

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Факультет программной инженерии и
компьютерной техники**

Вычислительная математика

Малышева Татьяна Алексеевна,

доцент, к.т.н.

tamalysheva@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2025

Численные методы решения нелинейных уравнений

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — заданная алгебраическая или трансцендентная (включает в себя тригонометрические или экспоненциальные функции) функция.

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ (имеет n -корней)

$f(x) = \sin(x) + 0,1x^2$ (имеет *бесконечное множество* решений)

Решить уравнение — это найти такое $x^* \in R: f(x^*)=0$. Значение x^* называют *корнем уравнения*.

Методы делятся на:

- **точные** (позволяют найти решение непосредственно с помощью формул)
- **итерационные** (приближенные)

Этапы приближенного решения нелинейных уравнений

- Отделение (локализация) корней, т.е. определение интервала $[a,b]$, на котором содержится **ТОЛЬКО** один корень уравнения $f(x) = 0$

Такой интервал называется ***интервалом изоляции корня***

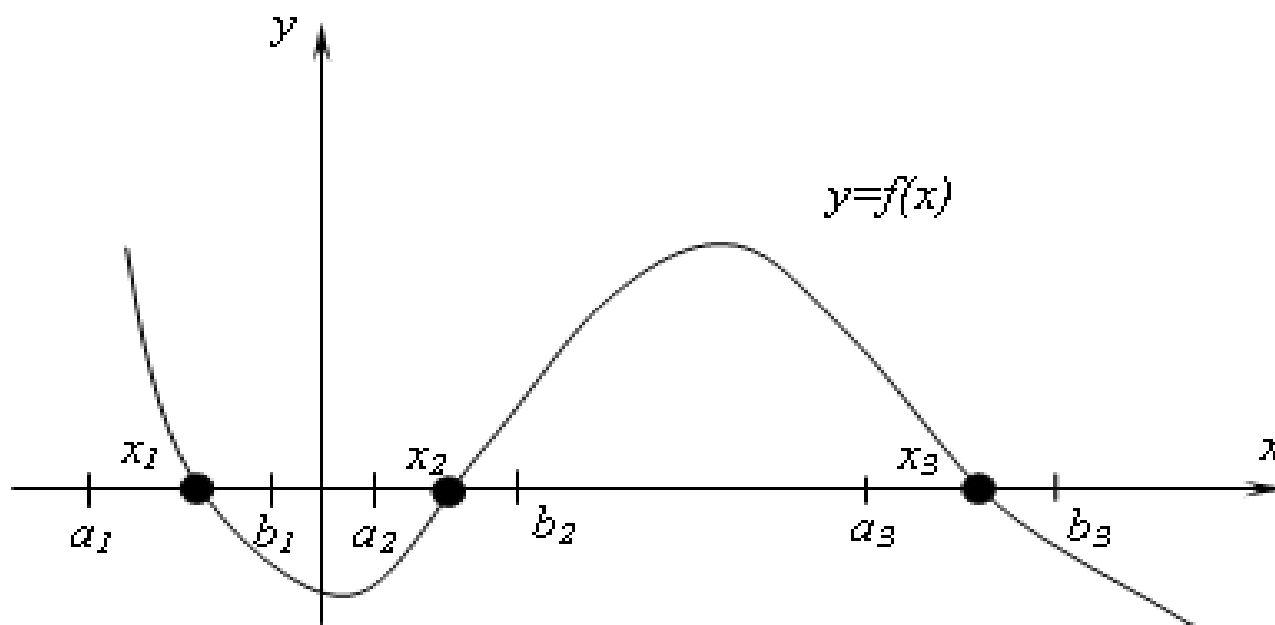
- Уточнение корней до заданной точности

Способы отделения корней

- графический
- табличный
- аналитический



Графическое отделение корней



Табличное отделение корней

Аналитический способ состоит в нахождении экстремумов функции $f(x)$, исследование ее поведения при $x \rightarrow \pm\infty$ и нахождении участков возрастания и убывания функции.

Табличный способ – это построение таблицы табулирования функции.

О наличии корней свидетельствуют перемены знака функции. Чтобы не произошла потеря корней, шаг изменения аргумента должен быть достаточно мелким, а интервал изменения достаточно широким.

x	$f(x)$
-3	-29,280
-2,5	-13,818
-2	-3,330
-1,5	2,933
-1	5,720
-0,5	5,783
0	3,870
0,5	0,733
1	-2,880
1,5	-6,218
2	-8,530
2,5	-9,068
3	-7,080
3,5	-1,818
4	7,470
4,5	21,533
5	41,120



Теоремы существования корней

- *Необходимое условие существования корня уравнения на отрезке $[a,b]$:*

Теорема 1. Если непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то на этом отрезке содержится хотя бы один корень уравнения.

- *Достаточное условие единственности корня на отрезке $[a,b]$:*

Теорема 2. Если непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет знак внутри отрезка (т.е. $f(x)$ монотонна), то внутри отрезка существует единственный корень уравнения $f(x) = 0$.



Методы уточнения приближенных значений действительных корней

- *метод половинного деления (метод дихотомии);*
- *метод хорд*
- *метод Ньютона (метод касательных) ;*
- *модифицированный метод Ньютона (метод секущих);*
- *метод простых итераций ;*
- *и др.*



Основные требования и показатели численных методов

- ✓ устойчивость;
- ✓ сходимость;
- ✓ эффективность (скорость сходимости);

Алгоритм считается устойчивым, если он обеспечивает нахождение существующего и единственного решения при различных исходных данных (малые погрешности в исходной величине приводят к малым погрешностям в результате расчетов).

Алгоритм сходится, если итерационная последовательность приближений

$$x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow x^*, n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

Скорость сходимости (эффективность) – обозначает количество итераций, затраченных алгоритмом для достижения приемлемой точности решения задачи.

Чем выше скорость, тем меньше итераций необходимо выполнить.

Различают линейную, сверхлинейную, квадратичную скорость:

$$|x^n - x^*| \leq \alpha |x^{n-1} - x^*|^\beta, \quad \alpha \in (0,1)$$

$\beta = 1$ – линейная, $1 < \beta < 2$ – сверхлинейная, $\beta = 2$ – квадратичная.



Метод половинного деления

Идея метода:

1. Начальный интервал изоляции корня делим пополам, получаем начальное приближение к корню: $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$
2. Вычисляем $f(x_0)$
3. В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0, x_0]$ либо $[b_0, x_0]$. Другую половину отрезка $[a_0, b_0]$ (на которой функция $f(x)$ знак не меняет) отбрасываем.
4. Новый интервал вновь делим пополам, получаем очередное приближение к корню: $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ и т.д.

