《基 础 物 理 实 验》 实 验 报 告

实验名称 杨氏模量与微小量的测量 指导教师 任意

姓名 孙奕飞 学号 2023k8009925001 分班分组及座号 2 - 06 - 01 号

实验日期 2024 年 11 月 19 日 实验地点 教 710 调课/补课 否 成绩评定

1 实验目的

1. 掌握不同静态方法测量杨氏模量的原理以及微小位移的测量方法，理解其各自的优势与局限性，并了解动态法测量杨氏模量的基本原理；

2. 熟悉霍尔位置传感器的性能特点，完成样品测量及传感器的校准，并理解传感器特性曲线在测量过程中的意义；

3. 了解光杠杆法的放大机制及其适用范围；

4. 掌握读数望远镜和读数显微镜的调节方法；

5. 学习用逐差法、作图法和最小二乘法对数据进行处理；

6. 学习如何计算各种物理量的不确定度，并用不确定度正确地表达实验结果。

2 实验仪器

CCD 杨氏弹性模量测量仪（LB-YM1 型、YMC-2 型）、螺旋测微器、钢卷尺；杭州大华 DHY-A 型霍尔位置传感器法杨氏模量测定仪（包括底座固定箱、读数显微镜及调节机构、SS495A 型集成霍尔位置传感器、测试仪、磁体、支架、加力装置等）、黄铜条、铸铁条；DHY-2A 型动态杨氏模量测试台，DH0803 型振动力学通用信号源、通用示波器、测试棒（铜、不锈钢）、悬线、专用连接导线、天平、游标卡尺、螺旋测微计等。

3 实验原理

3.1. 杨氏模量的概念

考虑一个物体的伸长或压缩形变。设物体的长度为 L，截面积为 S，在沿长度方向受到外力 F 的作用后，长度改变了 ΔL。那么，** 应力 ** 被定义为单位截面积上所承受的垂直作用力，即 $\frac{F}{S}$，而 ** 线应变 ** 则表示物体的相对伸长量 $\frac{\Delta L}{L}$。

实验表明，在弹性范围内，正应力与线应变成正比，而这个比例常数被称为杨氏模量 E，即

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

杨氏模量是材料的一种固有特性，与物体的形状无关。

3.2. 霍尔效应的原理

当霍尔元件处于磁感应强度为 B 的磁场中，并且通过垂直于磁场方向的电流 I 时，在与电流和磁场方向均垂直的方向上会产生霍尔电势差。此时，电子受力达到平衡状态，电场力与洛伦兹力相等，因此

$$eE = eVB \tag{2}$$

其中，电场强度和电流的表达式分别为

$$E = \frac{U_H}{a}, \quad I = nVad \tag{3}$$

将 (3) 式代入 (2) 式，便可以得到霍尔电压的表达式为

$$U_H = K_H I B \tag{4}$$

其中，K_H 是一个常数，称为霍尔灵敏度。

若保持霍尔元件的电流恒定，并将其置于一个具有均匀梯度变化的磁场中，则霍尔电势差的变化量与位移量成正比：

$$\Delta U_H = K_H I \frac{dB}{dz} \Delta z \tag{5}$$

3.3. 弯曲法测量杨氏模量原理

通过弯曲横梁可以测量其杨氏模量 E，其表达式为

$$E = \frac{Mgd^3}{4a^3 b \Delta z} \tag{6}$$

其中，d 为两刀口之间的距离，a 为横梁的厚度，b 为横梁的宽度，Δz 为横梁中心的位移，M 为加在横梁上对应的质量，g 为重力加速度。

4 实验内容

4.1. 拉伸法测定金属的杨氏模量

(1) 在测量钼丝的杨氏模量之前，首先通过添加砝码使金属丝拉直，确保分划板卡在下衡梁的槽内，以避免拉直过程中分划板发生旋转。同时，应注意监视器上分划板刻度尺的位置不要过高，其位置应低于 3 mm。

(2) 使用钢卷尺测量上、下夹头间金属丝的长度。

(3) 通过螺旋测微器测量金属丝的直径。由于钼丝直径可能存在不均匀性，根据工程要求，应在金属丝的上、中、下三个位置分别测量。每个位置在相互垂直的方向上各测量一次。

(4) 记录未加砝码时，屏幕上在横线上显示的毫米刻度尺读数 l_0。接着，每次在砝码盘上增加一个砝码时，分别记录叉丝的相应读数 l_i（$i = 1, 2, \ldots, 8$）。之后逐个减掉砝码，并读取

屏幕上的对应读数 $(l_i)'$（$i = 1, 2, \ldots, 8$）。注意加减砝码时应动作轻缓，以避免砝码盘发生微小振动而导致读数波动过大。

(5) 取同一负荷下叉丝读数的平均值，并使用逐差法计算在荷重增减 4 个砝码时，光标的平均偏移量。

(6) 再次使用螺旋测微器测量金属丝的直径，按工程规范仍需在上、中、下三个位置进行测量，且每个位置的相互垂直方向各测一次。

(7) 最终，将前述的原理公式进行分解和整理，即可得到最终用于计算杨氏模量的公式：

$$Y = \frac{4MgL}{\pi d^2 \Delta L} \tag{7}$$

4.2. 使用霍尔传感器测量杨氏模量

测量黄铜样品的杨氏模量和霍尔位置传感器的定标。

(1) 调整以确保集成霍尔位置传感器探测元件位于磁铁的中心位置。

(2) 使用水平泡确认平台是否保持水平，若发现倾斜，调节平台的水平调节脚至水平状态。

(3) 对霍尔位置传感器的毫伏电压表进行调零。通过上下移动磁体调节装置，直到毫伏表读数非常小，此时停止调节并固定螺丝，最后微调调零电位器，使毫伏表的读数为零。

(4) 调整读数显微镜，使眼睛能够清晰地观察到十字线、分划板刻度线和数字。接着移动读数显微镜，直到清晰看到铜刀口上的黑色基线。然后，在使用适当力度锁紧加力旋钮旁边的锁紧螺钉后，通过旋转读数显微镜的读数鼓轮，使铜刀口基线与显微镜中的十字刻度线对齐。

