Cursul2

March 10, 2025

0.1 Spații vectoriale

0.1.1 Definiție

0.1.2 Un spațiu vectorial sau spațiu liniar este o mulțime L, ale cărei elemente sînt numite vectori pentru care am definit două operații:

- suma, care a asociază la doi vectori un al treilea $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$;
- înmulțirea, carea asociază unui vector și unui un număr real un alt vector $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Aceste operații satisfac un anumit număr de proprietăți: - $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$; - $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$; - Există un vector $0 \in L$ cu proprietatea că pentru orice vector $\mathbf{x}$: $0+\mathbf{x} = \mathbf{x}+0 = \mathbf{x}$; - Pentru orice vector $\mathbf{x}$ există un vector $-\mathbf{x}$ cu proprietatea că $\mathbf{x}-\mathbf{x} = 0$; - $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$; - $(\alpha+\beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$; - $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$; - $1x = x$ și $0x = 0$;

Scalarii sînt numere reale, dar la fel pot fi luate și numere complexe sau dintr-un corp oarecare. Cu unele excepții toate rezultatele prezentate vor fi valabile pentru orice corp de scalari.

Exemple de spații vectoriale: - Mulțimea vectorilor din plan sau spațiu; - Cu operațiile definite pentru matrice obținem o structură de $\mathbb{K}-$spațiu vectorial pe mulțimea matricelor de tip (m, n), notată $M_{m,n}(\mathbb{K})$, unde $\mathbb{K}$ este un corp; - Dacă matricele au doar o linie sau doar o coloană obținem spațiul $\mathbb{K}^n$; - L, spațiul funcțiilor continue definite pe intervalul $[a, b]$ cu valori reale sau complexe; - L, mulțimea tuturor polinoamelor cu coeficienți în corpul $\mathbb{K}$;

O submulțime $L' \subset L$ a unui spațiu vectorial se numește subspațiu dacă pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L'$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in L'$ și pentru orice scalar α și orice $\mathbf{x} \in L'$, $\alpha\mathbf{x} \in L'$.

- L este subspațiu în el însuși. De asemenea $\{0\}$ este subspațiu în L, numit spațiul nul;
- Mulțimea soluțiilor unui sistem omogen este subspațiu vectorial in $\mathbb{K}^n$.

Spunem că un spațiu L este suma subspațiilor $L_1, \dots, L_k$, dacă orice vector $\mathbf{x} \in L$ se poate scrie ca o sumă $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k$ cu $\mathbf{x}_j \in L_j$. Scriem $L = L_1 + \cdots + L_k$. Dacă descompunerea este unică, atunci spunem că L este suma directă a subspațiilor $L_1, \dots, L_k$ și scriem $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$.

Lemă Presupunem că spațiul L este suma subspațiilor $L_1, \dots, L_k$ pentru ca suma să fie directă este necesar și suficient ca $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x}_1 = \cdots = \mathbf{x}_k = 0$.

Se observă că dacă $L_1, \dots, L_k$ sînt subspații, atunci $L_1 \cap \cdots \cap L_k$ este subspațiu. Cu această observație avem un criteriu alternativ pentru suma directă a 2 subspații:

Corolar Presupunem că $L = L_1 + L_2$. L este sumă directă dacă și numai dacă $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.

Un exemplu important de subspațiu vectorial este mulțimea soulțiilor unui sistem omogen.

0.1.3 Baze și dimensiune

Am văzut deja noțiunea de combinație liniară pentru vectori linie. Această noțiune se transferă la spații vectoriale:

Definiție Fie $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in L$. Vectorul $\mathbf{y} \in L$ se numește combinație liniară a vectorilor $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ dacă $\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{x}_m$ pentru niște scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$.

Se vede că pentru o mulțime de vectori fixați $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ toate combinațiile lor liniare formează un subspațiu vectorial numit acoperirea liniară a vectorilor $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$, notată $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle$. Este clar că $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = \langle \mathbf{x}_1 \rangle + \dots + \langle \mathbf{x}_m \rangle$.

Definiție Vectorii $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in L$ se numesc **liniar dependenți** dacă există o combinație liniară egală cu 0, dar cu unii dintre coeficienții $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nenuli. Dacă vectorii nu sînt liniar-dependenți atunci spunem că sînt **liniar-independenți**.