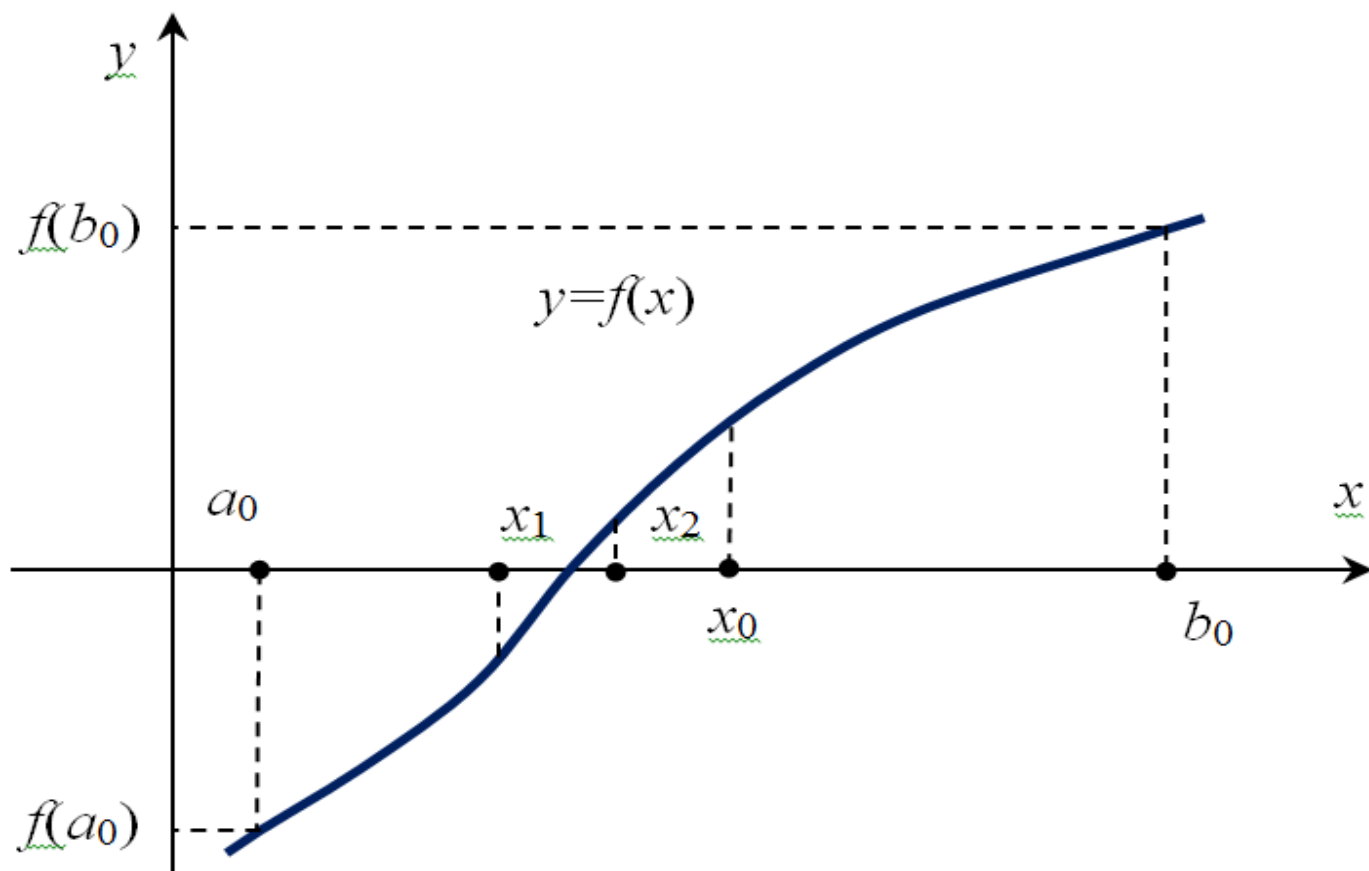
Рабочая формула метода:

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Приближенное значение корня: $x^* = \frac{a_n + b_n}{2}$ или $x^* = a_n$ или $x^* = b_n$



Визуализация метода половинного деления





Критерии окончания итерационного процесса

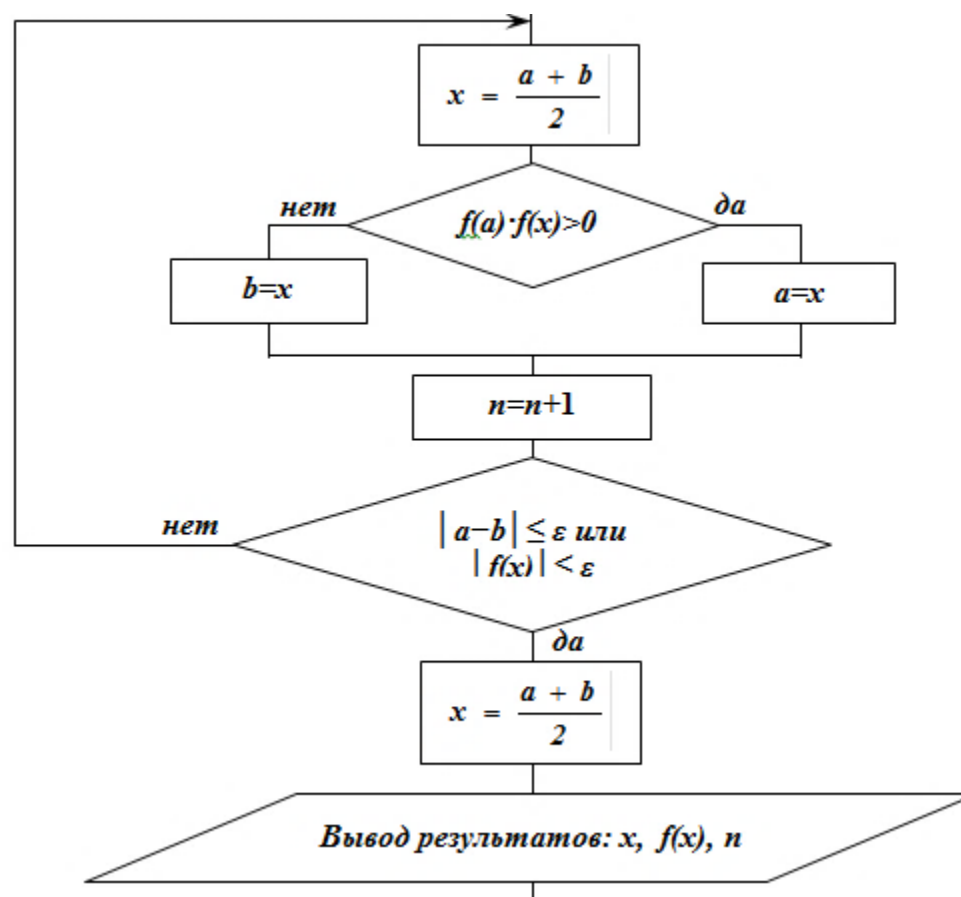
Сходимость итерационного процесса фиксируется следующими способами:

1. Сходимость по аргументу: $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$
2. Сходимость по функции: $|f(x_n)| \leq \varepsilon$

Для метода половинного деления можно рассматривать еще один критерий окончания итерационного процесса:

$$|a_n - b_n| \leq \varepsilon$$

Блок-схема метода половинного деления





Достоинства и недостатки метода ПД

Достоинства:

- идейная простота и надежность метода;
- непритязательность к свойствам функции $f(x)$ — она должна быть лишь непрерывной, а дифференцируемость не предполагается;
- обладает абсолютной сходимостью.

Рекомендация: применять когда требуется высокая надежность счета, а скорость несущественна.

Недостатки:

- если интервал содержит несколько корней, то неизвестно к какому относится вычислительный процесс;
- медленный метод: имеет линейную сходимость.



Оценка числа итераций

$$|a_1 - b_1| = \frac{|a_0 - b_0|}{2}, \quad |a_2 - b_2| = \frac{|a_1 - b_1|}{2} = \frac{|a_0 - b_0|}{2^2}$$

$$|a_k - b_k| = |a_0 - b_0| \cdot 2^{-k}$$

$$|a_0 - b_0| \cdot 2^{-k} \leq \varepsilon$$

$$k \geq \log_2 \frac{|a_0 - b_0|}{\varepsilon}$$

Итоговое число итераций: $n = \text{int}(k) + 1$

Для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$, при $|a_0 - b_0| = 1$

$$k = 9,966; \quad n = 9 + 1 = 10$$

После 10 шагов дихотомии обеспечиваются лишь **т р и** верных десятичных знака искомого корня.



