Relatii binare. Functii.

Se numeste relatie binara de la multimea X la multimea Y o submultime $\mathcal{R} \subset X \times Y$. Daca $(x, y) \in \mathcal{R}$ scriem $x\mathcal{R}y$. O submultime a lui $X \times X$ se numeste relatie pe X.

O relatie f de la X la Y se numeste functie daca pentru orice $x \in X$ exista un unic $y \in Y$ astfel incat xfy. In acest caz unicul element asociat cu x se numeste valoarea lui f in x sau imaginea lui x prin f si se noteaza cu $f(x)$. Daca f este o functie scriem

$$f : X \to Y \text{ sau } X \xrightarrow{f} Y$$

Daca $A \subset X$ si $f : X \to Y$ este o functie notam cu $f|_A$ functia de la A la Y definita prin $f|_A(x) = f(x)$ pentru orice $x \in A$. Functia $f|_A$ se numeste restrictia lui f la A.

Fie $f : X \to Y$. Spunem ca f este

1) injectiva daca pentru orice $x, y \in X, x \neq y$ avem $f(x) \neq f(y)$.

2) surjectiva daca $\forall y \in Y, \exists x \in X$ astfel incat $f(x) = y$.

3) bijectiva daca este injectiva si surjectiva.

4) inversabila daca exista $g : Y \to X$ stfel incat $f \circ g = 1_Y$ si $g \circ f = 1_X$.

Propozitie. Fie $f : X \to Y$.

1) f este injectiva $\Leftrightarrow \exists g : Y \to X$ surjectiva astfel incat $g \circ f = 1_X$.

2) f este surjectiva $\Leftrightarrow \exists g : Y \to X$ injectiva astfel incat $f \circ g = 1_Y$.

3) f este bijectiva $\Leftrightarrow f$ este inversabila.

Definitie. O relatie $\mathcal{R} \subset X \times X$ se numeste

1) reflexiva daca $x\mathcal{R}x$ pentru orice $x \in X$

2) simetrica daca pentru orice $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

3) tranzitiva daca pentru orice $x, y, z \in X$

$$x\mathcal{R}y \text{ si } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

4) antisimetrica daca daca pentru orice $x, y \in X$

$$x\mathcal{R}y \text{ si } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$$

Definitie. O relatie $\mathcal{R} \subset X \times X$ se numeste relatie de echivalenta daca este reflexiva, simetrica si tranzitiva.

Daca $\mathcal{R}$ este relatie de echivalenta pe X scriem adeseori $x \sim y$. Daca $x \in X$, multimea

$$\widehat{x} = \{y \in X : x\mathcal{R}y\}$$

se numeste clasa de echivalenta a lui x. Daca $x, y \in X$ atunci $\widehat{x} = \widehat{y}$ sau $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$. Multimea $\widehat{X} = X/\sim$ se numeste multimea cat sau factor a lui X generata de $\mathcal{R}$. Aplicatia $\pi : X \to \widehat{X},\ \ x \mapsto \widehat{x}$ se numeste surjectie canonica.

Definitie. O relatie $\mathcal{R} \subset X \times X$ se numeste relatie de ordine daca este reflexiva, antisimetrica si tranzitiva. Se noteaza cu $\leq$. Obiectul $(X, \leq)$ format din multimea X si relatia de ordine $\leq$ se numeste multime ordonata. O multime ordonata $(X, \leq)$ se numeste total ordonata daca pentru pentru orice $x, y \in X$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Exercitiu. Fie A o multime si $(A_i)_{i\in I}$ o partitie a lui A. Sa se arate ca $x \sim y$ daca si numai daca exista $i \in I$ astfel incat $x, y \in A_i$ defineste o relatie de echivalenta pe A pentru care clasele de echivalenta coincid cu elementele partitiei considerate.

Exercitiu. Fie X o multime nevida si $\mathcal{P} = \{A | A \subseteq X\}$. Aratati ca relatia de incluziune $\subseteq$ este o relatie de ordine $\mathcal{P}$ care nu este totala daca X are cel putin doua elemente.

Fie $(X, \leq)$ o multime ordonata si $A \subseteq X,\ A \neq \emptyset$. Un element $x \in X$ se numeste majorant (resp. minorant) pentru A daca $a \leq x$ (resp. $a \geq x$) pentru orice $x \in A$. Daca A are un majorant (minorant) atunci A se numeste majorata (minorata). Daca A este majorata si minorata, A se numeste marginita.

Daca x este un majorant al lui A si in acelasi timp $x \in A$ atunci x este unic determinat, se numeste cel mai mare element al lui A sau maximul lui A si se noteaza cu $\max A$.

Daca x este un minorant al lui A si in acelasi timp $x \in A$ atunci x este unic determinat, se numeste cel mai mic element al lui A sau mainimul lui A si se noteaza cu $\min A$.

Daca $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ este majorata si daca multimea majorantilor lui A are un cel mai mic element, atunci acest element se numeste marginea superioara a lui A si se noteaza cu $\sup A$.

$$x = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x, \forall a \in A \\ \text{daca } a \leq y, \forall a \in A \Rightarrow x \leq y. \end{cases}$$

Daca $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ este minorata si daca multimea minorantilor lui A are un cel mai mare element, atunci acest element se numeste marginea inferioara a lui A si se noteaza cu $\inf A$.

$$x = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq x, \forall a \in A \\ \text{daca } y \leq a, \forall a \in A \Rightarrow x \geq y. \end{cases}$$

O multime ordonata se numeste complet ordonata daca orice parte nevida si majorata are margine superioara.

Exercitiu. Daca $(X, \leq)$ este complet ordonata atunci orice parte mevida si minorata are margine inferioara.

Multimi finite, infinite, numarabile

Multimea numerelor naturale

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Multimea numerelor intregi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, , -2 - 1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Multimea numerelor rationale

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$$

Doua multimi A si B se numesc echipotente si scriem $A \sim B$ daca exista o functie bijectiva $f : A \to B$. Se numeste cardinalul multimii A un simbol asociat multimii notat cu card A astfel incat card A=card $B \Leftrightarrow A \sim B$. Daca A si B sunt doua multimi vom scrie card $A \leq$card B, daca $A \sim A_1 \subset B$ si card $A <$card B daca daca $A \sim A_1 \subset B$ si $A \nsim B$. Cardinalul multimii vide se noteaza cu 0, cardinalul lui $\mathbb{N}$ se noteaza $\aleph_0$. O multime se numeste finita daca $A = \emptyset$ sau exista $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$; A este infinita daca nu este finita; A este numarabila daca $A \sim \mathbb{N}$. Spunem ca A este cel mult numarabila daca A este finita sau numarabila. Daca A este numarabila exista $f : \mathbb{N} \to A$ si fie $a_n = f(n)$. atunci $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$.

Propozitie. Orice submultime infinita a unei multimi numarabile este numarabila.

Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ si $B \subseteq A$ infinita. Definim recursiv $f : \mathbb{N} \to B$ dupa cum urmeaza. $f(1) = a_{n_1}$ unde n_1 este cel mai mic element $n \in \mathbb{N}$ a.i. $a_n \in B$. Punem $f(2) = a_{n_2}$ unde n_2 este cel mai mic element $n \in \mathbb{N}$ a.i. $a_n \in B \setminus \{a_{n_1}\}$; $f(k+1) = a_{n_{k+1}}$ unde n_{k+1} este cel mai mic element $n \in \mathbb{N}$ a.i. $a_n \in B \setminus \{a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}\}$. Cum f este bijectiva deducem $B \sim \mathbb{N}$.

Teorema. Multimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numarabila

Demonstratie. Consideram functia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita prin $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$. se poate verifica cu usurinta ca f este bijectiva.

Teorema. Imaginea surjectiva a unei multimi numarabile este cel mult numarabila.

Demonstratie. Sa presupunem ca A este numarabila si $f : A \to B$ este o surjectie. Atunci exista $g : B \to A$ injectiva astfel incat $f \circ g = 1_B$.

Cum $g(B) \subseteq A$ si A este numarabila rezulta ca $B \sim g(B)$ este cel mult numarabila.

Propozitie. Fie $(A_n)_{n\geq 1}$ un sir de multimi numerabile. Atunci $A = \cup_{n\geq 1} A_n$ este numarabila.

Demonstratie. Pentru orice $n \geq 1$ avem

$$A_n = \{a_n^1, a_n^2, \ldots\}$$

Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f(m,n) = a_n^m.$$

Evident ca f este surjectiva si deci A este cel mult numarabila. Cum $A_n \subset A$ deducem ca A este infinita si deci numarabila.

