Logică Matematică și Computațională

Grupa 1, Informatică ID, 2023-2024

Temele 8, 10, 16

Tema 8

Fie A și B mulțimi, iar f:A→B. Considerăm f ca relație binară funcțională totală de la A la B, i.e. o identificăm cu graficul ei. Demonstrați că:

$$f = A \times B \text{ ddacă} \begin{cases} A = \emptyset \\ \text{sau} \\ |B| = 1 \end{cases}$$

Demonstrație:

Implicația directă:

f este relație totală, deci $\forall a \in A,\ \exists b \in B, [(a, b) \in f]$ sau $f = A = \emptyset$

Dacă A este nevidă. atunci

$f = A \times B$, deci $A \times B \subseteq f$, deci $\forall a \in A,\ \forall b_1, \forall b_2 \in B \{(a, b_1) \Rightarrow \{(a, b_1), (a, b_2)\} \subseteq f\}$

f este relație funcțională, deci $\{(a, b_1), (a, b_2)\} \subseteq f \Rightarrow b_1 = b_2, \forall b_1, \forall b_2 \in B$

Deci în cazul în care A este nevidă, B are cel puțin un element, b, iar toate elementele sale sunt egale. Deci $|B| = 1$.

Implicația reciprocă:

Dacă $A = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset = f$.

Dacă $|B| = 1$, atunci B={b}, iar f, fiind totală, este egală cu {(a,b)/ ∀a∈A}=A×B.

Tema 10

Fie A, B, C și I mulțimi nevide (pot fi și vide), $P \subseteq C \times A$,

$R, S \in \mathcal{P}(A \times B)$ și $T, U \in \mathcal{P}(B \times C)$ relații binare, iar $(R_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ o familie de relații binare de la A la B. Să se demonstreze că:

- $R \circ \emptyset = \emptyset \circ R = \emptyset$

  Demonstrație:

$\{\exists a \in A, \exists c \in C, (a, c) \in R \circ \emptyset\} \Leftrightarrow \{\exists a \in A, \exists c \in C, \exists\ b \in B, [(a, b) \in R \land (b, c) \in \emptyset]\}$, iar a doua frază logică este falsă deoarece nu există b din B astfel încât (b, c) să fie un element din $\emptyset$. Deci $\forall a \in A, \forall c \in C, (a, c) \notin R \circ \emptyset$, deci $R \circ \emptyset = \emptyset$.

Deci pentru orice R, inclusiv pentru orice R^{-1}, $R^{-1} \circ \emptyset = \emptyset$.

$\emptyset^{-1} = \emptyset$ pentru că $[(a,b) \in \emptyset] \Leftrightarrow [(b,a) \in \emptyset]$ (ambele propoziții sunt false, deci echivalente), iar $(R^{-1} \circ \emptyset)^{-1} = \emptyset \circ {R^{-1}}^{-1} = \emptyset \circ R$. Deci și $\emptyset \circ R = \emptyset$.

- $\emptyset^{-1} = \emptyset$

  Demonstrație:

Am demonstrat și am folosit această egalitate în exercițiul de mai sus.

$$(\emptyset^{-1} = \emptyset) \Leftrightarrow \{\forall a \in A, \forall b \in B, [(a,b) \in \emptyset] \Leftrightarrow [(b,a) \in \emptyset]\}$$

Echivalența din dreapta este tautologie pentru că este o echivalență între două propoziții mereu false.

- Inversa comută cu diferența și cu diferența simetrică

$$(R \backslash S)^{-1} = R^{-1} \backslash S^{-1}$$
$$(R \Delta S)^{-1} = R^{-1} \Delta S^{-1}$$

  Demonstrație:

$$\left\{\{(a,b) \mid (a,b) \in R \land (a,b) \notin S\}^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\} \backslash \{(b,a) \mid (a,b) \in S\}\right\}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\{(b,a) \mid (a,b) \in R \land (a,b) \notin S\} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\} \backslash \{(b,a) \mid (a,b) \in S\}\right\}$$

A doua propoziție este adevărată pentru că este definiția diferenței dintre două mulțimi. Deci $(R \backslash S)^{-1} = R^{-1} \backslash S^{-1}$.