Dacă vectorii $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ sînt liniar-independenți, atunci $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = \langle \mathbf{x}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{x}_m \rangle$. Se observă că vectorii $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ sînt liniar-dependenți dacă și numai dacă unul dintre ei se scrie ca o combinație liniară a celorlalți.

Putem da acum o definiție foarte importantă:

Definiție Se numește **dimensiunea** spațiului vectorial L cel mai mare număr de vectori liniar-independenți, dacă există. Dimensiunea lui L va fi notată $\dim L$ și dacă numărul maxim de vectori liniar- independenți este finit, atunci spunem că L este finit-dimensional, iar dacă nu este finit, spunem că L este infinit-dimensional.

Un spațiu vectorial de de dimensiune 1 va fi numit dreaptă, iar unul de dimensiune 2 va fi numit plan.

Mulțimea polinoamelor de grad cel mult n este un spațiu vectorial de dimensiune $n+1$, iar spațiul $\mathbb{K}[X]$ este infinit dimensional.

E clar că dimensiunea unui subspațiu nu poate depăși dimensiunea spațiului total. Mai precis avem următoarea teoremă:

Teoremă Dacă $L' \subset L$ și $\dim L' = \dim L$ atunci $L' = L$.

Dacă dimensiunea lui L este finită și L' este un subspațiu cu $\dim L' = \dim L - 1$, atunci L' se numește hiperplan. Definiția noastră a dimensiunii are problema că nu este foarte eficientă. Teoretic trebuie să luăm toate sistemele $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ și să vedem dacă sînt liniar-independente sau nu. Studiem mai în amănunt noțiunea de dimensiune pentru a găsi o metodă de calcul mai eficientă.

Definiție Vectorii $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n$ formează o bază a lui L dacă sînt liniar-independenți și orice vector se poate scrie ca o combinație liniară a lor.

Pentru orice vector $\mathbf{x}$ avem o descompunere $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n$. Această descompunere este unică . Scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ se numesc coordonatele lui $\mathbf{x}$ în raport cu baza.

Dacă vectorii $\mathbf{x} = a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \mathbf{e}_n$ și $\mathbf{y} = b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_n \mathbf{e}_n$, atunci $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (a_n + b_n)\mathbf{e}_n$ și $\alpha \mathbf{x} = (\alpha a_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (\alpha a_n)\mathbf{x}_n$.

Din definiția bazei rezultă că într-un spațiu L de dimensiune n orice mulțime $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ de vectori liniar-independenți este o bază. Mai general avem următorul rezultat:

Teoremă. Dacă vectorii $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ sînt liniar-independenți,atunci pot fi completați la o bază, adică există $\mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ astfel încît $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ este o bază a lui L.

Corolar. Pentru orice subspațiu propriu $L' \subset L$ există un subspațiu L'' astfel încît $L = L' \oplus L''$.

Rezultatul central este următorul:

Teoremă Dacă spațiul vectorial L are o bază cu n vectori, atunci $\dim L = n$.

Teoremă $\dim\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\rangle$ este egală cu maximul numărului de vectori liniar-independenți dintre $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$.

Exemplu: Fie M o mulțime oarecare. Definim spațiul vectorial $F(M) = \{f : M \to \mathbf{K}\}$ cu operațiile $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ și $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$. Presupunem că M este finită, atunci dacă definim funcțiile $\delta_x(y) = 1$ dacă $y = x$ și 0 dacă $y \neq x$, atunci mulțimea $\{\delta_x | x \in M\}$ formează o bază în $F(M)$ și deci $\dim(F(M)) = |M|$.

Teoremă Dacă $L = L' \oplus L''$ atunci dim L =dim L+dim L''.

Cazul general al teoremei precedente este teorema lui Grassmann:

Teoremă dim $(L_1 + L_2)$ =dim L_1+dim L_2−dim $(L_1 \cap L_2)$.

Putem folosi teoria determinanților ca să calculăm dimensiunea unui (sub)spațiu vectorial. Fie $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ o bază în L, fie $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in L$. Presupunem că $\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}\mathbf{e}_j$. Atunci

$$\dim \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\rangle = \text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

0.2 Aplicații liniare

Noțiunea de aplicație liniară generalizează noțiunea de funcție liniară pe care o cunoaștem. Fie L_1 și L_2 spații vectoriale. O aplicație $T : L_1 \to L_2$ se numește liniară dacă - $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$; - $T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x})$.

O aplicație liniară mai este numită și operator sau endomorfism dacă $L_1 = L_2$.