Multimea numerelor reale

Definitie. Se numeste corp ordonat un corp comutativ $(K, +, \cdot)$ inzestrat cu o relatie de ordine $\leq$ care satisface

1) $x \leq y \Rightarrow x + y \leq x + z \;\; \forall x, y, z \in K$

2) $x \leq y \Rightarrow x \cdot y \leq x \cdot z \;\; \forall x, y, z \in K,\ z \geq 0$

3) $x, y \in K \Rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x$

Doua corpuri ordonate K si F se numesc izomorfe daca exista o functie bijectiva $\varphi : K \to F$ astfel incat $\forall x, y \in K$

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

2) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

3) $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$

Un corp ordonat K se numeste corp complet ordonat daca multimea ordonata $(K, \leq)$ este complet ordonata.

Teorema. Oricare doua corpuri complet ordonate sunt izomorfe.

Definitie. Se numeste taietura in $\mathbb{Q}$ o submultime T a lui $\mathbb{Q}$ cu urmatoarele proprietati:

1) $T \neq \emptyset$ si $T \neq \mathbb{Q}$

2) T nu are un cel mai mic element

3) daca $a \in T$ si $x > a$ atunci $x \in T$

Notam cu $\mathcal{T}$ multimea taieturilor in $\mathbb{Q}$. Daca $a \in \mathbb{Q}$, atunci $S_a = \{x \in \mathbb{Q} : x > a\}$ se numeste taietura rationala determinata de numarul rational a. Observam ca $\inf S_a = a$ si ca aplicatia

$$\mathbb{Q} \ni a \mapsto S_a \in \mathcal{T}$$

este injectiva.

Propozitie. Relatia $\leq$ definita prin

$$T_1 \leq T_2 \Rightarrow T_1 \subset T_2$$

este o relatie de ordine pe $\mathcal{T}$ cu proprietatile

1) Daca $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ atunci $T_1 \leq T_2$ sau $T_2 \leq T_1$.

2) orice parte nevida si majorata a lui $\mathcal{T}$ are margine superioara.

3) Daca $a, b \in \mathbb{Q}$ si $a \leq b$ atunci $S_a \leq S_b$.

Propozitie. Pentru orice $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ multimea

$$T_1 + T_2 = \{x + y : x \in T_1, y \in T_2\}$$

este o taietura a lui $\mathbb{Q}$ si asociarea

$$(T_1, T_2) \mapsto T_1 + T_2$$

este o lege de compozitie in raport cu care $\mathcal{T}$ este un grup abelian.

In plus daca $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ si $T_1 \leq T_2$ atunci

$$T_1 + T \leq T_2 + T, \quad \forall T \in \mathcal{T}.$$

Elementul neutru in raport cu adunarea "$+$" este taietura S_0 si pentru $T \in \mathcal{T}$ opusul lui T este taietura

$$-T = \{x \in \mathbb{Q} : x > -a, \ \forall a \in T\}$$

Pentru orice $T \in \mathcal{T}$ avem fie $S_0 \leq T$ fie $T \leq S_0$. Fie $\mathcal{T}_+ = \{T \in \mathcal{T} : T \geq S_0\}$.

Propozitie. Pentru orice $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_+$ multimea

$$T_1 \circ T_2 = \{xy | x \in T_1, y \in T_2\}$$

este o taietura in $\mathbb{Q}$ si asocierea

$$(T_1, T_2) \mapsto T_1 \circ T_2$$

are proprietatiile

1) $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$

2) $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$

3) $T_1 \circ (T_2 + T_3) = T_1 \circ T_2 + T_1 \circ T_3$

4) $T_1 \leq T_2 \Rightarrow T_1 \circ T_3 \leq T_2 \circ T_3$

Pentru orice $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}_+$.

Elementul neutru in raport cu operatia " $\circ$ " este taietura S_1 si pentru $T \in \mathcal{T}_+$ exista o taietura $U \in \mathcal{T}_+$ a.i. $T \circ U = U \circ T = S_1$. Mai precis

$$U = \{x \in \mathbb{Q} : x > \frac{1}{a},\ \forall a \in \mathcal{T}\}.$$

Propozitie. Operatia " $\cdot$ " definita pe $\mathcal{T}$ prin

$$T_1 \cdot T_2 = \begin{cases} T_1 \circ T_2, & T_1, T_2 \in \mathcal{T}_+ \\ -(-T_1 \circ T_2), & T_1 \notin \mathcal{T}_+, T_2 \in \mathcal{T}_+ \\ -(T_1 \circ (-T_2)), & T_1 \in \mathcal{T}_+, T_2 \notin \mathcal{T}_+ \\ (-T_1) \circ (-T_2), & T_1, T_2 \notin \mathcal{T}_+ \end{cases}$$

are proprietatiile

1) $(T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3)$

2) $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$

3) $T_1 \cdot (T_2 + T_3) = T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3$

Teorema. Inzestrata cu operatiile " $+$ " si " $\cdot$ " si cu relatia de ordine " $\leq$ ", $\mathcal{T}$ este un corp complet ordonat.

Definition 1. Se numeste corp de numere reale si se noteaza cu $\mathbb{R}$ orice corp complet ordonat.

Teorema. Fie $A \subset \mathbb{R}$ nevida. Un element $a \in \mathbb{R}$ este margine superioara a lui A daca

1) $x \leq a, \ \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ a.i. $a - \varepsilon < x \leq a$

Teorema. Fie $A \subset \mathbb{R}$ nevida. Un element $b \in \mathbb{R}$ este margine inferioara a lui A daca

1) $x \geq b, \ \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ a.i. $b \leq x < b + \varepsilon$

Teorema (Proprietatea lui Arhimede)**.** Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $y > 0$ exista $n \in \mathbb{N}$ astfel incat $x \leq ny$.

Demonstratie. Presupunem ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x > ny$. Fie

$$A = \{y, 2y, \ldots, ny, \ldots\} \subset \mathbb{R}$$

Cum $ny < x$, multimea A este marginita si deci admite margine superioara $\sup A$. Asadar,

$$(n+1)y \leq \sup A, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Atunci

$$ny \leq \sup A - y, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

si deci $\sup A - y$ este un majorant al lui A. Asadar,

$$\sup A - y \geq \sup A$$

ceea ce reprezinta o contradictie, intrucat $y > 0$.

Propozitie. Pentru orice sir descrescator de intervale inchise $[a_n, b_n], \ n \in \mathbb{N}$ avem

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \emptyset.$$

Demonstratie. Deoarece $[a_n, b_n], \ n \in \mathbb{N}$ este un sir descrescator de intervale avem

$$a_n \leq b_m, \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Fie

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b_m, \ \forall m \in \mathbb{N}\}$$

Evident ca $A \neq \emptyset$, intrucat $a_n \in A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum A este marginita rezulta ca A are margine superioara. Fie $u = \sup A$. Avem

$$a_n \leq u \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si deci

$$u \in [a_n, b_n], \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Elemente de topologie

Fie $x \in \mathbb{R}^n$ si $r > 0$. Multimea

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y - x\| < r\}$$

se numeste bila deschisa de centru x si raza r iar multimea

$$B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y - x\| \leq r\}$$

se numeste bila inchisa de centru x si raza r.

Definitie. O multime $D \subset \mathbb{R}^n$ se numeste deschisa daca pentru orice $x \in D$ exista $r > 0$ astfel incat $B(x, r) \subset D$.

Exercitiu. Aratati ca $B(x, r)$ este o multime deschisa.

Propozitie. 1) $\emptyset$ si $\mathbb{R}^n$ sunt multimi deschise.

2) Reuniunea unei familii arbitrare de multimi deschise este deschisa.

3) Intersectia unei familii finite de multimi deschise este deschisa.

Observatie. Intersectia unei familii infinite de multimi deschise nu este in general o multime deschisa. De exemplu, daca $D_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \geq 1$ atuncu $\cap_{n \geq 1} D_n = \{0\}$.

Definitie. O multime $F \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeste inchisa daca complementara ei $\mathbb{R}^n \setminus F$ este o multime deschisa.

Propozitie. 1) $\emptyset$ si $\mathbb{R}^n$ sunt multimi inchise.

2) Intersectia unei familii arbitrare de multimi inchise este inchisa.

3) Reuniunea unei familii finite de multimi inchise este inchisa.

Definitie. Fie $x \in \mathbb{R}^n$. O multime $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeste vecinatate a lui x daca exista D o multime deschisa din $\mathbb{R}^n$ astfel incat $x \in D \subseteq V$.

Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numeste punct interior al multimii $A \subseteq \mathbb{R}^n$ daca aceasta este o vecinatate a lui x.

Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numeste punct de acumulare al multimii $A \subseteq \mathbb{R}^n$ daca orice vecinatate a lui x contine cel putin un element din A diferit de x.

Teorema. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente.

1) A este deschisa

2) orice $x \in A$ este punct interior al lui A.

3) A este o vecinatate pentru orice punct al ei.

Siruri

Definitie. Un sir de elemente dintr-o multime M este o functie $x : \mathbb{N} \to M$ (sau $x : \mathbb{N}_k \to M$ unde $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, \ldots\}$). Un sir $x : \mathbb{N} \to M$ il vom nota cu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(x_n)_{n\geq 1}$ unde $x_n = x(n)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

Definitie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de elemente din $\mathbb{R}^p$. Un element $x \in \mathbb{R}^p$ se numeste limita a sirului daca pentru orice vecinatate V a lui x exista $n_V \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$ sa avem $x_n \in V$.

