Logica matematică şi computaţională – conf. dr. Claudia Mureşan

Teme colective nr. 4-7 – grupa 1 Informatică ID (2023-2024)

Tema 4

Fie I o mulțime nevidă, A o mulțime, $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi și $k \in I$. Să se demonstreze că:

- $A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ și $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k$

a) Demonstrație $A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$:

Fie x arbitrar, fixat.

$$\left(A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow \left[(\forall x)\left((x \in A_k) \Rightarrow \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right)\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\forall x)((x \in A_k) \Rightarrow (\exists i)((i \in I) \wedge (x \in A_i)))]$$

Propoziția $x \in A_k$ nu depinde de i, deci variabila i cuantificată poate fi scoasă în afară și avem propoziția de demonstrat echivalentă cu:

$$(\forall x)(\exists i)[(x \in A_k) \Rightarrow ((i \in I) \wedge (x \in A_i))]$$

Instanțiem i=k, cu $k \in I$ și avem:

$$(\forall x)[(x \in A_k) \Rightarrow \big((k \in I) \wedge (x \in A_k)\big)]$$

care este adevărată atunci când $k \in I$.

Deci propoziția de care am pornit inițial, $A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, este adevărată.

b) Demonstrație $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k$:

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k\right) \Leftrightarrow \left[(\forall x)\left(\left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right) \Rightarrow (x \in A_k)\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big[(\forall x)\big((\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in A_i) \Rightarrow (x \in A_k)\big)\big]$$

Propoziția $x \in A_k$ nu depinde de i, deci variabila i cuantificată poate fi scoasă în afară și avem propoziția de demonstrat echivalentă cu:

$$(\forall x)(\forall i)[(i \in I \Rightarrow x \in A_i) \Rightarrow (x \in A_k)]$$

Instanțiem i=k, cu $k \in I$ și avem:

$$(\forall x)[(k \in I \Rightarrow x \in A_k) \Rightarrow (x \in A_k)]$$

care este adevărată atunci când $k \in I$.

Deci propoziția de care am pornit inițial, $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k$, este adevărată.

- $A \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ ddacă $(\forall i \in I)(A \subseteq A_i)$

  Demonstrație:

  Fie x și y arbitrare.

$$\left[A \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i \iff (\forall i \in I)(A \subseteq A_i)\right] \iff$$

$$\iff \left[\left[(\forall x)\left((x \in A) \Rightarrow \left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right)\right)\right] \iff \left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (\forall y)(y \in A \Rightarrow y \in A_i)\big)\right]\right]$$

Variabilele x și y pot fi scoase cuantificate în afară și avem:

$$(\forall x)(\forall y)\left[\left[(x \in A) \Rightarrow \left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right)\right] \iff \left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (y \in A \Rightarrow y \in A_i)\big)\right]\right]$$

care este echivalent, atunci când x și y sunt arbitrari, cu:

$$\Big[[(x \in A) \Rightarrow (\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in A_i)] \iff \left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (y \in A \Rightarrow y \in A_i)\big)\right]\Big].$$

Propoziția $x \in A$ nu depinde de i, deci i poate fi cuantificat în afară astfel:

$$\Big[\left[(\forall i)\big((x \in A) \Rightarrow (i \in I \Rightarrow x \in A_i)\big)\right] \iff \left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (y \in A \Rightarrow y \in A_i)\big)\right]\Big] \qquad (*)$$

Notăm $x \in A$ cu p, $i \in I$ cu q, $x \in A_i$ cu r și avem:

$$[(x \in A) \Rightarrow (i \in I \Rightarrow x \in A_i)] \iff [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$$

$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ este echivalentă cu $[(\neg p) \vee [(\neg q) \vee r]]$, adică echivalent, datorită asociativității și comutativității disjuncției, cu $[(\neg q) \vee [(\neg p) \vee r]]$, adică $[q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.

