) = |c|\,\mathrm{mcm}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
9. (+6) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos y $c \neq 0$. Muestra que $\mathrm{mcd}(ca, cb) = |c|$ si y sólo si $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$.
10. (+8) Muestra que si $p$ es un número primo y $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, entonces $p \mid \binom{p}{k}$

    *Hint: Los coeficientes binomiales son naturales y* $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$
11. (+8) Sean $a, b, t \in \mathbb{Z}$ con $t \neq 0$. Muestra que si $\mathrm{mcd}(k, t) = 1$ y $at \equiv bt \mod k$, entonces $a \equiv b \mod k$.
12. (+7) Muestra que si $a \equiv b \mod k$, entonces $\mathrm{mcd}(a, k) = \mathrm{mcd}(b, k)$.
13. (+7) Sea $k = \mathrm{mcd}(m, n)$. Muestra que si $a \equiv b \mod m$ y $c \equiv d \mod n$, entonces $a + c \equiv b + d \mod k$.
14. (+5) Sean $a$, $b$ y $k$ enteros tales que $a \equiv b \mod k$. Muestra que si $0 \leq a < k$ y $0 \leq b < k$, entonces $a = b$.
15. (+6) Considera la ecuación diofantina $56x + 378y = k$. Calcula todos los valores de $k$ entre 100 y 200 para los cuales dicha ecuación tiene solución entera. Calcula la solución para el caso en que $k = 154$.

### Extras

1. (+8) Demuestra que todo número natural $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ no puede tener más de un factor primo $p_i$ mayor a $\sqrt{n}$.
2. (+8) Sean $a_1, \ldots, a_n$ una colección de enteros no nulos. Muestra que si $\mathrm{mcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$, entonces se satisface que $\mathrm{mcm}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{k=1}^{n} a_i$.