

Curs1

March 10, 2025

1 Adresa de e-mail: halanay@fmi.unibuc.ro

2 Notebook-urile se află la: <https://github.com/adhalanay/curs-id>

2.1 Sisteme Liniare

2.1.1 Ecuații liniare

Una dintre problemele fundamentale ale Algebrei Liniare este aceea de a studia mulțimea soluțiilor unui sistem liniar. Mai precis ne interesează să rezolvăm simultan mai multe ecuații liniare de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (S1)$$

Un astfel de sistem va fi scris mai pe scurt $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, unde A este o matrice cu m linii și n coloane, \mathbf{x} și \mathbf{b} sînt matrice cu o coloană. Matricea A se numește *matricea sistemului*, \mathbf{x} se numește *vectorul variabilelor*, iar \mathbf{b} se numește *vectorul termenilor constanți*. De asemenea vom folosi *matricea extinsă* a sistemului

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Să ne uităm mai atent la expresia $a_1c_1 + \dots + a_nc_n$ atunci cînd lăsăm valorile c_1, \dots, c_n să varieze liber. Obținem astfel o funcție care asociază fiecărei linii (c_1, \dots, c_n) un număr.

Definiție O funcție F care asociază unei linii de lungime n un număr și pentru care există niște coeficienți a_1, \dots, a_n astfel încît $F(c_1, \dots, c_n) = a_1c_1 + \dots + a_nc_n$ se numește **liniară**.

Această definiție generalizează noțiunea de proporționalitate directă din cazul numerelor reale. Ca să exploatăm această analogie mai departe vom introduce niște operații pentru linii de numere:

Definiție Fie \mathbf{c} și \mathbf{d} două linii de numere $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ și $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$. Suma lor $\mathbf{c} + \mathbf{d} = (c_1 + d_1, \dots, c_n + d_n)$. Produsul dintre un număr p și o linie \mathbf{c} este $p\mathbf{c} = (pc_1, \dots, pc_n)$.

Teoremă O funcție este liniară dacă și numai dacă $F(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = F(\mathbf{c}) + F(\mathbf{d})$ și $F(p\mathbf{c}) = pF(\mathbf{c})$.

Pentru două funcții liniare F și G definite pentru linii de aceeași lungime - suma lor $F + G$ prin $(F + G)(\mathbf{c}) = F(\mathbf{c}) + G(\mathbf{c})$; - produsul dintre o funcție F și un număr p prin $(pF)(\mathbf{c}) = p(F(\mathbf{c}))$.

Sistemul liniar ($S1$) poate fi acum rescris cu ajutorul a m funcții liniare:

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{x}) &= b_1 \\ F_2(\mathbf{x}) &= b_2 \\ \dots \\ F_m(\mathbf{x}) &= b_m. \end{cases}$$

cu $F_i(\mathbf{x}) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$.

O linie \mathbf{c} se numește soluție a sistemului dacă înlocuind \mathbf{x} cu \mathbf{c} în fiecare ecuație obținem identități: $F_1(\mathbf{c}) = b_1, \dots, F_m(\mathbf{c}) = b_m$.

Nu orice sistem are o soluție. Dacă sistemul are soluție, acesta se numește **compatibil**. Dacă nu are nici o soluție, sistemul se numește **incompatibil**. Un sistem compatibil avînd o singură soluție se numește **determinat**, iar dacă are mai multe **nedeterminat**.

Sistemul

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ x + y &= 1. \end{cases}$$

este determinat. Geometric poate fi interpretat ca punctul de intersecție a două drepte care nu sînt paralele.

Pe de altă parte sistemul

$$\begin{cases} x - 2y &= 3 \\ 2x - 4y &= 6. \end{cases}$$

este nedeterminat, a doua ecuație fiind doar prima înmulțită cu 2. Se vede că pentru orice valoare a lui y găsim $x = 3 + 2y$. Sistemul are deci o infinitate de soluții.

Teoremă Dacă un sistem este compatibil nedeterminat atunci are o infinitate de soluții.

2.1.2 Metoda Gauss

Vom prezenta o metodă pentru a determina dacă un sistem este compatibil sau nu. Vom spune că două sisteme liniare sînt echivalente dacă au exact aceleași soluții. Ideea metodei Gauss este de a manipula ecuațiile unui sistem liniar pentru a obține un sistem echivalent, dar mai simplu. Operațiile pe care le facem sînt următoarele: - permutarea a două ecuații (tipul I); - adăugarea la una dintre ecuații a unei alte ecuații înmulțită cu un număr (tipul II).

