Logica matematică și computațională – conf. dr. Claudia Mureșan

Teme colective nr. 1-3 – grupa 1 Informatică ID (2023-2024)

I. De demonstrat semantic (în Prolog)

Am prezentat și în acest document rezolvările în Prolog, dar o variantă mai succintă a acestora e încărcată și separat, într-un document .pl.

Pentru orice mulțimi A, B, C, D, T a.î. $A \subseteq T$ și $B \subseteq T$, au loc următoarele proprietăți, unde am notat cu $\overline{M} := T \setminus M$ pentru orice $M \in \mathcal{P}(T)$:

1) $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \subsetneq B\ sau\ A = B)$

ex1 :- not((pereche(A,B), not(echiv(implica(A,B),(inclstr(A,B);echiv(A,B)))))).

2) $(A \subseteq B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C)\ și\ (A \subsetneq B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C)$

ex2 :- not((triplet(A,B,C), not((implica((implica(A,B), inclstr(B,C)), inclstr(A,C)),
implica((inclstr(A,B),inclstr(B,C)), inclstr(A,C)))))).

% varianta cu cele doua predicate separate

ex21 :- not((triplet(A,B,C), not(implica((implica(A,B), inclstr(B,C)), inclstr(A,C))))).

ex22 :- not((triplet(A,B,C), not(implica((inclstr(A,B),inclstr(B,C)), inclstr(A,C))))).

3) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C \subseteq B \cup C\ și\ \ A \cap C \subseteq B \cap C\ și\ A \setminus C \subseteq B \setminus C)$

ex3 :- not((triplet(A,B,C), not(implica(implica(A,B), (implica(A;C, B;C), implica((A,C),(B,C)), implica((A,not(C)),
(B,not(C))))))))).

4) $(A \subseteq B\ și\ C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C \subseteq B \cup D\ și\ \ A \cap C \subseteq B \cap D\ și\ \ A \setminus D \subseteq B \setminus C)$

ex4 :- not((cvadruplet(A,B,C,D), not(implica((implica(A,B),implica(C,D)),
(implica((A;C),(B;D)), implica((A,C),(B,D)), implica((A,not(D)),(B,not(C)))))))).

5) $(A \subseteq B\ și\ A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$

ex5 :- not((triplet(A,B,C), not(echiv((implica(A,B), implica(A,C)), implica(A,(B,C)))))).

6) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

ex6 :- not((pereche(A,B), not(echiv((A,B,not(A)),false)))).

7) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ și $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

ex7 :- not((pereche(A,B), not((echiv((A,not(B)),(A,not((A,B)))), echiv(A xor B,((A;B),not((A,B)))))))).

% varianta cu cele doua predicate separate:

ex71 :- not((pereche(A,B), not(echiv((A,not(B)),(A,not((A,B))))))).

ex72 :- not((pereche(A,B), not(echiv(A xor B,((A;B),not((A,B))))))).

8) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \setminus A = B$

ex8 :- not((pereche(A,B), not(echiv(echiv((A,B),false), echiv((B,not(A)),B))))).

Proprietățile cu complementare față de T să fie demonstrate semantic în câte două moduri:

a) considerând un element arbitrar *x* și apartenența sa la mulțimile *A*, *B* și *T* (ca proprietăți cu valori booleene arbitrare);

b) considerând un element arbitrar $x \in T$ și apartenența sa la mulțimile *A* și *B* (i.e. cu proprietatea $x \in T$ presupusă adevărată și numai proprietățile $x \in A$ și $x \in B$ ca având valori booleene arbitrare).

9) a doua lege a lui De Morgan: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

% cu t avand o valoare booleana arbitrara:

ex9arbitrar :- not((triplet(A,B,T), implica(A,T), implica(B,T), not(echiv((T,not((A,B))), ((T,not(A)); (T,not(B))))))).

% cu t presupusa adevarata:

ex9adev :- not((pereche(A,B), not(echiv(not((A,B)),(not(A);not(B)))))).

10) $A \subsetneq B \Leftrightarrow \bar{B} \subsetneq \bar{A}$

% cu t avand o valoare booleana arbitrara:

ex10arbitrar :- not((triplet(A,B,T), implica(A,T), implica(B,T), not(echiv(inclstr(A,B), inclstr((T,not(B)),(T,not(A))))))).

% cu t presupusa adevarata:

ex10adev :- not((pereche(A,B), not(echiv(inclstr(A,B),inclstr(not(B),not(A)))))).

11) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq \bar{A}$

% cu t avand o valoare booleana arbitrara:

ex11arbitrar :- not((triplet(A,B,T), implica(A,T), implica(B,T), not(echiv(echiv((A,B),false), implica(B,(T,not(A))))))).