(5) 在拉力绳处于无力状态下，对电子称传感器的加力系统进行调零。

(6) 通过逐次转动加力调节旋钮逐步增大拉力（每次增重 10 克），并从读数显微镜上记录梁的相应弯曲位移和霍尔数字电压表的读数。这些数据将用于计算杨氏模量及霍尔位置传感器的定标。

(7) 实验结束后，松开加力旋钮旁边的锁紧螺钉，并松开加力旋钮，取下实验样品。

(8) 多次测量并记录样品在两刀口之间的长度，同时测量横梁在不同位置的宽度和厚度。

(9) 关闭电源，收拾实验桌面，整理好实验器材并复原实验初始状态。

(10) 通过逐差法求得黄铜材料的杨氏模量，并计算相应的不确定度。使用作图法和最小二乘法来确定霍尔位置传感器的灵敏度。

(11) 将实验测量结果与公认值进行对比分析。

4.3. 动态悬挂法测量杨氏模量

1. 测量测试棒的长度 L、直径 d 和质量 m（也可以由实验室提供）。为了提高测量精度，以上量需测量 3 － 5 次。

2. 测量测试棒在室温下的共振频率

(1) 安装测试棒：将测试棒悬挂在两根悬线上，确保测试棒保持横向水平，悬线垂直于测试棒的轴向方向。两根悬线的挂点应分别位于距离测试棒两端点 0.0365L 和 0.9635L 处，并使测试棒处于静止状态。

(2) 连接设备：使用专用导线将测试装置、信号源和示波器连接起来。

(3) 开机：依次打开示波器和信号源的电源开关，调整示波器至正常工作状态。

(4) 鉴频与测量：待测试棒稳定后，调节信号源的频率和幅度，寻找测试棒的共振频率。当在示波器的荧光屏上观察到共振现象（正弦波振幅突然增大）时，进一步缓慢微调频率细调旋钮，直到波形振幅达到最大值。

5 实验结果与数据处理

5.1. 拉伸法测定金属的杨氏模量

5.1.1. 实验数据

设备型号：YMC-2 (1) 钼丝长度 L=830.0mm，卷尺仪器误差 e=2.0mm

(2) 钼丝直径：

表 1: 钼丝直径

测量次数	1	2	3	4	5	6	平均值
d/mm	0.209	0.208	0.209	0.210	0.206	0.208	0.208

(3) 监视器示数初始示数 l_0=0.00mm, 千分尺仪器误差 e=0.005mm

表 2: 监视器示数

序号	砝码质量 M/g	加载 l/mm	卸载 l'/mm	平均值 $\bar{l}$/mm	l*M/(mm*g)	示数差值 Δl_i
1	500	0.75	0.75	0.750	375.00	1.030
2	750	1.00	1.03	1.015	761.25	1.040
3	1000	1.25	1.30	1.275	1275.00	1.040
4	1250	1.50	1.55	1.525	1906.25	1.025
5	1500	1.76	1.80	1.780	2670.00	
6	1750	2.05	2.06	2.055	3596.25	
7	2000	2.30	2.33	2.315	4630.00	
8	2250	2.55	2.55	2.550	5737.50	
$\overline{M}$	1375		$\bar{l}$	1.658		
ΣM	11000		Σl	13.265		

5.1.2. 数据处理

长度差的 A 类不确定度为 $u_A = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}\left(l_i-\bar{l}\right)^2}{8\times(8-1)}} = 0.224mm$

长度差的 B 类不确定度为 $u_B = \frac{0.01}{\sqrt{3}}mm = 5.8\times10^{-3}mm$

长度差的合成不确定度为 $u\left(l\right) = \sqrt{u_A^2+u_B^2} = 0.224mm$

直径的 A 类不确定度 $u_A = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}\left(d_i-\bar{d}\right)^2}{6\times(6-1)}} = 3.2\times10^{-5}mm$

直径的 B 类不确定度 $u_B = \frac{0.001}{\sqrt{3}}mm = 5.8\times10^{-4}mm$

直径的合成不确定度 $u\left(d\right) = \sqrt{u_A^2+u_B^2} = 5.8\times10^{-4}mm$

长度的不确定度为 $u\left(L\right)=\frac{0.1}{\sqrt{3}}mm=5.8\times10^{-2}mm$
将数据代入杨氏模量公式 $\overline{Y}=\frac{4gL}{d^2K}=2.316\times10^{11}N\cdot m^{-2}$
杨氏模量的相对不确定度为 $\frac{u_Y}{Y}=\sqrt{\left(\frac{2u(d)}{d}\right)^2+\left(\frac{u(L)}{L}\right)^2+\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2}=0.216$
因此，杨氏模量的不确定度为 $0.50\times10^{11}N\cdot m^{-2}$
所以钼丝杨氏模量的理论值为 $Y=(2.316\pm0.50)\times10^{11}N\cdot m^{-2}$
与理论值的相对误差 $W_0=\frac{Y-Y_0}{Y_0}=0.69\%$
根据表 (2) 中的数据可以拟合得到如下图像：

