

## Общие сведения

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции  $y = y(x)$ . Их можно записать в виде:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где  $x$  – независимая переменная.

Наивысший порядок  $n$  входящей в уравнение (1) производной называется порядком дифференциального уравнения.

Уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

и второго порядка:  $F(x, y, y', y'') = 0$

Решением дифференциального уравнения (1) называется всякая  $n$  раз дифференцируемая функция  $y = \varphi(x)$ , которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (1) содержит  $n$ -произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ :

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (3)$$

и является решением уравнения (1) при любых значениях  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , а любое решение уравнения (1) можно представить в виде (3) при некоторых  $C_1, C_2, \dots, C_n$

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

Для уравнения первого порядка общее решение зависит от одной произвольной постоянной:

$$y = \varphi(x, C) \quad (4)$$

Если постоянная принимает определенное значение  $C = C_0$ , то получается частное решение:

$$y = \varphi(x, C_0)$$

Дадим геометрическую интерпретацию дифференциального уравнения первого порядка (2). Поскольку производная  $y'$  характеризует наклон касательной к графику решения  $y = y(x)$  (интегральной кривой) в данной точке, то при  $y' = k = \text{const}$  из (2) получим  $f(x, y) = k$  – уравнение линии постоянного наклона, называемой изоклиной. Меняя  $k$ , получаем семейство изоклин.

Приведем геометрическую интерпретацию общего решения (4). Это решение описывает бесконечное семейство интегральных кривых с параметром  $C$ , а частному решению соответствует одна кривая из этого семейства. При некоторых дополнительных предположениях через каждую точку  $(x_0, y_0)$  проходит одна и только одна интегральная кривая. Это утверждение следует из следующей теоремы:

**Теорема Коши.** Если правая часть  $f(x, y)$  уравнения (2) и ее частная производная  $f'_y(x, y)$  определены и непрерывны в некоторой области  $G$  изменения переменных  $x, y$ , то для всякой внутренней точки  $(x_0, y_0)$  этой области данное уравнение имеет единственное решение, принимающее заданное значение  $y = y_0$  при  $x = x_0$ .

Для уравнений высших порядков геометрическая интерпретация более сложная. Через каждую точку в области решения уравнения при  $n > 1$  проходит не одна интегральная кривая. Поэтому, если для выделения некоторого частного решения уравнения перво-

го порядка достаточно задать координаты  $(x_0, y_0)$  произвольной точки на данной интегральной кривой, то для уравнений высших порядков этого недостаточно. Здесь правило следующее: для выделения частного решения из общего нужно задавать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных в общем решении, т. е. каков порядок уравнения. Следовательно, для уравнения второго порядка нужно задать два дополнительных условия, благодаря которым можно найти значения двух произвольных постоянных.

В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения существуют два различных типа задач: задача Коши и краевая задача. В качестве дополнительных условий могут задаваться значения искомой функции и ее производных при некоторых значениях независимой переменной, т. е. в некоторых точках.

Если эти условия задаются в одной точке, то такая задача называется **задачей Коши**. Дополнительные условия в задаче Коши называются начальными условиями, а точка  $x = x_0$ , в которой они задаются – начальной точкой.

Для уравнения первого порядка дополнительное условие одно, поэтому в этом случае может быть сформулирована только задача Коши: для заданных  $x_0, y_0$  найти такое решение  $y = y(x)$  уравнения (2), что  $y(x_0) = y_0$ . Таким образом, теорема Коши дает достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.

Если же для уравнения порядка  $n > 1$  дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т. е. при разных значениях независимой переменной, то такая задача называется краевой. Сами дополнительные условия называются при этом граничными (или краевыми) условиями. На практике обычно граничные условия задаются в двух точках  $x = a$  и  $x = b$ , являющихся границами отрезка, на котором рассматривается дифференциальное уравнение.

Наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений является *метод конечных разностей*. Его сущность состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами. Эти узлы составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется *сеточной*. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. При этом для входящих в уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные соотношения. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его аппроксимацией на сетке (или разностной аппроксимацией). Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

Решением дифференциального уравнения I порядка  $y' = f(x, y)$ , разрешенного относительно производной, называется функция  $y = \varphi(x)$ , которая при подстановки в уравнение обращает его в тождество:  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ .

**Задача Коши:** требуется найти функцию  $Y = Y(x)$ , удовлетворяющую уравнению:

$$Y' = f(x, Y) \quad (5)$$

и принимающую при  $x = x_0$  заданное значение  $Y_0$ :

$$Y(x_0) = Y_0 \quad (6)$$

**Теорема** (о существовании и единственности решения задачи Коши).

Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в некоторой замкнутой области  $\bar{D} = \{(x, y): 0 \leq |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ . Тогда на некотором отрезке  $|x - x_0| \leq d$  существует решение уравнения  $y' = f(x, y)$ , удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ .

Если в области  $\bar{D}$  функция  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|, k = \text{const} > 0$$

Тогда решение задачи Коши существует и единственно.

Геометрический смысл задачи Коши: найти такую интегральную кривую, которая проходит через заданную начальную точку  $M_0(x_0, y_0)$ . Аналитическое решение задачи Коши (или решение в квадратурах) заключается в получении частного решения путем выполнения конечного числа операций дифференцирования, интегрирования и арифметических действий. Круг задач, решаемых в квадратурах, крайне узок, поэтому актуальна задача приближенного, численного интегрирования ДУ. Решить задачу Коши численно — значит для заданной последовательности значений аргумента (узлов)  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и числа  $y_0$  (значение искомой функции в начальном узле  $x_0$ ), приближенно вычислить значения  $y_0, y_1, \dots, y_n$  этого решения в остальных узлах. Численное решение задачи Коши позволяет вместо отыскания точного решения  $y = \varphi(x)$  в виде формулы, получить таблицу значений этой функции (сеточной функции):

$x_i$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$\varphi(x_i)$	$y_0 = \varphi(x_0)$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$

## Метод Эйлера

Метод Эйлера (1707–1783) основан на разложении искомой функции  $y(x)$  в ряд Тейлора в окрестностях узлов  $x = x_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ), в котором отбрасываются все члены, содержащие производные второго и более высоких порядков:

$$Y(x_i + h) = Y(x_i) + Y'(x_i) \cdot h + O(h^2)$$

Полагаем:  $Y'(x_i) = f(x_i, Y(x_i)) = f(x_i, y_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$

Введем последовательность равноотстоящих точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (узлов), выбрав малый шаг  $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$ . Тогда получаем **формулу Эйлера**:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (7)$$

При  $i=0$  находим значение сеточной функции  $y_1$  при  $x = x_1$ :

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Значение  $y_0$  задано начальным условием:

$$y_0 = Y_0 \quad (8)$$

Аналогично могут быть найдены значения сеточной функции в других узлах:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Построенный алгоритм называется методом Эйлера. Разностная схема этого метода представлена соотношениями (7), (8). Они имеют вид рекуррентных формул, с помощью которых значение сеточной функции  $y_{i+1}$  в любом узле  $x_{i+1}$  вычисляется по ее значению  $y_i$  в предыдущем узле  $x_i$ . Поэтому метод Эйлера относится к *одношаговым* методам.