Deci putem scrie (*) ca:

$\left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in A_i)\big)\right] \iff \left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (y \in A \Rightarrow y \in A_i)\big)\right]$, ceea ce este adevărat atunci când ambele variabile x și y sunt cuantificate universal și sunt deci interschimbabile (practic doar variabila x este schimbată în variabila y, fără ca vreuna dintre ele să aibă o proprietate pe care cealaltă nu o are).

- $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A$ ddacă $(\forall i \in I)(A_i \subseteq A)$

  Demostrație:

  Fie x și y arbitrare.

$$\left[\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A \iff (\forall i \in I)(A_i \subseteq A)\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\left[(\forall x)\left(\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \Rightarrow (x \in A)\right)\right] \Leftrightarrow \left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (\forall y)(y \in A_i \Rightarrow y \in A)\big)\right]\right]$$

Variabilele x și y pot fi scoase cuantificate în afară și avem:

$$(\forall x)(\forall y)\left[\left[\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \Rightarrow (x \in A)\right] \Leftrightarrow \left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (y \in A_i \Rightarrow y \in A)\big)\right]\right]$$

care este echivalent, atunci când x și y sunt arbitrari, cu:

$$\left[(\exists i)\big((i \in I) \wedge (x \in A_i)\big) \Rightarrow (x \in A)\right] \Leftrightarrow \left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (y \in A_i \Rightarrow y \in A)\big)\right].$$

Propoziția $x \in A$ nu depinde de i, deci i poate fi cuantificat în afară, dar cuantificatorul se schimbă din existențial în universal pentru că $a \Rightarrow b$ este echivalent cu $(\neg a) \vee b$, deci cuantificatorul se neagă atunci când este scos din premisa unei implicații.

Astfel, avem:

$$\left[(\forall i)\big((i \in I) \wedge (x \in A_i) \Rightarrow (x \in A)\big)\right] \Leftrightarrow \left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (y \in A_i \Rightarrow y \in A)\big)\right] \qquad (**)$$

Notăm $x \in A$ cu p, $i \in I$ cu q, și $x \in A_i$ cu r, și avem

$$\left[\big((i \in I) \wedge (x \in A_i)\big) \Rightarrow (x \in A)\right] \Leftrightarrow [(q \wedge r) \Rightarrow p]$$

$[(q \wedge r) \Rightarrow p]$ este echivalentă cu $\big[[\neg(q \wedge r)] \vee p\big]$, adică echivalent, conform legilor lui DeMorgan, cu $\big[[(\neg q) \vee (\neg r)] \vee p\big]$, adică $[q \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$.

Deci putem scrie (**) ca:

$\left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (x \in A_i \Rightarrow x \in A)\big)\right] \Leftrightarrow \left[(\forall i)\big((i \in I) \Rightarrow (y \in A_i \Rightarrow y \in A)\big)\right]$, ceea ce este adevărat atunci când ambele variabile x și y sunt cuantificate universal și sunt deci interschimbabile (practic doar variabila x este schimbată în variabila y, fără ca vreuna dintre ele să aibă o proprietate pe care cealaltă nu o are).

Tema 5

Fie A și I mulțimi, iar $(B_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi. Să se demonstreze că:

- $A \times (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \times B_i)$ și $(\bigcup_{i\in I} B_i) \times A = \bigcup_{i\in I}(B_i \times A)$

  Demonstrație:

$$\left[A \times \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \times B_i)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\big(\forall(x,y)\big)\left[\left((x,y) \in A \times \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)\right) \Leftrightarrow \left((x,y) \in \bigcup_{i\in I}(A \times B_i)\right)\right]\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big[\big(\forall(x,y)\big)\Big[\big((x \in A) \wedge (\exists i)(y \in B_i)\big) \Leftrightarrow \Big((\exists i)\big((x \in A) \wedge (y \in B_i)\big)\Big)\Big]\Big],$$

ceea ce este adevărat, pentru că propoziția $x \in A$ nu depinde de i, ceea ce înseamnă că i poate fi cuantificat în afară.