Teorema. Daca un sir de elemente din $\mathbb{R}^p$ are limita atunci aceasta este unica.

Spunem ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x sau ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita x. Vom scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$.

Propozitie. Un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{R}^p$ este convergent la $x \in \mathbb{R}$ daca si numai daca oricare ar fi $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ sa avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Daca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un sir de numere reale, adica $p = 1$ scriem $|x_n - x| < \varepsilon$.

Definitie. Un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{R}^p$ se numeste marginit daca exista $M > 0$ astfel incat $\|x_n\| < M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Propozitie. Orice sir convergent de elemente din $\mathbb{R}^p$ este marginit.

Definitie. Un sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeste

(1) crescator (resp. descrescator) daca $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$

(2) strict crescator (resp. strict descrescator) daca $x_n < x_{n+1}$ (resp. $x_n > x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$

(3) monoton daca este crescator sau descrescator.

Definitie. Daca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de elemente din $\mathbb{R}^p$ si $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ este un sir strict crescator de numere naturale, atunci sirul $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ se numeste subsir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Propozitie. Daca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si are limita x atunci orice subsir al sau este convergent si are limita x.

Propozitie (Reducerea convergentei din $\mathbb{R}^p$ la convergenta in $\mathbb{R}$)**.** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de elemente din $\mathbb{R}^p$, $x_n = (x_n^!, x_n^2, \ldots, x_n^p)$. Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si are limita $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p)$ daca si numai daca pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ sirul $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = x^k$.

Definitie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de numere reale. Spunem ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $+\infty$ daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ sa avem $x_n > \varepsilon$.

Spunem ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $-\infty$ daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ sa avem $x_n < -\varepsilon$.

Propozitie (Operatii cu siruri convergente)**.** Fie $x_n \to x$, $y_n \to y$ unde $x, y \in \mathbb{R}$. Atunci

(1) $x_n + y_n \to x + y$

(2) $x_n y_n \to xy$

(3) $ax_n \to ax$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$

(4) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$ daca $y \neq 0$

Propozitie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siruri de numere reale

(1) Daca $x_n \to x$, $z_n \to x$ si exista $n_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $x_n \leq y_n \leq z_n$ pentru orice $n \geq n_0$ atunci $y_n \to x$.

(2) $x_n \to 0$ daca si numai daca $|x_n| \to 0$.

(3) Daca $x_n \to x$ atunci $|x_n| \to |x|$.

(4) Daca $x_n \to 0$ si $(y_n)_{n\geq 1}$ este marginit atunci $x_n y_n \to 0$.

Definitie. Spunem ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^p$ este sir Cauchy (sau fundamental) daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_\varepsilon$ sa avem $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ (daca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, adica $p = 1$ scriem $|x_n - x_m| < \varepsilon$).

Se observa cu usurinta ca

Teorema. Orice sir convergent de numere reale este sir Cauchy.

Exemplu. Sirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ este divergent.

Intr-adevar, se observa ca

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

pentru orice $n \geq 1$. De aici deducem cu usurinta ca $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este Cauchy si deci nu este convergent.

Teorema. Daca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir crescator (resp. descrescator) si marginit de numere reale atunci el este convergent. In plus

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \quad (\text{resp. } \lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n)$$

Demonstratie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir crescator si marginit de numere reale. Fie

$$a = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

Fie $\varepsilon > 0$. Cum $a - \varepsilon$ nu este un majorant al sirului, exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon.$$

Deoarece $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescator,

$$x_n \geq x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Cum $x_n \leq a < a + \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$ rezulta ca

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon$$

adica

$$|x_n - a| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Similar se trateaza cazul in care sirul este descrescator.

Limita inferioara si superioara

Definitie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir marginit de numere reale. Fie

$$u_n = \sup\{x_i : i \geq n\}, \quad v_n = \inf\{x_i : i \geq n\}$$

Sirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescator si sirul $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescator. Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ avem

$$v_n \leq u_m.$$

Numarul

$$v = \sup_n v_n$$

se numeste limita inferioara a sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si se noteaza cu $\liminf x_n$. Numarul

$$u = \inf_n u_n$$

se numeste limita superioara a sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si se noteaza cu $\limsup x_n$. Evident $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.

Teorema. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir marginit de numere reale, $u = \liminf x_n$ si $v = \limsup x_n$. Atunci exista doua subsiruri convergente $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ si $(x_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat

$$x_{k_n} \to u \text{ si } x_{l_n} \to v$$

Demonstratie. Fie

$$u_n = \sup\{x_i : i \geq n\}.$$

Construim un sir strict crescator de numere naturale $(k_n)_{n\geq 1}$ astfel incat $k_1 = 1$ si a.i.

$$u_{k_n+1} < x_{k_{n+1}} + \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Avem

$$u_{k_{n+1}} - \frac{1}{n+1} \leq u_{k_n+1} - \frac{1}{n+1} < x_{k_{n+1}} \leq u_{k_{n+1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Deoarece $u_{k_{n+1}} \to u$ si $\frac{1}{n+1} \to 0$ rezulta ca $x_{k_n} \to u$. Similar se arata ca exista $(x_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ a.i. $x_{l_n} \to v$.

Corolar (Lema lui Cesaro)**.** Orice sir marginit din $\mathbb{R}$ contine un subsir convergent.

Teorema. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir marginit de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ daca si numai daca

$$\liminf x_n = \limsup x_n = a.$$

Demonstratie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir marginit cu limita a. Exista doua subsiruri convergente $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ si $(x_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat

$$x_{k_n} \to \limsup x_n \text{ si } x_{l_n} \to \liminf x_n.$$

Intrucat

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \lim_{n\to\infty} x_{l_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

deducem ca

$$\liminf x_n = \limsup x_n$$

Reciproc, sa presupunem ca $\liminf x_n = \limsup x_n$. Ca mai sus fie

$$u_n = \sup\{x_i : i \geq n\}, \quad v_n = \inf\{x_i : i \geq n\}.$$

Deoarece

$$v_n \leq x_n \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

si

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = a$$

rezulta ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Lema. Orice sir Cauchy care are un subsir convergent este comvergent.

Demonstratie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir Cauchy. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$m, n \in \mathbb{N}, \quad m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Fie $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subsir convergent cu limita x. Exista $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ astfel incat

$$\|x_{n_{k_\varepsilon}} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daca $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$\|x - x_n\| \leq \|x_{n_{k_\varepsilon}} - x_n\| + \|x_{n_{k_\varepsilon}} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

si deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.
Din Lema anterioara si Lema lui Cesaro obtinem.

Teorema. Orice sir Cauchy din $\mathbb{R}^p$ este convergent.

Numarul e

Sirul

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

este convergent si are limita $e \in (2,3)$

Propozitie. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

2) Daca $x_n \to \infty$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \text{ si } \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{e}$$

3) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Propozitie. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad a > 1, \alpha > 0$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 0$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Serii de numere reale

Definitie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de numere reale si fie $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sirul definit prin

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Sirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeste sirul sumelor partiale. Perechea de siruri $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ se numeste seria generata de sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si se noteaza cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$. Spunem ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta daca sirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent; numarul $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ se numeste suma seriei si se noteaza cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. O serie care nu este convergenta se numeste divergenta.

Propozitie. Daca $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este o serie convergenta atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Corolar. Daca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ si in cazul in care este convergenta determinati suma ei.

Solutie. Avem

$$s_n = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$ si deci seria este convergenta si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$.

Exemplu. Seria geometrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergenta daca si numai daca $q \in (-1, 1)$.
Solutie. Intr-adevar, sa observam ca daca $q \neq 1$ atunci

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Deci seria este comvergenta daca $q \in (-1, 1)$ si divergenta in caz contrar. In plus, daca $q \in (-1, 1)$ atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Exemplu. Seria armonica generalizata $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergenta daca $\alpha > 1$ si divergenta daca $\alpha \leq 1$ (vezi demmonstratia dupa Criteriul condensarii)

Propozitie. Daca seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente si $c \in \mathbb{R}$, atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cx_n$ sunt convergente si au loc relatiile

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Teorema (Crieriul lui Cauchy)**.** Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta daca si numai daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ si orice $m \in \mathbb{N}$ avem

$$|x_{n+1} - x_{n+1} + \cdots + x_{n+m}| < \varepsilon.$$

Teorema (Primul criteriu al comparatiei)**.** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ serii cu termeni pozitivi astfel incat exista $n_o \in \mathbb{N}$ cu proprietatea ca $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \geq n_0$.

1) Daca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergenta atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.

2) Daca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2^n+3^n}$.

Solutie. Evident $\frac{1}{2^n+3^n} < \frac{1}{2^n}$. Cum seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ este convergenta deducem atunci din primul criteriu al comparatiei ca seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2^n+3^n}$ este convergenta.