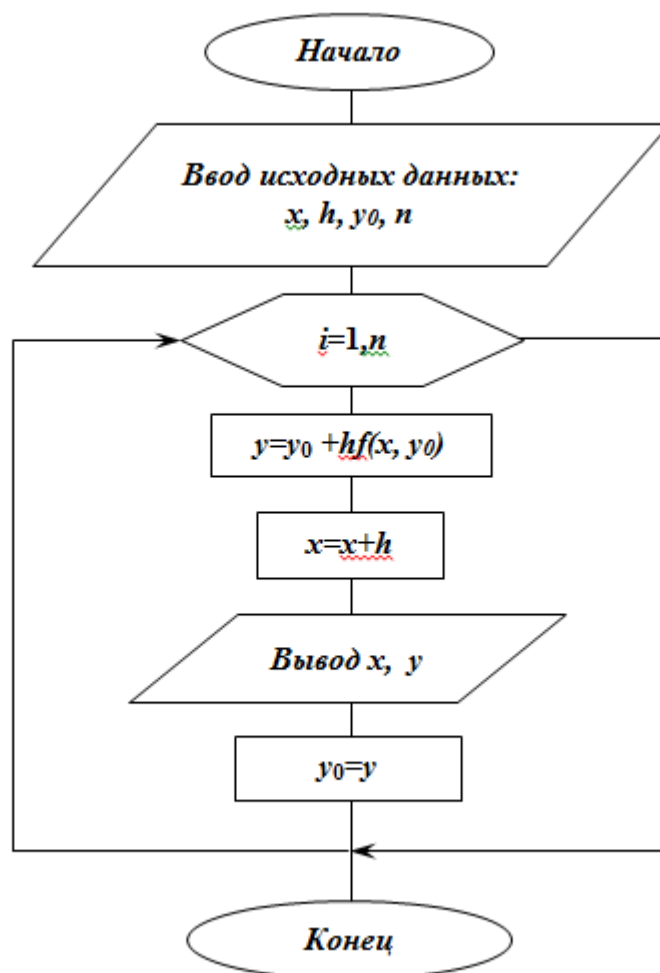


Рис.1 Блок-схема метода Эйлера

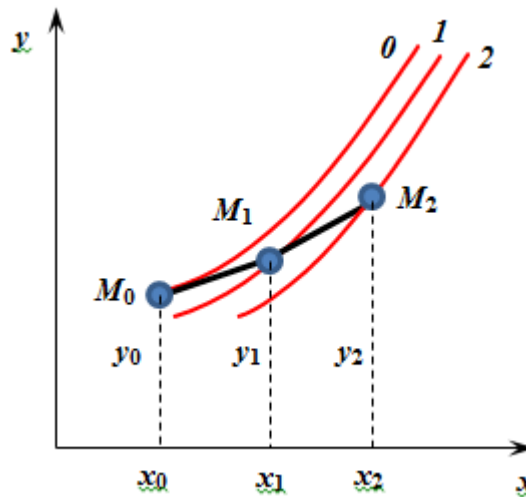


Рис. 2. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

На рис.2 изображены первые два шага, т. е. проиллюстрировано вычисление сеточной функции в точках  $x_1, x_2$ . Интегральные кривые 0,1,2 описывают точные решения уравнения (5). При этом кривая 0 соответствует точному решению задачи Коши (5), (6), так как она проходит через начальную точку  $M_0(x_0, y_0)$ . Точки  $M_1, M_2$  получены в результате численного решения задачи Коши методом Эйлера. Их отклонения от кривой 0 характеризуют погрешность метода. При выполнении каждого шага мы фактически попадаем на другую интегральную кривую. Отрезок  $M_0M_1$  – отрезок касательной к кривой 0 в точке  $M_0$ , ее наклон характеризуется значением производной  $Y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ . Погрешность появляется потому, что приращение значения функции при переходе от  $x_0$  к  $x_1$  заменяется приращением ординаты касательной к кривой 0 в точке  $M_0$ .

Касательная  $M_1M_2$  уже проводится к другой интегральной кривой 1. Таким образом, погрешность метода Эйлера приводит к тому, что на каждом шаге приближенное решение переходит на другую интегральную кривую.