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\{(a,b) \mid (a,b) \in R \lor (a,b) \in S\}^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\} \cup \{(b,a) \mid (a,b) \in S\}\right\}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\{(b,a) \mid (a,b) \in R \lor (a,b) \in S\} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\} \cup \{(b,a) \mid (a,b) \in S\}\right\}$$

A doua propoziție este adevărată pentru că este definiția reuniunii a două mulțimi. Deci $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

Deci $(R \Delta S)^{-1} = \left((R \backslash S) \cup (S \backslash R)\right)^{-1} = (R \backslash S)^{-1} \cup (S \backslash R)^{-1} = (R^{-1} \backslash S^{-1}) \cup (S^{-1} \backslash R^{-1}) = R^{-1} \Delta S^{-1}$.

- Compunerea este distributivă față de reuniunile arbitrare, la dreapta și la stânga $T \circ (\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigcup_{i \in I}(T \circ R_i)$ și $(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ P = \bigcup_{i \in I}(R_i \circ P)$

Demonstrație:

$$\left[T \circ \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) = \bigcup_{i \in I}(T \circ R_i)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{(\forall (x,y))\left\{\left[(x,y) \in T \circ \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)\right] \Leftrightarrow \left[(x,y) \in \bigcup_{i \in I}(T \circ R_i)\right]\right\}\right\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \big\{(\forall (x,y))\{[(x \in A) \wedge (y \in C) \wedge (\exists z)(\exists i)(z \in B \wedge (x,z) \in R_i \wedge (z,y) \in T)] \Leftrightarrow$

$[(\exists i)[(x \in A) \wedge (y \in C) \wedge (\exists z)(z \in B \wedge (x,z) \in R_i \wedge (z,y) \in T)]]\}\big\}$, ceea ce este adevărat, deoarece cuantificarea lui i comută cu cuantificarea lui z, iar propozițiile $x \in A$ și $y \in C$ nu depind de i, ceea ce înseamnă că i poate fi cuantificat în afară.

$$\left[\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) \circ P = \bigcup_{i \in I}(R_i \circ P)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{(\forall (x,y))\left\{\left[(x,y) \in \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) \circ P\right] \Leftrightarrow \left[(x,y) \in \bigcup_{i \in I}(R_i \circ P)\right]\right\}\right\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \big\{(\forall (x,y))\{[(x \in C) \wedge (y \in B) \wedge (\exists z)(\exists i)(z \in A \wedge (x,z) \in P \wedge (z,y) \in R_i)] \Leftrightarrow$

$[(\exists i)[(x \in C) \wedge (y \in B) \wedge (\exists z)(z \in A \wedge (x,z) \in P \wedge (z,y) \in R_i)]]\}\big\}$, ceea ce este adevărat, deoarece cuantificarea lui i comută cu cuantificarea lui z, iar propozițiile $x \in C$ și $y \in B$ nu depind de i, ceea ce înseamnă că i poate fi cuantificat în afară.

- Compunerea (la stânga și la dreapta) păstrează incluziunile nestricte:

$R \subseteq S$ implică $T \circ R \subseteq T \circ S$ și $R \circ P \subseteq S \circ P$

$T \circ (\bigcap_{i \in I} R_i) \subseteq \bigcap_{i \in I}(T \circ R_i)$ și $(\bigcap_{i \in I} R_i) \circ P \subseteq \bigcap_{i \in I}(R_i \circ P)$

$(T \circ R) \setminus (T \circ S) \subseteq T \circ (R \setminus S)$ și $(R \circ P) \setminus (S \circ P) \subseteq (R \setminus S) \circ P$