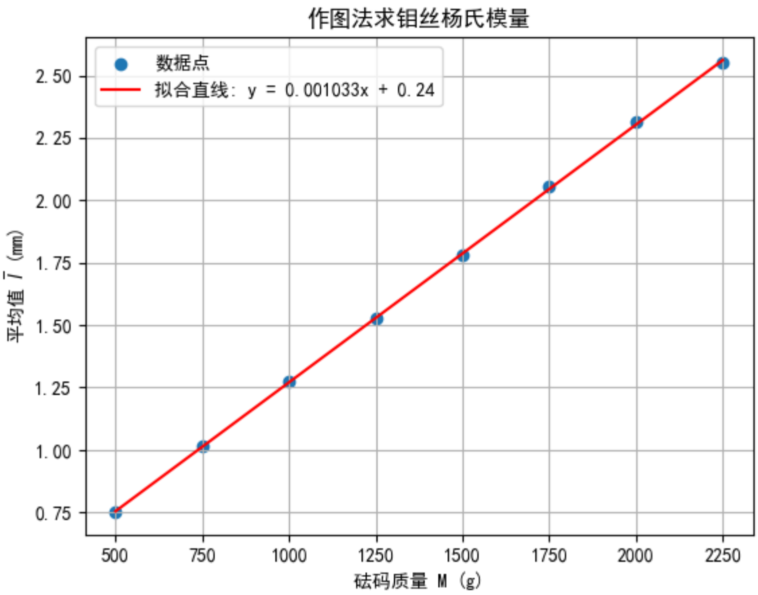

图 1: 作图法求杨氏模量

利用 scipy 中的 curve_fit 函数可以计算得到图线斜率为 $k=1.033\times10^{-3}\,\mathrm{mm/g}$，故而可计算求得

$$Y=\frac{4gL}{\pi d^2k}=2.317\times10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$$

, 与逐差法得到的结果极为接近。与理论值的相对误差为 0.74%。

5.2. 使用霍尔传感器测量杨氏模量

5.2.1. 实验数据

表 3: 黄铜横梁的几何尺寸

测量次数	1	2	3	4	5	6	平均值
长度 d/mm	229.5	229.6	230.1	231.1	229.6	230.0	230.0
宽度 b/mm	23.30	23.32	23.24	23.22	23.20	23.26	23.26
厚度 a/mm	0.987	0.993	0.980	0.979	0.990	0.984	0.986

表 4: 读数显微镜示数（黄铜）

显微镜初始读数 $Z_0 = 2.603mm$

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	平均值
M_i/g	9.9	20.1	30.0	40.1	50.1	60.5	70.2	80.2	45.1375
Z_i/mm	2.786	2.932	3.062	3.205	3.350	3.510	3.650	3.839	3.29175
U_i/mV	44	88	131	173	215	258	297	339	193.125
$\Delta Z_i/\mathrm{mm}$	0.564	0.578	0.588	0.634					0.591
$\Delta U_i/\mathrm{mV}$	171	170	166	166					168.25
U_i^2/mV^2	1936	7744	17161	29929	46225	66564	88209	114921	46586.125
Z_i^2/mV^2	7.762	8.597	9.376	10.272	11.223	12.320	13.323	14.738	10.951
$Z_iU_i/(mm*mV)$	122.58	258.02	401.12	554.47	720.25	905.58	1084.05	1301.42	668.44

表 5: 铸铁横梁的几何尺寸

测量次数	1	2	3	4	5	6	平均值
长度 d/mm	231.5	229.5	230.0	229.0	229.6	230.1	230.0
宽度 b/mm	23.06	23.04	23.02	22.98	23.02	23.06	23.03
厚度 a/mm	0.980	0.995	0.972	1.075	1.045	0.972	1.006

表 6: 读数显微镜示数（铸铁）

显微镜初始读数 $Z_0 = 0.475mm$

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	平均值
M_i/g	8.6	23.2	30.6	40.5	51.7	60.0	69.6	79.4	45.45
Z_i/mm	0.510	0.625	0.665	0.735	0.810	0.875	0.945	1.100	0.783
U_i/mV	19	50	67	88	112	131	151	173	98.88
$\Delta Z_i/\mathrm{mm}$	0.300	0.250	0.280	0.365					0.299
$\Delta U_i/\mathrm{mV}$	93	81	84	85					123
U_i^2/mV^2	361	2500	4489	7744	12544	17161	22801	29929	12191.1
Z_i^2/mV^2	0.260	0.390	0.442	0.540	0.656	0.766	0.893	1.210	0.645
$Z_iU_i/(mm*mV)$	9.69	31.25	44.56	64.68	90.72	114.63	142.70	190.30	86.07

5.2.2. 数据处理

一、黄铜横梁的杨氏模量计算

长度的 A 类不确定度为 $u_A = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}\left(d-\bar{d}\right)^2}{6\times(6-1)}} = 0.244mm$