Метод Эйлера имеет **первый порядок точности**  $\delta_n = O(h)$

### Модификации метода Эйлера.

Рассмотрим уравнение (2) в окрестностях узлов  $x = x_i + h/2$  ( $i=0, 1, \dots$ ), являющихся серединами отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$ . В левой части (2) заменим производную центральной разностью, а в правой части заменим значение функции  $f(x_i + h/2, Y(x_i + h/2))$  средним арифметическим значений функции  $f(x, Y)$  в точках  $(x_i, y_i)$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Тогда:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})].$$

Отсюда:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \quad (9)$$

Полученная схема является неявной, поскольку искомое значение  $y_{i+1}$  входит в обе части соотношения (9) и его нельзя выразить явно. Для вычисления  $y_{i+1}$  можно применить один из итерационных методов. Если имеется хорошее начальное приближение  $y_i$ , то можно

построить решение с использованием двух итераций следующим образом. Считая  $y_i$  начальным приближением, вычисляем первое приближение  $\tilde{y}_{i+1}$  по формуле метода Эйлера (7):

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Вычисленное значение  $\tilde{y}_{i+1}$  подставляем вместо  $y_{i+1}$  в правую часть соотношения (9) и находим окончательное значение:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \text{ или:}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Данные рекуррентные соотношения описывают новую разностную схему, являющуюся **модифицированным методом Эйлера**, которая называется методом **Эйлера с пересчетом**. Метод Эйлера с пересчетом имеет **второй порядок точности**  $\delta_n = O(h^2)$ .

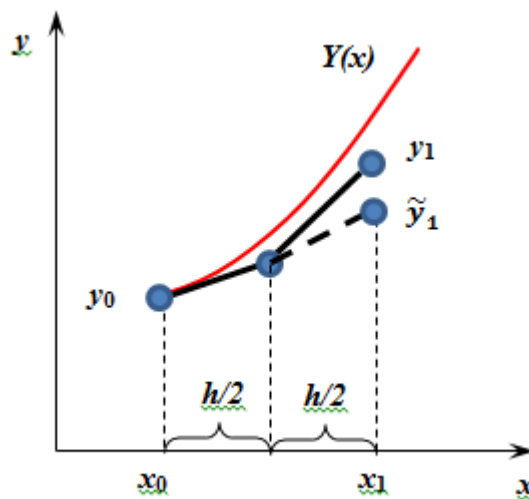


Рис.3 Геометрическая интерпретация метода Эйлера с пересчетом

На рис.3 изображен первый шаг вычислений методом Эйлера с пересчетом. Касательная к кривой  $Y(x)$  в точке  $x_0, y_0$  проводится с угловым коэффициентом  $y' = f(x_0, y_0)$ . С ее помощью найдено значение  $\tilde{y}_1$ , которое используется затем для определения наклона касательной  $f(x_1, \tilde{y}_1)$  в точке  $x_1, y_1$ . Отрезок с таким наклоном заменяет первоначальный отрезок касательной от точки  $x_0 + h/2$  до точки  $x_1$ . В результате получается уточненное значение искомой функции  $y_1$  в этой точке.

С помощью метода Эйлера с пересчетом можно проводить контроль точности решения путем сравнения значений  $\tilde{y}_{i+1}$  и  $y_{i+1}$  и выбора на основании этого соответствующей величины шага  $h$  в каждом узле. Например, если величина  $|y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}| > \varepsilon \cdot |y_{i+1}|$ , значение  $h$  следует уменьшить. Используя эти оценки, можно построить алгоритм метода Эйлера с пересчетом с автоматическим выбором шага.

**Пример 1.** Применяя метод Эйлера, найти на отрезке  $[1; 1,5]$  решение дифференциального уравнения  $y' = y + (1 + x)y^2$  с начальным условием  $y(1) = -1$ , выбрав шаг  $h = 0,1$ ; сравнить приближенное решение с точным.