Demonstrație:

$$\{\{(\forall x)[(x \in R) \Rightarrow (x \in S)]\} \Rightarrow \{(\forall y)[(y \in T \circ R) \Rightarrow (y \in T \circ S)]\}\}$$

$$\Leftrightarrow \big\{\{(\forall x)[(x \in R) \Rightarrow (x \in S)]\} \Rightarrow \big\{(\forall (a,b))\big[\big((a,b) \in T \circ R\big) \Rightarrow \big((a,b) \in T \circ S\big)\big]\big\}\big\}$$

$$\Leftrightarrow \Big\{\{(\forall x)[(x \in R) \Rightarrow (x \in S)]\}$$
$$\Rightarrow \{(\forall (a,c))\big[\big((a \in A) \wedge (c \in C) \wedge (\exists b)(b \in B \wedge (a,b) \in R \wedge (b,c) \in T)\big)$$
$$\Rightarrow \big((a \in A) \wedge (c \in C) \wedge (\exists b)(b \in B \wedge (a,b) \in S \wedge (b,c) \in T)\big)\big]\}\Big\}$$

Instanțiem universal a și c și existențial b (pentru a scăpa de cuantificatori) și instanțiem x cu (a,b), iar fraza logică ce trebuie demonstrată devine

$$\{\big[\big((a,b) \in R\big) \Rightarrow \big((a,b) \in S\big)\big]\}$$
$$\Rightarrow \{\big[\big((a \in A) \wedge (c \in C) \wedge (b \in B) \wedge (a,b) \in R \wedge (b,c) \in T\big)$$
$$\Rightarrow \big((a \in A) \wedge (c \in C) \wedge (b \in B) \wedge (a,b) \in S \wedge (b,c) \in T\big)\big]\}$$

Notăm $a \in A$ cu propoziția a, $b \in B$ cu b, $c \in C$ cu c, $(b,c) \in T$ cu t, $(a,b) \in R$ cu r, și $(a,b) \in S$ cu s. Fraza astfel devine $\{r \Rightarrow s\} \Rightarrow \{(a \wedge c \wedge b \wedge r \wedge t) \Rightarrow (a \wedge c \wedge b \wedge s \wedge t)\}$.

Dacă fraza ar fi falsă, atunci ar trebui ca $r \Rightarrow s$ să fie neapărat adevărată

și în același timp $(a \wedge c \wedge b \wedge r \wedge t) \Rightarrow (a \wedge c \wedge b \wedge s \wedge t)$ să fie falsă, adică $a \wedge c \wedge b \wedge r \wedge t$ să fie neapărat adevărată, deci r ar trebui să fie neapărat adevărată, iar din faptul că $r \Rightarrow s$, atunci și s este neapărat adevărată, ceea ce ar face propoziția $a \wedge c \wedge b \wedge s \wedge t$ adevărată, ceea ce ar însemna că întreaga frază este adevărată. Deci fraza de demonstrat nu poate fi falsă, este o tautologie.

Deci $R \subseteq S \Rightarrow T \circ R \subseteq T \circ S$.

$$\{\{(\forall x)[(x \in R) \Rightarrow (x \in S)]\} \Rightarrow \{(\forall y)[(y \in R \circ P) \Rightarrow (y \in S \circ P)]\}\}$$
$$\Leftrightarrow \Big\{\{(\forall x)[(x \in R) \Rightarrow (x \in S)]\} \Rightarrow \{(\forall (a,b))\big[\big((a,b) \in R \circ P\big) \Rightarrow \big((a,b) \in S \circ P\big)\big]\}\Big\}$$
$$\Leftrightarrow \Big\{\{(\forall x)[(x \in R) \Rightarrow (x \in S)]\}$$
$$\Rightarrow \{(\forall (c,b))\big[\big((c \in B) \wedge (b \in B) \wedge (\exists a)(a \in A \wedge (c,a) \in P \wedge (a,b) \in R)\big)$$
$$\Rightarrow \big((c \in B) \wedge (b \in B) \wedge (\exists a)(a \in A \wedge (c,a) \in P \wedge (a,b) \in S)\big)\big]\}\Big\}$$