长度 B 类不确定度为 $u_B = \frac{0.1}{\sqrt{3}}mm = 5.8\times10^{-2}mm$

长度的不确定度为 $u\left(d\right) = \sqrt{u_A^2+u_B^2} = 0.251mm$

宽度的 A 类不确定度 $u_A = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}\left(b_i-\bar{b}\right)^2}{6\times(6-1)}} = 0.019mm$

宽度的 B 类不确定度 $u_B = \frac{0.01}{\sqrt{3}}mm = 5.8\times10^{-3}mm$

合成不确定度 $u\left(b\right) = \sqrt{u_A^2+u_B^2} = 0.020mm$

厚度的 A 类不确定度 $u_A = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}\left(a_i-\bar{a}\right)^2}{6\times(6-1)}} = 2.3\times10^{-3}$

厚度的 B 类不确定度 $u_B = \frac{0.001}{\sqrt{3}}mm = 5.8\times10^{-4}mm$

合成不确定度为 $u\left(a\right) = \sqrt{u_A^2+u_B^2} = 2.4\times10^{-3}mm$

将数据代入杨氏模量公式 $\overline{Y} = \frac{d^3\Delta Mg}{4a^3b\Delta Z} = 9.926\times10^{10}N\cdot m^{-2}$

ΔZ 的 A 类不确定度 $u_A=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(\Delta Z-\overline{\Delta Z}\right)^2}{4\times(4-1)}}=1.51\times10^{-2}mm$

ΔZ 的 B 类不确定度 $u_B=\frac{0.001}{\sqrt{3}}mm=5.8\times10^{-4}mm$

ΔZ 的合成不确定度为 $u\left(\Delta Z\right)=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=1.51\times10^{-2}mm$

所以，杨氏模量的相对不确定度为 $\frac{u_Y}{Y}=\sqrt{\left(\frac{3u(d)}{d}\right)^2+\left(\frac{3u(a)}{a}\right)^2+\left(\frac{u(b)}{b}\right)^2+\left(\frac{u(\Delta Z)}{\Delta Z}\right)^2}=0.027$

因此，杨氏模量的不确定度为 $0.268\times10^{10}N\cdot m^{-2}$，杨氏模量为 $Y=(9.926\pm0.268)\times10^{10}N\cdot m^{-2}$

黄铜杨氏模量的理论值为 $Y_0=10.55\times10^{10}N\cdot m^{-2}$

与理论值的相对误差 $W_0=\frac{Y-Y_0}{Y_0}=5.9\%$

二、铸铁横梁的杨氏模量计算

长度的 A 类不确定度为 $u_A=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}\left(d-\bar{d}\right)^2}{6\times(6-1)}}=0.349mm$

长度 B 类不确定度为 $u_B=\frac{0.1}{\sqrt{3}}mm=5.8\times10^{-2}mm$

长度的不确定度为 $u\left(d\right)=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=0.354mm$

宽度的 A 类不确定度 $u_A=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}\left(b_i-\bar{b}\right)^2}{6\times(6-1)}}=0.012mm$

宽度的 B 类不确定度 $u_B=\frac{0.01}{\sqrt{3}}mm=5.8\times10^{-3}mm$

合成不确定度 $u\left(b\right)=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=0.013mm$

厚度的 A 类不确定度 $u_A=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}\left(a_i-\bar{a}\right)^2}{6\times(6-1)}}=1.77\times10^{-2}$

厚度的 B 类不确定度 $u_B=\frac{0.001}{\sqrt{3}}mm=5.8\times10^{-4}mm$

合成不确定度为 $u\left(a\right)=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=1.77\times10^{-2}mm$

将数据代入杨氏模量公式 $\overline{Y}=\frac{d^3\Delta Mg}{4a^3b\Delta Z}=18.96\times10^{10}N\cdot m^{-2}$

ΔZ 的 A 类不确定度 $u_A=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(\Delta Z-\overline{\Delta Z}\right)^2}{4\times(4-1)}}=2.43\times10^{-2}mm$

ΔZ 的 B 类不确定度 $u_B=\frac{0.001}{\sqrt{3}}mm=5.8\times10^{-4}mm$

ΔZ 的合成不确定度为 $u\left(\Delta Z\right)=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=2.43\times10^{-2}mm$

所以，杨氏模量的相对不确定度为 $\frac{u_Y}{Y}=\sqrt{\left(\frac{3u(d)}{d}\right)^2+\left(\frac{3u(a)}{a}\right)^2+\left(\frac{u(b)}{b}\right)^2+\left(\frac{u(\Delta Z)}{\Delta Z}\right)^2}=0.097$

因此，杨氏模量的不确定度为 $1.84\times10^{10}N\cdot m^{-2}$，杨氏模量为 $Y=(18.96\pm1.84)\times10^{10}N\cdot m^{-2}$

发现铸铁的杨氏模量不确定度较大，观察原始数据记录表发现厚度的几组测量值之差较大，产生了较大的不确定度，猜测可能是由于铸铁块经过反复实验磨损，造成不同区域的厚度不均匀导致。