$i$	$x_i$	$y_i$	$f(x_i, y_i)$	Точное решение
0	1	-1	1	-1
1	1,1	-0,9	0,801	-0,909091
2	1,2	-0,8199	0,659019	-0,833333
3	1,3	-0,753998	0,553582	-0,769231
4	1,4	-0,698640	0,472794	-0,714286
5	1,5	-0,651361		-0,666667

**Вывод:** уменьшение  $h$  повышает точность вычислений, однако при этом возрастет число узлов, что неблагоприятно повлияет на точность результатов. Метод Эйлера груб и дает удовлетворительную точность лишь при малом шаге  $h$ .

**Пример 2.** Методом Эйлера решить задачу Коши:

$$(x^2 + 1)y'' = 2xy'$$

$$y(0)=1, y'(0) = 3$$

на интервале  $[0,1]$  с шагом  $h = 0,2$ . Численное решение сравнить с аналитическим решением

$$y(x) = x^3 + 3x + 1$$

Решение:

Обозначим  $z = y'$ . Тогда:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \frac{2xz}{x^2+1} \end{cases} \quad y(0)=1, z(0) = 3$$

Расчетные формулы:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i) \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f_1(x_0, y_0, z_0) = 1 + 0,2 \cdot 3 = 1,6$$

$$z_1 = z_0 + h \cdot f_2(x_0, y_0, z_0) = 3 + 0,2 \cdot \frac{2x_0z_0}{x_0^2 + 1} = 3 + 0,2 \cdot \frac{2 \cdot 0 \cdot 3}{0^2 + 1} = 3$$

$$y(x_i) = x_i^3 + 3x_i + 1 - \text{точное решение}$$

$$|y(x_i) - y_i| - \text{погрешность полученного численного решения.}$$

$i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$f_1 = z_i$	$f_2 = \frac{2x_i z_i}{x_i^2 + 1}$	$y(x_i)$	$ y(x_i) - y_i $
0	0	1	3	3	0	1,0	0
1	0,2	1,6	3	3	1,1538	1,6080	0,008
2	0,4	2,2	3,2308	3,2308	2,2281	2,2640	0,0640
3	0,6	2,8462	3,6764	3,6764	3,2439	3,0160	0,1698
4	0,8	3,5814	4,3252	4,3252	4,2197	3,9120	0,3306
5	1,0	4,4465				5,0000	0,5535

## Методы Рунге-Кутты

Существуют и другие явные одношаговые методы. Так, рассмотренные методы Эйлера являются частными случаями методов первого и второго порядков, относящихся к классу методов *Рунге-Кутты*.

Идея, предложенная Рунге (1856–1927) и Куттой (1867–1944), заключается в том, чтобы при численном решении задачи Коши не использовать в расчетных формулах частные производные функции  $f(x, y)$ ; использовать только ее саму, зато вычислять на каждом шаге ее значения в нескольких точках. Проиллюстрируем это на примере одного из возможных методов Рунге – Кутты II порядка. Из определения производной:

$$y'(x_i) = \lim_{\Delta x} \frac{\Delta y(x_i)}{\Delta x} = \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

В финальное выражение входят значения функции  $y$  в двух точках, а производной уже нет. Подставим это приближенное выражение для производной в решаемое ДУ  $y' = f(x, y)$ , беря значение правой части в  $i$ -м узле:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

Отсюда  $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$  и мы снова получили метод Эйлера! Но поскольку для аппроксимации производной  $y'$  взяты две точки, то и для правой части ДУ  $f(x, y)$  уместно привлечь две точки:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

После преобразования:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

Искомой величиной в уравнении является  $y_{i+1}$ , входящей в обе части уравнения. Решать это уравнение можно методом итераций, беря в качестве начального приближения то значение  $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ , которое получается в методе Эйлера. Тогда:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))]$$

Или:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (k_1 + k_2), \quad (11)$$

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i) \quad k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_1) \quad (12)$$

Формулы (11), (12) представляют метод Рунге – Кутты II порядка



Широко распространен **метод Рунге-Кутта четвертого порядка**, часто без уточнений называемый просто методом Рунге – Кутты.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (13)$$

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$$

Таким образом, данный метод Рунге-Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части  $f(x, y)$  уравнения (5).