Teorema (Al doilea criteriu al comparatiei)**.** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ serii cu termeni pozitivi astfel incat exista $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$.

1) Daca $0 < l < \infty$ atunci cele doua serii au aceasi natura.

2) Daca $l = 0$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergenta atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.

3) Daca $l = \infty$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergenta atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n+1}{2n^3+n}$.

Fie $x_n = \frac{n+1}{2n^3+n}$ si $y_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$ Cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{2n^3+n} = \frac{1}{2}$$

iar seria $\sum\limits_{n\geq 1} y_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergenta deducem din al doilea criteriu al comparatiei ca seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n+1}{2n^3+n}$ este convergenta.

Teorema (Criteriul raportului)**.** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1) Daca exista $r < 1$ si $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\frac{x_{n+1}}{x_n} < r$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este convergenta

2) Daca exista $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este divergenta

Corolar. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitiv astfel incat exista $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

1) Daca $l < 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta

2) Daca $l > 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{3^n}$.

Fie $x_n = \frac{n}{3^n}$ termenul general al seriei. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3} < 1$$

si deci cu criteriul raportului rezulta ca seria este convergenta

Teorema (Criteriul radacinii)**.** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1) Daca exista $r < 1$ si $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\sqrt[n]{x_n} < r$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este convergenta

2) Daca exista $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\sqrt[n]{x_n} \geq 1$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este divergenta.

Corolar. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitiv astfel incat exista $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

1) Daca $l < 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.

2) Daca $l > 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n^2+1}-n)^{n+1}$.
Solutie. Fie $x_n = (\sqrt{n^2+1}-n)^{n+1}$, $n \geq 1$. Cum

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)^{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

rezulta ca seria este convergenta.

Teorema (Criteriul Raabe-Duhamel)**.** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitiva.

1) Daca exista $r > 1$ si $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) > r$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este convergenta

2) Daca exista $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) \leq 1$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este divergenta.

Corolar. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem ca exista $l = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)$.

1) Daca $l > 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.

2) Daca $l < 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.
Solutie. Fie

$$x_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}-1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

si deci seria este divergenta.

Teorema (Criteriul condensarii). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel incat sirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescator. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta daca si numai daca seria $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ este convergenta

Demonstratie. Fie

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad t_k = \sum_{k=0}^{n} 2^k x_{2^k}$$

Deoarece $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescator, avem

$$2^n x_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k \leq 2^n x_{2^n}$$

Prin urmare

$$s_{2^{n+1}} \leq t_n \text{ si } t_{n+1} \leq 2 s_{2^{n+1}}$$

de unde rezulta imediar ca cele doua serii au aceasi natura.

Corolar. Seria armonica generalizata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergenta daca si numai daca $\alpha > 1$.

Demonstratie. Intr-adevar, cu criteriul condensarii seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

are aceasi natura ca si seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$$

care este convergenta daca si numai daca $2^{\alpha-1} < 1$, adica daca $\alpha > 1$.

Teorema (Criteriul lui Dirichlet). Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ si $(y_n)_{n\geq 1}$ doua siruri de numere reale cu proprietatea ca $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescator, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ si sirul $s_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ este marginit. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergenta.

Corolar (Criteriul lui Leibniz). Daca $(x_n)_{n\geq 1}$ este un sir descrescator de numere reale si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergenta.

Definitie. Daca $(x_n)_{n\geq 1}$ este un sir de numere reale, spunem ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergenta daca seria $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este convergenta.

Folosind criteriul lui Cauchy, obtinem:

Teorema. Orice serie absolut convergenta este convergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Sirul cu termenul general $a_n = \frac{1}{n}$ este descrescator si are limita egala cu zero. Aplicand criteriul lui Leibniz deducem ca seria este convergenta.

Observam ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergenta si deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nu este absolut convergenta!

Observatie. Exemplul de mai sus arata ca nu orice serie convergenta este absolut convergenta.

Exercitii

1) Folosind definitia convergentei unei serii sa se stabileasca natura urmatoarelor serii numerice, iar in caz de convergenta sa se calculeze suma.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^{n+1}}{6^n}$$

2) Studiati convergenta seriilor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{4^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 + 2n + 1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} a^n, a > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}, a \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{\frac{n^2}{n+2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3 + 1}$$

Multimi compacte

O multime $A \subset \mathbb{R}^p$ se numeste compacta daca pentru orice familie $(D_i)_{i\in I}$ de multimi deschise din $\mathbb{R}^p$ cu proprietatea ca $A \subset \bigcup_{i\in I} D_i$ exista $J \subset I$ finita astfel incat $A \subset \bigcup_{i\in j} D_i$

Propozitie. Orice multime compacta $K \subset \mathbb{R}^p$ este inchisa.

Demonstratie. Fie $x \in \mathbb{R}^p \setminus K$ si fie

$$D_m = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| > \frac{1}{m}\}$$

Evident

$$K \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m.$$

Cum K este compacta existra $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$K \subset D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_{n_0} = D_{n_0}.$$

Prin urmare

$$CD_{n_0} = \mathbb{R}^p \setminus D_{n_0} \subseteq \mathbb{R}^p \setminus K$$

Asadar,

$$\{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| < \frac{1}{n_0}\} \subset \mathbb{R}^p \setminus K$$

Atunci $\mathbb{R}^p \setminus K$ este deschisa si deci K este inchisa.

Teorema (Heine-Borel)**.** O multime $K \subset \mathbb{R}^p$ este compacta daca si numai daca este marginita si inchisa (demonstratie la pag 216)

Teorema. O multime $K \subset \mathbb{R}^p$ este compacta daca si numai daca orice sir de elemente din K contine un subsir convergent la un element din K.

Multimi conexe

O multime $A \subset \mathbb{R}^p$ se numeste neconexa daca exista doua multimi deschise D_1 si D_2 din $\mathbb{R}^p$ cu proprietatea ca

$$A \cap D_1 \neq \emptyset, \quad A \cap D_2 \neq \emptyset,\ A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset,\ \text{si } A = (D_1 \cap A) \cup (D_1 \cap A)$$

O multime se numeste conexa daca nu este neconexa.

Teorema. O multime $A \subset \mathbb{R}$ este conexa daca si numai daca A este interval

" $\Rightarrow$ " Sa presupunem ca A este conexa. Aratam pentru inceput ca pentru orice $x, y \in A$, $[x, y] \subset A$. Sa presupunem ca exista $x, y \in A$ astfel incat intervalul $[x, y]$ sa nu fie continut in A. Atunci exista $z \in (x, y)$ astfel incat $z \notin A$. Atunci

$$((-\infty, z) \cap A) \cup ((z, \infty) \cap A) = A$$

si intrucat

$$(-\infty, z) \cap A \neq \emptyset, \quad (z, \infty) \cap A \neq \emptyset$$

rezulta ca A este neconexa. Contradictie!

Fie

$$p = \inf A, \quad q = \sup A.$$

Pentru a arata ca A este interval este suficient sa aratam ca $(p, q) \subset A$ adica este suficient sa demonstram ca daca $c \in A$ atunci $(p, c] \subset A$ si $[c, q] \subset A$.

Cazul I. $p = -\infty$

Fie $x < c$. Cum $p = -\infty = \inf A$, exista $\alpha \in A$ astfel incat $\alpha < x$. Atunci

$$x \in [\alpha, c] \subset A$$

si deci $x \in A$ si cum x a fost ales arbitrar rezulta ca

$$(-\infty, c] \subset A.$$

Cazul II. $p \in \mathbb{R}$

Fie $x \in (p, c)$. Atunci exista $\alpha \in A$ astfel incat $p \leq \alpha < x$. Deci

$$\alpha < x < c \;\Rightarrow\; [\alpha, c] \subset A \Rightarrow\; x \in A$$

Asadar

$$(p, c] \subset A.$$

Similar se arata ca $[c, q) \subset A$.

" $\Leftarrow$ " Fie A un interval. Sa presupunem ca A este neconexa. Atunci exista doua multimi deschise D_1 si D_2 cu proprietatea ca

$$A \cap D_1 \neq \emptyset, \quad A \cap D_2 \neq \emptyset, \; A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset, \text{ si } A = (D_1 \cap A) \cup (D_1 \cap A)$$

Fie

$$x \in A \cap D_1, \quad y \in A \cap D_2.$$

si fie

$$z = \sup D_1 \cap [x, y]. \tag{1}$$

Daca $z \in D_1$ atunci $z < y$. Cum D_1 este deschisa, exista $h > 0$ astfel incat

$$[z, z+h) \subset D_1 \cap [x, y].$$

Acest fapt contrazie (1).

Daca $z \in D_2$ atunci $z > x$. Cum D_2 este deschisa exista $h > 0$ astfel incat

$$(z-h, z] \subset D_2 \cap [x, y]$$

Cum $z = \sup D_1 \cap [x, y]$ exista $t \in D_1 \cap [x, y]$ astfel incat $z - h < t \leq z$. Prin urmare $D_1 \cap D_2 \cap A \neq \emptyset$. Contradictie!