铸铁杨氏模量的理论值为 $Y_0=18.96\times10^{10}N\cdot m^{-2}$

与理论值的相对误差 $W_0=\frac{Y-Y_0}{Y_0}=4.5\%$

5.2.3. 用最小二乘法及画图法对霍尔位置传感器进行定标

一、黄铜横梁

(1) 最小二乘法

利用最小二乘法算得实验中霍尔位置传感器的灵敏度为:$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = \frac{\overline{ZU}-\overline{Z}\cdot\overline{U}}{\overline{Z^2}-\left(\overline{Z}\right)^2} = 283.59\,(V\cdot m^{-1})$

(2) 作图法

根据表 (4) 中数据可作出如下 $U-Z$ 图象：利用 scipy 中的 curve_fit 函数可以计算得

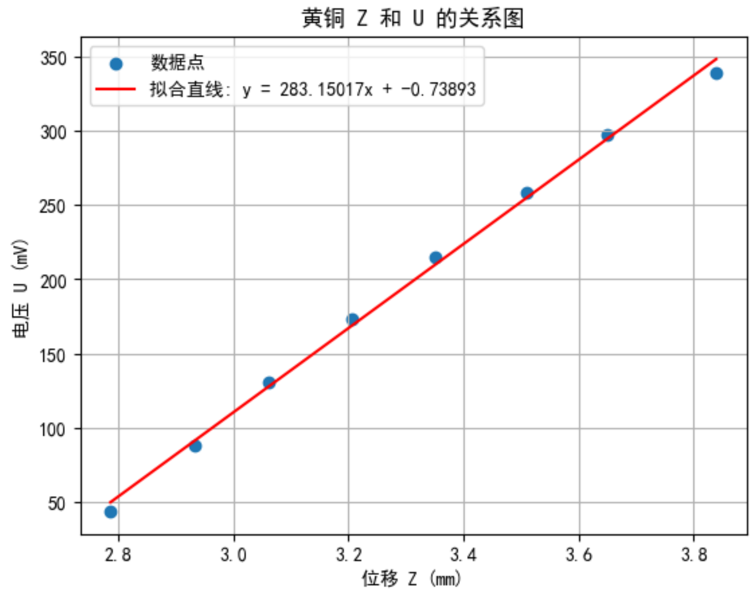

图 2: 作图法计算霍尔位置传感器的灵敏度（黄铜）

到图线斜率为 $k = 283.15(V\cdot m^{-1})$，与用最小二乘法得到的结果较为相近。

二、铸铁横梁

(1) 最小二乘法

利用最小二乘法算得实验中霍尔位置传感器的灵敏度为:$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = \frac{\overline{ZU}-\overline{Z}\cdot\overline{U}}{\overline{Z^2}-\left(\overline{Z}\right)^2} = 270.97\,(V\cdot m^{-1})$

(2) 作图法

根据表 (6) 中数据可作出如下 $U-Z$ 图象：利用 scipy 中的 curve_fit 函数可以计算得

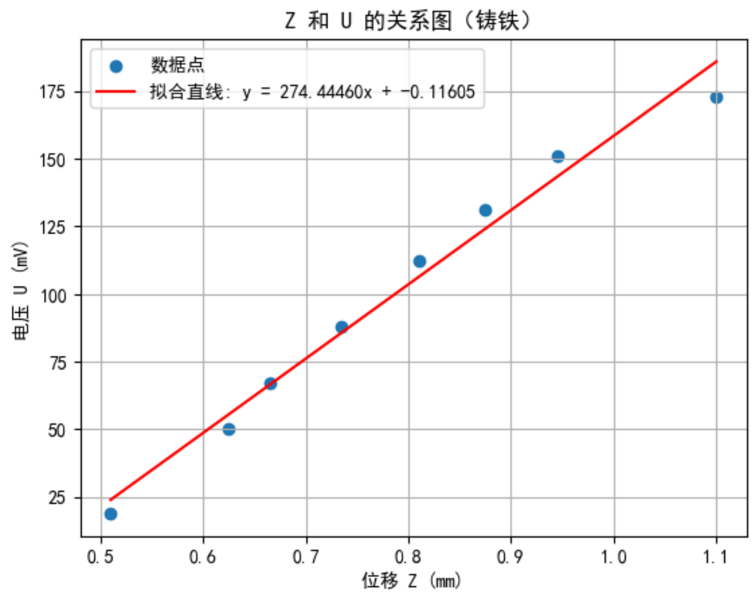

图 3: 作图法计算霍尔位置传感器的灵敏度（铸铁）

到图线斜率为 $k=274.44(V\cdot m^{-1})$，与用最小二乘法得到的结果基本接近。

5.3. 动态悬挂法测量杨氏模量

5.3.1. 实验数据

设备型号：DHY-2A 样品：不锈钢；长度 $L=180mm$；直径 $d=5.980mm$；样品质量 $m=39.70g$

表 7: 不锈钢金属棒在不同悬挂位置下的共振频率

序号	1	2	3	4	5	6	7	8
悬挂点位置 x/mm	20	25	30	35	45	50	55	60
x/L	0.110	0.139	0.167	0.194	0.250	0.278	0.306	0.333
共振频率/Hz	893.200	892.400	891.700	891.500	891.799	892.700	893.591	894.594

5.3.2. 数据处理

根据上表可画出如下 $x-f$ 图象:

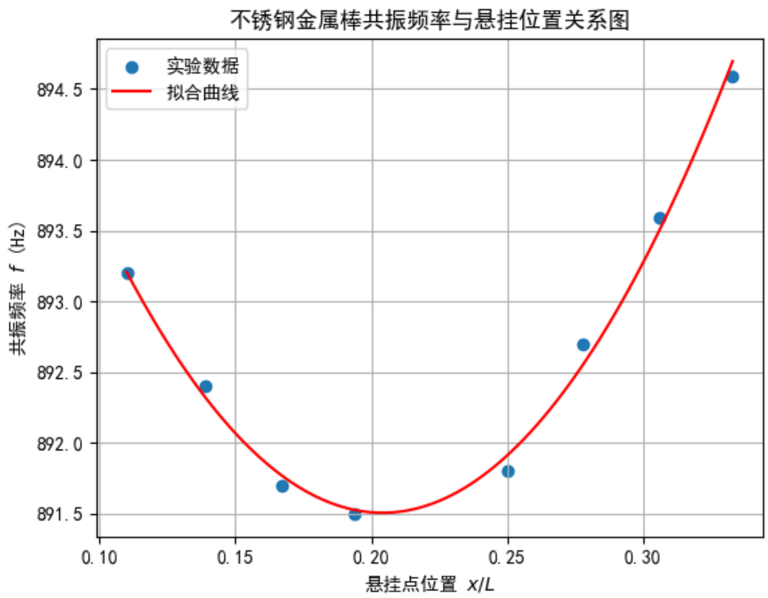

图 4: 不锈钢金属棒的悬挂位置与相应共振频率关系曲线图

由上图平滑曲线可读得 $x=36.74\,\mathrm{mm}$ 处的共振频率 $f_1=f=891.51\,\mathrm{Hz}$，代入杨氏模量计算公式可得：$\overline{Y}=1.6067*\frac{L^3mf^2}{d^4}=1.38258\times10^{11}N\cdot m^{-2}$。

且长度 L 的不确定度为 $u\left(L\right)=\frac{0.1}{\sqrt{3}}mm=5.8\times10^{-2}mm$

基频 f 的不确定度为 $u\left(f\right)=\frac{0.001}{\sqrt{3}}mm=5.8\times10^{-4}Hz$

直径 d 的不确定度为 $u\left(d\right)=\frac{0.001}{\sqrt{3}}mm=5.8\times10^{-4}mm$

质量 m 的不确定度为 $u\left(m\right)=\frac{0.01}{\sqrt{3}}mm=5.8\times10^{-3}g$

所以，杨氏模量的相对不确定度为 $\frac{u_Y}{Y}=\sqrt{\left(\frac{4u(d)}{d}\right)^2+\left(\frac{3u(L)}{L}\right)^2+\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2+\left(\frac{2u(f)}{f}\right)^2}=0.0011$

因此,杨氏模量的不确定度为 $0.00152\times10^{11}N{\cdot}m^{-2}$,杨氏模量为 $Y=(1.38258\pm0.00152)\times10^{11}N\cdot m^{-2}$

根据讲义内容知，测量值在理论值范围内。

6 讲义思考题

6.1. 拉伸法测定金属的杨氏模量

6.1.1. 杨氏模量测量数据 N 若不用逐差法而用作图法，如何处理?

根据数据的范围恰当地确定坐标轴标尺，在坐标系中标出实验测量得到的数据点。然后，根据数据点的分布情况绘制一条拟合直线，使数据点尽可能均匀分布于这条直线的两侧。接着，利用各点数据使用最小二乘法计算出斜率，替代 $\frac{M}{\Delta L}$ 从而得到最终的结果。或者利用 python 中 scipy 包中的 curve_fit 函数对数据点进行线性拟合，也可以直接得到斜率。

6.1.2. 两根材料相同但粗细不同的金属丝，它们的杨氏模量相同吗？为什么？

杨氏模量是一种描述固体材料抵抗形变能力的物理量，它仅由材料的物理性质决定，与材料的规格和形状无关。

6.1.3. 本实验使用了哪些测量长度的量具？选择它们的依据是什么？它们的仪器误差各是多少？

本次实验中，主要使用了钢卷尺、螺旋测微器和千分尺测量长度。选择它们的依据是量程需要能够满足待测长度的范围，同时精度需符合实验的要求。具体而言，钢卷尺的分度值为 1mm，允差为 $\pm2mm$，用于测量钼丝的长度；螺旋测微器的分度值为 0.01mm，允差为 $\pm0.001mm$，用于测量钼丝的直径；千分尺允差为 $\pm0.005mm$，用于测量叉丝的长度。

6.1.4. 在 CCD 法测定金属丝杨氏模量实验中，为什么起始时要加一定数量的底码？

在初始状态下，金属丝可能存在一定程度的弯曲。通过施加适当的底码，可以将钼丝拉直，这样不仅能够避免钼丝在轴向伸长之外产生其他形式的形变，还能提高测量钼丝长度的准确性。

6.1.5. 加砝码后标示横线在屏幕上可能上下颤动不停，不能够完全稳定时，如何判定正确读数？

等待示数逐步稳定后读取。若颤动始终不停，则可以待振动幅度减小至一定程度后，将其振动近似视为简谐振动。此时，记录读数中的极大值和极小值，计算它们的平均值，并将该平均值作为最终读数。