Se subînțelege că celelalte ecuații rămîn neschimbate.

Acum putem prezenta algoritmul lui Gauss. Vom începe prin a permuta prima ecuație cu o ecuație avînd coeficientul din fața lui x_1 diferit de 0. Dacă acest lucru nu este posibil, aceasta înseamnă că variabila x_1 nu apare explicit și vom renumera variabilele astfel încît să obținem $a_{11} \neq 0$.

Acum aplicăm o serie de transformări de al doilea tip. Anume vom înmulți prima ecuație cu cîte un număr c_2, c_3, \dots, c_m și o vom adăuga la ecuațiile corespunzătoare astfel ca în fiecare din ele coeficientul lui x_1 să fie 0. Evident avem

$$c_2 = -\frac{a_{21}}{a_{11}}, \dots, c_m = -\frac{a_{m1}}{a_{11}}.$$

Obținem astfel un sistem de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots \\ a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Avem de rezolvat acum un sistem de $m - 1$ ecuații și $n - 1$ necunoscute. Dacă acest sistem este incompatibil atunci și sistemul inițial este incompatibil. Dacă este determinat, atunci se poate cu ușurință calcula o soluție a sistemului total. Metoda Gauss ne permite să demonstrăm câteva teoreme despre sistemele liniare:

Teoremă Un sistem care are mai multe necunoscute decât ecuații este incompatibil sau nedeterminat.

Corolar Dacă într-un sistem omogen (adică un sistem cu toți termenii liberi egali cu 0) avem mai multe necunoscute decât ecuații atunci sistemul are o soluție diferită de soluția nulă.

Teoremă Dacă un sistem are numărul de ecuații egal cu numărul de necunoscute, atunci are soluție unică sau nu indiferent de valorile termenilor liberi.

Corolar (Alternativa lui Fredholm) Un sistem pătratic are soluție unică dacă și numai dacă sistemul omogen asociat are doar soluția nulă.

Să privim mai de aproape metoda Gauss. Se poate întâmpla ca nu toate necunoscutele x_2, \dots, x_n să apară în sistemul redus, adică se poate ca toți coeficienții din fața unei necunoscute să fie 0. Dacă x_k este prima necunoscută care are un coeficient diferit de 0 avem sistemul echivalent.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{2k}x_k + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a''_{3l}x_l + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \dots \\ a''_{ml}x_l + \dots + a''_{mn}x_n = b''_m \end{cases}$$

Am ales deja x_l astfel încât coeficientul său este diferit de 0. Se pune întrebarea de câte ori putem repeta acest procedeu? Ne oprim atunci când coeficienții tuturor necunoscutelor rămase sînt 0. Sistemul final va fi

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{2k}x_k + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \dots \\ \bar{a}_{rs}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \\ 0 = \bar{b}_{r+1} \\ \dots \\ 0 = \bar{b}_m. \end{cases}$$

Uneori $m = r$ și atunci nu avem egalități de tipul $0 = \bar{b}_t$. Un sistem ca cel de mai sus spunem că este **în forma eșalon**.

Teoremă Orice sistem liniar este echivalent cu unul în forma eșalon.

Se vede că dacă în sistemul în formă eşalon avem $0 = \bar{b}_r$ cu $\bar{b}_r \neq 0$, atunci sistemul este incompatibil. Pe de altă parte dacă avem doar egalități de forma $0 = 0$ atunci numim necunoscutele x_1, \dots, x_s necunoscute principale, iar celelalte necunoscute, dacă există vor fi numite secundare sau libere. Dând valori arbitrare necunoscutelor secundare obținem valori corespunzătoare pentru cele principale.

Un sistem fără necunoscute secundare care este compatibil va fi determinat. Avem următorul rezultat

Teoremă Un sistem compatibil este determinat dacă și numai dacă forma sa eşalon este

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{22}x_2 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \dots \\ \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n. \end{cases}$$

Un sistem pătratic este compatibil determinat dacă și numai dacă toate elementele de pe diagonală în forma eşalon sînt nenule.

