# Cursul3

April 5, 2025

## 0.1 Subspații invariante. Vectori și valori proprii.

În această parte studiem endomorfisme $T : L \to L$. Am văzut că la schimbarea bazei matricea lui $T$ se transformă după formula $A' = C^{-1}AC$. Două matrice care satisfac această egalitate se numesc asemenea. Se vede că două matrice asemenea sînt asociate aceluiași endomorfism.

**Definiție** Un subspațiu $L' \subset L$ se numește invariant pentru $T$, dacă pentru orice $\mathbf{x} \in L'$, $T(\mathbf{x}) \in L'$.

Evident că dacă $L'$ este un spațiu invariant, atunci $T$ induce un endomorfism $T' : L' \to L'$. Dacă luăm o bază $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ a lui $L'$ și o completăm la o bază $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a a lui $L$, atunci matricea lui $T$ este de forma

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix}.$$

Dacă este posibil să descompunem $L = L' \oplus L''$ cu $L''$ invariant la rîndul său, atunci $B' = 0$ și matricea lui $T$ este de forma

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix},$$

unde $C'$ este matricea restricției lui $T$ la $L''$. Analog dacă $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$ cu fiecare subspațiu invariant, atunci matricea lui $T$ este bloc-diagonală

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}.$$

Cel mai simplu caz este cel al unui subspațiu invariant de dimensiune 1. În acest caz există un vector nenul $\mathbf{e}$ și un scalar $\lambda$ astfel încît $T(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$.

**Definiție** Dacă vectorul $\mathbf{e} \neq 0$ satisface relația de mai sus spunem că este **vector propriu**, iar scalarul $\lambda$ se numește **valoare proprie**.

Toți vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda$ împreună cu 0 formează un subspațiu vectorial, numit subspațiul propriu corespunzător lui $\lambda$, notat cu $L_\lambda$.

### 0.1.1 Cum calculăm practic vectorii și valorile proprii

Luăm o bază arbitrară din $L$ și scriem matricea $A$ a lui $T$ în raport cu aceasta. Presupunem că vectorul propriu $\mathbf{e} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_m\mathbf{e}_m$. Atunci $T(\mathbf{e})$ va avea componentele

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Prin urmare sistemul $(A - \lambda I_m)\mathbf{x} = 0$ va trebui să aibă soluții nenule. Aceasta se întîmplă dacă și numai dacă $det(A - \lambda I_m) = 0$. Acesta este un polinom $P_A(\lambda)$ de gradul $m$ în $\lambda$, numit **polinomul caracteristic** al lui $A$.

În mod practic mai întîi determinăm rădăcinile polinomului caracteristic. Acestea vor fi valorile proprii, apoi pentru fiecare în parte rezolvăm sistemul corespunzător și obținem vectorii proprii.

Proprietăți și observații: - Polinomul caracteristic nu depinde de alegerea bazei, ci doar de endomorfism; - Se poate ca un endomorfism să nu aibă vectori proprii (și deci nici valori proprii); - Dacă există o bază a lui $L$ formată din vectori proprii, atunci matricea lui $T$ va fi de forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

și $T$ se numește diagonalizabil. - Unei valori proprii $\lambda$ îi putem asocia două numere: multiplicitate aritmetică $m_\lambda$=multiplicitatea lui $\lambda$ ca rădăcină a lui $P_T(\lambda)$ și multiplicitatea geometrică $g_\lambda = \dim L_\lambda$. Întotdeauna $g_\lambda \leq m_\lambda$; - la valori proprii distincte corespund vectori proprii liniar-independenți; - Un endomorfism peste un spațiu complex este diagonalizabil dacă polinomul său caracteristic are doar rădăcini simple; - Un endomorfism este diagonalizabil dacă și numai dacă $g_\lambda = m_\lambda$ pentru orice valoare proprie $\lambda$.