% cu t presupusa adevarata:

ex11adev :- not((pereche(A,B), not(echiv(echiv((A,B),false),implica(B,not(A)))))).

12) $A \cup B = T \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq A \Leftrightarrow \bar{A} \subseteq B$

% cu t avand o valoare booleana arbitrara:

ex12arbitrar1 :- not((triplet(A,B,T), implica(A,T), implica(B,T), not(echiv(echiv((A;B),T), implica((T,not(B)),A))))).

ex12arbitrar2 :- not((triplet(A,B,T), implica(A,T), implica(B,T), not(echiv(implica((T,not(B)),A), implica((T,not(A)),B))))).

% cu t presupusa adevarata:

ex12adev1 :- not((pereche(A,B), not(echiv(echiv((A;B),true),implica(not(B),A))))).

ex12adev2 :- not((pereche(A,B), not(echiv(implica(not(B),A),implica(not(A),B))))).

13) $(A \cup B = T \text{ și } A \cap B = \emptyset) \Leftrightarrow A = \bar{B} \Leftrightarrow B = \bar{A}$

% cu t avand o valoare booleana arbitrara:

ex13arbitrar1 :- not((triplet(A,B,T), implica(A,T), implica(B,T), not(echiv(((echiv(A;B,T)),(echiv((A,B),false))), echiv(A,(T,not(B))))))).

ex13arbitrar2 :- not((triplet(A,B,T), implica(A,T), implica(B,T), not(echiv(echiv(A,(T,not(B))), echiv(B,(T,not(A))))))).

% cu t presupusa adevarata:

ex13adev1 :- not((pereche(A,B), not(echiv((echiv(A;B,true),echiv((A,B),false)),echiv(A,not(B)))))).

ex13adev2 :- not((pereche(A,B), not(echiv(echiv(A,not(B)),echiv(B,not(A)))))).

II. De demonstrat matematic

0 Din faptul că $\emptyset$ este mulțimea vidă fără elemente, să se deducă faptul că, pentru orice mulțime A, $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că mulțimea $A \times \emptyset \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că există perechea ordonată $(x, y) \in A \times \emptyset$. Din definiția produsului cartezian rezultă că $x \in A$ și $y \in \emptyset$. Cum mulțimea vidă este, din definiție, mulțimea fără elemente, $y \in \emptyset$ este falsă. Deci ipoteza de la care am pornit este falsă, iar $A \times \emptyset = \emptyset$. Se demonstrează analog pentru $\emptyset \times A = \emptyset$. Rezultă astfel că $\emptyset \times A = \{(a, b) | a \in \emptyset \text{ și } b \in A\}$, ceea ce implică faptul că $\emptyset$ este mulțime nevidă. Rezultă deci că și $\emptyset \times A = \emptyset$.

1 $\boldsymbol{A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)}$ **și** $\boldsymbol{(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)}$

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$$A \times (B \cup C) := \{(x, y) | x \in A \text{ și } y \in (B \cup C)\} := \{(x, y) | x \in A \text{ și } (y \in B \vee y \in C)\} =$$
$$= \{(x, y) | x \in A \text{ și } y \in B\} \vee \{(x, y) | x \in A \text{ și } y \in C\} = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Așadar, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

$$(B \cup C) \times A := \{(x, y) |\, x \in (B \cup C) \text{ și } y \in A\} := \{(x, y) | (x \in B \vee x \in C) \text{ și } y \in A\} =$$
$$= \{(x, y) | x \in B \text{ și } y \in A\} \vee \{(x, y) | x \in C \text{ și } y \in A\} = (B \times A) \cup (C \times A)$$

Așadar, $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$.

2 $\boldsymbol{A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)}$ **și** $\boldsymbol{(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)}$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$A \times (B \cap C) := \{(x,y) | x \in A \text{ și } y \in (B \cap C)\} := \{(x,y) | x \in A \text{ și } (y \in B \ \wedge \ y \in C)\} =$

$= \{(x,y) | x \in A \text{ și } y \in B\} \ \wedge \ \{(x,y) | x \in A \text{ și } y \in C\} = \ (A \times B) \cap (A \times C)$

Așadar, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

$(B \cap C) \times A := \{(x,y) | x \in (B \cap C) \text{ și } y \in A\} := \{(x,y) | (x \in B \ \wedge \ x \in C) \text{ și } y \in A\} =$

$= \{(x,y) | x \in B \text{ și } y \in A\} \ \wedge \ \{(x,y) | x \in C \text{ și } y \in A\} = \ (B \times A) \cap (C \times A)$

Așadar, $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$.