Teorema. Multimea $\mathbb{R}^p$ este conexa.

Demonstratie. Presupunem ca $\mathbb{R}^p$ este neconexa. atunci exista D_1, D_2 multimi deschise nevide astfel incat

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset \text{ si } D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}^p.$$

Fie $x \in D_1$ si $y \in D_2$. Defimim multimile

$$G_1 = \{t \in \mathbb{R} : x + t(y - x) \in D_1\}$$

$$G_2 = \{t \in \mathbb{R} : x + t(y - x) \in D_2\}$$

Atunci G_1 si G_2 sunt multimi deschise din $\mathbb{R}$ astfel incat

$$G_1 \cap [0,1] \neq \emptyset, \quad G_2 \cap [0,1] \neq \emptyset, G_1 \cap G_2 \cap [0,1] = \emptyset,$$

$$[0,1] = (G_1 \cap [0,1]) \cap (G_2 \cap [0,1]).$$

De aici rezulta ca $[0,1]$ este neconexa ceea ce reprezinta o contradictie!

Exercitii

1) Consideram urmatoarele multimi din $\mathbb{R}^2$

$$A = [0,1] \times (0,2), \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}, C = \{1\} \times \mathbb{R}$$

Care dintre aceste multimi sunt deschise ? Care dintre aceste multimi sunt inchise ? Care dintre aceste multimi sunt compacte ? Justificati raspunsul !

2) Consideram urmatoarele multimi din $\mathbb{R}^3$

$$A = [0,1] \times 0, 2 \times [1,3], \quad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\}, C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z > 9\}$$

Care dintre aceste multimi sunt deschise ? Care dintre aceste multimi sunt inchise ? Care dintre aceste multimi sunt compacte ? Justificati raspunsul !

Functii continue

Definitie. Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru D. Spunem ca f are limita $l \in \mathbb{R}$ in punctul a si scriem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ daca pentru orice vecinatate V a lui l exista U o vecinatate a lui a astfel incat pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq a$ sa avem $f(x) \in V$.

Daca exista, limita unei functii intr-un punct este unica.

Definitie. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ si $a \in D$. Spunem ca f este continua in a daca pentru orice vecinatate V a lui $f(a)$, exista o vecinatate U a lui a (care depinde de V), astfel incat pentru orice $x \in U$ sa avem $f(x) \in V$.

Teorema. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ si $a \in D$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente.

(i) f este continua in a.

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat pentru orice $x \in D$, $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ sa avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

(iii) pentru orice sir $(x_n)_{n\geq 1}$ de elemente din D, care converge la a, sirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge la $f(a)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Multimea

$$B(f(a), \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^q : \|y - f(a)\| < \varepsilon\}$$

este o vecinatate a lui $f(a)$. Din (i) rezulta ca exista U o vecinatate a lui a astfel incat

$$x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

Deoarece U este o vecinatate a lui a, exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $B(a, \delta_\varepsilon) \subset U$. Atunci, daca $x \in D$ si $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ rezulta ca $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset D$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Fie $\varepsilon > 0$. Din (ii), exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat

$$x \in D, \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ sa avem

$$\|x_n - a\| < \delta_\varepsilon.$$

Cum $x_n \in D$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezulta ca

$$\|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon$$

si deci $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge la $f(a)$.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Sa presupunem ca (i) este falsa. Atunci exista V_0 o vecinatate a lui $f(a)$ cu proprietatea ca pentru orice vecinatate U a lui a exista $x_U \in U \cap D$ astfel incat $f(x_U) \notin V_0$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fie

$$U_n = B(a, 1/n) = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - a\| < \frac{1}{n}\}$$

Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ exista $x_n \in D$ astfel ca

$$f(x_n) \notin V_0$$

fapt ce contrazice (iii).

Teorema. $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ si $a \in D$. Atunci f este continua in a daca si numai daca pentru orice vecinatate V a lui $f(a)$, exista o vecinatate U a lui a, astfel incat $U \cap D = f^{-1}(V)$.

Teorema. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ si $a \in D$ care este si punct de acumulare pentru D. Atunci f este continua in a daca si numai daca exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Teorema (de continuitate globala)**.** Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente

(i) f este continua pe D;

(ii) pentru orice multime deschisa G din $\mathbb{R}^q$ exista o multime deschisa G_1 din $\mathbb{R}^p$ astfel incat $f^{-1}(G) = G_1 \cap D$;

(iii) pentru orice multime inchisa F din $\mathbb{R}^q$ exista o multime inchisa F_1 din $\mathbb{R}^p$ astfel incat $f^{-1}(F) = F_1 \cap D$.

Corolar. Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente

(i) f este continua pe $\mathbb{R}^p$;

(ii) pentru orice multime deschisa G din $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(G)$ este deschisa in $\mathbb{R}^p$;

(iii) pentru orice multime inchisa F din $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(F)$ este inchisa in $\mathbb{R}^p$.

Observatie. In general, daca f este continua si $G \subset \mathbb{R}^p$ este o multime deschisa nu rezulta ca $f(G)$ este deschisa.

De exemplu daca

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

atunci

$$f(-1,1) = \left(\frac{1}{2}, 1\right], \quad f(\mathbb{R}) = (0,1]$$

Operatii cu functii continue

Teorema. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Daca f, g si φ sunt continue in a atunci $f+g,\ f-g, \varphi f$ si $\frac{f}{\varphi}$ (daca $\varphi(a) \neq 0$) sunt continue in a. Daca f este continua in a atunci $\|f\|$ este continua in a.

Teorema. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to D' \subseteq \mathbb{R}^q$ si $g : D' \subseteq \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ astfel incat f este continua in a si g este continua in $f(a)$. Atunci $g \circ f$ este continua in a.

Teorema. Fie $C \subset \mathbb{R}^p$ este conexa si $f : C \to \mathbb{R}^q$ continua. Atunci $f(C)$ este conexa.

Demonstratie. Presupunem ca $f(C)$ nu este conexa. Atunci exista $A, B \subseteq \mathbb{R}^p$ deschise astfel incat

$$A \cap f(C) \neq \emptyset,\ B \cap f(C) \neq \emptyset,\ A \cap B \cap f(C) = \emptyset \text{ si } f(C) \subseteq A \cup B.$$

Cum f este continua, exista A_1, B_1 multimi deschise din $\mathbb{R}^p$ astfel incat

$$A_1 \cap C = f^{-1}(A) \text{ si } B_1 \cap C = f^{-1}(B)$$

Atunci,

$$A_1 \cap C \neq \emptyset,\ B_1 \cap C \neq \emptyset,$$

$$A_1 \cap B_1 \cap C = f^{-1}(A \cap B) \neq \emptyset$$

si

$$C = f^{-1}(A \cup B) = (A_1 \cap C) \cup (B_1 \cap C)$$

Asadar C este neconexa, ceea ce este o contradictie !

Corolar. Fie $C \subset \mathbb{R}^p$ este conexa si $f : C \to \mathbb{R}$ continua. Atunci $f(C)$ este este un interval.

Teorema. Fie $K \subset \mathbb{R}^p$ este compacta si $f : K \to \mathbb{R}^q$ continua. Atunci $f(K)$ este compacta.

Demonstratie. Fie $(G_i)_{i\in I}$ o acoperire cu multimi deschise a lui $f(K)$, adica $K \subset \cup_{i\in I} G_i$. Cum f este continua pentru orice $i \in I$ exista o multime deschisa D_i astfel incat

$$f^{-1}(G_i) = D_i \cap K.$$

Deci $f(D_i \cap K) \subseteq G_i$ si cum $f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ rezulta ca

$$K \subseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(G_i) = \bigcup_{i\in I} D_i \cap K \subseteq \bigcup_{i\in I} D_i$$

Cum K este compacta, exista J o submultime finita a lui I astfel incat

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} D_i.$$

Deci

$$K = \bigcup_{i\in J} (D_i \cap K) = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(G_i)$$

si atunci

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i.$$

In concluzie $f(K)$ este compacta.

Teorema. Fie $K \subset \mathbb{R}^p$ o multime compacta si $f : K \to \mathbb{R}^p$ o functie continua. Atunci exista x_* si x^* in K astfel incat

$$f(x^*) = \sup\{f(x) : x \in K\}, \quad f(x_*) = \inf\{f(x) : x \in K\}$$

Teorema. Fie $K \subseteq \mathbb{R}^p$ compacta si $f : K \to \mathbb{R}^q$ o functie continua si injectiva. Atunci $f^{-1} : f(K) \to K$ este continua.