$$\left[\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \times A = \bigcup_{i\in I}(B_i \times A)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\big(\forall(x,y)\big)\left[\left((x,y) \in \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \times A\right) \Leftrightarrow \left((x,y) \in \bigcup_{i\in I}(B_i \times A)\right)\right]\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big[\big(\forall(x,y)\big)\big[\big((\exists i)(x \in B_i) \wedge (y \in A)\big) \Leftrightarrow \big((\exists i)[(x \in B_i) \wedge (y \in A)]\big)\big]\Big],$$

ceea ce este adevărat, pentru că propoziția $y \in A$ nu depinde de i, ceea ce înseamnă că i poate fi cuantificat în afară.

- $A \times (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \times B_i)$ și $(\bigcap_{i\in I} B_i) \times A = \bigcap_{i\in I}(B_i \times A)$ considerând pentru cazul $I = \emptyset$, o mulțime T astfel încât $(B_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$, iar $(A \times B_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A \times T)$ și $(B_i \times A)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T \times A)$

  Demonstrație $A \times (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \times B_i)$:

  (a) $I \neq \emptyset$

$$\left[A \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \times B_i)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(\forall(x,y))\left[\left((x,y) \in A \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\right) \Leftrightarrow \left((x,y) \in \bigcap_{i\in I}(A \times B_i)\right)\right]\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(\forall(x,y))\left[\left((x \in A) \land (\forall i)(y \in B_i)\right) \Leftrightarrow \left((\forall i)\left((x \in A) \land (y \in B_i)\right)\right)\right]\right],$$

ceea ce este adevărat, pentru că propoziția $x \in A$ nu depinde de i, ceea ce înseamnă că i poate fi cuantificat în afară (dacă există domeniul discursului, adică $I \neq \emptyset$).

(b) $I = \emptyset$

Pentru $I = \emptyset$, $B_i \in T$, iar $\bigcap_{i\in I} B_i = T$. Deci $A \times (\bigcap_{i\in I} B_i) = A \times T$.

$(A \times B_i) \in \mathcal{P}(A \times T)$, iar $I = \emptyset$, deci $\bigcap_{i\in\emptyset}(A \times B_i) = A \times T$. Deci și în cazul $I = \emptyset$ este adevărat că $A \times (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \times B_i)$.

Demonstrație $(\bigcap_{i\in I} B_i) \times A = \bigcap_{i\in I}(B_i \times A)$:

$$\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \times A = \bigcap_{i\in I}(B_i \times A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(\forall(x,y))\left[\left((x,y) \in \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \times A\right) \Leftrightarrow \left((x,y) \in \bigcap_{i\in I}(B_i \times A)\right)\right]\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(\forall(x,y))\left[\left((\forall i)(x \in B_i) \land (y \in A)\right) \Leftrightarrow \left((\forall i)\left((x \in B_i) \land (y \in A)\right)\right)\right]\right]$$

ceea ce este adevărat, pentru că propoziția $y \in A$ nu depinde de i, ceea ce înseamnă că i poate fi cuantificat în afară (dacă există domeniul discursului, adică $I \neq \emptyset$).

Pentru $I = \emptyset$, $B_i \in T$, iar $\bigcap_{i\in I} B_i = T$. Deci $(\bigcap_{i\in I} B_i) \times A = T \times A$.

$B_i \times A \in \mathcal{P}(T \times A)$, iar $I = \emptyset$, deci $\bigcap_{i\in I}(B_i \times A) = T \times A$. Deci și în cazul $I = \emptyset$ este adevărat că $(\bigcap_{i\in I} B_i) \times A = \bigcap_{i\in I}(B_i \times A)$.