Суммарная погрешность этого метода есть величина  $\delta_n = O(h^4)$ .

Метод Рунге-Кутта (13) требует большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера и его модификацией, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге-Кутта.

**Пример 3.** Решим задачу примера 1 методом Рунге-Кутта. Полученные результаты внесем в таблицу.

$i$	$x_i$	Метод Эйлера	Метод Рунге-Кутта 4 порядка	Точное решение
0	1	-1	-1	-1
1	1,1	-0,9	-0,909093	-0,909091
2	1,2	-0,8199	-0,833336	-0,833333
3	1,3	-0,753998	-0,769234	-0,769231
4	1,4	-0,698640	-0,714289	-0,714286
5	1,5	-0,651361	-0,666670	-0,666667

### Многошаговые методы.

Другой путь построения разностных схем основан на том, что для вычисления значения  $y_{i+1}$  используются результаты не одного, а  $k$  предыдущих шагов, т. е. значения  $y_{i-k+1}, y_{i-k+2}, \dots, y_i$ . В этом случае получается  $k$ -шаговый метод.

Многошаговые методы могут быть построены следующим образом.

Запишем исходное уравнение (5) в виде

$$dY(x) = f(x, Y)dx \quad (14)$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по  $x$  на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ . Интеграл от левой части легко вычисляется:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dY(x)dx = Y(x_{i+1}) - Y(x_i) \approx y_{i+1} - y_i \quad (15)$$

Для вычисления интеграла от правой части уравнения (14) строится сначала интерполяционный многочлен  $P_{k-1}$  степени  $k - 1$  для аппроксимации функции  $f(x, Y)$  на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  по значениям  $f(x_{i-k+1}, y_{i-k+1}), f(x_{i-k+2}, y_{i-k+2}), \dots, f(x_i, y_i)$ .

После этого можно написать:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, Y) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x) dx \quad (16)$$

Приравнявая выражения, полученные в (15) и (16), можно получить формулу для определения неизвестного значения сеточной функции  $y_{i+1}$  в узле  $x_{i+1}$ :

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x) dx$$

На основе этой формулы можно строить различные многошаговые методы любого порядка точности. Порядок точности зависит от степени интерполяционного многочлена  $P_{k-1}(x)$ , для построения которого используются значения сеточной функции  $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$ , вычисленные на  $k$  предыдущих шагах.

Широко распространенным семейством многошаговых методов являются **методы Адамса**. Простейший из них, получающийся при  $k = 1$ , совпадает с рассмотренным ранее методом Эйлера первого порядка точности. В практических расчетах чаще всего используется вариант метода Адамса, имеющий четвертый порядок точности и использующий на каждом шаге результаты предыдущих четырех. Именно его и называют обычно методом Адамса. Рассмотрим этот метод.

Пусть найдены значения в четырех  $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$  последовательных узлах ( $k = 4$ ). При этом имеются также вычисленные ранее значения правой части  $f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i$ , где  $f_i = f(x_i, y_i)$ . В качестве интерполяционного многочлена  $P_3(x)$  можно взять многочлен Ньютона. В случае постоянного шага  $h$  конечные разности для правой части в узле  $x_i$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= f_i - f_{i-1} \\ \Delta^2 f_i &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2} \\ \Delta^3 f_i &= f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3} \end{aligned}$$

Тогда разностную схему четвертого порядка метода Адамса можно записать после необходимых преобразований в виде:

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2} \Delta f_i + \frac{5h^3}{12} \Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8} \Delta^3 f_i \quad (17)$$

Сравнивая метод Адамса с методом Рунге-Кутты той же точности, отмечаем его экономичность, поскольку он требует вычисления лишь одного значения правой части на каждом шаге (в методе Рунге-Кутты - четырех). Но метод Адамса неудобен тем, что невозможно начать счет по одному лишь известному значению  $y_0$ . Расчет может быть начат только с узла  $x_3$ , а не  $x_0$ . Значения  $y_1, y_2, y_3$ , необходимые для вычисления  $y_4$  нужно получить каким-либо другим способом (например, методом Рунге-Кутты), что существенно усложняет алгоритм. Кроме того, метод Адамса не позволяет (без усложнения формул) изменить шаг  $h$  в процессе счета; этого недостатка лишены одношаговые методы.