③ $\boldsymbol{A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)}$ **și** $\boldsymbol{(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)}$

3.1. $\boldsymbol{A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)}$

Putem demonstra egalitatea prin dubla incluziune.

Explicitare membru drept: $(x,y) \in A \times (B \setminus C) \ ddacă \begin{cases} x \in A \\ \text{și} \\ y \in B \text{ și } y \notin C \end{cases}$

Explicitare membru stâng: $(x,y) \in (A \times B) \setminus (A \times C) \ ddacă \begin{cases} (x,y) \in A \times B \\ \text{și} \\ (x,y) \notin A \times C \end{cases} \ ddacă \begin{cases} x \in A \text{ și } y \in B \\ \text{și} \\ x \in A \text{ și } y \notin C \end{cases}$

Pentru membrul stâng justificâm cum am ajuns la opțiunea $x \in A \text{ și } y \notin C$. Întrucât $(x,y) \notin A \times C$, apar 3 situații:

a) $x \notin A$ și $y \in C$;

b) $x \in A$ și $y \notin C$;

c) $x \notin A$ și $y \notin C$.

Știm că $(x,y) \in A \times B$ din prima parte a membrului stâng, prin urmare $x \in A$. Așadar, opțiunile a) și c) sunt în contradicție cu această afirmație. Deci, opțiunea b) este singura posibilitate corectă.

$A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C)$

Dacă $(x,y) \in A \times (B \setminus C)$, avem două cazuri:

(i) $x \in A$, prin urmare $[x \in A \text{ și } y \ \in B]$, precum și $[x \in A \text{ și } y \notin C]$, așadar $(x,y) \in A \times B$ și $(x,y) \notin A \times C$, așadar $(x,y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ (conform definiției diferenței între mulțimi).

(ii) $y \in B \text{ și } y \notin C$; în acest caz, $y \in B$, prin urmare $[x \in A \text{ și } y \ \in B]$, precum și $y \notin C$, prin urmare $[x \in A \text{ și } y \notin C]$, așadar $(x,y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$.

$(x,y) \in A \times (B \setminus C) \Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$, deci $A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C)$. (M)

$(A \times B) \setminus (A \times C) \subseteq A \times (B \setminus C)$

Dacă $(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$, avem două cazuri:

(i) $x \in A$ *și* $y \in B$, prin urmare $[x \in A \text{ și } (y \in B \text{ și } y \notin C)]$, așadar $x \in A$ *și* $y \in (B \setminus C)$, așadar $(x, y) \in A \times (B \setminus C)$;

(ii) $x \in A$ *și* $y \notin C$, prin urmare $[x \in A \text{ și } (y \in B \text{ și } y \notin C)]$, așadar $x \in A$ *și* $y \in (B \setminus C)$, așadar $(x, y) \in A \times (B \setminus C)$.

$(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times (B \setminus C)$, deci $(A \times B) \setminus (A \times C) \subseteq A \times (B \setminus C)$. (N)

Din (M) și (N) rezultă că $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

3.2. $\boldsymbol{(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)}$

$$(B \setminus C) \times A := \{(x, y) | x \in (B \setminus C) \text{ și } y \in A\} = \{(x, y) | (x \in B \text{ și } x \notin C) \text{ și } y \in A\} =$$
$$= \{(x, y) | (x \in B \text{ și } y \in A) \wedge (x \notin C \text{ și } y \in A)\} = \{(x, y) | [(x, y) \in (B \times A)] \wedge [(x, y) \notin (C \times A)]\} =$$
$$= (B \times A) \setminus (C \times A)$$

④ $\boldsymbol{A \times (B \,\Delta\, C) = (A \times B) \,\Delta\, (A \times C)}$ **și** $\boldsymbol{(B \,\Delta\, C) \times A = (B \times A) \,\Delta\, (C \times A)}$

Pentru a demonstra distributivitatea produsului cartezian față de diferența simetrică, ne vom ajuta de o altă proprietate și anume că diferența simetrică a două mulțimi este egală cu reuniunea diferențelor celor două mulțimi una față de alta. Prezentăm mai întâi această demonstrație.

֍ $P \Delta Q = (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)$

$x \in P \Delta Q$, ddacă $[x \in P \text{ } xor \text{ } x \in Q]$ ddacă $[(x \in P \text{ și } x \notin Q) \text{ } sau \text{ } (x \notin P \text{ și } x \in Q)]$ ddacă $x \in (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)$. Așadar, $P \Delta Q = (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)$.