Demonstratie. Fie $F \subseteq \mathbb{R}^q$ o multime inchisa. Atunci $F \cap K$ este compacta. Deoarece f este continua rezulta ca $f(F \cap K)$ este compacta si deci inchisa. Avem

$$(f^{-1})^{-1}(F) = (f^{-1})^{-1}(F \cap K) = f(F \cap K)$$

Cum $f(F \cap K)$ este inchisa din teorema de continuitate gloabala rezulta ca f este continua.

Definitie. O aplicatie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se numeste liniara daca $f(x + y) = f(x) + f(y)$ si $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ si orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema. Orice aplicatie liniara $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este continua.

Demonstratie. Vom presupune pentru simplitate ca $p = q = 2$. Fie

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1)$$

si

$$(c_{11}, c_{21}) = f(e_1), \quad (c_{12}, c_{22}) = f(e_2)$$

Definim

$$M = (\sum_{i,j=1}^{2} c_{ij})^{1/2}$$

daca $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, atunci

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) = (x_1 c_{11} + x_2 c_{12}, x_1 c_{21} + x_2 c_{22})$$

Atunci

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= |x_1 c_{11} + x_2 c_{12}|^2 + |x_1 c_{21} + x_2 c_{22}|^2 \\ &\leq (x_1^2 + x_2^2)(c_{11}^2 + c_{12}^2) + (x_1^2 + x_2^2)(c_{21}^2 + c_{22}^2) = M^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Asadar,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

de unde rezulta cu usurinta ca f este continua.

Definitie. Daca $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, un punct $x \in D$ se numeste punct fix al functiei f daca $f(x) = x$.

Teorema. Daca $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ este o contractie (adica exista $C \in (0, 1)$ astfel incat $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$) atunci f are un unic punct fix.

Demonstratie. Fie $x_1 \in \mathbb{R}^p$ si pentru $n \geq 2$ fie $x_{n+1} = f(x_n)$. Pentru orice $n \geq 1$ avem

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq C\|x_n - x_{n-1}\| \leq \cdots \leq C^{n-1}\|x_2 - x_1\|.$$

Atunci, pentru $m \geq n$,

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq (C^{m-1} + C^{m-2} + \cdots + C^{n-1})\|x_2 - x_1\| \\ &< \frac{C^{n-1}}{1 - C}\|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

Deci $(x_n)_{n \geq 1}$ este sir Cauchy. Atunci exista $z = \lim_{n\to\infty} x_n$ si avem

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = z.$$

Daca v este un punct fix atunci $\|z - v\| = \|f(z) - f(v)\| \leq C\|z - v\|$ si deci $u = z$.

Functii uniform continue

Definitie. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Spunem ca f este uniform continua pe D daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat pentru orice $x, y \in D$ cu $\|x - y\| < \delta_\varepsilon$ sa avem $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Teorema. Fie $K \subset \mathbb{R}^p$ o multime compacta. Daca $f : K \to \mathbb{R}^q$ este o functie continua atunci f este uniform continua pe K.

Demonstratie. Presupunem ca f nu este uniform continua pe K. Prin urmare exista $\varepsilon_0 > 0$ astfel incat pentru orice $\delta > 0$, exista $x, y \in K$ astfel incat

$$\|x - y\| < \delta \text{ si } \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon_0.$$

Fie $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Asadar, exista $x_n, y_n \in K$ astfel incat

$$\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n} \text{ si } \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon_0$$

Deoarece K este compacta exista $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ un subsir convergent al lui $(x_n)_{n\geq 1}$. Fie

$$a = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

Intrucat

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| = 0.$$

rezulta ca

$$a = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$$

Prin urmare

$$\lim_{k\to\infty} \|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| = 0$$

ceea ce este o contradictie. (o demonstratie diferita se gaseste la pag. 226)

Exercitiu. Aratati ca functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ este uniform continua pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare. Fie $\varepsilon > 0$. Fie $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Sa consideram acum $x, y \in \mathbb{R}$ cu $|x - y| < \delta$. Atunci

$$|f(x) - f(y)| = |(3x + 2) - (3y + 2)| = 3|x - y| < 3\delta = \varepsilon.$$

Exercitiu. Aratati ca functia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nu este uniform continua pe $(0, \infty)$.

Rezolvare. Pentru a demonstra ca f nu este uniform continua vom arata ca

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x, y \in (0, \infty) \text{ a.i. } |x - y| < \delta \text{ si } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Fie $\varepsilon = 1$. Sa consideram $\delta > 0$. Fie $x = \frac{1}{\delta}$ si $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Asadar

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

si

$$|f(x) - f(y)| = \left| \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) - \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon.$$

Functii derivabile

Definitie. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval si $a \in I$. Spunem ca f are derivata in a daca exista (in $\overline{\mathbb{R}}$) limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ notata } f'(a).$$

Daca derivata $f'(a)$ exista si este finita se spune ca f este derivabila in a.

Daca functia $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabila in orice punct al unei submultimi $A \subset I$ atunci spunem ca f este derivabila pe A. In acest caz functia

$$x \ni A \mapsto f'(x)$$

se numeste derivata lui f pe A si se noteaza cu f'.

Teorema. Orice functie derivabila intr-un punct este continua in acel punct.

Demonstratie. Sa prsupunem ca $f : D \to \mathbb{R}$ este derivabila in $a \in D$. Din relatia

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a), \;\; x \neq a.$$

rezulta ca

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = 0.$$

Deci

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

si deci f este continua in a.

Propozitie. Daca $f, g : I \to \mathbb{R}$, doua functii derivabile pe intervalul I. Atunci:

(i) functia $f+g$ este derivabila pe I si

$$(f+g) = f' + g'$$

(ii) functia λf este derivabila pe I si

$$(\lambda f)' = \lambda f'.$$

(iii) functia fg este derivabila in pe I si

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

(iv) daca in plus $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$ functia $\frac{f}{g}$ este derivabila pe I si

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Teorema. Daca $f : I \to J$ este derivabila pe I si $g : J \to \mathbb{R}$ este derivabila pe J atunci functia $g \circ f$ este derivabila pe J si

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Teorema. Daca $f : I \to J$ o functie continua si bijectiva intre doua intervale. Daca f este derivabila pe I si $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$ atunci functia inversa f^{-1} este derivabila pe J si in plus

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A \subset \mathbb{R}$. Un punct $a \in A$ se numeste punct de maxim local (relativ) daca exista o vecinatate U al lui a astfel incat $f(x) \geq f(a)$ pentru orice $x \in U \cap A$.

Un punct $a \in D$ se numeste punct de minim local (relativ) daca exista o vecinatate U al lui a astfel incat $f(x) \leq f(a)$ pntru orice $x \in U \cap A$. Punctele de maxim local si cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Teorema (Fermat)**.** Fie I un interval deschis si $a \in I$ un punct de extrem local al unei functii $f : I \to \mathbb{R}$. Daca f este derivabila in a atunci $f'(a) = 0$.

Demonstratie. Sa presupunem ca a este punct de minim local. Exista o vecinatate U a lui a (si putem presupune ca $U \subset I$) astfel incat pentru orice $x \in U \cap I$ sa avem $f(x) \geq f(a)$. Atunci

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

si deci $f'(a) = 0$

Teorema (Rolle)**.** Fie $a < b$ si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua pe $[a, b]$, derivabila pe (a, b) astfel ca $f(a) = f(b)$. Atunci exista un punct $c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) = 0$

Demonstratie. Functia f fiind continua este marginita si isi atinge marginile. Fie $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ si $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Daca $M > f(a)$ exista un punct $c \in [a, b]$ astfel incat $M = f(c)$. In plus $c \neq a$ si $c \neq b$ (in caz contrar, ar rezulta ca $M = f(a) = f(b)$, absurd). Asadar $c \in (a, b)$ si cum c este punct de extrem local din Teorema lui Fermat rezulta ca $f'(c) = 0$.

Similar se trateaza cazul $m < f(a)$. Daca $m = M$ atunci f este constanta si deci $f'(c) = 0$ pentru orice $c \in (a, b)$.

Teorema (Lagrange)**.** Fie $a < b$ si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua pe $[a, b]$, derivabila pe (a, b). Atunci exista un punct $c \in (a, b)$ astfel incat

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{2}$$

Demonstratie. Consideram functia $F(x) = f(x) + kx$, $x \in [a, b]$, unde k este o constanta pe care o determinam impunand conditia $F(a) = F(b)$. Asadar $k = \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$. Cu acest k functia F verifica conditiile teoremei lui Rolle si atunci exista $c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) = 0$. Cum $F'(x) = f'(x) + k$ rezulta ca $f'(c)$ verifica relatia (2).

Teorema (Cauchy)**.** Fie $a < b$ si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ doua functii continue pe $[a, b]$ si derivabile pe (a, b) astfel incat $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$. Atunci exista un punct $c \in (a, b)$ astfel incat

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Propozitie. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval si $f : I \to \mathbb{R}$, derivabila pe I.

(i) Daca $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in I$ atunci f este constanta pe I.

(ii) Daca $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in I$ atunci f este crescatoare pe I.