Exemple de aplicații liniare: - Aplicația identică $L \mapsto L$ este liniară; - Dacă $L = \mathbb{K}[X]$ atunci $P(X) \mapsto P'(X)$ este liniară; - Presupunem că $L = L_1 \oplus L_2$. Atunci orice vector $\mathbf{x} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x}_2$ cu $\mathbf{x}_i \in L_i$ unice. Aplicația $P : L \to L_1$, $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$ este liniară și se numește proiecția pe L_1 paralelă cu L_2.

Presupunem acum că L_1 și L_2 sînt spații finit dimensionale și că în fiecare am fixat cîte o bază $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, respectiv $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$. Fie $T : L_1 \to L_2$ o aplicație liniară. Orice $\mathbf{x} \in L_1$ se descompune ca $\mathbf{x} = a_1\mathbf{e}_1 + \dots + a_n\mathbf{e}_n$ și $T(\mathbf{x}) = a_1T(\mathbf{e}_1) + \dots + a_nT(\mathbf{e}_n)$. Vectorii $T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)$ aparțin lui L_2 și se descompun în funcție de $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$. Adică $T(\mathbf{e}_1) = a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{f}_m$ etc. Pe de altă parte $T(\mathbf{x}) = b_1\mathbf{f}_1 + \dots + b_m\mathbf{f}_m$. Făcînd substituția obținem

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Matricea A se numește matricea operatorului T în raport cu bazele $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, respectiv $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$. Avem deci că de îndată ce am fixat două baze un operator este unic determinat de matricea sa în raport cu aceste baze și reciproc dacă avem o matrice de tip (m, n) atunci aceasta definește o aplicație liniară.

Pentru două aplicații liniare $T_1, T_2 : L \to M$ definim $(T_1 + T_2)(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{x})$ și $(\alpha T_1)(\mathbf{x}) = \alpha(T_1(\mathbf{x}))$. Dacă fixăm baze în L și M și considerăm matricele celor 2 operatori A, respectiv B atunci matricea lui $T_1 + T_2$ este $A + B$ și cea a lui αT este αA.

Să luăm acum două aplicații liniare $T_1 : L_1 \to L_2$ și $T_2 : L_2 \to L_3$. Compunerea lor $T = T_2 \circ T_1 : L_1 \to L_3$. Dacă alegem cîte o bază $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$, $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$, respectiv $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$ în fiecare spațiu. Fie de asemenea A_1 matricea lui T_1 și A_2 matricea lui T_2. Atunci matricea A a lui T în raport cu bazele $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$,respectiv $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$ satisface $A = A_2 A_1$.

0.2.1 Schimbarea de reper

Fie $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ o bază a spațiului L. Luăm o altă bază $\mathbf{e_1}', \dots, \mathbf{e}'_n$ a lui L. Orice vector se scrie ca $\mathbf{x} = a_1\mathbf{e}_1 + \dots + a_n\mathbf{e}_n$ și de asemenea $\mathbf{x} = a'_1\mathbf{e}'_1 + \dots + a'_n\mathbf{e}'_n$. Fiecare $\mathbf{e}'_i = c_{1i}\mathbf{e}_1 + \dots + c_{ni}\mathbf{e}_n$ și la fel $\mathbf{e}_i = c'_{1i}\mathbf{e}'_1 + \dots + c'_{ni}\mathbf{e}'_n$. Dacă notăm cu C, respectiv C' matricele cu componentele c_{ij}, respectiv c'_{ij} avem

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

și

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}.$$

Cele două matrice C și C' sînt inverse una față de cealaltă, adică $CC' = C'C = I_n$.

Luăm acum o aplicație liniară $T : L \to M$, iar în fiecare spațiu luăm cîte o bază $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$,$\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m$ respectiv $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ și $\mathbf{f}'_1, \dots, \mathbf{f}'_n$. Fie A, respectiv A' matricele lui T în raport cu fiecare pereche de baze. De asemenea fie C matricea de trecere de la $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m$ la $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ și D matricea de trecere de la $\mathbf{f}'_1, \dots, \mathbf{f}'_n$ la $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$. Atunci $A'C^{-1} = D^{-1}A$, sau echivalent $A' = D^{-1}AC$. Aceasta este formula de schimbare a matricei la schimbarea bazei.

