

Gráficas y Juegos: Tarea 04

Martínez Méndez Ángel Antonio

Pinzón Chan José Carlos

Rendón Ávila Jesús Mateo

March 8, 2025



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Profesor: César Hernández Cruz

1. Sea G una gráfica no trivial. Demuestre que G es una trayectoria si y sólo si G es un árbol con exactamente dos vértices de grado 1

Definiciones

Def. Trayectoria: Un camino que no repite vertices.

[\Rightarrow] Sea G una trayectoria no trivial.

Como la gráfica es no trivial; significa que, al menos, tiene dos vertices $u, v \in V_G$ adyacentes por una arista $uv \in E_G$, donde ambos $d(v) = 1, d(u) = 1$. Y como se trata de una trayectoria; entonces no tiene lazos, es aciclica, conexa y su número de aristas corresponde a $|E| = |V| - 1$.

Notemos que al tratarse de un árbol, si tuvieramos el caso en que la gráfica $|V_G| \geq 3$ y grado máximo $\Delta < 3$ entonces los extremos de nuestros vertices siempre van a ser $d(v_0) = 1, d(u_n) = 1$. Y todo vertice que este entre estos dos $v_0 \leq v_j \leq u_{j-1} \leq u_n$ donde $j \in \{1, 2, 3, j-1, \dots\}$ van a tener grado $d(v_j), d(u_j) = 2$.

El caso donde tenemos grado máximo $\Delta = 3$ no se da, porque no podríamos asegurar que la gráfica sea una trayectoria, ya que se ramifica la gráfica.

De tal modo que si nuestra gráfica tiene vertices con $\Delta = 2$ entonces los extremos de nuestro árbol tendrán $d(v) = 1, d(u) = 1$.

[\Leftarrow] Sea G un árbol con exactamente dos vértices de grado 1.

Sabemos que para un árbol no trivial, siempre va a existir un vértice que lo conforme que será de grado máximo $\Delta = 2$ y sus hojas de grado 1.

Para el caso en el que tenemos $|V_G| \geq 3$ podemos construir un camino P que tiene como extremos a las hojas $x, y \in V_G$ y a través de el podemos recorrer todo el árbol de forma única.

Suponiendo que existe un vértice extra que sale de algún vértice intermedio de x, y , digamos w , entonces se trataría de una nueva hoja con $d(w) = 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis, pues el árbol que construimos solo admite dos vértices de grado 1.

Por lo que, este xy -camino, en realidad se trata de una trayectoria con sus extremos $d(x) = 1, d(y) = 1$ □

2.

a) Demuestre que cada árbol con grado máximo $\Delta > 1$ tiene al menos Δ hojas.

Hipótesis

Un árbol con grado máximo $\Delta > 1$.

Definiciones

Def. El grado máximo de una gráfica G , es el grado máximo de todos sus vértices.

b) Construya, para cada elección de n y Δ , con $2 \leq \Delta < n$, un árbol de orden n con exactamente Δ hojas.

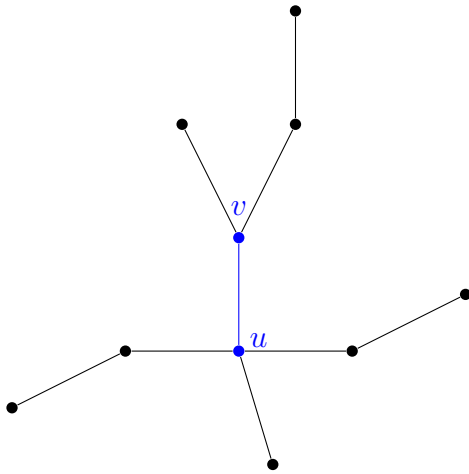
Demostración inciso a):

Sea G un árbol con grado máximo $\Delta = k$ donde $k > 1$.