Рассмотрим еще одно семейство многошаговых методов, которые используют неявные схемы – **методы прогноза и коррекции** (они называются также **методами предиктор-корректор**). Суть этих методов состоит в следующем. На каждом шаге вводятся два этапа, использующих многошаговые методы: с помощью явного метода (предиктора) по известным значениям функции в предыдущих узлах находится начальное приближение  $y_{i+1} = y_{i+1}^{(0)}$  в новом узле; используя неявный метод (корректор), в результате итераций находятся приближения  $y_{i+1}^{(1)}, y_{i+1}^{(2)} \dots$  Один из вариантов метода прогноза и коррекции может быть получен на основе метода Адамса четвертого порядка. Окончательный вид разностных соотношений:

$$\text{на этапе предиктора: } y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) \quad (18)$$

$$\text{на этапе корректора: } y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) \quad (19)$$

Явная схема (18) используется на каждом шаге один раз, а с помощью неявной схемы (19) строится итерационный процесс вычисления  $y_{i+1}$ , поскольку это значение входит в правую часть выражения  $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Заметим, что в этих формулах, как и в случае метода Адамса, при вычислении  $y_{i+1}$  необходимы значения сеточной функции в четырех предыдущих узлах:  $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$ . Следовательно, расчет по этому методу может быть начат только со значения  $y_4$ . Необходимые при этом  $y_1, y_2, y_3$  находятся по методу Рунге-Кутты,  $y_0$  задается начальным условием. Это характерная особенность многошаговых методов.

Суммарная погрешность этого метода есть величина  $\delta_n = O(h^4)$ .

## Метод Милна

Метод Милна относится к многошаговым методам и представляет один из методов прогноза и коррекции.

Для получения формул Милна используется первая интерполяционная формула Ньютона с разностями до третьего порядка.

Решение в следующей точке находится в два этапа. На первом этапе осуществляется прогноз значения функции, а затем на втором этапе - коррекция полученного значения. Если полученное значение  $y$  после коррекции существенно отличается от спрогнозированного, то проводят еще один этап коррекции. Если опять имеет место существенное отличие от предыдущего значения (т.е. от предыдущей коррекции), то проводят еще одну коррекцию и т.д.

Вычислительные формулы:

а) этап прогноза:

$$y_i^{\text{прогн}} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1})$$

б) этап коррекции:

$$y_i^{\text{корр}} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(f_{i-2} + 4f_{i-1} + f_i^{\text{прогн}})$$

$$f_i^{\text{прогн}} = f(x_i, y_i^{\text{прогн}})$$

Для начала счета требуется задать решения в трех первых точках, которые можно получить одношаговыми методами (например, методом Рунге-Кутты).

Метод требует несколько меньшего количества вычислений (достаточно только два раза вычислить  $f(x, y)$ , остальные берутся с предыдущих этапов).

Суммарная погрешность этого метода есть величина  $\delta_n = O(h^4)$ .

## ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Оценить погрешность приближенных решений можно двумя способами:

1.  $\varepsilon = \max_{0 \leq i \leq n} |y_{i\text{точн}} - y_i|,$

где  $y_{i\text{точн}}, y_i$  - значения точного и приближенного решений в узлах сетки  $x_i, i = 1, \dots, n$

2. по правилу Рунге:

$$R = \frac{y^h - y^{h/2}}{2^p - 1},$$

где  $y^h$  - решение задачи Коши с шагом  $h$  в точке  $x + h$

$y^{h/2}$  - решение задачи Коши с шагом  $h/2$  в точке  $x + h$

$p$  – порядок точности метода.