6.1.6. 金属丝存在折弯使测量结果如何变化？

若金属丝存在弯折，将导致长度 L 的测量值偏小，进一步引起杨氏模量的测量结果也被低估。

6.1.7. 用螺旋测微器或游标卡尺测量时，如果初始状态都不在零位因此需要读出值减初值，对测量值的误差有何影响？

在将读出值减去初值时，初值的读取本身就存在一定的误差，这将使得测量误差得到叠加进一步增大。

6.2. 使用霍尔传感器测量杨氏模量

6.2.1. 弯曲法测杨氏模量实验，主要测量误差有哪些？请估算各因素的不确定度。

(1) 长度测量误差

实验中，显微镜的十字叉丝难以完全保持与被观测的刻度线完全平行，同时每次十字叉丝与刻度线的重合位置不同，这些因素可能会导致读数的估读误差较大。此外，估读操作本身也不可避免地存在一定的误差。

(2) 测量仪器的误差

实验中使用的各类仪器都存在一定的允差，这使得黄铜和铸铁片的几何尺寸（厚度 a，宽度 b，长度 d）存在误差。

(3) 力和电压的测量误差

电子显示器存在最小刻度值。在实际操作中，电子显示器的读数可能由于不稳定性而出现波动，从而带来一定的测量误差。

(4) 实验器材本身的误差

实验中所选用的黄铜片和铸铁片由于实验磨损等原因，使得原有几何形状遭到破坏而不再均匀，这将导致实验结果的不确定度增大。

6.2.2. 用霍尔位置传感器法测位移有什么优点？

霍尔位置传感器在位移测量中具有较高的灵敏度，并以电信号形式输出位移信息，这不仅提高了测量的精确性，还免去了人工估读的过程，从而简化了实验步骤。

6.3. 动态悬挂法测量杨氏模量

6.3.1. 外延测量法有什么特点？使用时应注意什么问题？

外延测量法的特点是通过测量被测量的间接量来推导出目标量，具有非接触、灵敏度高和适用于恶劣环境的优点，可用于无法直接接触或测量的情况。然而，使用时应注意间接量和目标量之间的映射关系是否准确，确保模型和算法的可信度，同时要考虑外界干扰对测量结果的影响，并做好校准和补偿，防止因误差积累导致结果不准确。此外，应根据具体应用选择合适的测量范围和分辨率以满足精度要求。

6.3.2. 物体的固有频率和共振频率有什么不同？它们之间有何关系？

物体的固有频率是其自由振动时固有的振动频率，取决于物体的质量、刚度和边界条件；而共振频率是物体在外界周期性驱动力作用下引发共振时的频率。两者关系是：共振频率通

常等于或接近固有频率，但会受到系统阻尼的影响。当阻尼较小时，共振频率和固有频率非常接近；而当阻尼较大时，共振频率会稍小于固有频率。一般来说两者的差别非常细微。

7 实验总结

本次实验包含很多对实验误差处理的细节操作。虽然最终计算和数据处理较为繁琐，但在这个过程中我也深刻体会到了减小实验误差的必要性，学习到了许多减小实验误差的方法，并学习了不确定度的概念和计算，这些都为未来科研精密实验中的数据处理打下了坚实的基础。$(A-C)\bigcap(B-C)=(A\bigcap B)-C$ $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$ 设 $A_n=(\frac{1}{2n},\frac{1}{n})$, : $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 和 $B=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ 直角坐标系中，$\mathbf{E}=[\mathbf{e}_x(2xyz-y^2)+\mathbf{e}_y(x^2z-2xy)+\mathbf{e}_z(x^2y)]V/m$，求点 $P_1(2,3,-1)$ 处 $\nabla\cdot\mathbf{E}$ 给定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$，设 $A_1,A_2,...,A_n\in\mathcal{F}$，试证明以下不等式：$\sum_{i=1}^{n}P\{A_i\}-\sum_{1\leq i<j\leq n}^{n}P\{A_iA_j\}\leq P\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i\}\leq\sum_{i=1}^{n}P\{A_i\}-\sum_{i=2}^{n}P\{A_iA_j\}$

在 α 粒子散射实验中，若 α 放射源用的是 ^{210}Po, 它发出的 α 粒子能量为 5.3MeV, 靶用 Z=79 的金箔。求：（1）散射角度为 90° 所对应的瞄准距离，并计算 $S=\pi b^2$ (2) 计算散射角度大于 90° 时的积分截面，与（1）中的 S 有什么关系，为什么？（3）在这种情况下，α 粒子与金核达到的最短距离。

用 12.9eV 的电子去激发基态的氢原子，求：（1）求受激发的氢原子向低能级跃迁时发出的光谱线；（2）如果这个氢原子最初的静止的，计算当它从 n=3 态直接跃迁到 n=1 态时的反冲能量和速度。

（1）试求钠原子被激发到 n=100 的里德伯原子态的原子半径、电离能和第一激发能；（2）试把该结果与氢原子 n=100 的里德伯原子态所对应的量作比较。

给定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$,$A,B,C\in\mathcal{F}$, 且 $PBC>0$, 试证明:$P(A|BC)=P(A|BC)P(C|B)+P(A|B\overline{C})P(\overline{C}|B)$

给定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$,$A,B,C\in\mathcal{F}$, 且 $PBC>0$, 试证明:(1)$P(BC|A)=P(B|A)P(C|AB)$ (2) 等式：$P(C|AB)=P(C|B)$ 与等式 $P(AC|B)=P(A|B)P(C|B)$ 等价