Tema 6

Demonstrați, folosind funcții caracteristice, că, pentru orice mulțimi A, B, C:

① $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

② $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ (diferența simetrică este asociativă);

③ dacă A și B sunt finite, atunci: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Se consideră o mulțime nevidă T care include mulțimile A, B, C, de forma $T = A \cup B \cup C \cup \{0\}$, astfel că $A\Delta B \subseteq T$, $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq T$, $(A\Delta B)\Delta C \subseteq T$ și $A\Delta(B\Delta C) \subseteq T$.

Notăm, pentru fiecare $S \in \mathcal{P}(T)$, cu χ_S funcția caracteristică a lui S raportat la T:

$\chi_S: T \longrightarrow \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $\chi_S = \begin{cases} 0, dacă\ x \notin S \\ 1, dacă\ x \in S \end{cases}$

① $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Trebuie să demonstrăm că $\chi_{A\Delta B} = \chi_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)}$.

$$\chi_{A\Delta B} = \chi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} - \chi_{A\setminus B} \cdot \chi_{B\setminus A} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} - \chi_{(A\setminus B)\cap(B\setminus A)} =$$
$$= \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} - \chi_{\emptyset} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} = \chi_A \cdot (1 - \chi_B) + \chi_B \cdot (1 - \chi_A) = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B \quad (1)$$

$$\chi_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} = \chi_{A\cup B} - \chi_{A\cup B} \cdot \chi_{A\cap B} = \chi_{A\cup B} - \chi_{(A\cup B)\cap(A\cap B)} = \chi_{A\cup B} - \chi_{A\cap B} =$$
$$= \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\chi_{A\Delta B} = \chi_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} \Leftrightarrow A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

② $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Trebuie să demonstrăm că $\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_{A\Delta(B\Delta C)}$.

$$\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_{[(A\Delta B)\setminus C]\cup[C\setminus(A\Delta B)]} = \chi_{(A\Delta B)\setminus C} + \chi_{C\setminus(A\Delta B)} = \chi_{A\Delta B} \cdot (1 - \chi_C) + \chi_C \cdot (1 - \chi_{A\Delta B}) =$$
$$= (\chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B) \cdot (1 - \chi_C) + \chi_C \cdot (1 - \chi_A - \chi_B + 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B) =$$
$$= \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B - \chi_A \cdot \chi_C - \chi_B \cdot \chi_C + 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B \cdot \chi_C + \chi_C - \chi_C \cdot \chi_A - \chi_C \cdot \chi_B +$$
$$+2 \cdot \chi_C \cdot \chi_A \cdot \chi_B = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2 \cdot (\chi_A \cdot \chi_B + \chi_B \cdot \chi_C + \chi_A \cdot \chi_C) + 4 \cdot \chi_A \cdot \chi_B \cdot \chi_C \quad (3)$$

$$\chi_{A\Delta(B\Delta C)} = \chi_{[A\setminus(B\Delta C)\cup(B\Delta C)\setminus A]} = \chi_{A\setminus(B\Delta C)} + \chi_{(B\Delta C)\setminus A} = \chi_A \cdot (1 - \chi_{B\Delta C}) + \chi_{B\Delta C} \cdot (1 - \chi_A) =$$
$$= \chi_A + \chi_{B\Delta C} - 2 \cdot \chi_B \cdot \chi_{B\Delta C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2 \cdot \chi_B \cdot \chi_C - 2 \cdot \chi_A \cdot (\chi_B + \chi_C - 2 \cdot \chi_B \cdot \chi_C) =$$
$$= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2 \cdot (\chi_A \cdot \chi_B + \chi_B \cdot \chi_C + \chi_A \cdot \chi_C) + 4 \cdot \chi_A \cdot \chi_B \cdot \chi_C \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că $\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_{A\Delta(B\Delta C)} \Leftrightarrow (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

③ dacă A și B sunt finite, atunci: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Fie T finită nevidă, $T := A \cup B \cup \{0\}$. Dacă $T = \{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$, unde $n = |T| \in \mathbb{N}^*$, atunci, pentru orice $S \in \mathcal{P}(T)$, $|S| = \sum_{i=1}^{n} \chi_S(x_i)$.