**При использовании правила Рунге контроль точности можно осуществлять:**

### 1. На каждом шаге $h$ .

Для этого вычисляем значение  $y_1$  сначала с шагом  $h$ , затем с шагом  $h/2$ .

Если  $\frac{|y_1^h - y_1^{h/2}|}{2^p - 1} \leq \varepsilon$ , тогда переходим к следующему узлу сетки  $x_2 = x_1 + h$ .

Если правило Рунге не работает, уменьшаем шаг и производим вычисления  $y_1$  с шагом  $h/4$ :

$$\frac{|y_1^{h/2} - y_1^{h/4}|}{2^p - 1} \leq \varepsilon \text{ и т.д.}$$

### 2. На конце заданного интервала.

Для этого численно решаем задачу с заданным шагом  $h$  на всем заданном интервале, затем решаем задачу с шагом  $h/2$  на всем заданном интервале.

Сравниваем  $\frac{|y_n^h - y_n^{h/2}|}{2^p - 1} \leq \varepsilon$ . Если точность не достигнута, шаг уменьшаем.

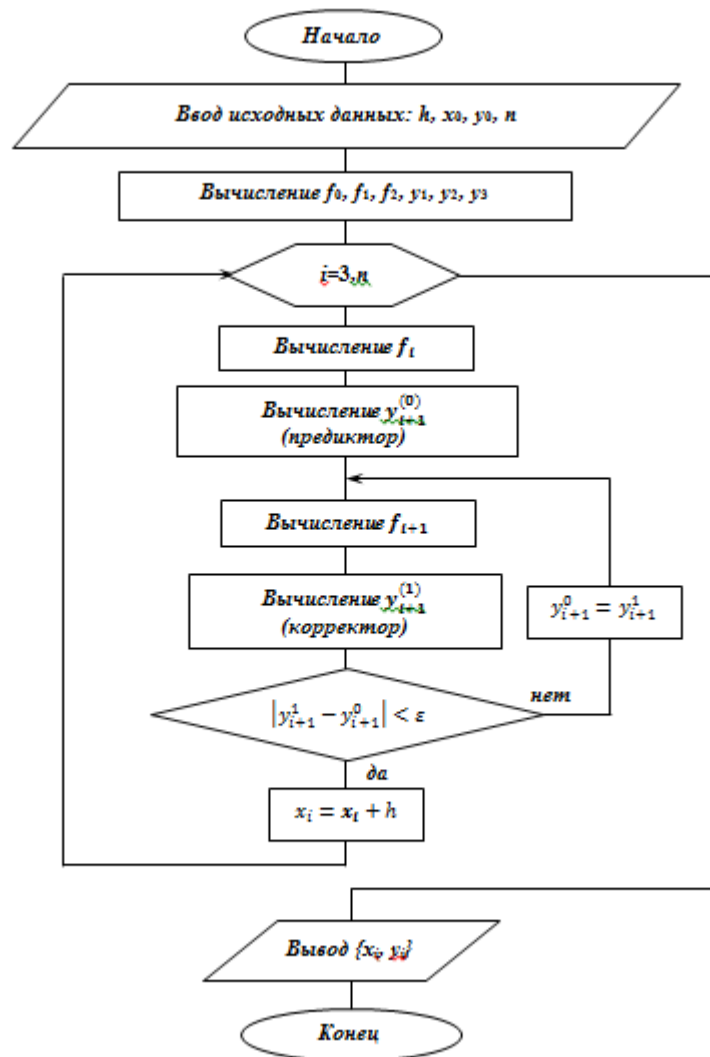


Рис. 3. Блок-схема метода предиктор-корректор