4.1. $\boldsymbol{A \times (B \,\Delta\, C) = (A \times B) \,\Delta\, (A \times C)}$

Continuăm cu demonstrația relației 4.1, pornind de la definiția produsului cartezian și a relației ֍. Mai utilizăm și distributivitatea produsului cartezian față de reuniunea și diferența între mulțimi, demonstrate anterior.

$(x, y) \in A \times (B \,\Delta\, C)$ ddacă $\big[(x, y) \in A \times \big((B \setminus C) \cup (C \setminus B)\big)\big]$ (cf. ֍) ddacă $\Big[(x, y) \in \Big(\big(A \times (B \setminus C)\big) \cup \big(A \times (C \setminus B)\big)\Big)\Big]$ (cf. ①) ddacă $\Big[(x, y) \in \Big(\big((A \times B) \setminus (A \times C)\big) \cup \big((A \times C) \setminus (A \times B)\big)\Big)\Big]$ (cf. ③) ddacă $(x, y) \in (A \times B) \,\Delta\, (A \times C)$ (cf. relației inverse ֍). Deci $A \times (B \,\Delta\, C) = (A \times B) \,\Delta\, (A \times C)$.

4.2. $\boldsymbol{(B \,\Delta\, C) \times A = (B \times A) \,\Delta\, (C \times A)}$

$(x, y) \in (B \,\Delta\, C) \times A$ ddacă $\big[(x, y) \in \big((B \setminus C) \cup (C \setminus B)\big) \times A\big]$ (cf. ֍) ddacă $\Big[(x, y) \in \Big(\big((B \setminus C) \times A\big) \cup \big((C \setminus B) \times A\big)\Big)\Big]$ (cf. ①) ddacă $\Big[(x, y) \in \Big(\big((B \times A) \setminus (C \times A)\big) \cup \big((C \times A) \setminus (B \times A)\big)\Big)\Big]$ (cf. ③) ddacă $(x, y) \in (B \times A) \,\Delta\, (C \times A)$ (cf. relației inverse ֍). Deci, $(B \,\Delta\, C) \times A = (B \times A) \,\Delta\, (C \times A)$.

⑤ $\boldsymbol{B \subseteq C \Rightarrow [A \times B \subseteq A \times C} \text{ ș}\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{B \times A \subseteq C \times A]}$

Conform definiției incluziunii, dacă $B \subseteq C$, atunci $x \in B$ implică $x \in C$.

Fie o pereche ordonată $(a, x) \in A \times B$, adică $a \in A$ și $x \in B$, atunci $a \in A$ și $x \in C$, adică $(a, x) \in A \times C$. Așadar $B \subseteq C \Rightarrow A \times B \subseteq A \times C$.

Fie o pereche ordonată $(x, a) \in B \times A$, adică $x \in B$ și $a \in A$, atunci $x \in C$ și $a \in A$, adică $(x, a) \in C \times A$. Așadar $B \subseteq C \Rightarrow B \times A \subseteq C \times A$.

Deci $B \subseteq C \Rightarrow [A \times B \subseteq A \times C \text{ și } B \times A \subseteq C \times A]$.

⑥ **dacă $\boldsymbol{A \neq \emptyset}$, atunci: $\boldsymbol{B \subseteq C \Leftrightarrow A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \times A \subseteq C \times A}$**

Vom demonstra echivalența relației cu ajutorul dublei incluziuni.

(i) Relația $\boldsymbol{B \subseteq C \Rightarrow A \times B \subseteq A \times C}$ a fost demonstrată la punctul ⑤.

(ii) $\boldsymbol{B \subseteq C \Leftarrow A \times B \subseteq A \times C}$

Fie $x \in B$.

Deoarece $A \neq \emptyset$, există un element $a \in A$.

$A \times B \subseteq A \times C$

Fie $(a, x) \in A \times B$, adică $a \in A$ și $x \in B$, ceea ce implică $(a, x) \in A \times C$, adică $a \in A$ și $x \in C$. Așadar, $x \in B$ implică $x \in C$, adică $B \subseteq C$.

Deci, $A \times B \subseteq A \times C \Rightarrow B \subseteq C$.

(iii) Relația $\boldsymbol{B \subseteq C \Rightarrow B \times A \subseteq C \times A}$ a fost demonstrată la punctul ⑤.

(iv) $\boldsymbol{B \subseteq C \Leftarrow B \times A \subseteq C \times A}$

Fie $x \in B$.

Deoarece $A \neq \emptyset$, există un element $a \in A$.