Пример 1. Метод половинного деления

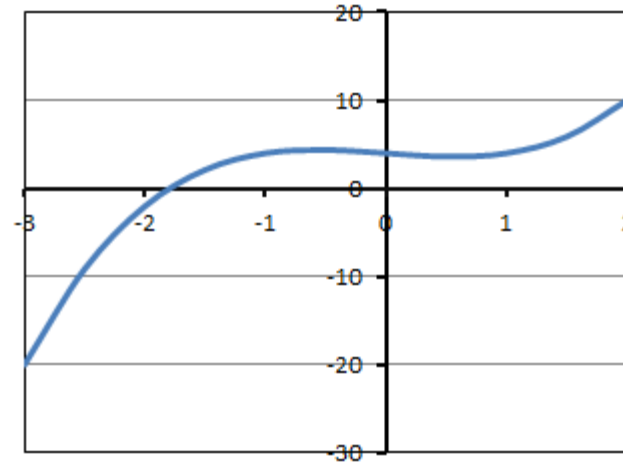
Найти корень уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0$$

с точностью $\varepsilon = 0,01$

$$n = \log_2 \frac{|a_0 - b_0|}{\varepsilon} + 1 = 7$$

$$x^* = \frac{a_7 + b_7}{2} \approx -1,79297$$



№ итерации	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	a-b
0	-2,00000	-1,00000	-1,50000	-2,00000	4,00000	2,12500	1
1	-2,00000	-1,50000	-1,75000	-2,00000	2,12500	0,39063	0,5
2	-2,00000	-1,75000	-1,87500	-2,00000	0,39063	-0,71680	0,25
3	-1,87500	-1,75000	-1,81250	-0,71680	0,39063	-0,14185	0,125
4	-1,81250	-1,75000	-1,78125	-0,14185	0,39063	0,12961	0,0625
5	-1,81250	-1,78125	-1,79688	-0,14185	0,12961	-0,00480	0,03125
6	-1,79688	-1,78125	-1,78906	-0,00480	0,12961	0,06273	0,015625
7	-1,79688	-1,78906	-1,79297	-0,00480	0,06273	0,02905	0,0078125



Метод хорд

Идея метода: функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ заменяется хордой и в качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью абсцисс.

Уравнение хорды, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

Точка пересечения хорды с осью абсцисс ($y = 0$): $x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$

Алгоритм метода:

1. Находим интервал изоляции корня $[a_0, b_0]$
2. Вычисляем x_0 : $x_0 = a_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} f(a_0)$
3. Вычисляем $f(x_0)$.
4. В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0, b_0]$ либо $[b_0, x_0]$.
5. Вычисляем x_1 и т.д (повторяем 2-4 шаги).

Рабочая формула метода:

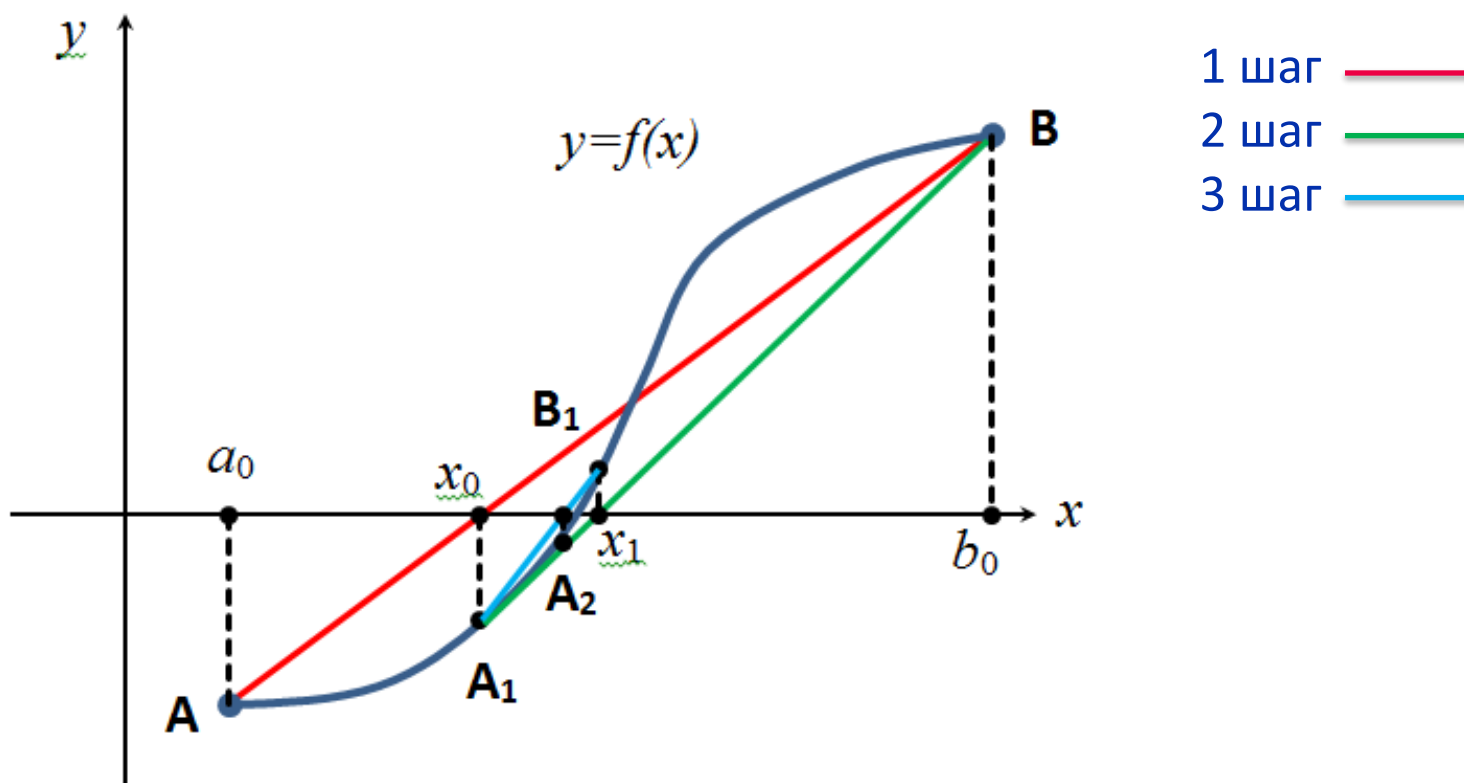
$$x_i = a_i - \frac{b_i - a_i}{f(b_i) - f(a_i)} f(a_i) \quad \text{или}$$

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

Критерии окончания итерационного процесса: $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$ или $|a_n - b_n| \leq \varepsilon$ или $|f(x_n)| \leq \varepsilon$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Визуализация метода хорд



Метод хорд

Семейство хорд может строиться:

а) при фиксированном левом конце хорд, тогда $x_0=b$ (рис. 1а)

Рабочая формула метода:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a-x_i}{f(a)-f(x_i)} f(x_i)$$

б) при фиксированном правом конце хорд, тогда $x_0=a$ (рис. 1б)

Рабочая формула метода:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{b-x_i}{f(b)-f(x_i)} f(x_i)$$

В этом случае **НЕ** надо определять на каждой итерации новые значения a, b

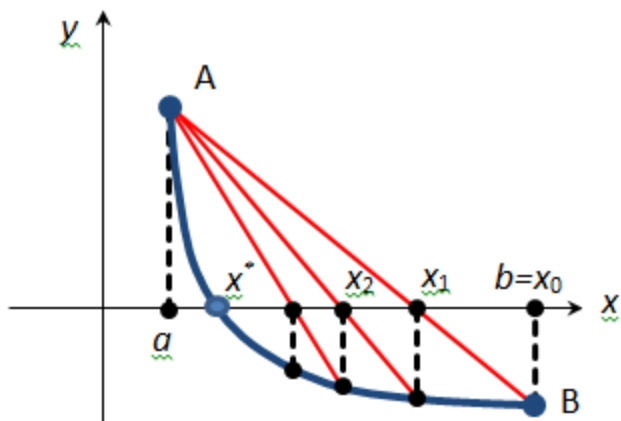


Рис. 1а

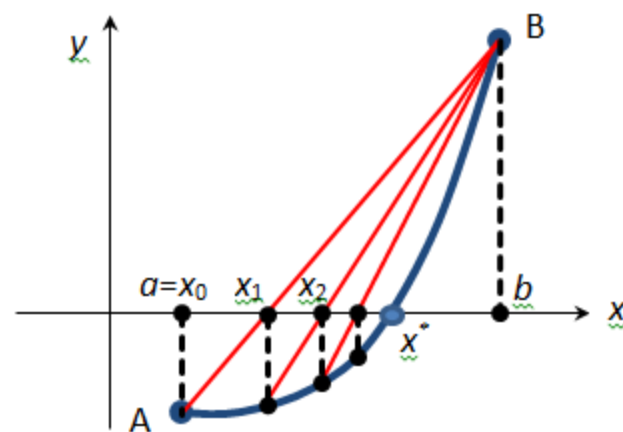


Рис. 1б



Метод хорд. Определение фиксированного конца

1 случай.