Instanțiem universal a și c și existențial b (pentru a scăpa de cuantificatori) și instanțiem x cu (a,b), iar fraza logică ce trebuie demonstrată devine

$$\{\big[\big((a,b) \in R\big) \Rightarrow \big((a,b) \in S\big)\big]\}$$
$$\Rightarrow \{\big[\big((c \in C) \wedge (b \in B) \wedge (a \in A) \wedge (c,a) \in P \wedge (a,b) \in R\big)$$
$$\Rightarrow \big((c \in C) \wedge (b \in B) \wedge (a \in A) \wedge (c,a) \in P \wedge (a,b) \in S\big)\big]\}$$

Notăm $a \in A$ cu propoziția a, $b \in B$ cu b, $c \in C$ cu c, $(c, a) \in P$ cu p, $(a, b) \in R$ cu r, și $(a, b) \in S$ cu s. Fraza astfel devine $\{r \Rightarrow s\} \Rightarrow \{(c \wedge b \wedge a \wedge p \wedge r) \Rightarrow (c \wedge b \wedge a \wedge p \wedge s)\}$.
Dacă fraza ar fi falsă, atunci ar trebui ca $r \Rightarrow s$ să fie neapărat adevărată
și în același timp $(c \wedge b \wedge a \wedge p \wedge r) \Rightarrow (c \wedge b \wedge a \wedge p \wedge s)$ să fie falsă, adică $c \wedge b \wedge a \wedge p \wedge r$ să fie neapărat adevărată, deci r ar trebui să fie neapărat adevărată, iar din faptul că $r \Rightarrow s$, atunci și s este neapărat adevărată, ceea ce ar face propoziția $c \wedge b \wedge a \wedge p \wedge s$ adevărată, ceea ce ar însemna că întreaga frază este adevărată. Deci fraza de demonstrat nu poate fi falsă, este o tautologie.
Deci $R \subseteq S \Rightarrow R \circ P \subseteq S \circ P$.

$$\left\{T \circ \left(\bigcap_{i \in I} R_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} (T \circ R_i)\right\}$$
$$\Leftrightarrow \Big\{\big(\forall (a, c)\big)\{[(a \in A) \wedge (c \in C) \wedge (\exists b)(\forall i)(b \in B \wedge (a, b) \in R_i \wedge (b, c) \in T)]$$
$$\Rightarrow \big[(\forall i)[(a \in A) \wedge (c \in C) \wedge (\exists b)(b \in B \wedge (a, b) \in R_i \wedge (b, c) \in T)]\big]\}\Big\}$$

Instanțiem universal elementele a și c, notăm propozițiile $a \in A$ și $c \in C$ cu literele mici a, respectiv c, iar propozițiile $(a, b) \in R_i$ și $(b, c) \in T$ cu r, respectiv t, iar fraza de demonstrat devine

$$[a \wedge c \wedge (\exists b)(\forall i)(b \in B \wedge r \wedge t)] \Rightarrow \big[(\forall i)[a \wedge c \wedge (\exists b)(b \in B \wedge r \wedge t)]\big]$$

Propozițiile a, c, r și t nu depind de i sau b, deci i și b pot fi cuantificate la interior, iar fraza devine

$$[a \wedge c \wedge r \wedge t \wedge (\exists b)(\forall i)(b \in B)] \Rightarrow [a \wedge c \wedge r \wedge t \wedge (\forall i)(\exists b)(b \in B)]$$

Fraza $[(\exists b)(\forall i)(b \in B)] \Rightarrow [(\forall i)(\exists b)(b \in B)]$ este adevărată din regulile de calcul cu cuantificatori, iar prin conjuncția atât a premisei cât și a concluziei cu a, c, r și t, fraza rămâne mereu adevărată.

$$\left\{\left(\bigcap_{i\in I} R_i\right)\circ P \subseteq \bigcap_{i\in I}(R_i \circ P)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \Big\{\big(\forall(c,b)\big)\big\{[(c \in C) \wedge (b \in B) \wedge (\exists a)(\forall i)(a \in A \wedge (c,a) \in P) \wedge (a,b) \in R_i]$$

$$\Rightarrow \big[(\forall i)[(c \in C) \wedge (b \in B) \wedge (\exists a)(a \in A \wedge (c,a) \in P) \wedge (a,b) \in R_i]\big]\big\}\Big\}$$