(ii) Daca $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in I$ atunci f este descrescatoare pe I.

Teorema (l'Hospital)**.** Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ si I un interval din $\mathbb{R}$ astfel incat $(a, b) \subset I \subset [a, b]$ si $x_0 \in I$. Fie $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ cu proprietatile

(i) f si g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$.

(ii) $g'(x) \neq 0$ pe $I \setminus \{x_0\}$.

(iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

(iv) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci exista $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$.

Teorema anterioara se poate reformula, avand demonstratii foarte asemanatoare, punand in loc de (iii) una din ipotezele

$(iii)'$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

$(iii)''$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$.

Spunem ca functia $f : A \to \mathbb{R}$ este derivabila de doua ori in punctul $a \in A$ daca f este derivabila intr-o vecinatate a punctului a si derivata f' este derivabila in a. In acest caz, derivata lui f' in a se numeste derivata a doua a lui f in a si se noteaza cu $f''(a)$ sau $f^{(2)}(a)$. Daca f' este derivabila pe A atunci derivata lui f' se numeste derivata a doua a lui f si se noteaza cu f''. Similar se defineste derivata de ordin n.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis si $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem ca f este de clasa C^n daca f este de n ori derivabila pe D, iar derivata de ordin n, $f^{(n)}$ este continua pe I.

$$C^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ este de clasa } C^n \text{ pe } I\}.$$

Spunem ca f este de clasa C^∞ daca f este derivabila de orice ordin pe I.

$$C^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ este de clasa } C^\infty \text{ pe } I\}.$$

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila de n ori pe I. Polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se numeste polinomul Taylor de grad n asociat functiei f in punctul a. Definim

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad x \in I$$

Egalitatea

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad x \in I$$

poarta numele de formula lui Taylor de ordin n coresp. functie f in punctul a. Functia R_n se numeste restul de ordin n al formulei lui Taylor.

Teorema (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange)**.** Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ si $n \in \mathbb{N}$. Daca $f : I \to \mathbb{R}$ este o functie de $(n+1)$ ori derivabila pe I, atunci pentru orice $x \in I$, $x \neq a$ exista $c \in (x, a)$ sau $c \in (a, x)$ astfel incat

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

adica

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Convergenta simpla si uniforma

Definitie. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un sir de functii $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ si $f : D \to \mathbb{R}^q$.

1) Spunem ca $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplu pe D la functia f si scriem

$$f_n \xrightarrow{s} f$$

daca pentru orice $x \in D$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

2) Spunem ca $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform pe D la functia f si scriem

$$f_n \xrightarrow{u} f$$

daca pentru orice $\varepsilon > 0$, exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ si orice $x \in D$ sa avem

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Observatie. 1) $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{s} f$

2) Daca $f_n : D \to \mathbb{R}$ atunci

$$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \text{ a. i. } \quad -\varepsilon < f(x) - f_n(x) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in D$$

Definitie. Daca $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este o functie marginita definim

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} \|f(x)\|$$

Exercitiu. $\|\cdot\|_\infty$ defineste o norma pe multimea functiilor marginite definite pe D.

Propozitie. Daca $f, f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ atunci

$$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Exercitiu. Pentru $n \geq 1$

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Sirul $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplu dar nu converge uniform

Rezolvare. Observam ca

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ daca } 0 \le x < 1 \\ 1 \text{ daca } x = 1 \end{cases}$$

Asadar $(f_n)_{n\ge1}$ converge simplu la f. Cum,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n| = 1$$

rezulta ca $(f_n)_{n\ge1}$ nu converge uniform pe $[0,1]$.

Teorema. Fie $f, f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Daca $(a_n)_{n\ge1}$ este un sir de numere pozitive convergent la 0 astfel incat

$$\|f_n(x) - f(x)\| \le a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in D,$$

atunci $(f_n)_{n\ge1}$ converge uniform la f pe D.

Demonstratie. Fie $\varepsilon > 0$. Cum $a_n \to 0$ rezulta ca exista n_ε astfel incat $a_n < \varepsilon$ pentru orice $n \ge n_\varepsilon$. Dar atunci

$$\|f_n(x) - f(x)\| \le a_n < \varepsilon \quad \forall n \ge n_\varepsilon,\ \forall x \in D$$

si deci $f_n \xrightarrow{u} f$ pe D.

Teorema. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de functii $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ un sir de functii continue pe D care converge uniform la functia $f : D \to \mathbb{R}^q$. Atunci f este continua pe D.

Demonstratie. Fie $\varepsilon > 0$. Cum $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform la f, exista $n_\varepsilon > 0$ astfel incat pentru orice $n \ge n_\varepsilon$ si orice $x \in D$ avem

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie $a \in D$. Deoarece f_{n_ε} este continua in a, exista $\delta_{\varepsilon,a} > 0$ astfel incat daca $x \in D$ si $\|x - a\| < \delta_{\varepsilon,a}$ sa avem

$$\|f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie $x \in D$ astfel incat $\|x - a\| < \delta_{\varepsilon,a}$. Atunci avem

$$\|f(x) - f(a)\| \le \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| + \|f(a) - f_{n_\varepsilon}(a)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Deci f este continua in a si cum a a fost ales arbitrar, rezulta ca f este continua pe D.

Teorema (Dini)**.** Fie $K \subset \mathbb{R}^p$ o multime compacta. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de functii continue pe K astfel incat $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pentru orice $x \in K$ si $f_n \xrightarrow{s} f$ unde $f : K \to \mathbb{R}$ este o functie continua. Atunci $f_n \xrightarrow{u} f$.

Demonstratie. Fie $\varepsilon > 0$. Pentru orice $x \in K$ exista $n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ astfel incat daca $n \geq n_{x,\varepsilon}$ avem

$$0 \leq f(x) - f_{n_{x,\varepsilon}}(x) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cum f si $f_{n_{x,\varepsilon}}$ sunt continue in x exista o vecinatate deschisa $U_{x,\varepsilon}$ a lui x astfel incat pentru orice $y \in K \cap U_{x,\varepsilon}$ avem

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } |f_{n_{x,\varepsilon}}(x) - f_{n_{x,\varepsilon}}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cum K este compacta, exista $x_1, x_2, \ldots, x_m$ astfel incat

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i,\varepsilon}$$

Fie

$$n_\varepsilon = \max\{n_{x_1,\varepsilon}, n_{x_2,\varepsilon}, \ldots, n_{x_m,\varepsilon}\}$$

Fie $y \in K$ si $n \geq n_\varepsilon$. Atunci exista i astfel incat $y \in U_{x_i,\varepsilon}$ si avem

$$f(y) - f_n(y) \leq f(y) - f_{n_{x_i},\varepsilon}(y) \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f_{n_{x_i},\varepsilon}(x)| + |f_{n_{x_i},\varepsilon}(x) - f_{n_{x_i},\varepsilon}(y)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

(o demonstratie diferita se gaseste la pag. 220)

Teorema. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un sir de functii reale derivabile pe un interval marginit $I \subset \mathbb{R}$ astfel incat sirul derivatelor $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge uniform la o fucntie $g : I \to \mathbb{R}$ si exista $x_0 \in [a, b]$ astfel incat sirul $(f_n(x_0))_{n\geq 1}$ este convergent. Atunci sirul $(f_n)_{n\geq 1}$ este uniform convergent la o functie $f : I \to \mathbb{R}$ care este derivabila si $f' = g$ adica

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

Demonstratia se gaseste la pag. 291.

Exercitiu. Sa se studieze convergenta simpla si uniforma a sirului de functii

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

Solutie. Intrucat $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ adica sirul converge simplu la functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

Dar f_n este derivabila si $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$. Observam ca $f_n'(x) = 0$ daca si numai daca $x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$; punctul $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ este punt de maxim si $x = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ este punct de minim al functiei f_n. Deoarece $\lim\limits_{n\to\pm\infty} f_n(x) = 0$, aceste puncte sunt puncte de extrem global. Cum $f_n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \pm\frac{1}{2\sqrt{n}}$ rezulta ca

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{x}{1+nx^2}|\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0.$$

si deci $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform la functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x) = 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

Exercitiu. Sa se studieze convergenta simpla si uniforma a sirului de functii

$$f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Solutie. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$ pentru orice $x \in (-1,1)$. Asadar daca $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{1-x}$ atunci $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplu la f.

$$\sup_{x\in(-1,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} \left|\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \sup_{x\in(-1,1)} \frac{|x^n|}{1-x} \geq \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-(1-\frac{1}{n})} = n(1-\frac{1}{n})^n$$

si deci

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty \geq \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \infty.$$

Asadar $\|f_n - f\|_\infty \nrightarrow 0$ si deci $(f_n)_{n\geq 1}$ nu converge uniform.