$x_0 = a$, граница b - зафиксирована

Производные имеют одинаковые знаки на отрезке $[a, b]$: $f'(x) \cdot f''(x) > 0$

$f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$, функция возрастает и выпукла вниз

$f'(x) < 0$ и $f''(x) < 0$, функция убывает и выпукла вверх

2 случай.

$x_0 = b$, граница a - зафиксирована

Производные имеют разные знаки на отрезке $[a, b]$: $f'(x) \cdot f''(x) < 0$

$f'(x) < 0$ и $f''(x) > 0$, функция убывает и выпукла вниз

$f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$, функция возрастает и выпукла вверх

Выбор формул метода хорд обуславливается правилом – неподвижным концом отрезка является тот, для которого знак функции совпадает со знаком ее второй производной:

$f(a) \cdot f''(a) > 0$ – зафиксирован конец a

$f(b) \cdot f''(b) > 0$ – зафиксирован конец b



Достоинства и недостатки метода хорд

Достоинства:

- Простота реализации

Недостатки:

- Скорость сходимости – линейная. Порядок сходимости метода хорд выше, чем у метода половинного деления.
- Выбор начального приближения.



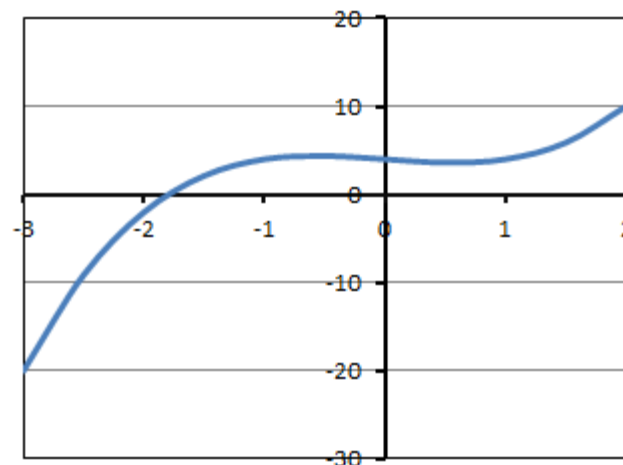
Пример 2. Метод хорд

Найти корень уравнения $x^3 - x + 4 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,01$
 $f(-2) < 0$ $f(-1) > 0$

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

$$n = 4$$

$$x^* \approx -1,79611$$



№ итерации	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	$ x_{i+1} - x_i $
1	-2,00000	-1,00000	-1.66667	-2,00000	4,00000	1.03704	0.33333
2	-2,00000	-1.66667	-1.78049	-2,00000	1.03704	0.13610	0.11382
3	-2,00000	-1.78049	-1.79447	-2,00000	0.13610	0.01603	0.01399
4	-2,00000	-1.79447	-1.79611	-2,00000	0.01603	0.00186	0.00163



Пример 3. Метод хорд. Фиксированный конец

Найти корень уравнения $x^3 - x + 4 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,01$ на интервале $[-2, -1]$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f''(x) = 6x < 0$$

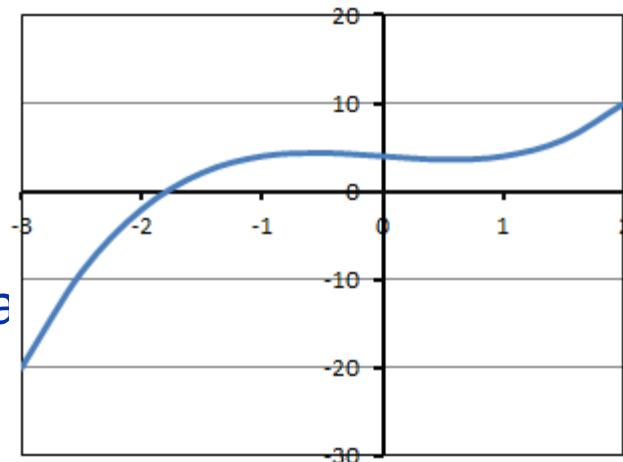
$f(a) < 0, f''(a) < 0 \rightarrow a$ - зафиксирована

$$x_0 = b = -1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a - x_i}{f(a) - f(x_i)} f(x_i)$$

$$n = 4$$

$$x^* \approx -1,79611$$



№ итерации	a	x	F(a)	F(x)	$ x_{i+1} - x_i $
1	-2,00000	-1.66667	-2,00000	1.03704	0.66667
2	-2,00000	-1.78049	-2,00000	0.13610	0.11382
3	-2,00000	-1.79447	-2,00000	0.01603	0.01399
4	-2,00000	-1.79611	-2,00000	0.00186	0.00163



Метод Ньютона (касательных)

Идея метода: функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ заменяется касательной и в качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

Пусть $x_0 \in [a, b]$ - начальное приближение. Запишем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Найдем пересечение касательной с осью x :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

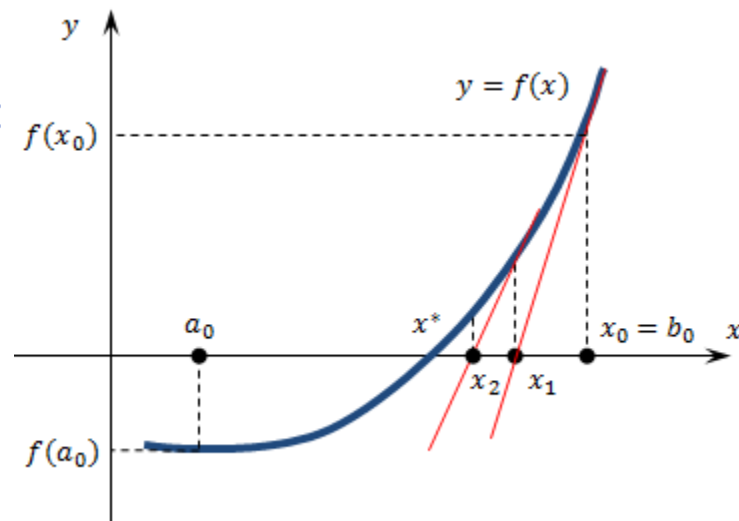
Рабочая формула метода:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad \left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_n)| \leq \varepsilon$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$





Условия сходимости метода Ньютона

Сходимость метода Ньютона зависит от того, насколько близко к корню выбрано начальное приближение. Тогда скорость сходимости велика.

Метода Ньютона эффективен, если выполняются **условия сходимости**:

- производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на отрезке $[a; b]$,
- производная $f'(x) \neq 0$.

Выбор начального приближения $x_0 \in [a; b]$:

Метод обеспечивает быструю *сходимость*, если выполняется условие:

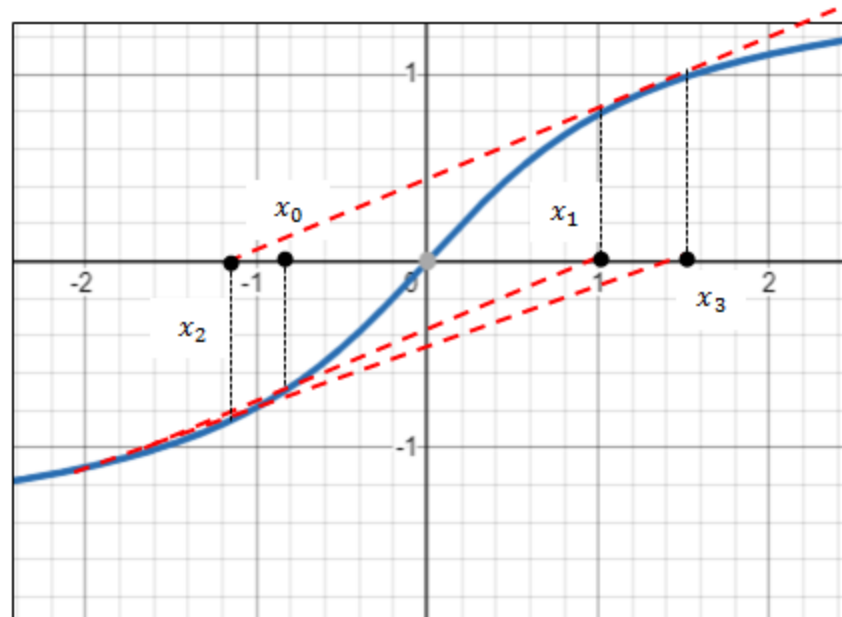
$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

(тот конец интервала, для которого знаки функции и второй производной совпадают)

$$x_0 = \begin{cases} a_0, & \text{если } f(a_0) \cdot f''(a_0) > 0 \\ b_0, & \text{если } f(b_0) \cdot f''(b_0) > 0 \end{cases}$$

Сходимость метода Ньютона

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$



$$f(x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$f(x)''$ меняет знак на интервале изоляции корня



Достоинства и недостатки метода Ньютона

Достоинства:

- квадратичная сходимость .