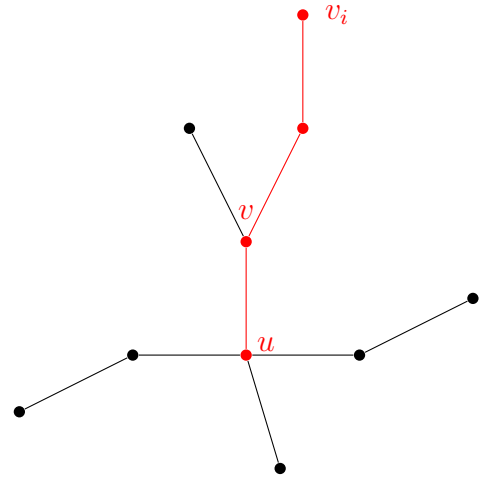
Por hipótesis para algun vértices $u \in V_G$ existen k aristas incidentes en él. Sea uv alguna de las k -aristas. Si tomamos una trayectoria máxima $W = \{u, uv, v, \dots, v_i\}$ se cumple que es única (ya que G es un árbol) y además no repite vértices (por la definición de trayectoria).

Como W es única y no repite vértices, entonces el último vértice (v_i) tiene grado 1, pues en caso contrario la trayectoria no es máxima y/o bien repite vértices. De este modo se concluye que v_i es una hoja.

Como existen k aristas distintas que inciden en u , entonces en G existen por lo menos k uv_i -trayectorias de longitud máxima. Por lo tanto, G tiene cuando menos $k = \Delta$ hojas.



(a) Ejemplo de la arista uv (Note que u es el vértice con mayor grado).



(b) Ejemplo de trayectoria máxima que contiene a uv (v_i es una hoja).

En los ejemplos de arriba queda claro el porque del "al menos", pues pueden existir otras trayectorias que también contengan a la arista uv y que a partir de cierto vértice no se encuentren contenidas en la trayectoria máxima.

Inciso b):

Por la demostración anterior sabemos que al construir un árbol con grado máximo Δ existen al menos Δ hojas, sin embargo, en esta ocasión queremos asegurarnos que el número exacto de hojas sea Δ .

La característica principal que cumple una hoja es que es un vértice con grado 1. Entonces si queremos tener Δ hojas, necesitamos Δ vértices con grado 1. Si queremos seguir cumpliendo con que la gráfica sea conexa entonces dichos vértices deben estar conectados (no necesariamente de forma directa) por un vértice común, dicho vértice entonces tendrá grado Δ . Hasta este momento hemos contemplado $\Delta + 1$ vértices, pero si $n > \Delta + 1$, entonces, ¿qué hacemos con los vértices restantes?

La respuesta es bastante sencilla, los vértices restantes deben tener grado 2, pues en ese caso tienen un vértice anterior y un vértice siguiente, es decir, forman una trayectoria y aquello nos permite tener vértices de grado 1 al final. Como tenemos n vértices, y Δ son de grado 1 y uno mas de grado Δ , esto implica que el número de vértices restantes (de grado 2) es igual a $n - \Delta - 1$.

Finalmente, para construir un árbol T con Δ hojas, donde $2 \leq \Delta < n$, tiene que suceder que su sucesión de grados tenga la siguiente forma:

$$d_T = (\Delta, 2_1, 2_2, \dots, 2_{(n-\Delta-1)}, 1_1, 1_2, \dots, 1_\Delta)$$

Vamos a probar nuestra construccion con algunos ejemplos.

1. $\Delta = 2$ y $n = 3$.

Note que debe suceder lo siguiente:

- Un vértice debe tener grado Δ .
- Deben existir $3 - 2 - 1 = 0$ vértices de grado 2.
- Deben existir 2 vértices con grado 1.

La sucesión de grados de nuestro árbol T' es: $d_{T'} = (2, 1, 1)$

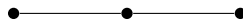


Figure 2: Gráfica de T' .

2. $\Delta = 4$ y $n = 7$.

Note que debe suceder lo siguiente:

- Un vértice debe tener grado Δ .
- Deben existir $7 - 4 - 1 = 2$ vértices de grado 2.
- Deben existir 4 vértices con grado 1.

La sucesión de grados de nuestro árbol T'' es: $d_{T''} = (4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

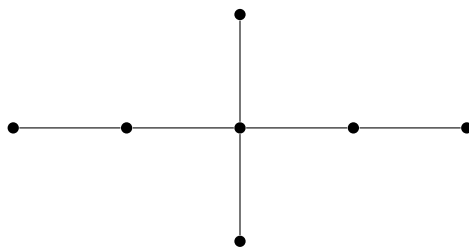


Figure 3: Gráfica de T'' .