[1]:
```
A=matrix([[4,-1,-2],[2,1,-2],[1,-1,1]])
A
```

[1]:
```
[ 4 -1 -2]
[ 2  1 -2]
[ 1 -1  1]
```

[2]:
```
P=A.charpoly()
P
```

[2]:
```
x^3 - 6*x^2 + 11*x - 6
```

[3]:
```
P.factor()
```

[3]:
```
(x - 3) * (x - 2) * (x - 1)
```

[4]:
```
A.eigenvalues()
```

[4]:
```
[3, 2, 1]
```

[5]:
```
A.eigenvectors_right()
```

[5]:
```
[(3, [(1, 1, 0)], 1), (2, [(1, 0, 1)], 1), (1, [(1, 1, 1)], 1)]
```

[8]:
```
B=matrix([[4,-4,2],[2,-2,1],[-4,4,-2]])
B
```

[8]:
```
[ 4 -4  2]
[ 2 -2  1]
[-4  4 -2]
```

[7]:
```
P=B.charpoly()
P
```

[7]:
```
x^3
```

[9]:
```
B.eigenvectors_right()
```

[9]:
```
[(0, [(1, 0, -2), (0, 1, 2)], 3)]
```

[10]:
```
B.jordan_form()
```

[10]:
```
[0 1|0]
[0 0|0]
[---+-]
[0 0|0]
```

## 0.2 Forme biliniare și pătratice

**Definiție** O formă pătratică în $n$ este un polinom omogen de gradul 2 în variabilele $x_1, \dots, x_n$. Adică este de forma

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Evident putem considera o formă pătratică și ca o funcție de argument vectorial $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, $\psi(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Formele pătratice sînt îndeaproape înrudite cu funcțiile liniare. Ca să studiem mai bine legătura considerăm următoarea definiție:

**Definiție** O formă biliniară este o aplicație $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ cu $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ care este liniară în fiecare argument, adică

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \\
\psi(a\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= a\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) &= \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \\
\psi(\mathbf{x}, a\mathbf{y}) &= a\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Dacă fixăm o bază a lui $L$, atunci $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ cu $a_{ij} = \psi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Matricea care se obține $A = \left(a_{ij}\right)$ se numește matricea coeficienților lui $\psi$. Se vede de aici că o formă biliniară este complet determinată de matricea coeficienților (de îndată ce am fixat o bază a lui $L$). De asemenea se vede că dacă înlocuim $\mathbf{y}$ cu $\mathbf{x}$ obținem o formă pătratică și mai mult orice formă pătratică se obține în acest fel.

Este evident că formele biliniare formează un spațiu vectorial. Acesta este izomorf cu spațiul $\mathcal{L}(L, L^*)$ al aplicațiilor liniare $L \to L^*$.

**Definiție** O formă biliniară $\psi$ se numește - simetrică dacă $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$; - anti-simetrică $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

Se vede că o formă este simetrică dacă matricea coeficienților este simetrică ($A = A^t$) într-o anumită bază și la fel este anti-simetrică dacă matricea coeficienților este anti-simetrică într-o bază.

Să presupunem că $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ și $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Putem scrie o formă biliniară prescurtat $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}A\mathbf{y}^t = \mathbf{y}A^t\mathbf{x}^t$. Presupunem că $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ și $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ două baze ale lui $L$ cu matricea de trecere $C$. Avem $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}A\mathbf{y}^t = \mathbf{x}'A'\mathbf{y}'^t$. Avem că $A' = C^tAC$. De aici rezultă că rangul lui $A$ coincide cu rangul lui $A'$. Deci putem defini rangul unei forme biliniare. Dacă rangul $r$ al acesteia satisface $r = n$, atunci spunem că $\psi$ este nedegenerată.

Aceeași formă pătratică poate proveni din mai multe forme biliniare. Aceasta provine din faptul că în expresia unei forme pătratice apar termeni similari. Avem totuși următoarea teoremă

**Teoremă** Pentru orice formă pătratică $\phi$ există și este unică o formă biliniară simetrică $\psi$ astfel încît $\phi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

**Teoremă** Pentru un corp de caracteristică diferită de 2, dacă $\psi$ este o formă antisimetrică atunci $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. Reciproc dacă $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ pentru orice $\mathbf{x} \in L$ atunci $\psi$ este anti-simetrică.

Din faptul că orice formă pătratică provine dintr-o formă biliniară simetrică, avem că în expresia $\psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$, $a_{ij} = a_{ji}$, adică termenul corespunzător lui $x_ix_j$ apare de două ori, iar în expresia finală va avea coeficientul $2a_{ij}$.