Cînd $n = m$ putem trece la determinanți și ținînd cont de proprietatea de multiplicitate a acestora avem că $det(A') = \det(A)\frac{det(C)}{det(D)}$. Deci dacă matricea lui T este nesingulară pentru două baze, va fi nesingulară pentru orice alte două baze.

În cazul special în care T este endomorfism, atunci $D = C$ și $A' = C^{-1}AC$ și prin urmare $det(A') = det(A)$. Astfel putem defini determinantul unui endomorfism $T : L \to L$, ca $det(A)$ pentru o anumită bază, dar care nu depinde de baza aleasă.

0.2.2 Izomorfisme de spații vectoriale. Rangul unei aplicații liniare

O aplicație liniară $T : L \to M$ se numește izomorfism dacă este bijectivă. Se vede imediat că T^{-1} este tot o aplicație liniară. Avem un rezulat fundamental:

Teoremă Două spații liniare L și M sînt izomorfe dacă și numai dacă $\dim L = \dim M$.

Exemplu Fie $L \subset \mathbb{K}^n$ mulțimea soluțiilor unui sistem liniar omogen $A\mathbf{x} = 0$. Dacă $r = \text{rang } A$ atunci $L \simeq \mathbb{K}^{n-r}$.

Orice izomorfism de spații vectoriale este nesingular și reciproc, dacă $T : L \to L$ este nesingular, atunci T este izomorfism.

Studiind mai atent definiția izomorfismelor sîntem conduși la următoare noțiune:

Definiție. Fie $T : L \to M$ un operator. Ker $T = \{\mathbf{x} \in L | T(\mathbf{x}) = 0\}$. Acest subspațiu se numește nucleul lui T.

Pentru o aplicație liniară T nucleul este un spațiu al lui L și la fel imaginea $T(L)$ este un subspațiu al lui M.

Teoremă Un operator $T : L \to M$ între spații de aceeași dimensiune este izomorfism dacă și numai dacă Ker $T = \{0\}$.

Teoremă Un operator $T : L \to M$ între spații de aceeași dimensiune este izomorfism dacă și numai dacă $T(L) = M$.

Presupunem mai departe că $T : L \to M$ este o aplicație liniară între spații vectoriale finit-dimensionale. Se numește **rangul** lui T dimensiunea lui $T(L)$. Evident rang $T \le n = \dim M$.

Teoremă Fie $T : L \to M$ o aplicație liniară de rang r. Atunci există cîte o bază în L, respectiv M astfel că matricea lui T este de forma

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde I_r este matricea identică de dimensiune r.

Acest rezultat este echivalent cu egalitatea $\dim \operatorname{Ker} T + \dim T(L) = \dim L$.

0.3 Dualitate

Studiem acum transformările liniare $T : L \to \mathbb{K}$. Acestea formează un spațiu vectorial, notat cu L^*, numit spațiul dual.

Teoremă Dacă L este finit dimensional, atunci $\dim(L^*) = \dim(L)$.

Fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în L. Atunci există o bază $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ în L^*, definită prin $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Putem merge mai departe și definim al doilea spațiu dual $L^{**} := (L^*)^*$.

Teoremă Există un izomorfism $F : L \to L^{**}$, care nu depinde de alegerea unei baze.

Fie $L' \subset L$ un subspațiu vectorial. Notăm cu $\operatorname{Ann}(L') = \{f \in L^* | f(x) = 0, \forall x \in L'\}$, numit anihilatorul lui L'. Se vede că $Ann(L')$ este un subspațiu vectorial.

Teoremă $\dim(\operatorname{Ann}(L')) = \dim(L) - \dim(L')$.

Dacă $T : L \to M$ este o aplicație liniară, aceasta induce o aplicație liniară $T^* : M^* \to L^*$. Dacă A este matricea lui T în raport cu niște baze, atunci matricea lui T^* în raport cu bazele duale este transpusa lui A, notată A^*.

0.4 Subspații invariante. Vectori și valori proprii.

În această parte studiem endomorfisme $T : L \to L$. Am văzut că la schimbarea bazei matricea lui T se transformă după formula $A' = C^{-1}AC$. Două matrice care satisfac această egalitate se numesc asemenea. Se vede că două matrice asemenea sînt asociate aceluiași endomorfism.

Definiție Un subspațiu $L' \subset L$ se numește invariant pentru T, dacă pentru orice $\mathbf{x} \in L'$, $T(\mathbf{x}) \in L'$.