$B \times A \subseteq C \times A$

Fie $(x, a) \in B \times A$, adică $x \in B$ și $a \in A$, ceea ce implică $(x, a) \in C \times A$, adică $x \in C$ și $a \in A$. Așadar, $x \in B$ implică $x \in C$, adică $B \subseteq C$.

Deci, $B \times A \subseteq C \times A \Rightarrow B \subseteq C$.

Din relațiile (i) și (ii) rezultă că $B \subseteq C \Leftrightarrow A \times B \subseteq A \times C$, unde $A \neq \emptyset$.

Din relațiile (iii) și (iv) rezultă că $B \subseteq C \Leftrightarrow B \times A \subseteq C \times A$, unde $A \neq \emptyset$.

Rezultă că dacă $A \neq \emptyset$, atunci: $B \subseteq C \Leftrightarrow A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \times A \subseteq C \times A$.

⑦ **dacă $\boldsymbol{A \neq \emptyset}$, atunci: $\boldsymbol{B \subsetneq C \Leftrightarrow A \times B \subsetneq A \times C \Leftrightarrow B \times A \subsetneq C \times A}$**

Conform definiției incluziunii stricte, $P \subsetneq Q$ ddacă $[P \subseteq Q \text{ și } P \neq Q]$ ddacă $[P \subseteq Q \text{ și } Q \setminus P \neq \emptyset]$, adică există un element $x \in Q \setminus P$, așadar $x \in Q$ și $x \notin P$.

De la punctul ⑥ se cunoaște că dacă $A \neq \emptyset$, atunci: $B \subseteq C \Leftrightarrow A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \times A \subseteq C \times A$.

Mai rămâne de demonstrat partea de inegalități dintre mulțimi.

Deoarece $A \neq \emptyset$, există un element $a \in A$.

7.1. $\boldsymbol{C \setminus B \neq \emptyset \Leftrightarrow (A \times C) \setminus (A \times B) \neq \emptyset}$

(a) $C \setminus B \neq \emptyset \Rightarrow (A \times C) \setminus (A \times B) \neq \emptyset$

Din $C \setminus B \neq \emptyset$ și $A \neq \emptyset$ rezultă că $A \times (C \setminus B) \neq \emptyset$ ddacă $(A \times C) \setminus (A \times B) \neq \emptyset$. Am folosit și proprietatea de distributivitate a produsului cartezian față de diferența dintre mulțimi.

(b) $C \setminus B \neq \emptyset \Leftarrow (A \times C) \setminus (A \times B) \neq \emptyset$

$A \times B \subsetneq A \times C$ ddacă $[A \times B \subseteq A \times C \text{ și } A \times B \neq A \times C]$ ddacă $[A \times B \subseteq A \times C \text{ și } (A \times C) \setminus (A \times B) \neq \emptyset]$, adică există o pereche $(a, c) \in (A \times C) \setminus (A \times B)$, așadar (i) $(a, c) \in (A \times C)$ și (ii) $(a, c) \notin (A \times B)$.

(i) $(a, c) \in (A \times C)$ ddacă $a \in A \text{ și } c \in C$

(ii) $$(a, c) \notin (A \times B) ddacă \begin{cases} a \in A \text{ și } c \notin B \\ \quad sau \\ a \notin A \text{ și } c \in B \\ \quad sau \\ a \notin A \text{ și } c \notin B \end{cases}$$

În cazul (ii) știm că $a \in A$, deci $a \notin A$ este fals. Singurul caz posibil rămâne $(a, c) \notin (A \times B)$ ddacă $a \in A \text{ și } c \notin B$.

Din (i) și (ii) rezultă că $a \in A \text{ și } c \in C$ și $c \notin B$, adică $c \in C \setminus B$, adică $B \subsetneq C$.

Din **(a)** și **(b)** rezultă dubla implicație.

7.2. $\boldsymbol{C \setminus B \neq \emptyset \Leftrightarrow (C \times A) \setminus (B \times A) \neq \emptyset}$

(c) $C \setminus B \neq \emptyset \Rightarrow (C \times A) \setminus (B \times A) \neq \emptyset$

Din $C \setminus B \neq \emptyset$ și $A \neq \emptyset$ rezultă că $(C \setminus B) \times A \neq \emptyset$ ddacă $(C \times A) \setminus (B \times A) \neq \emptyset$. Am folosit și proprietatea de distributivitate a produsului cartezian față de diferența dintre mulțimi.

(d) $C \setminus B \neq \emptyset \Leftarrow (C \times A) \setminus (B \times A) \neq \emptyset$

$(C \times A) \setminus (B \times A) \neq \emptyset$, ddacă există o pereche $(c, a) \in (C \times A) \setminus (B \times A)$, așadar (i) $(c, a) \in (C \times A)$ și (ii) $(c, a) \notin (B \times A)$.