Недостатки:

- функции, участвующие в расчетах, должны быть дифференцируемыми;
- необходимость вычисления производной на каждой итерации;
- выбор начального приближения.



Пример 4. Метод Ньютона

Найти корень уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0$$

с точностью $\varepsilon = 0,01$

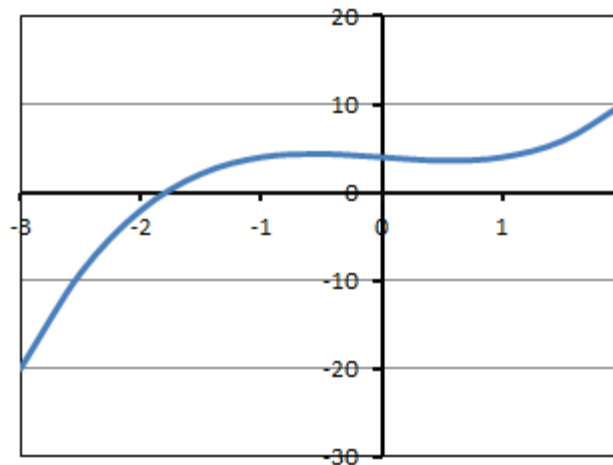
$$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f''(x) = 6x$$

Сохраняют знак на $[-2, -1]$

$$f(-2) < 0 \quad f(-1) > 0$$

$$f''(-2) < 0 \rightarrow x_0 = -2$$

$$n = 3 \quad x^* \approx -1,79632$$



№ итерации	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i $
0	-2,00000	-2,00000	11.00000	-1.81818	0.18182
1	-1.81818	-0.19234	8.91736	-1.79661	0.02157
2	-1.79661	-0.00253	8.68345	-1.79632	0.00029

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad |f(x_n)| \leq \varepsilon$$



Метод секущих

Упростим метод Ньютона, заменив $f'(x)$ разностным приближением:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Рабочая формула метода:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots$$

Метод секущих является двухшаговым, т.е. новое приближение x_{i+1} определяется двумя предыдущими итерациями x_i и x_{i-1} .

Выбор x_0 определяется как и в методе Ньютона,

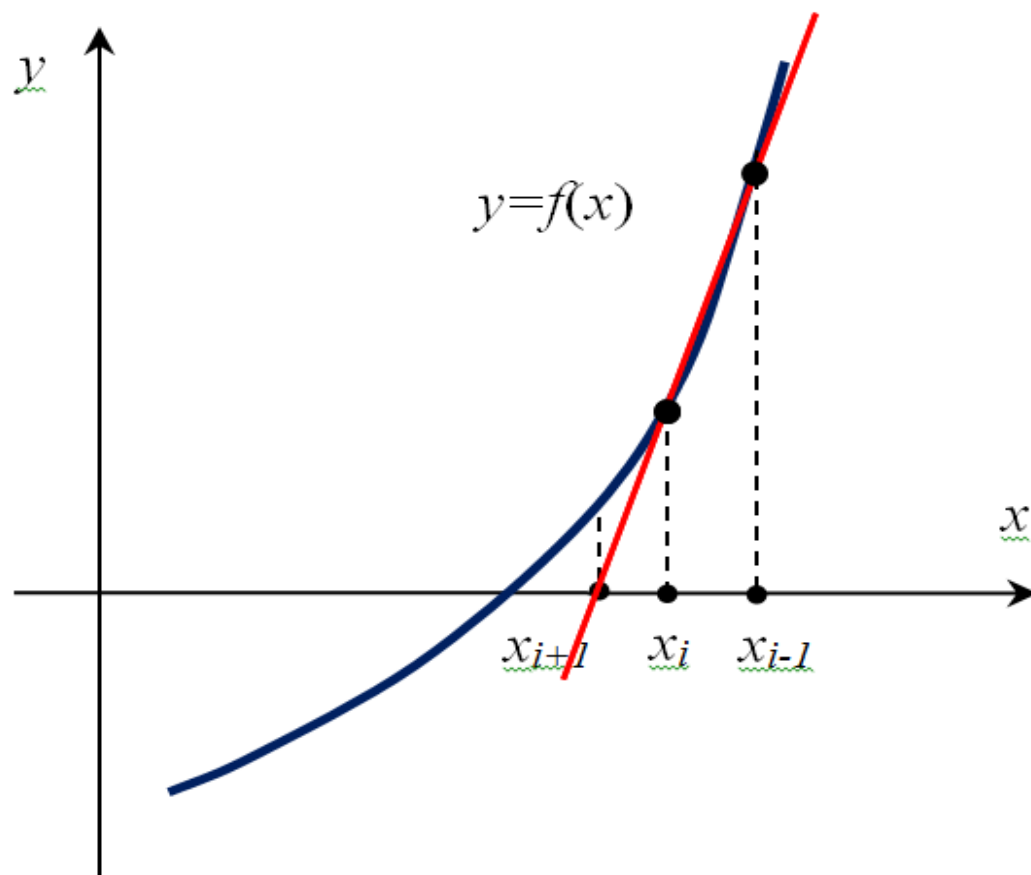
x_1 - выбирается рядом с начальным самостоятельно, например: $x_1 = x_0 + \varepsilon$

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_n)| \leq \varepsilon$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Визуализация метода секущих





Достоинства и недостатки метода секущих

Достоинства:

Меньший объем вычислений по сравнению с методом Ньютона, т.к. не требуется вычислять производную.

Недостатки:

Порядок сходимости метода секущих ниже, чем у метода касательных и равен золотому сечению $\approx 1,618$ (сверхлинейная).



Пример 5. Метод секущих

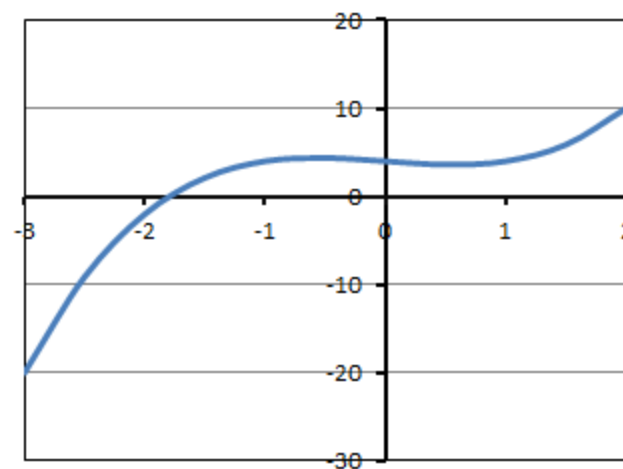
Найти корень уравнения $x^3 - x + 4 = 0$

с точностью $\varepsilon = 0,01$

$x_0 = -2$ $x_1 = -1,5$

$n = 3$ $x^* \approx 1,79612$

(метод Ньютона: $n = 3$ $x^* \approx -1,79632$)



№ итерации	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$ x_{i+1} - x_i $
0	-2,00000	-1.50000	-1.75758	2.12500	0.25758
1	-1.50000	-1.75758	-1.80464	0.32830	0.04706
2	-1.75758	-1.80464	-1.79612	-0.07258	0.00852

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \quad |f(x_n)| > \varepsilon \rightarrow n = 4$$

Метод простой итерации

Уравнение $f(x) = 0$ приведем к эквивалентному виду: $x = \varphi(x)$, выразив x из исходного уравнения.