$|A| = \sum_{i=1}^{n} \chi_A(x_i) = \chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) + \cdots + \chi_A(x_n)$

$|B| = \sum_{i=1}^{n} \chi_B(x_i) = \chi_B(x_1) + \chi_B(x_2) + \cdots + \chi_B(x_n)$

$|A \cup B| = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A\cup B}(x_i) = \chi_{A\cup B}(x_1) + \chi_{A\cup B}(x_2) + \cdots + \chi_{A\cup B}(x_n)$

$|A \cap B| = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A\cap B}(x_i) = \chi_{A\cap B}(x_1) + \chi_{A\cap B}(x_2) + \cdots + \chi_{A\cap B}(x_n)$

Fie $i \in \{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$. Știm că:

$$\chi_{A\cup B}(x_i) = \chi_A(x_i) + \chi_B(x_i) - \chi_{A\cap B}(x_i)$$

Facem suma din membrul stâng:

$|A \cup B| = \chi_{A\cup B}(x_1) + \chi_{A\cup B}(x_2) + \cdots + \chi_{A\cup B}(x_n) =$

$= \chi_A(x_1) + \cdots + \chi_A(x_n) + \chi_B(x_1) + \cdots + \chi_B(x_n) - \chi_{A\cap B}(x_1) - \cdots - \chi_{A\cap B}(x_n) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \chi_A(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \chi_B(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{A\cap B}(x_i) = |A| + |B| - |A \cap B|$

Deci $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Tema 7

Demonstrați că imaginea și preimaginea printr-o funcție comută cu mulțimea vidă și păstrează incluziunile, iar imaginea duce mulțimi nevide în mulțimi nevide, în timp ce preimaginea duce în mulțimi nevide doar mulțimile care nu sunt disjuncte de imaginea funcției, i.e. dacă A și B sunt mulțimi nevide, f:A→B, X, Y ∈ $\mathcal{P}(A)$, iar V, W ∈ $\mathcal{P}(B)$, atunci:

1. $f(\emptyset) = \emptyset$ și $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

Demonstrație:

$$(f(\emptyset) = \emptyset) \Leftrightarrow (\forall x)\big[\big(x \in f(\emptyset)\big) \Leftrightarrow (x \in \emptyset)\big] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)[(x \in \{y \in B|\ (\exists z)(\ z \in \emptyset \wedge f(z) = y)\}) \Leftrightarrow (x \in \emptyset)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)\Big[\big[(x \in B) \wedge \big((\exists z)\ z \in \emptyset\big) \wedge (f(z) = x)\big] \Leftrightarrow (x \in \emptyset)\Big]$$

Propozițiile $(\exists z)\ z \in \emptyset$ și $x \in \emptyset$ sunt false, deci conjuncția $(x \in B) \wedge \big((\exists z)\ z \in \emptyset\big)\ \wedge (f(z) = x)$ este falsă și echivalentă cu $x \in \emptyset$, deci propoziția inițială, $f(\emptyset) = \emptyset$ este adevărată.

$$(f^{-1}(\emptyset) = \emptyset) \Leftrightarrow (\forall x)\big[\big(x \in f^{-1}(\emptyset)\big) \Leftrightarrow (x \in \emptyset)\big] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)[(x \in \{z \in A|\ (\exists y)\ y \in \emptyset \wedge f^{-1}(y) = z\}) \Leftrightarrow (x \in \emptyset)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)\big\{\big[(x \in A) \wedge \big((\exists y)\ y \in \emptyset\big) \wedge (f^{-1}(y) = x)\big] \Leftrightarrow (x \in \emptyset)\big\}$$

Propozițiile $(\exists y)\ y \in \emptyset$ și $x \in \emptyset$ sunt false, deci conjuncția $(x \in A) \wedge \big((\exists y)\ y \in \emptyset\big)\ \wedge (f^{-1}(y) = x)$ este falsă și echivalentă cu $x \in \emptyset$, deci propoziția inițială, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ este adevărată.