Instanțiem universal elementele c și b, notăm propozițiile $c \in C$ și $b \in B$ cu literele mici c, respectiv b, iar propozițiile $(c,a) \in P$ și $(a,b) \in R_i$ cu p, respectiv r, iar fraza de demonstrat devine

$$[c \wedge b \wedge (\exists a)(\forall i)(a \in A \wedge t \wedge r)] \Rightarrow \big[(\forall i)[c \wedge b \wedge (\exists a)(a \in A \wedge t \wedge r)]\big]$$

Propozițiile c, b, t și r nu depind de i sau a, deci i și a pot fi cuantificate la interior, iar fraza devine

$$[c \wedge b \wedge t \wedge r \wedge (\exists a)(\forall i)(a \in A)] \Rightarrow [c \wedge b \wedge t \wedge r \wedge (\forall i)(\exists a)(a \in A)]$$

Fraza $[(\exists a)(\forall i)(a \in A)] \Rightarrow [(\forall i)(\exists a)(a \in A)]$ este adevărată din regulile de calcul cu cuantificatori, iar prin conjuncția atât a premisei cât și a concluziei cu c, b, t și r, fraza rămâne mereu adevărată.

$$\{(T \circ R)\backslash(T \circ S) \subseteq T \circ (R\backslash S)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big\{\big(\forall(a,c)\big)\big\{\big[\big((a,c) \in T \circ R\big) \wedge \big((a,c) \notin T \circ S\big)\big]$$

$$\Rightarrow \big[[(a \in A) \wedge (c \in C) \wedge (\exists b)(b \in B \wedge (a,b) \in R\backslash S \wedge (b,c) \in T)]\big]\big\}\Big\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big\{\big(\forall(a,c)\big)\big\{\big[\big((a \in A) \wedge (c \in C) \wedge (\exists d)(d \in B \wedge (a,d) \in R \wedge (d,c) \in T)\big)$$

$$\wedge \big((a \in A) \wedge (c \in C) \wedge (\forall e)(e \notin B \vee (a,e) \notin S \vee (e,c) \notin T)\big)\big]$$

$$\Rightarrow \big[[(a \in A) \wedge (c \in C) \wedge (\exists b)(b \in B \wedge (a,b) \in R \wedge (a,b) \notin S \wedge (b,c) \in T)]\big]\big\}\Big\}$$

e este cuantificat universal în premisa frazei de demonstrat, deci poate fi instanțiat cu d. b este cuantificat existențial în concluzia frazei, deci poate fi de asemenea instanțiat cu d. (Practic, implicația dintre premisa și concluzia frazei este echivalentă cu disjuncția dintre negata premisei și concluzie, deci și e și b apar cuantificate existențial atunci când fraza este scrisă ca o disjuncție.) De asemenea, instanțiem a și c și notăm cu literele mici a respectiv c propozițiile a ∈ A și c ∈ C și cu r, s, respectiv t propozițiile $(a, d) \in R$, $(a, d) \notin S$, respectiv $(d, c) \in T$. Fraza de demonstrat devine astfel:

$$\left[\big(a \land c \land (\exists d)(d \in B \land r \land t)\big) \land \big(a \land c \land (d \notin B \lor s \lor \neg t)\big)\right] \Rightarrow \left[[a \land c \land (d \in B \land r \land s \land t)]\right]$$

Dacă a sau c sunt false, atunci întreaga frază este adevărată pentru că a și c apar conjugate în premisă, deci pot fi presupuse adevărate. d poate fi instanțiat, iar propoziția $d \in B$ poate fi notată cu b. Astfel, fraza scrisă mai simplu este:

$$[(b \land r \land t) \land (\neg b \lor s \lor \neg t)] \Rightarrow \left[[(b \land r \land s \land t)]\right]$$

Fraza nu poate fi falsă, pentru că ar trebui ca premisa ei să fie adevărată, adică dintre ¬b, s și ¬t doar s să fie adevărată, pentru că ¬b și ¬t ar trebui să fie conjugate cu b și t, deci propoziția $b \land r \land t \land s$ ar fi adevărată, deci și concluzia frazei ar fi adevărată.