Зная начальное приближение: $x_0 \in [a, b]$, найдем очередные приближения:

$$x_1 = \varphi(x_0) \rightarrow x_2 = \varphi(x_1) \dots$$

Рабочая формула метода: $x_{i+1} = \varphi(x_i)$

Условия сходимости метода простой итерации определяются следующей теоремой.

Теорема. Если на отрезке локализации $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема и удовлетворяет неравенству:

$|\varphi'(x)| < q$, где $0 \leq q < 1$, то независимо от выбора начального приближения $x_0 \in [a, b]$ итерационная последовательность $\{x_n\}$ метода будет сходиться к корню уравнения.

Достаточное условие сходимости метода:

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \text{ где } q - \text{некоторая константа (коэффициент Липшица или коэффициент сжатия)}$$
$$q = \max_{[a,b]} |\varphi'(x)|$$

При $q \approx 0$ - скорость сходимости высокая,

При $q \approx 1$ - скорость сходимости низкая,

При $q \gg 1$ - нет сходимости.

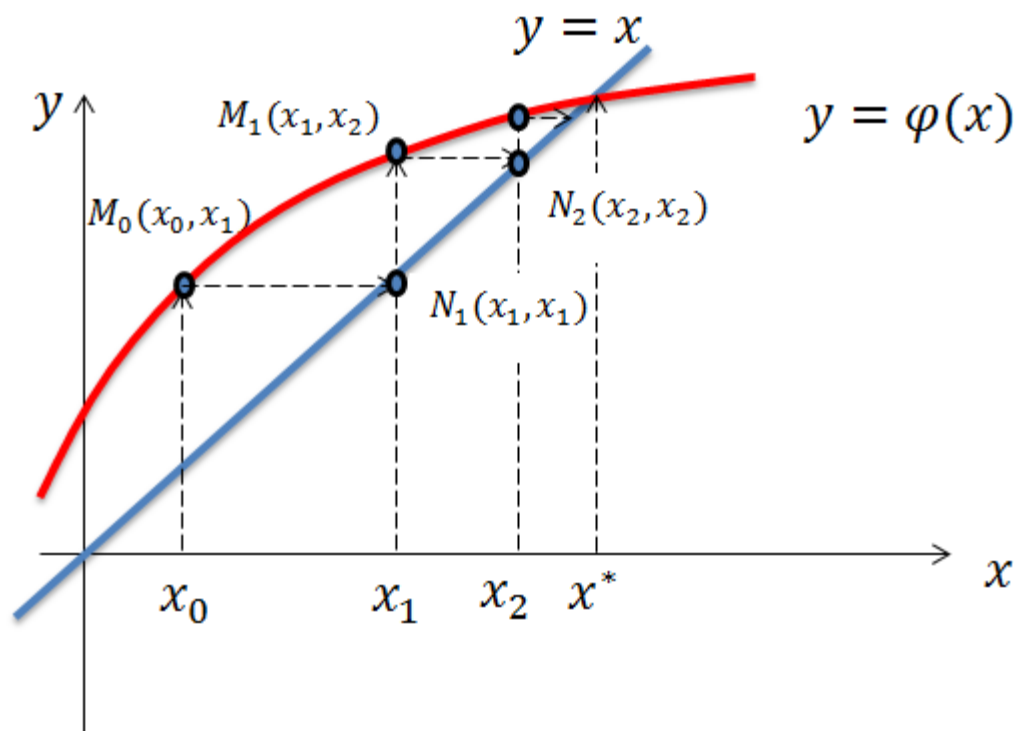
Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \text{ (при } 0 < q \leq 0,5)$$

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q} \varepsilon \text{ (при } 0,5 < q < 1)$$

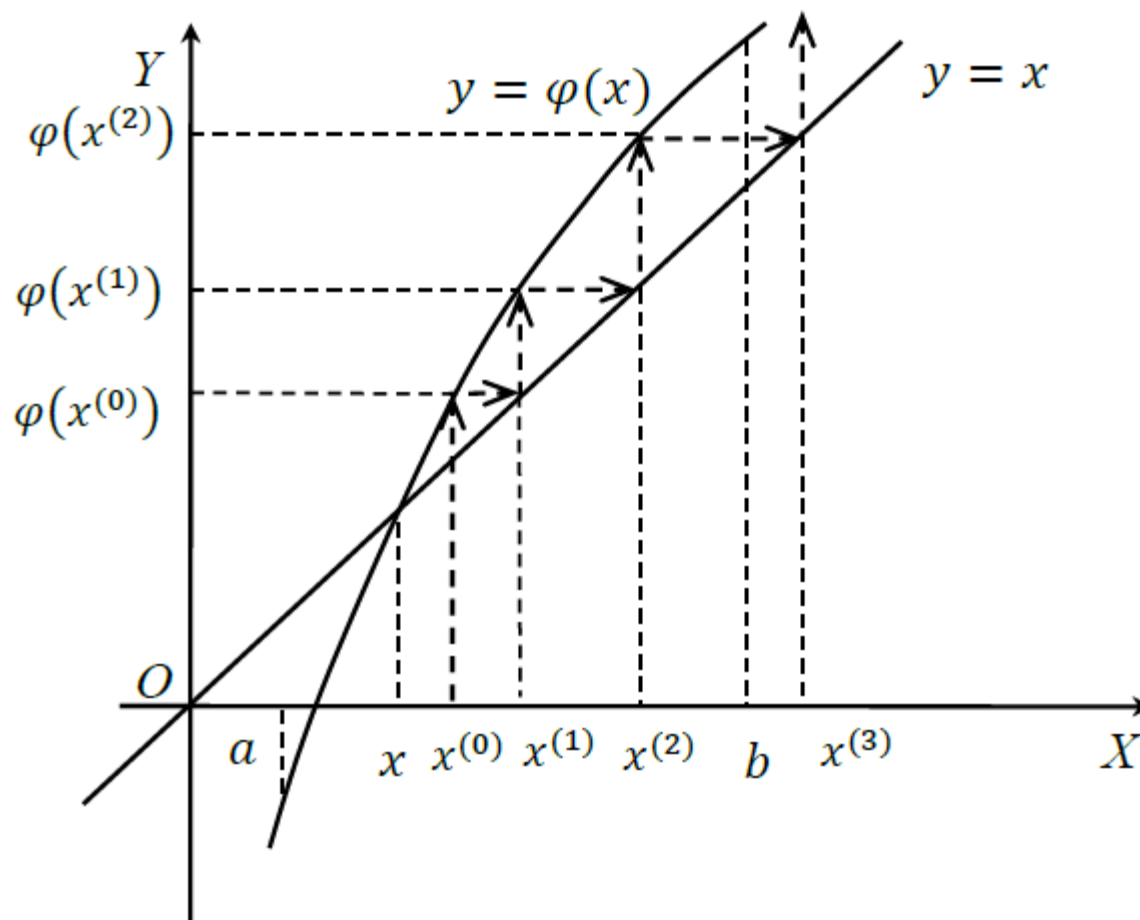
Можно ограничиться: $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$

Геометрический смысл метода простой итерации



При итерационном процессе получается ломаная линия $M_0N_1M_1N_2M_2\dots$, где абсциссы M_n - последовательные приближения x_n к решению x^* . Последовательность итераций на рисунке сходится к точному значению корня: предел последовательности $\{x^k\}$ существует и совпадает с корнем.

Геометрический смысл метода простой итерации



Последовательность $\{x^k\}$ может расходиться.
 Это не значит, что уравнение не имеет корня.
 Просто, последовательность к нему не сходится.



Достоинства и недостатки метода простой итерации

Достоинства:

Простота реализации

Недостатки:

1. Сходимость в малой окрестности корня и вытекающая отсюда необходимость выбора начального приближения к корню из этой малой окрестности. В противном случае итерационный процесс расходится или сходится к другому корню этого уравнения.

Если $|\varphi'(x)| \approx 1$, то сходимость может быть очень медленной.