2. Dacă $X \subseteq Y$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$

Demonstrație:

Fie a ∈ A, b ∈ B și X, Y ∈ $\mathcal{P}(A)$, f: A→B.

$$\big[(X \subseteq Y) \Rightarrow \big(f(X) \subseteq f(Y)\big)\big] \Leftrightarrow \Big[[(a \in X) \Rightarrow (a \in Y)] \Rightarrow \big[\big(b \in f(X)\big) \Rightarrow \big(b \in f(Y)\big)\big]\Big] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{[(a \in X) \Rightarrow (a \in Y)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big[[(b \in B) \wedge \big((\exists c)\ c \in X\big) \wedge (f(c) = b)] \Rightarrow [(b \in B) \wedge \big((\exists d)\ d \in Y\big) \wedge (f(d) = b)]\big]\}$$

Instanțiem c = a și d = a, iar propoziția devine:

$$\big\{[(a \in X) \Rightarrow (a \in Y)] \Rightarrow \big[[(b \in B) \wedge (a \in X) \wedge (f(a) = b)] \Rightarrow [(b \in B) \wedge (a \in Y) \wedge (f(a) = b)]\big]\big\}\ (*.*)$$

Notăm propozițiile $a \in X$ cu p_1, $a \in Y$ cu p_2, $b \in B$ cu q_1 și $f(a) = b$ cu q_2. Astfel, propoziția (*.*) pe care trebuie să o demonstrăm devine:

$$(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow [(q_1 \wedge p_1 \wedge q_2) \Rightarrow (q_1 \wedge p_2 \wedge q_2)]$$

Dacă vreuna dintre propozițiile q_1 sau q_2 este falsă, atunci conjuncția $q_1 \wedge p_1 \wedge q_2$ este falsă, deci implicația $(q_1 \wedge p_1 \wedge q_2) \Rightarrow (q_1 \wedge p_2 \wedge q_2)$ este adevărată, deci propoziția finală este adevărată. Dacă q_1 și q_2 sunt adevărate, singurul mod în care implicația $[(q_1 \wedge p_1 \wedge q_2) \Rightarrow (q_1 \wedge p_2 \wedge q_2)]$ ar fi falsă ar fi ca premisa să fie adevărată și concluzia falsă, caz în care p_1 ar fi adevărată și p_2 falsă, deci implicația $p_1 \Rightarrow p_2$ ar fi oricum falsă, deci propoziția finală care trebuia demonstrată ar fi adevărată (fals implică orice). Cazurile $X = \emptyset$ și $X = Y = \emptyset$ sunt astfel incluse în demonstrație.

3. Dacă $V \subseteq W$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$

Demonstrație:

Fie $b \in B$, $a \in A$ și $V, W \in \mathcal{P}(B)$, $f: A \to B$.

$$\left[(V \subseteq W) \Rightarrow \left(f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)\right)\right] \Leftrightarrow \Big[[(b \in V) \Rightarrow (b \in W)] \Rightarrow \left[\left(a \in f^{-1}(V)\right) \Rightarrow \left(a \in f^{-1}(W)\right)\right]\Big] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{[(b \in V) \Rightarrow (b \in W)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[[(a \in A) \wedge \left((\exists c)\ c \in V\right) \wedge (f^{-1}(c) = a)] \Rightarrow [(a \in A) \wedge \left((\exists d)\ d \in W\right) \wedge (f^{-1}(d) = a)]\right]\}$$

Instanțiem $c = b$ și $d = b$, iar propoziția devine

$$\{[(b \in V) \Rightarrow (b \in W)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{[(a \in A) \wedge (b \in V) \wedge (f^{-1}(b) = a)] \Rightarrow [(a \in A) \wedge (b \in W) \wedge (f^{-1}(b) = a)]\}\}$$