(i) $(c, a) \in (C \times A)$ ddacă $c \in C \text{ și } a \in A$

(ii) $$(c, a) \notin (B \times A)\ ddacă \begin{cases} c \notin B \text{ și } a \in A \\ \quad sau \\ c \in B \text{ și } a \notin A \\ \quad sau \\ c \notin B \text{ și } a \notin A \end{cases}$$

În cazul (ii) știm că $a \in A$, deci $a \notin A$ este fals. Singurul caz posibil rămâne $(c, a) \notin (B \times A)$ ddacă $c \notin B \text{ și } a \in A$.

Din (i) și (ii) rezultă că $a \in A \text{ și } c \in C$ și $c \notin B$, adică $c \in C \setminus B$, adică $B \subsetneq C$.

Din **(c)** și **(d)** rezultă dubla implicație.

Din **7.1** și **7.2** rezultă că dacă $A \neq \emptyset$, atunci: $B \subsetneq C \Leftrightarrow A \times B \subsetneq A \times C \Leftrightarrow B \times A \subsetneq C \times A$.

III. De demonstrat matematic

Demonstrați că operațiile cu numere cardinale și relațiile între numere cardinale sunt bine definite, i.e. nu depind de reprezentanții claselor de cardinal echivalență, adică: pentru orice mulțimi A, A', B și B' a.î. $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$) au loc operațiile și relațiile respective.

① Adunarea: $|A \coprod B| = |A' \coprod B'| \Leftrightarrow A \coprod B \cong A' \coprod B'$

Trebuie să demonstrăm că există o bijecție de forma $f: A \coprod B \to A' \coprod B'$, adică faptul că funcția f este injectivă și surjectivă.

Din enunț se cunoaște că: $|A| = |A'| \Leftrightarrow A \cong A'$ și respectiv, $|B| = |B'| \Leftrightarrow B \cong B'$, adică există bijecțiile $\varphi: A \to A'$ și $\psi: B \to B'$.

Conform definiției reuniunii disjuncte ($\coprod$), două mulțimi sunt disjuncte dacă intersecția lor e $\emptyset$. Deci putem scrie reuniunea disjunctă a reprezentanților claselor de cardinal echivalență sub forma:

$A \coprod B = (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}) = \{(a,1) | a \in A\} \cup \{(b,2) | b \in B\}$ și

$A' \coprod B' = (A' \times \{1\}) \cup (B' \times \{2\}) = \{(a',1) | a' \in A'\} \cup \{(b',2) | b' \in B'\}$.

Definim funcția $f: A \coprod B \to A' \coprod B'$ sub forma:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ dacă\ x \in A \\ \psi(x), dacă\ x \in B \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} (\forall a \in A)\big(f(a,1) := (\varphi(a),1)\big) \\ (\forall b \in B)\big(f(b,2) := (\psi(b),2)\big) \end{cases} \qquad (1)$$

(i) Demonstrăm că funcția f este surjectivă.

Se cunoaște că o funcție este bijectivă ddacă este inversabilă. Vom folosi faptul că bijecțiile φ și ψ sunt inversabile în demonstrația că f este surjecție.

φ – inversabilă ddacă $\exists \varphi^{-1}: A' \to A$ a.î. $\forall a \in A, (\varphi^{-1} \circ \varphi)(a) = \varphi^{-1}\big(\varphi(a)\big) = id_A(a) = a$, unde $id_A: A \to A$ și $\forall a' \in A', (\varphi \circ \varphi^{-1})(a') = \varphi\big(\varphi^{-1}(a')\big) = id_{A'}(a') = a'$, unde $id_{A'}: A' \to A'$ (2)

ψ – inversabilă ddacă $\exists \psi^{-1}: B' \to B$ a.î. $\forall b \in B, (\psi^{-1} \circ \psi)(b) = \psi^{-1}\big(\psi(b)\big) = id_B(b) = b$, unde $id_B: B \to B$ și $\forall b' \in B', (\psi \circ \psi^{-1})(b') = \psi\big(\psi^{-1}(b')\big) = id_{B'}(b') = b'$, unde $id_{B'}: B' \to B'$ (3)

Cf. definiției surjectivității, rel. (1). (2) și (3), rezultă:

$(\forall a' \in A')(\exists a \in A)$ a.î. $f(a,1) = f(\varphi^{-1}(a'),1) = \big(\varphi\big(\varphi^{-1}(a')\big),1\big) = (a',1)$

$(\forall b' \in B')(\exists b \in B)$ a.î. $f(b,2) = f(\psi^{-1}(b'),2) = \big(\psi\big(\psi^{-1}(b')\big),2\big) = (b',2)$

Reiese că f este **surjectivă**.