$$(R \circ P)\backslash(S \circ P) \subseteq (R\backslash S) \circ P$$

$$\Leftrightarrow \Big\{\big(\forall(c,b)\big)\big\{\big[\big((c,b) \in R \circ P\big) \land \big((c,b) \notin S \circ P\big)\big]$$
$$\Rightarrow \left[[(c \in C) \land (b \in B) \land (\exists a)(a \in A \land (c,a) \in P \land (a,b) \in R\backslash S)]\right]\big\}\Big\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big\{\big(\forall(c,b)\big)\big\{\big[\big((c \in C) \land (b \in B) \land (\exists d)(d \in A \land (c,d) \in P \land (d,b) \in R)\big)$$
$$\land \big((c \in C) \land (b \in B) \land (\forall e)(e \notin A \lor (c,e) \notin P) \lor (e,b) \notin S\big)\big]$$
$$\Rightarrow \left[[(c \in C) \land (b \in B) \land (\exists a)(a \in B \land (c,a) \in P \land (a,b) \in R \land (a,b) \notin S)]\right]\big\}\Big\}$$

e este cuantificat universal în premisa frazei de demonstrat, deci poate fi instanțiat cu d. a este cuantificat existențial în concluzia frazei, deci poate fi de asemenea instanțiat cu d. (Practic, implicația dintre premisa și concluzia frazei este echivalentă cu disjuncția dintre negata premisei și concluzie, deci și e și a apar cuantificate existențial atunci când fraza este scrisă ca o disjuncție.) De asemenea, instanțiem c și b și notăm cu literele mici c respectiv b propozițiile $c \in C$ și $b \in B$ și cu r, s, respectiv p propozițiile $(d, b) \in R$, $(d, b) \notin S$, respectiv $(c, d) \in T$. Fraza de demonstrat devine astfel:

$$\left[\big(c \land b \land (\exists d)(d \in A \land p \land r)\big) \land \big(c \land b \land (d \notin A \lor \neg p \lor s)\big)\right] \Rightarrow \left[[c \land b \land (d \in A \land p \land r \land s)]\right]$$

Dacă c sau b sunt false, atunci întreaga frază este adevărată pentru că c și b apar conjugate în premisă, deci pot fi presupuse adevărate. d poate fi instanțiat, iar propoziția $d \in A$ poate fi notată cu a. Astfel, fraza scrisă mai simplu este:

$$[(a \wedge p \wedge r) \wedge (\neg a \vee \neg p \vee s)] \Rightarrow \big[[(a \wedge p \wedge r \wedge s)]\big]$$

Fraza nu poate fi falsă, pentru că ar trebui ca premisa ei să fie adevărată, adică dintre $\neg a$, $\neg p$ și s doar s să fie adevărată, pentru că $\neg a$ și $\neg p$ ar trebui să fie conjugate cu a și p, deci propoziția $b \wedge p \wedge r \wedge s$ ar fi adevărată, deci și concluzia frazei ar fi adevărată.

- Să se dea un exemplu de mulțimi A, B, C și relații binare $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq A \times B$ și $T \subseteq B \times C$ care să îndeplinească simultan următoarele condiții:

$R \nsubseteq S$ și $S \nsubseteq R$ dar $T \circ R = T \circ S$.

Pentru acest exemplu, să se calculeze relațiile binare:

$T \circ (R \cap S)$ și $(T \circ R) \cap (T \circ S)$, $(T \circ R) \backslash (T \circ S)$ și $T \circ (R \backslash S)$, $(T \circ S) \backslash (T \circ R)$ și $T \circ (S \backslash R)$ și să se scrie incluziunea strictă care are loc între acele două relații binare.