Notăm propozițiile $b \in V$ cu p_1, $b \in W$ cu p_2, $a \in A$ cu q_1 și $f^{-1}(b) = a$ cu q_2. Astfel, propoziția de demonstrat devine

$$(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow [(q_1 \wedge p_1 \wedge q_2) \Rightarrow (q_1 \wedge p_2 \wedge q_2)]$$

Dacă vreuna dintre propozițiile q_1 sau q_2 este falsă, atunci conjuncția $q_1 \wedge p_1 \wedge q_2$ este falsă, deci implicația $(q_1 \wedge p_1 \wedge q_2) \Rightarrow (q_1 \wedge p_2 \wedge q_2)$ este adevărată, deci propoziția finală este adevărată. Dacă și q_1 și q_2 sunt adevărate, singurul mod în care implicația $(q_1 \wedge p_1 \wedge q_2) \Rightarrow (q_1 \wedge p_2 \wedge q_2)$ ar fi falsă ar fi ca premisa să fie adevărată și concluzia falsă, caz în care p_1 ar fi adevărată și p_2 falsă, deci implicația $p_1 \Rightarrow p_2$ ar fi oricum falsă, deci propoziția finală care trebuia demonstrată ar fi adevărată (fals implică orice). Cazurile $V = \emptyset$ și $V = W = \emptyset$ sunt astfel incluse în demonstrație.

4. $X \neq \emptyset \Leftrightarrow f(X) \neq \emptyset$

Demonstrație:

$$[X \neq \emptyset \Leftrightarrow f(X) \neq \emptyset] \Leftrightarrow \Big[[(\exists a)(a \in X)] \Leftrightarrow \big[(\exists b)\big(b \in f(X)\big)\big]\Big] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big\{[(\exists a)(a \in X)] \Leftrightarrow \Big[(\exists b)\big[(b \in B) \wedge (\exists c)[c \in X \wedge f(c) = b]\big]\Big]\Big\}$$

Putem instanția c = a și propoziția de demonstrat devine

$$[(\exists a)(a \in X)] \Leftrightarrow \big[(\exists b)[(b \in B) \wedge (\exists a)(a \in X \wedge f(a) = b)]\big]$$

Dacă X este o mulțime vidă, atunci propoziția este o echivalență de două propoziții false, deci este adevărată.

Dacă X este nevidă, atunci fixăm a și avem de demonstrat:

$$(a \in X) \Leftrightarrow \big[(\exists b)\big((b \in B) \wedge (a \in X) \wedge f(a) = b\big)\big]$$

Implicația directă este dedusă din definiția funcției f pe submulțimea X a lui A.

Implicația inversă este evidentă pentru că dacă avem conjuncția adevărată $(\exists b)\big((b \in B) \wedge (a \in X) \wedge f(a) = b\big)$, atunci $(a \in X)$ trebuie să fie adevărată.

5. $[f^{-1}(V) \neq \emptyset] \Leftrightarrow [V \cap f(A) \neq \emptyset]$

Demonstrație:

$$\{[f^{-1}(V) \neq \emptyset] \Leftrightarrow [V \cap f(A) \neq \emptyset]\} \Leftrightarrow \big\{(\exists a)\big(a \in f^{-1}(V)\big) \Leftrightarrow (\exists b)\big[(b \in V) \wedge \big(b \in f(A)\big)\big]\big\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{(\exists a)[(a \in A) \wedge (\exists c)(c \in V \wedge f(a) = c)] \Leftrightarrow (\exists b)[(b \in V) \wedge (\exists d)(d \in A \wedge f(d) = b)]\} \quad (***)$$

Putem instanția d = a și c = b și propoziția (***) devine:

$$[a \in A \wedge (b \in V \wedge f(a) = b)] \Leftrightarrow [b \in V \wedge (a \in A \wedge f(a) = b)]$$

care reiese imediat adevărată din proprietățile de asociativitate și comutativitate ale conjuncției.