(ii) Demonstrăm că funcția f este injecție.

Fie $(x,i),(y,j) \in A \coprod B$, a.î. $f(x,i) = f(y,j)$.

$$f(x,i) = \begin{cases} (\varphi(x),1), dacă\ i = 1 \\ (\psi(x),2), dacă\ i = 2 \end{cases} \qquad f(y,j) = \begin{cases} (\varphi(y),1), dacă\ j = 1 \\ (\psi(y),2), dacă\ j = 2 \end{cases}$$

Cum $f(x,i) = f(y,j)$ rezultă că $i = j$.

- $i = j = 1$

În acest caz, $x, y \in A$.

$f(x,i) = f(y,i) \Leftrightarrow\ (\varphi(x),1) = (\varphi(y),1) \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \overset{\varphi\ injectiva}{\Longleftrightarrow} x = y$

- $i = j = 2$

În acest caz, $x, y \in B$.

$f(x,j) = f(y,j) \Leftrightarrow\ (\psi(x),2) = (\psi(y),2) \Leftrightarrow \psi(x) = \psi(y) \Leftrightarrow x = y$

Am demonstrat că $f(x,j) = f(y,j) \Leftrightarrow (x,i) = (y,j)$. Reiese că f este **injectivă**.

Din **(i)** și **(ii)** rezultă că funcția f este **bijectivă**. $\Leftrightarrow\ A\coprod B \cong A'\coprod B' \Leftrightarrow |A\coprod B| = |A'\coprod B'|$

② Înmulțirea: $|A \times B| = |A' \times B'| \Leftrightarrow A \times B \cong A' \times B'$

Trebuie să demonstrăm că există o bijecție de forma $g: A \times B \to A' \times B'$, adică faptul că funcția g este injectivă și surjectivă.

Din enunț se cunoaște că: $|A| = |A'| \Leftrightarrow A \cong A'$ și respectiv, $|B| = |B'| \ \Leftrightarrow B \cong B'$, adică există bijecțiile $\varphi: A \to A'$ și $\psi: B \to B'$.

Definim funcția g de forma:

$$g: A \times B \to A' \times B', (\forall a \in A)(\forall b \in B)(g(a,b) := (\varphi(a), \psi(b))) \qquad (4)$$

(i) Demonstrăm că funcția g este surjectivă.

Vom folosi faptul că bijecțiile φ și ψ sunt inversabile în demonstrația că g este surjectivă. Cf. definiției surjectivității, rel. (2), (3) și (4), rezultă:

$\forall (a',b') \in A' \times B', g\left(\varphi^{-1}(a'), \psi^{-1}(b')\right) = \left(\varphi\left(\varphi^{-1}(a')\right), \psi\left(\psi^{-1}(b')\right)\right) = (a',b') \Rightarrow g$ **surjecție**.

(ii) Demonstrăm că funcția g este injectivă.

Fie $(u,v), (x,y) \in A \times B$, a.î. $g(u,v) = g(x,y)$.

$$g(u,v) = g(x,y) \Leftrightarrow \left(\varphi(u), \psi(v)\right) = \left(\varphi(x), \psi(y)\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(u) = \varphi(x) \\ \psi(v) = \psi(y) \end{cases} \overset{\substack{\varphi,\psi \\ injectii}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} u = x \\ v = y \end{cases} \Longrightarrow (u,v) = (x,y) \Rightarrow g$ **injecție.**

Din **(i)** și **(ii)** rezultă că funcția g este **bijecție**. $\Leftrightarrow\ A \times B \cong A' \times B' \Leftrightarrow |A \times B| = |A' \times B'|$

③ Ridicarea la putere: $|B^A| = \left|B'^{A'}\right| \Leftrightarrow B^A \cong B'^{A'}$

Trebuie să demonstrăm că există o bijecție de forma $h: B^A \to B'^{A'}$, adică faptul că funcția h este inversabilă.

Fie funcțiie $\rho: A \longrightarrow B$ și $\rho': A' \longrightarrow B'$. Considerând rel. (2) și (3), avem următoarele reprezentări:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "h(\rho)"'] & A \arrow[r, "\rho"] & B \arrow[r, "\psi"] & B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rrr, bend right, "k(\rho') = h^{-1}(\rho')"'] & A' \arrow[r, "\rho'"] & B' \arrow[r, "\psi^{-1}"] & B \end{tikzcd}$$

$B^A = \{\rho \mid \rho: A \to B\}$

${B'}^{A'} = \{\rho' \mid \rho': A' \to B'\}$

Definim funcția h sub forma:

$h: B^A \to {B'}^{A'}, (\forall \rho \in B^A)(h(\rho) := \psi \circ \rho \circ \varphi^{-1})$.