Rezolvare:

Fie $A=B=C=\mathbb{R}$, $R = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $S = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$, $T = \mathbb{R}^2$

Atunci $R \neq \emptyset$, $S \neq \emptyset$, $R \cap S = \emptyset$

$$T \circ R = \mathbb{R}^2 \circ (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \circ [\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})] = T \circ S$$

Astfel, avem:

$$T \circ (R \cap S) = \mathbb{R}^2 \circ \emptyset = \emptyset \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = (T \circ R) \cap (T \circ S)$$

$$(T \circ R) \backslash (T \circ S) = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^2 = \emptyset \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \circ (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) = T \circ R = T \circ (R \backslash S)$$

$$(T \circ S) \backslash (T \circ R) = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^2 = \emptyset \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \circ (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) = T \circ S = T \circ (S \backslash R)$$

Tema 16

- Fie $n \in \mathbb{N}$, iar $k_1, k_2, \dots k_n \in \mathbb{N}$ astfel încât există (cel puțin) un $i \in \overline{1, n}$ cu $k_i > 2$. Să se demonstreze că $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{k_i}$ nu este algebră Boole. (De exemplu, $\mathcal{L}_4^8$ nu e algebră Boole.)

- Fie I o mulțime arbitrară, iar $(T_i)_{i \in I}$ o familie de lanțuri (nu neapărat nevide, nu neapărat finite), date prin mulțimile lor suport, astfel încât $(\exists j \in I)\left(\left|T_j\right| \notin \{1, 2\}\right)$. Să se demonstreze că $\prod_{i \in I} T_i$ nu este algebră Boole.

Demonstrație:

Fie I mulțimea arbitrară, $(T_i)_{i \in I}$ o familie de lanțuri, și $j \in I$ cu $\left|T_j\right|$ cel puțin egal cu 3. Deci există $x, y, z \in T_j$ cu x<y<z (unde am notat cu "x<y" relația "x≤y și x≠y"), deci există un anume $y \in T_j$ cu proprietățile y≠0 și y≠1, unde 0 și 1 sunt minimul, respectiv maximul mulțimii T_j, dacă acestea există.

$\prod_{i \in I} T_i = \{f \mid f: I \to \bigcup_{i \in I} T_i, (\forall i)[(i \in I) \wedge (f(i) \in T_i)]\ \}$ și spunem că două funcții f și f' din $\prod_{i \in I} T_i$ au proprietatea că f≤f' dacă și numai dacă $(\forall i \in I), f(i) \leq f'(i)$.

Considerăm o funcție $g \in \prod_{i \in I} T_i$ astfel încât g(j)=y.

$\forall h \in \prod_{i \in I} T_i$, h(j)≤y sau y≤ h(j) deoarece T_j este lanț.

Dacă h(j)≤y, atunci calculăm funcția $m: I \to \bigcup_{i \in I} T_i$,

$m = g \vee h = \sup\{g, h\} = \left(\max\left(g(i), h(i)\right)\right)_{i \in I}$.

Avem $m(j) = \max\left(g(j), h(j)\right) = \max\left(y, h(j)\right) = y \neq 1$. Deci g și h nu pot complementare pentru că sup{g, h}(j)≠1.

Dacă y≤ h(j), atunci calculăm funcția $n: I \to \bigcup_{i \in I} T_i$,

$n = g \wedge h = \inf\{g, h\} = \left(\min\left(g(i), h(i)\right)\right)_{i \in I}$.

Avem $n(j) = \min\left(g(j), h(j)\right) = \min\left(y, h(j)\right) = y \neq 1$. Deci g și h nu pot complementare pentru că inf{g, h}(j)≠1.

Deci g nu poate fi complementat în $\prod_{i \in I} T_i$, deci $\prod_{i \in I} T_i$ nu este o algebră Boole.

Particularizând $I = \overline{1, n}$, obținem că $\prod_{i \in I} T_i = \prod_{i=1}^{n} T_i = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{k_i}$, iar dacă există $j \in I$ încât $|T_j| = k_j > 2$, atunci $\prod_{i=1}^{n} T_i$ nu este o algebră Boole pentru că există un element g din produsul de lanțuri încât x<g(j)<z, cu x și z din T_j, și deci g nu poate fi complementat.

Mulțimea vidă nu este considerată algebră booleană, iar dacă există $k_i = 0$ sau $|T_j| = 0$, atunci $\prod_{i \in I} T_i = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{k_i} = \emptyset$ din aplicația directă a axiomei alegerii.