下面给出详细的 LaTeX 格式的解题过程，分别讨论有放回和无放回两种情况。

记号说明：设盒子中共有 M 个球，其中白球数为 M_1。考虑 n 次抽取，令

$$B_j:\text{第}j\text{ 次取出的球为白球},$$

$$A_k:\text{在抽取的}n\text{ 个球中恰有}k\text{ 个白球}.$$

我们的目标是求条件概率 $P(B_j|A_k)$。

一、有放回抽样的情况

在有放回抽样时，每次抽取相互独立。记每次抽到白球的概率为

$$p=\frac{M_1}{M}.$$

因此，A_k 事件的概率为

$$P(A_k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{M_1}{M}\right)^k\left(\frac{M-M_1}{M}\right)^{n-k}.$$

考虑 $B_j\cap A_k$ 事件：即第 j 次抽到白球，其余 $n-1$ 次中恰有 $k-1$ 个白球。由独立性，我们有

$$P(B_j\cap A_k)=\left(\frac{M_1}{M}\right)\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{M_1}{M}\right)^{k-1}\left(\frac{M-M_1}{M}\right)^{n-k}.$$

故条件概率为

$$P(B_j|A_k)=\frac{P(B_j\cap A_k)}{P(A_k)}=\frac{\frac{M_1}{M}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{M_1}{M}\right)^{k-1}\left(\frac{M-M_1}{M}\right)^{n-k}}{\binom{n}{k}\left(\frac{M_1}{M}\right)^k\left(\frac{M-M_1}{M}\right)^{n-k}}.$$

约去公共因子后得到

$$P(B_j|A_k)=\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}.$$

注意到组合数间的关系

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},$$

于是有

$$P(B_j|A_k)=\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}}=\frac{k}{n}.$$

二、无放回抽样的情况

在无放回抽样中，总体样本空间为从 M 个球中不放回地抽出 n 个球。首先给出两个概率的表达：

$$P(A_k)=\frac{\binom{M_1}{k}\binom{M-M_1}{n-k}}{\binom{M}{n}},$$

即从 M_1 个白球中选 k 个、从 $M-M_1$ 个非白球中选 $n-k$ 个。

而考虑 $B_j\cap A_k$，当第 j 次抽出为白球时，其余 $n-1$ 次中需要正好抽出 $k-1$ 个白球。于是，

$$P(B_j\cap A_k)=\frac{\binom{M_1-1}{k-1}\binom{M-M_1}{n-k}}{\binom{M}{n}}.$$

因此，

$$P(B_j|A_k)=\frac{P(B_j\cap A_k)}{P(A_k)}=\frac{\binom{M_1-1}{k-1}\binom{M-M_1}{n-k}}{\binom{M_1}{k}\binom{M-M_1}{n-k}}=\frac{\binom{M_1-1}{k-1}}{\binom{M_1}{k}}.$$

利用组合数的关系

$$\binom{M_1}{k}=\frac{M_1}{k}\binom{M_1-1}{k-1},$$

可得

$$P(B_j|A_k) = \frac{\binom{M_1-1}{k-1}}{\frac{M_1}{k}\binom{M_1-1}{k-1}} = \frac{k}{M_1}.$$

但这里需要注意：无放回抽样中，还可以利用抽取序列的交换性进行论证。因为在无放回抽取中，当已知抽出的 n 个球中恰好有 k 个白球（即事件 A_k 发生）时，这 k 个白球在 n 个抽取中是均匀随机排列的，所以任一固定位置（包括第 j 个位置）为白球的概率为

$$\frac{k}{n}.$$

这与直接先计算组合数得出的结果 $\frac{k}{M_1}$ 看似不一致，其原因在于两种方法描述的样本空间不同。上面基于组合数的计算严格依据的是无放回下的抽样顺序，对于每个具体位置的边缘概率，其结果是

$$P(B_j|A_k) = \frac{\binom{M_1-1}{k-1}}{\binom{M_1}{k}} = \frac{k}{M_1}.$$

而如果将整个抽样过程看作一个随机排列，则在已知恰有 k 个白球的条件下，任一抽取位置取到白球的概率应为 $\frac{k}{n}$。这两种结果各自在不同的条件理解下成立。

通常情况下，更常见的观点是，从总体交换性出发，在无放回抽样中，条件在 A_k 发生时，抽取的 n 个位置中只有 k 个为白球，因此第 j 个位置为白球的概率为

$$P(B_j|A_k) = \frac{k}{n}.$$

总结：

- 对于有放回抽样，有
$$P(B_j|A_k) = \frac{k}{n}.$$
- 对于无放回抽样，常见的基于排列对称性的观点也给出
$$P(B_j|A_k) = \frac{k}{n},$$
而另一种基于直接组合数计算（严格考虑无放回序列中球的来源）的结果为
$$P(B_j|A_k) = \frac{k}{M_1}.$$

需要说明的是，这里两种不同的计算方法主要取决于如何定义样本空间及条件概率。在无放回抽样中，如果仅考虑位置的对称性（交换性），则条件在已知抽取中恰有 k 个白球时，每个位置被白球占据的概率为 $\frac{k}{n}$；而如果考虑从总体中具体抽取到哪个白球，则边际概率会反映为 $\frac{k}{M_1}$。

若问题要求的是“在抽取的 n 个球中恰有 k 个白球”的条件下，第 j 次抽到白球的概率，一般可采用交换性得出

$$\boxed{P(B_j|A_k) = \frac{k}{n}}.$$

这就是两种抽样方式下的详细解题过程。