3. Un centro de una gráfica es un vértice u tal que $\max_{u \in V} d(u, v)$ es mínima. Demuestre que un árbol tiene exactamente un centro o 2 centros adyacentes.

Hipotesis

Sea T un árbol.

Definiciones

$\max_{u \in V} d(u, v)$ se puede interpretar como que la excentricidad de u es la más pequeña de todas las excentricidades de la gráfica.

Como T es un árbol, la distancia entre cualesquiera $u, v \in V_T$ es la longitud de su uv – trayectoria.

Sea la excentricidad de un $v \in V_T$ igual a la longitud de la trayectoria $W = \{v, \dots, v_k\}$ entonces v_k es una hoja (en otro caso no sería la excentricidad de v o bien no sería una trayectoria). En consecuencia las excentricidades de los vértices en T corresponden a su mayor distancia a alguna hoja.

El centro de un árbol es el vértice cuya excentricidad es mínima (su mayor distancia a alguna hoja es mínima, en comparación con las mayores distancias de otros vértices hacia hojas).

Como T es conexa cualquier vértice puede alcanzar a cualquier hoja. Si tomamos la trayectoria máxima S de T , $S = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n, \dots, v_j, \dots, v_k\}$ (donde $i < n$ y $j > n$), dicha trayectoria tiene hojas como elementos extremos. Como S es la trayectoria máxima podemos asegurar que v_1 y v_k son los vértices más "lejanos" entre si. De forma más general, son los vértices más "lejanos" en T .

Si la longitud de S es impar, entonces podemos ubicar $v_n \in S$ tal que se encuentre justo en la mitad de la trayectoria S . Como resultado su máxima distancia (excentricidad) corresponde a la longitud de $d(v_n, v_1) = d(v_n, v_k)$. Esta va a ser menor que la longitud de $d(v_j, v_1)$ y la longitud de $d(v_i, v_k)$ para todo v_i, v_j (evidentemente distintos de los extremos y de v_n). Como la longitud de estas distancias corresponde a la excentricidad de los vértices, entonces la excentricidad de v_n es menor que la excentricidad de todo $u \in V_T$. Por lo tanto v_n es centro y además es único.

Si la longitud de S es par, entonces podemos ubicar $v_m, v_{m+1} \in S$, ($m = \text{longitud de } S \text{ entre dos}$) tal que se encuentren en la mitad de la trayectoria S . Como resultado su máxima distancia (excentricidad) corresponde a la longitud de $d(v_m, v_k)$ y de $d(v_{m+1}, v_1)$ respectivamente. Sea $i < m$ y $j > m + 1$, entonces la longitud de $d(v_m, v_k) < d(v_i, v_k)$ y la longitud de $d(v_{m+1}, v_1) < d(v_j, v_1)$ para todo v_i, v_j (evidentemente distintos de los extremos y de v_m, v_{m+1}). Como la longitud de estas distancias corresponde a la excentricidad de los vértices, entonces las excentricidades de v_m, v_{m+1} son menores que las excentricidades de todo $u \in V_T$ ($u \neq v_m, v_{m+1}$). Por lo tanto T tiene exactamente dos centros (v_m, v_{m+1}) y además son adyacentes. Queda implícito que la excentricidad de v_m es igual a la excentricidad de v_{m+1} .

4. Demuestre o brinde un contraejemplo: Toda gráfica con menos aristas que vértices tiene una ocmponente que es un árbol.

Hipotesis

$$|E(G)| < |V(G)|$$

Definiciones

Def. Una gráfica G es un árbol si y sólo si G es conexa y no contiene ciclos.

Dem. Por casos.

Sea G una gráfica que, por hipótesis $|E(G)| < |V(G)|$, entonces tendremos que G puede ser conexa o inconexa. Así tenemos dos casos:

1. G es conexa
2. G no es conexa

Caso 1. como G es conexa entonces existe una trayectoria entre cualesquiera dos vértices $u, v \in V(G)$, por hipótesis sabemos que esta trayectoria es única pues G no contiene ciclos, es decir G es un árbol.