Definim funcția k sub forma:

$k: {B'}^{A'} \to B^A, (\forall \rho' \in {B'}^{A'})(k(\rho') := \psi^{-1} \circ \rho' \circ \varphi)$.

Demonstrăm că funcțiile h și k sunt inverse una alteia:

$$(\forall \rho \in B^A)\big(k\big(h(\rho)\big) = \psi^{-1} \circ h(\rho) \circ \varphi = \psi^{-1} \circ \psi \circ \rho \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \rho\big) \tag{5}$$

$$\left(\forall \rho' \in {B'}^{A'}\right)(h(k(\rho')) = \psi \circ k(\rho') \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \psi^{-1} \circ \rho' \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \rho') \tag{6}$$

Din (5) și (6) $\Rightarrow k = h^{-1}$, deci h este inversabilă, deci h este bijectivă $\Rightarrow$ $B^A \cong {B'}^{A'} \Leftrightarrow \left|B^A\right| = \left|{B'}^{A'}\right|$.

④ $|A| \leq |B| \Leftrightarrow |A'| \leq |B'|$

Din enunț se cunoaște că: $|A| = |A'| \Leftrightarrow A \cong A'$ și respectiv, $|B| = |B'| \Leftrightarrow B \cong B'$, adică există bijecțiile $\varphi: A \to A'$ și $\psi: B \to B'$.

Știm că pentru orice mulțimi A și B, faptul că $|A| \leq |B|$ înseamnă că există o injecție $\iota: A \to B$.

Trebuie să demonstrăm că există o injecție $\gamma: A' \to B'$.

Construim funcția $\gamma: A' \to B'$ din compunerea mai multor funcții, inclusiv bijecțiile φ și ψ definite la punctul ①:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "\gamma"'] & A \arrow[r, "\iota"] & B \arrow[r, "\psi"] & B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rrr, bend right, "\iota"'] & A' \arrow[r, "\gamma"] & B' \arrow[r, "\psi^{-1}"] & B \end{tikzcd}$$

Reamintim că bijecțiile φ, ψ, φ^{-1} și ψ^{-1} sunt inversabile și în particular, injective.

Funcția γ poate avea următoarea formă:

$\gamma: A' \to B', (\forall a' \in A')(\gamma(a') = \psi \circ \iota \circ \varphi^{-1}(a'))$

unde funcția ι are forma: $\iota: A \to B, (\forall a \in A)(\iota(a) = \psi^{-1} \circ \gamma \circ \varphi(a))$.

În relația precedentă avem o compunere de bijecții (ψ și φ^{-1}) cu o injecție (ι), care rezultă într-o injecție, i.e. γ este injecție, adică $|A'| \leq |B'|$.

Am demonstrat că $|A| \leq |B| \Leftrightarrow |A'| \leq |B'|$.

⑤ $|A| < |B| \Leftrightarrow |A'| < |B'|$

$|A| < |B| \Leftrightarrow (|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|)$

$|A'| < |B'| \Leftrightarrow (|A'| \leq |B'| \wedge |A'| \neq |B'|)$

La punctul ④ am arătat că $|A| \leq |B| \Leftrightarrow |A'| \leq |B'|$.

Rămâne să demonstrăm că:

$$|A| \neq |B| \Leftrightarrow |A'| \neq |B'|.$$

"⇒"

Presupunem că $|A| \neq |B|$.

$A' \in A \Leftrightarrow A \cong A' \Leftrightarrow |A| = |A'|$ și respectiv, $B' \in B \Leftrightarrow B \cong B' \Leftrightarrow |B| = |B'|$. Deci $|A'| = |A| \neq |B| = |B'| \Leftrightarrow |A'| \neq |B'|$.

"⇐"

Presupunem că $|A'| \neq |B'|$.

$A' \in A \Leftrightarrow A \cong A' \Leftrightarrow |A| = |A'|$ și respectiv, $B' \in B \Leftrightarrow B \cong B' \Leftrightarrow |B| = |B'|$. Deci $|A| = |A'| \neq |B'| = |B| \Leftrightarrow |A| \neq |B|$.

Am demonstrat că $|A| \neq |B| \Leftrightarrow |A'| \neq |B'|$ și cf. ④ reiese că $|A| < |B| \Leftrightarrow |A'| < |B'|$.