2.2 Matrice și determinanți

Pentru început considerăm sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Ca să rezolvăm sistemul putem începe prin a elimina x_2 . Pentru a aceasta înmulțim prima ecuație cu a_{22} și o adunăm cu a doua înmulțită cu $-a_{12}$. Obținem că $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$. Dacă $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ atunci $x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$. La fel $x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$. Numărul $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se numește determinantul matricei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

notat

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Cu această notație avem

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

La fel se procedează pentru sisteme de dimensiune 3.

Fie acum

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Determinantul lui A va fi definit prin inducție:

- pentru $n = 1$ este a_{11} ;
- dacă știm să calculăm determinantul de ordin $n - 1$ atunci definim

$$\det(A) = a_{11}D_1 - a_{21}D_2 + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}D_n,$$

unde D_k este determinantul de ordinul $n - 1$ obținut din A prin scoaterea primei coloane și a liniei k .

Proprietățile fundamentale ale determinațiilor :

1. Determinantul este o funcție liniară de elementele unei linii a matricei;
2. Transpoziția a două linii schimbă semnul determinantului;
3. Determinantul matricei identitate I_n este 1 (I_n are 1 pe diagonală și 0 în rest);
4. Dacă două linii ale matricei sînt proporționale atunci determinantul este 0;
5. Dacă efectuăm o transformare elementară de tipul II pe liniile matricei determinantul nu se schimbă;
6. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul transpusei.

Cu aceste proprietăți avem o metodă simplă de calcul pentru determinanți. Matricea A poate fi adusă printr-o serie de transformări elementare la forma superior triunghiulară

$$A = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix},$$

atunci determinantul lui A este pînă la un semn egal cu produsul $a'_{11} \dots a'_{nn}$.

Teoremă Un sistem de n ecuații și n necunoscute are soluție unică dacă și numai dacă determinantul matricei sistemului este nenul.

Definiție O matrice pătratică al cărei determinant este nul se numește *singulară*, iar una al cărei determinant este diferit de 0 va fi numită *nesingulară*.

Teoremă Fie F o funcție de matrice pătratice care satisface proprietățile 1. și 2. și este liniară față de linii. Atunci există un număr k astfel încît $F(A) = k \cdot \det(A)$ pentru orice matrice A .

Cu ajutorul determinanților putem da o formulă generală pentru soluția unui sistem liniar pătratic al cărui determinant D este nenul:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, \dots, n$$

unde D_k este determinantul care se obține înlocuind coloana k a matricei sistemului cu coloana termenilor liberi.

2.2.1 Rangul unei matrice. Operații cu matrice

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Un minor de ordin r al matricei A este determinantul de ordinul r obținut prin eliminarea tuturor termenilor lui A cu excepția a celor aflați la intersecția a r linii și r coloane. Evident trebuie ca $r \leq m$ și $r \leq n$.

Definiție Rangul matricei A este cel mai mare r pentru care există un minor de ordinul r nenul.

Avem

1. Rangul unei matrice coincide cu rangul transpusei sale;
2. Rangul unei matrice nu se schimbă dacă aplicăm transformări elementare;

Rangul ne permite să dăm un criteriu pentru rezolubilitatea unui sistem liniar:

Teoremă (Kronecker-Capelli) Sistemul liniar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ este compatibil dacă și numai dacă rangul lui A este egal cu rangul lui \bar{A} .

2.3 Operații cu matrice

1. Fie A o matrice de tip (m, n) și p un număr. Produsul pA este matricea de tip (m, n) obținută înmulțind toți coeficienții lui A cu p ;
2. Fie A și B două matrice de tip (m, n) , $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Suma celor două matrice este matricea $C = A + B$, de tip (m, n) , $C = (c_{ij})$ cu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;
3. Fie acum A de tip (m, n) , B de tip (n, k) . Produsul lor C este o matrice de tip (m, k) cu $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$.