Caso 2. Como G no es conexa, entonces G tiene 2 o más componentes, de nuevo por hipótesis, al menos una de estas gráficas componentes de G , llamémosle T , tendrá que satisfacer la condición de la hipótesis, i.e $|E(T)| < |V(T)|$, como esta subgráfica satisface la hipótesis y además es componente de G entonces T es conexa, de no ser conexa entonces no sería componente de G , el caso más claro es la gráfica trivial de un solo vértice. Entonces decimos que existe un camino entre cualesquiera dos vértices $t, t' \in T$ y por satisfacer la hipótesis, concluimos que T es un árbol.

\therefore Cuando $|E(G)| < |V(G)|$ entonces G contiene una componente que es un árbol. ■



Figure 4: Representación de una gráfica inconexa con 4 componentes.



Figure 5: Representación de una gráfica inconexa de 3 componentes.



Figure 6: Representación de una gráfica inconexa de 2 componentes.



Figure 7: Representación de una gráfica conexa.

5. Un *hidrocarburo saturado* es una molécula $C_m H_n$ en la que cada átomo de carbono tiene cuatro enlaces, cada átomo de hidrógeno tiene un enlace y ninguna sucesión de enlaces forma un ciclo. Demuestre que para cualquier entero positivo m , la molécula $C_m H_n$ existe si y sólo si $n = 2m + 2$.

Supongamos una secuencia P (que es un camino) de moléculas de Carbono de la siguiente forma:

$$P = (C_1, C_2, C_3, \dots, C_{m-1}, C_m)$$

Como sabemos que un átomo de Carbono tiene solamente 4 enlaces y además no se forman ciclos en ninguna sucesión, entonces no podemos tener un enlace entre ningún C_i, C_j en P , con $i, j \in 1, 2, 3, \dots, m$.

Como C tiene 4 enlaces, enlazaremos un H a cada enlace libre de cada $C_i \in P$, de esta forma tendríamos que los átomos $(C_2, C_3, \dots, C_{m-1})$ tienen un enlace con 2 átomos H , mientras los extremos C_1 y C_m tendrán enlace con 3 átomos H . Es claro que para todos los átomos en la secuencia P hay 2 átomos H , i.e $2m$, además para los extremos de la misma tendremos 2 átomos más de H . así para P con una cantidad m de átomos de C , tendremos una cantidad $2m + 2$ átomos de H .

Otro caso es cuando en lugar de enlazar un átomo H a un enlace libre de algún C_i enlazamos una secuencia nueva $P' = (C'_1, C'_2, C'_3, \dots, C'_{k-1}, C'_k)$ de átomos de C . Como hemos quitado un átomo H a dicho C_i , pero sabemos que toda la secuencia tendrá en el extremo un átomo C enlazado con 3 átomos H entonces podemos decir que no se altera la cantidad, pues $2m + 2$ es equivalente a $2(m + k) + 2$ elementos H para una cantidad nueva $m + k$ de átomos C .

Por lo tanto, para cualquier cantidad m de átomos C_m un *hidrocarburo saturado* es una molécula $C_m H_n$ donde $n = 2m + 2$. ■

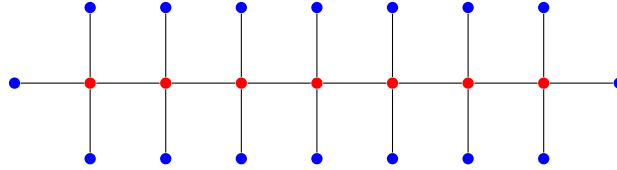


Figure 8: Gráfica que representa un enlace $C_m H_n$.

6. Demuestre que una sucesión (d_1, \dots, d_n) de enteros positivos es la sucesión de grados de un árbol si y sólo si $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n - 1)$.

[\Rightarrow] Una sucesión (d_1, \dots, d_n) de enteros positivos es la sucesión de grados de un árbol

Por construcción de un árbol, analizando la sucesión de grados para una gráfica arbitraria $|V_G| = n$, recordemos que la forma en cómo sabemos el grado de un vértice es por las aristas que indican en él, y sabiendo que el número de aristas de un árbol está dado por $|E| = |V| - 1$. Entonces la suma de sus grados está dada por $n - 1$.

Sin embargo, recordemos que el papel de una arista, es hacer a dos vértices adyacentes. Por lo que si solo sumamos el número de aristas de una gráfica, en realidad, solo estaríamos sumando la mitad de grados de un árbol arbitrario. Por lo que, para una sucesión (d_1, \dots, d_n) , la suma de los grados de estos vértices está dado de la forma:

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n - 1)$$

[\Leftarrow] Sea una suma $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n - 1)$ de grados de una gráfica G

Sabiendo que la suma que tenemos representa a los grados de una gráfica que, por construcción, está dada por su número de aristas. Se infiere que se trata de un árbol, pues su número de aristas está dado por $|E| = |V| - 1$.