2. Преобразование исходного уравнения к виду: $x = \varphi(x)$

Метод простой итерации

Способы преобразования уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0$$

1 способ:

Преобразуем уравнение к виду $x = \varphi(x)$

$$\varphi(x) = x^3 + 4 = 0$$

$$a_0 = -2 \quad b_0 = -1$$

$$\varphi'(x) = 3x^2$$

$$\varphi'(-2) = 12 > 1$$

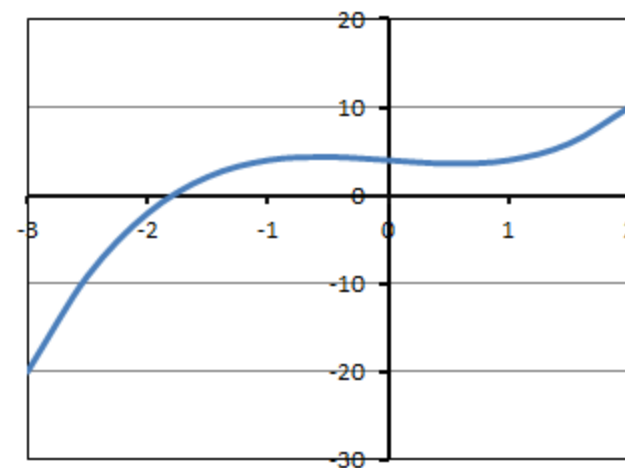
$$\varphi'(-1) = 3 > 1 \quad \text{Условие сходимости НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ}$$

2 способ:

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{x - 4}$$

$$\varphi'(x) = 1/3(x - 4)^{-2/3} \quad |\varphi'(-2)| < 1 \quad |\varphi'(-1)| < 1$$

Условие сходимости ВЫПОЛНЯЕТСЯ





Метод простой итерации

Способы преобразования уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0$$

3 способ (наиболее используемый):

Если непосредственное преобразование уравнения к виду $x = \varphi(x)$ не позволяет получить уравнение, для которого выполняются условия сходимости метода,

применяем более общий прием введения параметра λ

1. преобразуем уравнение $f(x) = 0$ к равносильному (при $\lambda \neq 0$) $\lambda f(x) = 0$

2. прибавим x в обеих частях: $x = x + \lambda f(x)$

3. $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$, $\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x)$

4. высокая скорость сходимости обеспечивается при $q = \max_{[a,b]} |\varphi'(x)| \approx 0$. Тогда $\lambda = \frac{1}{\max_{[a,b]} |f'(x)|}$

$$\lambda = -\frac{1}{\max |f'(x)|}, \text{ если } f'[a, b] > 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\max |f'(x)|}, \text{ если } f'[a, b] < 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f'(-2) = 11 \quad f'(-1) = 2 \quad \lambda = -\frac{1}{\max_{[a,b]} |f'(x)|} = -\frac{1}{11}$$

$$x = x + \lambda f(x) \rightarrow x = x + \lambda(x^3 - x + 4) = x - \frac{1}{11}(x^3 - x + 4) \quad \varphi(x) = x - \frac{1}{11}(x^3 - x + 4)$$



Метод простой итерации

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{11}(x^3 - x + 4) \quad a, b = [-2, -1]$$

Проверка на сходимость: $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{11}(3x^2 - 1)$

$$\varphi'(a) = 0, \varphi'(b) = 0,818$$

Выбор начального приближения:

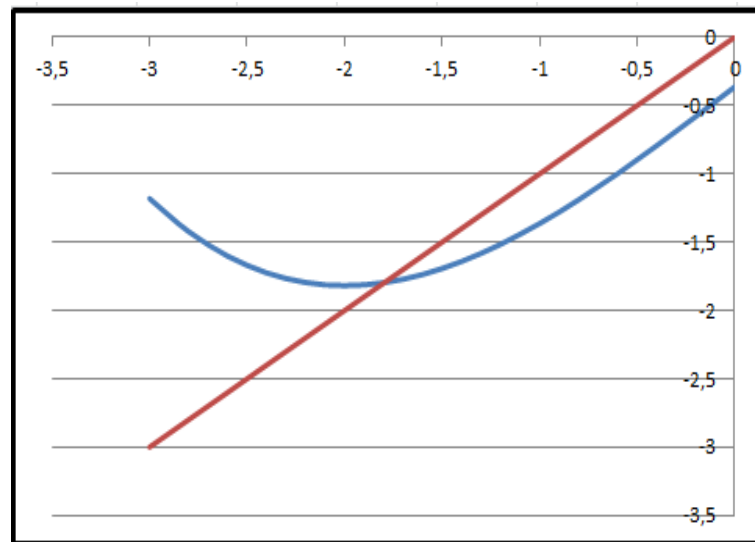
$$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f''(x) = 6x$$

$$f(-2) < 0 \quad f(-1) > 0$$

$$f''(-2) < 0 \rightarrow x_0 = -2$$

$$x_1 = \varphi(x_0) = -2 - \frac{1}{11}(-2^3 + 2 + 4) \approx -1.8182$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = -1.8182 - \frac{1}{11}(-1.8182^3 + 1.8182 + 4) \approx -1.8007$$



№ итерации	x_i	x_{i+1}	$\varphi(x_{i+1})$	$f(x_{i+1})$	$ x_{i+1} - x_i $
0	-2,0000	-1.8182	-1.8007	-0.19234	0.1818
1	-1.8182	-1.8007	-1.7972	-0.03808	0.0175
2	-1.8007	-1.7972	-1.7965	-0.00793	0.0035

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть для вычисления неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n требуется решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

В отличие от систем линейных уравнений не существует прямых методов решения нелинейных систем общего вида.

Лишь в отдельных случаях систему можно решить непосредственно. Например, для случая двух уравнений иногда удастся выразить одно неизвестное через другое и таким образом свести задачу к решению одного уравнения относительно одного неизвестного.

Для системы с двумя неизвестными можно использовать геометрические построения, но для системы с $n > 2$ неизвестными такой подход становится неприменимым.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

К основе метода лежит использование разложения функций $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторой фиксированной точки, причем члены, содержащие вторые (и более высоких порядков) производные, отбрасываются.

Пусть начальные приближения неизвестных системы (1) получены и равны соответственно a_1, a_2, \dots, a_n . Задача состоит в нахождении приращений (поправок) к этим значениям $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, благодаря которым решение системы запишется в виде

$$x_1 = a_1 + \Delta x_1, x_2 = a_2 + \Delta x_2, \dots, x_n = a_n + \Delta x_n \quad (2)$$

Проведем разложение левых частей уравнений (1) с учетом (2) в ряд Тейлора, ограничиваясь лишь линейными членами относительно приращений:

[illegible]

Поскольку в соответствии с (1) левые части этих выражений должны обращаться в нуль, то приравняем к нулю и правые части. Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений:

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Итерационный процесс решения систем нелинейных уравнений методом Ньютона состоит в определении приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ к значениям неизвестных на каждой итерации.

Критерий окончания итерационного процесса: $\max |\Delta x_i| \leq \varepsilon$.

В методе Ньютона:

1. Важен удачный выбор начального приближения для обеспечения хорошей сходимости.
2. Сходимость ухудшается с увеличением числа уравнений системы.



РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Пусть задано начальное приближение $\{x_0, y_0\}$ (его можно определить графическим методом). Тогда, очередное приближение:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0 \\ g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0 \end{cases}$$

Разложим функцию в окрестности некоторой фиксированной точки по формуле Тейлора:

$$\begin{cases} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + R = 0 \\ g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + R = 0 \end{cases}$$



РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Пренебрегая остаточным членом, получаем:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y = -f(x_0, y_0) \right) \\ \left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y = -g(x_0, y_0) \right) \end{cases}$$

Введем матрицу Якоби:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Тогда, вместо системы нелинейных уравнений будем решать систему линейных уравнений относительно $\Delta x, \Delta y$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$



РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

А далее вычислять на каждой итерации:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \text{ и } y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

где x_i, y_i - текущее приближение к корню,

x_{i+1}, y_{i+1} - последующее приближение,

$\Delta x_i, \Delta y_i$ – приращения к очередным приближениям.