Aceste operații satisfac un număr de proprietăți fundamentale:

1. Adunarea este comutativă și asociativă, iar matricea cu toate elementele nule este elementul neutru;
2. Înmulțirea matricelor este asociativă;
3. Dacă ne limităm la matrice pătratice, matricea I_n , care are 1 pe diagonală și în rest 0 este element neutru la înmulțire;
4. Dacă A și B sînt matrice pătratice, atunci $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
5. Tot pentru matrice pătratice : dacă determinantul matricei A este diferit de 0, există și este unică o matrice A^{-1} cu proprietatea că $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
6. Înmulțirea este distributivă față de adunare: $A(B+C) = AB+BC$ și $(A+B)C = AC+BC$;
7. $A * (pB) = p(A * B)$.

```
[25]: A=matrix(RR, [[1,2],[1,3],[2,1]])
A
```

```
[25]: [1.0000000000000000 2.0000000000000000]
      [1.0000000000000000 3.0000000000000000]
      [2.0000000000000000 1.0000000000000000]
```

```
[26]: B=matrix(RR, [[1,2,0],[1,1,2]])
B
```

```
[26]: [ 1.0000000000000000 2.0000000000000000 0.0000000000000000]
      [ 1.0000000000000000 1.0000000000000000 2.0000000000000000]
```

```
[27]: C=A*B  
C
```

```
[27]: [3.000000000000000 4.000000000000000 4.000000000000000]  
[4.000000000000000 5.000000000000000 6.000000000000000]  
[3.000000000000000 5.000000000000000 2.000000000000000]
```

```
[28]: det(C)
```

```
[28]: 0.000000000000000
```

```
[30]: C.rank()
```

```
[30]: 3
```

```
[24]: B*A
```

```
[24]: [3 8]  
[6 7]
```

```
[28]: D1=(B*A).inverse()  
D1
```

```
[28]: [-0.259259259259259 0.296296296296296]  
[ 0.222222222222222 -0.111111111111111]
```

```
[29]: D2=B*A  
D2
```

```
[29]: [3.000000000000000 8.000000000000000]  
[6.000000000000000 7.000000000000000]
```

```
[30]: D1*D2
```

```
[30]: [ 1.000000000000000 4.44089209850063e-16]  
[ 0.000000000000000 1.000000000000000]
```

```
[31]: D2*D1
```

```
[31]: [ 1.000000000000000 0.000000000000000]  
[2.22044604925031e-16 1.000000000000000]
```

```
[31]: 0.1+0.2-0.3
```

```
[31]: 5.55111512312578e-17
```

```
[33]: C1=matrix(QQ,[[1,2],[2,3]])  
C2=matrix(QQ,[[1,-1],[-1,-1]])
```

```
[35]: b=vector(QQ,[1,2])  
b
```

```
[35]: (1, 2)
```

```
[36]: C2*b
```

```
[36]: (-1, -3)
```

```
[37]: C1+C2
```

```
[37]: [2 1]  
      [1 2]
```

```
[38]: 3*C1
```

```
[38]: [3 6]  
      [6 9]
```

```
[12]: D=matrix(QQ,[[1,1,-1],[3,1,2],[1,-1,1]])  
      det(D)
```

```
[12]: 6
```

```
[8]: D1=matrix(QQ,[[5,1,-1],[4,1,2],[6,-1,1]])  
     det(D1)
```

```
[8]: 33
```

```
[10]: D2=matrix(QQ,[[1,5,-1],[3,4,2],[1,6,1]])  
      det(D2)
```

```
[10]: -27
```

```
[13]: D3=matrix(QQ,[[1,1,5],[3,1,4],[1,-1,6]])  
      det(D3)
```

```
[13]: -24
```

```
[15]: x1=det(D1)/det(D)  
x1
```

```
[15]: 11/2
```

```
[18]: D.echelonize()  
D
```



```
[18]: [1 0 0]
      [0 1 0]
      [0 0 1]
```

```
[19]: M=matrix(QQ,[[1,1,-1],[2,3,-2],[3,2,-3]])
      M
```

```
[19]: [ 1  1 -1]
      [ 2  3 -2]
      [ 3  2 -3]
```

```
[20]: det(M)
```

```
[20]: 0
```

```
[21]: M.rank()
```

```
[21]: 2
```

```
[22]: Mr = matrix(RR,[[1,1,-1],[2,3,-2],[3,2,-3]])
      det(Mr)
```

```
[22]: 0.0000000000000000
```

```
[24]: Mr.rank()
```

```
[24]: 2
```

```
[32]: A=matrix(QQ,[[1,1,-1],[2,3,3],[1,-1,-3]])
```

```
[33]: A.inverse()
```

```
[33]: [-3/4  1/2  3/4]
      [ 9/8 -1/4 -5/8]
      [-5/8  1/4  1/8]
```

```
[ ]:
```