Por hipótesis, en la suma dada podemos inferir que d_i representa el grado que tiene un vértice arbitrario, por lo que podemos suponer que tenemos una sucesión del tipo (d_1, \dots, d_n) . Por lo que resta demostrar que la sucesión es de enteros positivos con inducción.

Caso Base: Tenemos $|V| = n = 2$, por lo que la suma esta dada por $\sum_{i=1}^1 d_1 = 2(n - 1)$, lo que nos da que $2(2 - 1) = 2$ y entonces nos queda la suseción: $(1, 1)$. La cual sí cumple que con ser un árbol de dos vertices, pues cada vertice tendría grado 1.

Hipótesis de inducción: Supongamos que para todo k tal que $2 \leq k < n$, toda sucesión de enteros positivos (d_1, \dots, d_k) satisface

$$\sum_{i=1}^k d_i = 2(k - 1)$$

que es la secuencia de grados de algún árbol con k vértices.

Paso inductivo: Suponiendo que se cumple para $k - 1$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_i = 2(k - 1).$$

Esto debido al deducir que podemos volver a nuestro caso base, eliminando una hoja, a la vez, de nuestra suseción. Digamos que v_1 es esa hoja en nuestra suseción con grado 1, tal que nos quedaría: (d_2, \dots, d_k) y como v_1 estaba conectado a otro vertice, digamos v_f , entonces este vertice va a tender a convertirse en una rama con dos hojas o una hoja, tal que $(d_2, \dots, d_f - 1, \dots, d_k)$.

En cualquier caso, la suma nos quedaría como sigue:

$$\sum_{i=2}^k d_i - 1 = \left(\sum_{i=1}^k d_i \right) - 2 = 2(k - 1) - 2 = 2((k - 1) - 1).$$

Notese que primero hacemos la suma quitando el vertice v_1 , luego le restamos dos porque es el número de incidencias que hacía dicho vertice en nuestra suma, y por último obtenemos una subgráfica de nuestro árbol original. La cual, es la que queríamos.

Esto a la larga nos va llevar a nuestro caso base, por lo que al final, si reincorporamos el vertice que habíamos quitado, tendríamos que $v_1 v_f \in E_G$. Lo que nos dice que, en realidad, la suma con la que hemos estado trabajando se trata de una suseción $(d_1, \dots, d_f, \dots, d_n)$ de enteros positivos de grados de un árbol \square

Extra 3. Sea \mathcal{T} una familia de subárboles de un árbol T . Demuestre que si cualesquiera dos elementos de \mathcal{T} tienen un vértice en común, entonces hay un vértice de T que está en todos los elementos de \mathcal{T} .

Hipotesis

\mathcal{T} es una familia de subárboles de T .

T es un árbol, entonces sabemos que T es conexa y ademas cada arista de T es un puente.

Como T es un árbol, entonces hay un camino entre cualesquiera dos vértices $t_m, t_n \in T$ y ademas sabemos que esta trayectoria es única, si no fuera así, T tendría un ciclo. Así, pensemos en dos subarboles \mathcal{R} y \mathcal{S} en T tal que existe una trayectoria entre cualesquiera vértices $r_m, r_n \in \mathcal{R}$ y $s_m, s_n \in \mathcal{S}$

Sabemos que \mathcal{S} y \mathcal{R} no pueden contener ciclos pues T no los contiene. De esta forma debe existir un vértice r_i y s_i que cumplan $r_i = s_i$, de no ser así entonces aseguramos que \nexists un camino $(r_0, s_0), (r_0, s_m), (r_m, s_0)$ y

(r_m, s_m) , como esto no puede ser pues T es conexa, entonces existe un v3rtice r_i de \mathcal{R} y un v3rtice s_i de \mathcal{S} que deben ser iguales, as3 para cualesquiera $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ de T existe un v3rtice t_i que pertenece a T tal que pertenece a cualquier \mathcal{T} sub3rbol de T que nos garantiza la conexidad de T . ■