Процесс вычисления заканчивается при выполнении следующих условий:

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon, \quad |y_{i+1} - y_i| \leq \varepsilon$$



РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Пример:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 3x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ -3x^2 + y = 0 \end{cases}$$

Отметим, что решение системы уравнений являются точки пересечения окружности радиусом, равным 2, и параболы $y = 3x^2$. Следовательно, система имеет не более двух различных решений.

Построим матрицу Якоби:

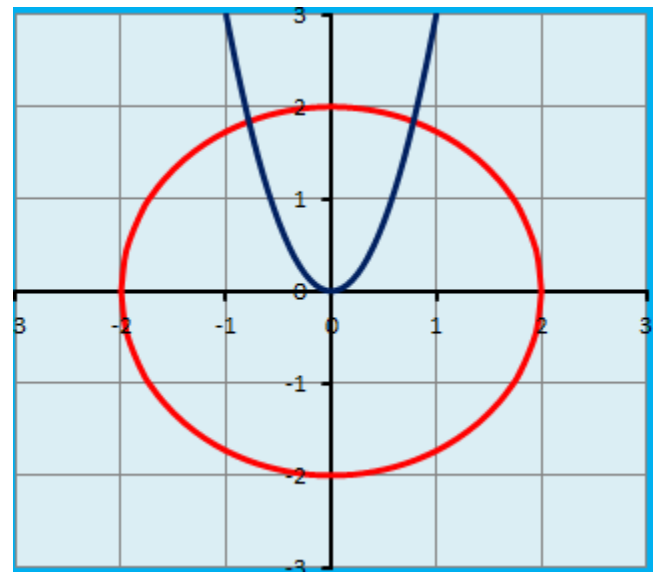
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -6x \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

Тогда будем решать следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -6x & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x^2 - y^2 \\ 3x^2 - y \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} 2x\Delta x + 2y\Delta y = 4 - x^2 - y^2 \\ -6x\Delta x + \Delta y = 3x^2 - y \end{cases} \quad (4)$$





РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ:

Шаг 1. Выбираем $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

$$\begin{cases} 2x\Delta x + 2y\Delta y = 4 - x^2 - y^2 \\ -6x\Delta x + \Delta y = 3x^2 - y \end{cases}$$

На первой итерации система будет иметь вид:

$$\begin{cases} 2\Delta x + 4\Delta y = -1 \\ -6\Delta x + \Delta y = 1 \end{cases}$$

Шаг 2. Решаем полученную систему.

Получаем $\Delta x = -0,192$ и $\Delta y = -0,154$.

Шаг 3. Вычисляем очередные приближения:

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 1 - 0,192 = 0,808$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y = 2 - 0,154 = 1,846.$$

Шаг 4. Проверяем критерий окончания итерационного процесса при $\varepsilon = 0,01$:

$$|x_1 - x_0| \leq \varepsilon, \quad |y_1 - y_0| \leq \varepsilon$$

$$|0,808 - 1| > \varepsilon, \quad |1,846 - 2| > \varepsilon$$

Шаг 5. Если ответ не найден, возврат на шаг 2, подставив очередные приближения в систему:

$$\begin{cases} 1,616\Delta x + 3,692\Delta y = -0,06058 \\ -4,848\Delta x + \Delta y = 0,11259 \end{cases}$$

И т.д.



РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

Приведем систему уравнений к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Или, в векторной форме: $X = \varphi(X)$ $\varphi(X) = \begin{pmatrix} \varphi_1(X) \\ \varphi_2(X) \\ \dots \dots \\ \varphi_n(X) \end{pmatrix}$

Если выбрано начальное приближение: $X^{(0)} = x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$,
получим первые приближения к корням:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \varphi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n^{(1)} = \varphi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

Последующие приближения находятся по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Сходятся ли эти последовательности?

Пусть задача отделения корней уже решена и определена достаточно малая область изоляции G , в которой находится подлежащий уточнению корень.

Пусть в этой окрестности функции $\varphi_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ дифференцируемы:

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

**РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.**

Достаточное условие сходимости итерационного процесса:

$$\max_{[x \in G]} |\varphi'(x)| \leq q < 1 \text{ или } \max_{[x \in G]} \max_{[i]} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j} \right| \leq q < 1$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \right| &< 1 \\ \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \right| &< 1 \\ &\dots \dots \dots \\ \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \right| &< 1 \end{aligned}$$

Если $X^{(0)}$ и все последовательные приближения: $X^{(k+1)} = \varphi(X^k)$, $k = 0, 1, 2 \dots$ принадлежат ограниченной замкнутой области G , тогда итерационный процесс сходится к единственному решению уравнения $X = \varphi(X)$

Критерий окончания итерационного процесса:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^k \right| \leq \varepsilon$$



РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

Пример: найти положительное решение системы нелинейных уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0,1x_1^2 + x_1 + 0,2x_2^2 - 0,3 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0,2x_1^2 + x_2 + 0,1x_1x_2 - 0,7 = 0 \end{cases}$$

Определяем, что положительное решение системы уравнений находится в квадрате:

$$0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,3 - 0,1x_1^2 - 0,2x_2^2 \\ x_2 = 0,7 - 0,2x_1^2 - 0,1x_1x_2 \end{cases}$$

Проверим условие сходимости. В области G имеем:

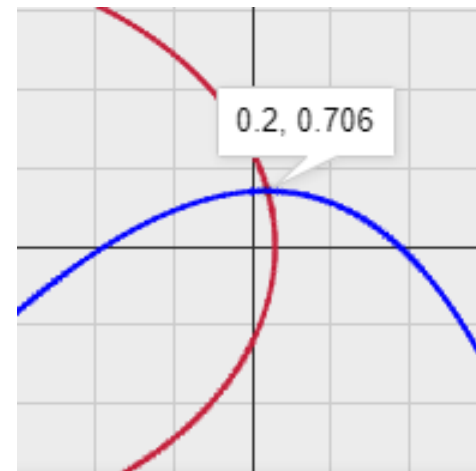
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = -0,2x_1 \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = -0,4x_2$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = -0,4x_1 - 0,1x_2 \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = -0,1x_1$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right| = |-0,2x_1| + |-0,4x_2| \leq 0,6$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right| = |-0,4x_1 - 0,1x_2| + |-0,1x_1| \leq 0,6$$

$$\max_{x \in G} |\varphi'(x)| \leq 0,6 < 1 \rightarrow \text{Процесс сходящийся}$$





РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

$$\begin{cases} x_1 = 0,3 - 0,1x_1^2 - 0,2x_2^2 \\ x_2 = 0,7 - 0,2x_1^2 - 0,1x_1x_2 \end{cases}$$

Выберем начальное приближение: $x_1^{(0)} = 1$ $x_2^{(0)} = 1$

1 шаг.

$$x_1^{(1)} = 0,3 - 0,1 - 0,2 = 0$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 1 > \varepsilon$$

$$x_2^{(1)} = 0,7 - 0,2 - 0,1 = 0,4$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0,6 > \varepsilon$$

2 шаг.

$$x_1^{(2)} = 0,3 - 0 - 0,2 \cdot 0,4^2 = 0,268$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0,268 > \varepsilon$$

$$x_2^{(2)} = 0,7 - 0 - 0 = 0,7$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0,3 > \varepsilon$$

3 шаг.

$$x_1^{(3)} = 0,3 - 0,1 \cdot 0,268^2 - 0,2 \cdot 0,7^2 = 0,195$$

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0,073 > \varepsilon$$

$$x_2^{(3)} = 0,7 - 0,2 \cdot 0,268^2 - 0,1 \cdot 0,268 \cdot 0,7 = 0,667$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0,033 > \varepsilon$$

4 шаг.

$$x_1^{(4)} = 0,3 - 0,1 \cdot 0,195^2 - 0,2 \cdot 0,667^2 = 0,207$$

$$|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| = 0,012 > \varepsilon$$

$$x_2^{(4)} = 0,7 - 0,2 \cdot 0,195^2 - 0,1 \cdot 0,195 \cdot 0,667 = 0,679$$

$$|x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| = 0,002 > \varepsilon$$

И т.д.