Evident că dacă L' este un spațiu invariant, atunci T induce un endomorfism $T' : L' \to L'$. Dacă luăm o bază $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ a lui L' și o completăm la o bază $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a a lui L, atunci matricea lui T este de forma

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix}.$$

Dacă este posibil să descompunem $L = L' \oplus L''$ cu L'' invariant la rîndul său, atunci $B' = 0$ și matricea lui T este de forma

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix},$$

unde C' este matricea restricției lui T la L''. Analog dacă $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ cu fiecare subspațiu invariant, atunci matricea lui T este bloc-diagonală

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}.$$

Cel mai simplu caz este cel al unui subspațiu invariant de dimensiune 1. În acest caz există un vector nenul $\mathbf{e}$ și un scalar λ astfel încît $T(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e}$.

Definiție Dacă vectorul $\mathbf{e} \neq 0$ satisface relația de mai sus spunem că este **vector propriu**, iar scalarul λ se numește **valoare proprie**.

Toți vectorii proprii corespunzători valorii proprii λ împreună cu 0 formează un subspațiu vectorial, numit subspațiul propriu corespunzător lui λ, notat cu L_λ.

0.4.1 Cum calculăm practic vectorii și valorile proprii

Luăm o bază arbitrară din L și scriem matricea A a lui T în raport cu aceasta. Presupunem că vectorul propriu $\mathbf{e} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_m\mathbf{e}_m$. Atunci $T(\mathbf{e})$ va avea componentele

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Prin urmare sistemul $(A - \lambda I_m)\mathbf{x} = 0$ va trebui să aibă soluții nenule. Aceasta se întîmplă dacă și numai dacă $det(A - \lambda I_m) = 0$. Acesta este un polinom $P_A(\lambda)$ de gradul m în λ, numit **polinomul caracteristic** al lui A.

În mod practic mai întîi determinăm rădăcinile polinomului caracteristic. Acestea vor fi valorile proprii, apoi pentru fiecare în parte rezolvăm sistemul corespunzător și obținem vectorii proprii.

Proprietăți și observații: - Polinomul caracteristic nu depinde de alegerea bazei, ci doar de endomorfism; - Se poate ca un endomorfism să nu aibă vectori proprii (și deci nici valori proprii); - Dacă există o bază a lui L formată din vectori proprii, atunci matricea lui T va fi de forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

și T se numește diagonalizabil. - Unei valori proprii λ îi putem asocia două numere: multiplicitate aritmetică m_λ=multiplicitatea lui λ ca rădăcină a lui $P_T(\lambda)$ și multiplicitatea geometrică $g_\lambda = \dim L_\lambda$. Întotdeauna $g_\lambda \leq m_\lambda$; - la valori proprii distincte corespund vectori proprii liniar-independenți; - Un endomorfism peste un spațiu complex este diagonalizabil dacă polinomul său caracteristic are doar rădăcini simple; - Un endomorfism este diagonalizabil dacă și numai dacă $g_\lambda = m_\lambda$ pentru orice valoare proprie λ.

[2]:
```
A=matrix([[4,-1,-2],[2,1,-2],[1,-1,1]])
A
```

[2]:
```
[ 4 -1 -2]
[ 2  1 -2]
[ 1 -1  1]
```

[3]:
```
P=A.charpoly()
P
```

[3]:
```
x^3 - 6*x^2 + 11*x - 6
```

[4]:
```
P.factor()
```

[4]:
```
(x - 3) * (x - 2) * (x - 1)
```

[5]:
```
A.eigenvalues()
```

[5]:
```
[3, 2, 1]
```

[6]:
```
A.eigenvectors_right()
```

[6]:
```
[(3,
  [
  (1, 1, 0)
  ],
  1),
 (2,
  [
  (1, 0, 1)
  ],
  1),
 (1,
  [
  (1, 1, 1)
  ],
  1)]
```

[7]:
```
B=matrix([[4,-4,2],[2,-2,1],[-4,4,-2]])
```

[8]:
```
P=B.charpoly()
P
```

[8]:
```
x^3
```

[9]:
```
B.eigenvectors_right()
```

[9]:
```
[(0,
  [
  (1, 0, -2),
  (0, 1, 2)
  ],
  3)]
```

[10]:
```
B.jordan_form()
```

[10]:
```
[0 1|0]
[0 0|0]
[---+-]
[0 0|0]
```

[ ]:
```
```