### 0.2.1 Forma canonică a unei forme pătratice

Ca și pentru aplicații liniare, forma canonică a unei forme pătratice se obține prin alegerea unei baze speciale în care matricea sa are forma diagonală. Pentru aceasta avem nevoie de noțiunea de ortogonalitate. Presupunem de acum că forma $\psi$ este simetrică.

**Definiție** Doi vectori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ se numesc ortogonali în raport cu $\psi$ dacă $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Spunem că vectorul $\mathbf{x}$ este ortogonal pe un subspațiu $L'$ dacă este ortogonal pe orice vector din $L'$.

Mulțimea tuturor vectorilor ortogonali pe un subspațiu dat $L'$ este la rîndul său un subspațiu vectorial notat $(L')^{\perp}_{\psi}$ și numit **complementul ortogonal** al lui $L'$ în raport cu $\psi$. Atunci cînd $L' = L$ spațiul $L^{\perp}_{\psi}$ se numește **radicalul** lui $\psi$.

Un vector $\mathbf{x}$ aparține radicalului dacă și numai dacă $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = 0$ pentru toți vectorii $\mathbf{e}_i$ dintr-o bază. Dacă descompunem vectorul $\mathbf{x}$ în raport cu această bază obținem un sistem omogen cu matricea coeficienților $A$. Din teorema dimensiunii avem că $\dim L^{\perp}_{\psi} = \dim L - r$, unde $r$ este rangul lui $\psi$.

**Teoremă** Fie $\psi$ o formă biliniară și $L'$ in subspațiu astfel încît restricția lui $\psi$ la $L'$ este nedegenerată. Atunci $L = L' \oplus (L')^{\perp}_{\psi}$.

Acest rezultat ne conduce la următorul:

**Teoremă** Pentru orice formă pătratică există o bază a lui $L$ astfel încît $\phi(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$.

Aceasta se numește o formă canonică a lui $\psi$. Această formă nu este unică. Avem că în baza găsită matricea formei biliniare asociate este

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Numărul de valori nenule este egal cu rangul lui $\psi$ și nu depinde de alegerea bazei. În termeni de matrice rezultatul poate fi reformulat astfel:

**Teoremă** Pentru o matrice simetrică $A$ exită o matrice nesingulară $C$ astfel încît $C^tAC$ este diagonală. Pentru matrice nesingulare diferite matricele diagonale vor fi diferite, dar numărul de valori nenule de pe diagonală va rămîne neschimbat.

Avem un rezultat similar pentru forme anti-simetrice:

**Teoremă** Fie $\psi$ o formă biliniară anti-simetrică pe spațiul vectorial $L$. Atunci există o bază $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, astfel că primii $2r$ vectori satisfac $\psi(\mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_j) = 1$ și $\psi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ pentru $i > 2r$, $j > 2r$ sau $|i - j| > 1$. În raport cu aceasta bază matricea lui $\psi$ este

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

## 0.3 Forme reale și complexe

Să presupunem acum că $\phi$ este o formă pătratică peste un spațiu vectorial complex $L$. Am văzut că există o bază $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ astfel încît $\phi$ are forma $\psi(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$. Presupunem că $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ și $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Vom lua o nouă bază $\mathbf{e}'_j = \sqrt{\lambda_j}\mathbf{e}_j$ pentru $j \leq r$ și $\mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_j$ pentru $j > r$. Atunci $\phi(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_r^2$.

În cazul real nu putem proceda la fel de simplu. Va trebui să separăm coeficienții pozitivi $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de cei negativi $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r$. Forma lui $\phi$ ca fi $\phi(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2$.

**Definiție** O formă pătratică reală se numește **pozitiv definită** dacă $\psi(\mathbf{x}) > 0$ pentru orice $\mathbf{x} \neq 0$. Dacă $\psi(\mathbf{x}) < 0$ pentru orice $\mathbf{x} \neq 0$, atunci $\psi$ se numește **negativ definită.**

Numărul $s$ care apare în descompunerea lui $\psi$ este dimensiunea celui mai mare subspațiu $L'$ pentru care restricția lui $\psi$ este pozitiv-definită. Acest număr se numește **indicele de inerție** al formei $\psi$.

Avem un criteriu care ne permite să decidem dacă o formă este pozitiv definită sau nu. Dacă $\psi$ este o formă pătratică cu matricea asociată $A$, notăm cu $\Delta_i$ minorul format de primele $i$ coloane și $i$ linii.

**Teoremă** (criteriul lui Sylvester) O formă pătratică este pozitiv definită dacă și numai dacă $\Delta_i > 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$.

## 0.4 Spații euclidiene

Un spațiu euclidian este un spațiu vectorial real $L$ împreună cu o formă biliniară, simetrică și pozitiv definită. Forma biliniară se numește **produs scalar** și se notează $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Pe $\mathbb{R}^n$ se poate defini produsul scalar canonic: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Lungimea unui vector se definește $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. De asemenea definim unghiul dintre doi vectori:

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}.$$

Dacă fixăm un vector $\mathbf{e} \neq 0$ orice vector $\mathbf{x} \in L$ poate fi scris $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{e} + \mathbf{y}$ cu $\mathbf{e} \cdot \mathbf{y} = 0$. Vectorul $\alpha \mathbf{e}$ se numește proiecția ortogonală pe dreapta $\langle \mathbf{e} \rangle$. Lungimea proiecției ortogonale este cel mult $|\mathbf{x}|$.

**Teoremă** Pentru orice vectori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$, $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$.

Din această teoremă rezultă că $|x + y| \leq |x| + |y|$.

**Definiție** O bază a $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a unui spațiu euclidian se numește ortonormată dacă $|\mathbf{e}_i| = 1$ pentru orice $i$ și $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ pentru $i \neq j$.

**Teoremă** Orice spațiu euclidian are o bază ortonormată.

Dacă $L_1 \subset L$ este un subspațiu într-un spațiu euclidian atunci radicalul său în raport cu produsul scalar se numește **complementul ortogonal** al lui $L$, notat $L_1^{\perp}$. Avem că $L_1 \oplus L_1^{\perp} = L$.

### 0.4.1 Aplicații ortogonale

**Definiție** O aplicație $T : L \to L$ a unui spațiu euclidian se numește ortogonală dacă $T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Dacă fixăm o bază ortonormată a lui $L$ și $T$ este o aplicație ortogonală avînd matricea $U$, atunci $U^t U = U U^t = I_n$, unde $n = \dim L$.

O aplicație $T : L \to L$ se numește simetrică, dacă $(T\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot T\mathbf{y}$. Într-o bază ortonormată matricea lui $T$ va fi simetrică. Privind structura acestui tip de aplicații avem următorul rezultat:

**Teoremă** Pentru orice aplicație simetrică $T$ există o bază ortonormată $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a lui $L$ formată din vectori proprii ai lui $T$.

**Teoremă** Dacă $T$ este aplicație simetrică, atunci la valori proprii distincte corespund vectori proprii ortogonali.

Revenind la forme pătrattice avem următoarea aplicație:

**Teoremă** Pentru orice formă pătratică există o bază ortonormată în raport cu care $\psi(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots \lambda_n x_n^2$. Coeficienții $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sînt unici pînă la o permutare.

## 0.5 Estimări pentru valorile proprii

Pentru o matrice pătratică $A \in M_n(\mathbb{C})$ notăm cu $\rho(A) = \max \{|\lambda| \in \mathbb{C} | \lambda \text{ este o valoare proprie a lui } L\}$, numită raza spectrală a lui $A$.

**Teorema Perron-Frobenius**. Fie $A = \left(a_{ij}\right)$ o matrice pătratică cu $a_{ij} > 0$. Atunci - Există o valoare proprie $r = \rho(A) > 0$, numită valoarea proprie dominantă a.î. orice altă valoare proprie $\lambda$ satisface $|\lambda| < r$; - valoarea proprie dominantă este simplă; - există un vector propriu $v$ corespunzător lui $r$ cu toate componentele pozitive; - toți ceilalți vectori proprii liniar-independenți de $v$ au cel puțin o componentă negativă.

Pentru o matrice $A$ notăm

$$r_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

și cu $\Gamma_i(A)$ discul de rază $r_i(A)$ și centru $a_{ii}$. Reuniunea tuturor acestor discuri se notează cu $\Gamma(A)$ și se numește **mulțimea Gerșgorin.**

**Teorema lui Gerşgorin.** Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Pentru orice $\lambda \in \sigma(A)$ există un $k$ astfel încît $\lambda \in \Gamma_k(A)$. Deci $\sigma(A) \subset \Gamma(A)$.