Exercitii

1) Sa se studieze continuitatea functiilor

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{daca } -1 \leq x \leq 1 \\ |x| & \text{daca } |x| > 1 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{daca } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{daca } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{daca } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{daca } x \geq 0 \end{cases}$

2) Studiati continuitatea uniforma a urmatoarelor functii:

1) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$ 2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 1$

3) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$

3) Sa se studieze convergenta simpla si uniforma a urmatoarelor siruri de functii:

1) $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$

2) $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$

3) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$

4) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$

5) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x^2+nx}{n}$

6) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$

7) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

Derivate partiale. Functii diferentiabile

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ unde $D \subset \mathbb{R}^n$ este o multime deschisa si fie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. Functia f este derivabila partial in punctul a in raport cu x_k daca limita

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{x_k - a_k}$$

exista si este finita. Daca exista, valoarea acestei limite se numeste derivata partiala a functiei f in raport cu x_k in punctul a si se noteaza cu $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Daca f este derivabila partial in raport cu x_k in orice punct din D, atunci se obtine o functie

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \to \mathbb{R}, \quad \text{definita prin } a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad a \in D.$$

Daca $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ si $(x_0, y_0, z_0) \in D$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0}$$

cu conditia ca limitele sa existe in $\mathbb{R}$.

Exemplu. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = e^{x^2+yz} - x^2yz + xy^4 + z^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xe^{x^2+yz} - 2xyz + y^4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = ze^{x^2+yz} - x^2z + 4xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = ye^{x^2+yz} - x^2y + 2z$$

Spunem ca f este diferentiabila (sau derivabila) in a daca exista o aplicatie liniara $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (i.e. $T(x + y) = T(x) + T(y)$ si $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, si orice $x, y \in \mathbb{R}^n$) astfel ca

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

Daca T exista atunci este unica, se noteaza cu $df(a)$ sau $f'(a)$ si se numeste diferentiala lui f in a. Se poate verifica (exercitiu) cu usurinta ca

Propozitie. Daca f este diferentiabila in a atunci este continua in a.

Propozitie. Daca f este diferntiabila in a atunci exista $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ si

$$df(a)(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n.$$

Demonstratie. Fie e_k vectorul din $\mathbb{R}^n$ care are 1 pe pozitia k si zero in rest. Intrucat f este diferentiabila rezulta ca

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_k)-f(a)-df(a)(te_k)}{|t|}=0$$

sau echivalent

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_k)-f(a)-df(a)(te_k)}{t}=0,$$

ceea ce arata ca f are derivata partiala si

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_k)-f(a)}{t}=df(a)(e_k)$$

Daca $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $u=u_1e_1+u_2e_2+\cdots+u_ne_n$ si atunci

$$\begin{aligned} df(a)(u_1,u_2,\ldots,u_n) &= u_1df(a)(e_1)+u_2df(a)(e_2)+\cdots+u_ndf(a)(e_n)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n. \end{aligned}$$

Se poate verifica imediat ca

Propozitie. Orice functie liniara $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este diferentiabila in orice a si

$$df(a)=f.$$

In particular, aplicatiile $\mathrm{pr}_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definite prin

$$\mathrm{pr}_i(u_1,u_2,\ldots,u_n)=u_i,\ \text{pentru orice } (u_1,u_2,\ldots,u_n)$$

sunt liniare, si deci

$$d\mathrm{pr}_i(a)=\mathrm{pr}_i,\quad \text{pentru orice } i=1,2,\ldots,n,$$

fapt care ne indreptateste sa introducem notatia

$$\mathrm{pr}_i=dx_i$$

Cu acesta notatie avem

$$\begin{aligned} df(a)(u_1,u_2,\ldots,u_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\mathrm{pr}_1(u_1,u_2,\ldots,u_n)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\mathrm{pr}_n(u_1,u_2,\ldots,u_n)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(u_1,u_2,\ldots,u_n)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n(u_1,u_2,\ldots,u_n) \end{aligned}$$

pentru orice $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ si deci

$$df(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

Theorem 2 (Conditie suficienta de diferentiabilitate)**.** Fie D o multime deschisa din $\mathbb{R}^n$, fie $f : D \to \mathbb{R}^m$ si $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$. Daca exista o vecinatate V a lui a cu proprietatea ca exista toate derivatele partiale in orice punct din V si acestea sunt continue in a, atunci f este diferentiabila in a si

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

Demonstratie. Avand in vedere rezultatul anterior, este suficient sa demonstram teorema pentru cazul $m = 1$. Fara a restrange generalitatea, putem presupune ca vecinatatea V lui a este $B(a, r) = \{x \in D : \|x - a\| < r\}$ bila deschisa cu centrul in a si raza $r > 0$, pe care avand in vedere ca D este multime deschisa, o putem considera inclusa in D. Fie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$. Definim functiile $g_1, g_2, \dots, g_n$ astfel

$$\begin{aligned}
&g_1 : [a_1, x_1] \to \mathbb{R},\ g_1(t) = f(t, x_2, x_3 \dots, x_n)\\
&g_2 : [a_2, x_2] \to \mathbb{R},\ g_2(t) = f(a_1, t, x_3, \dots, x_n)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&g_n : [a_n, x_n] \to \mathbb{R},\ g_n(t) = f(a_1, a_2, a_3 \dots, t)
\end{aligned}$$

Atunci

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (g_i(x_i) - g_i(a_i))$$

Fiecare din functiile g_i satisface ipotezele teoremei lui Lagrange referitoare la o functie reala de variabila reala continua pe un compact si derivabila pe interiorul acelui interval. Prin urmare exista $\xi_i \in (x_i, a_i)$ astfel incat

$$g_i(x_i) - g_i(a_i) = (x_i - a_i)g_i'(\xi_i)$$

Atunci

$$\begin{aligned}
g_1(x_1) - g_1(a_1) &= (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\\
g_2(x_2) - g_2(a_2) &= (x_2 - a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
g_n(x_n) - g_n(a_n) &= (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \dots, \xi_n)
\end{aligned}$$

Definim aplicatia liniara $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prin

$$T(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)u_i.$$

Obtinem

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|} = \\
&\qquad \frac{x_1-a_1}{\|x-a\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\right) + \\
&\qquad \frac{x_2-a_2}{\|x-a\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, a_2, x_3, \ldots, x_n)\right) + \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad \frac{x_n-a_n}{\|x-a\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\right)
\end{aligned}
$$

Deoarece

$$\frac{|x_i-a_i|}{\|x-a\|} \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

deducem ca

$$
\begin{aligned}
&\frac{|f(x)-f(a)-T(x-a)|}{\|x-a\|} \leq \qquad (1) \\
&\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\right| + \\
&\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\right| + \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\right|
\end{aligned}
$$

Deoarece derivatele partiale ale functiei f sunt continue in a, exista limita termenilor din partea dreapta a inegalitatii (1) pentru $x \to a$ si aceasta este egala cu zero. Prin urmare

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Asadar f este diferentiabila in a si

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Exemplu. Fie $f(x, y, z) = xe^y + xyz + z^2$. Atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + yz, \;\; \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + 2z.$$

Deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,2)=1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,2)=3,\ \ \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,2)=(4)$$

si atunci

$$df(1,0,2)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,2)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,2)dy+\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,2)dz=dx+3dy+4dz$$

Pentru $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avem $df(1,0,2)(a,b,c)=a+3b+4c$.

Fie $E\subset\mathbb{R}^n$, $F\subset\mathbb{R}^m$ multimi deschise si fie $u_1,\ldots,u_m:E\to\mathbb{R}$ functii cu derivate partiale continue si astfel incat pentru orice $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E$

$$(u_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,u_m(x_1,x_2,\ldots,x_n))\in F.$$

Daca $\varphi:F\to\mathbb{R}$ admite derivate partiale continue pe F atunci functia $f:E\to\mathbb{R}$ definita prin

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\varphi(u_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,u_m(x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

admite derivate partiale continue si

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\left(u_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,u_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Vom scrie

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_k},\ \ k=1,2,\ldots,n.$$

Exemplu. Daca $f(x,y,z)=\varphi(xyz,x^2+y^2+z^2,x+yz)$ atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}yz+\frac{\partial\varphi}{\partial v}2x+\frac{\partial\varphi}{\partial w}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}xz+\frac{\partial\varphi}{\partial v}2y+\frac{\partial\varphi}{\partial w}z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}xy+\frac{\partial\varphi}{\partial v}2x+\frac{\partial\varphi}{\partial w}y$$

Derivate partiale si diferentiale de ordin superior

Fie $D\subset\mathbb{R}^n$ o multime deschisa si $f:D\to\mathbb{R}$ astfel incat derivata partiala exista intr-o vecinatate deshisa a lui a si functia $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ are derivata partiala in raport cu x_i in punctul a. Derivata

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$$

se numeste derivata partiala de ordin doi a functiei f in raport cu variabilele x_i, x_j si se noteaza cu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \text{ daca } i \neq j \text{sau cu } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \text{ daca } i = j,$$

adica

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \text{ daca } i \neq j \text{ si } \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$$

Derivatele

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad i \neq j$$

se numesc derivate partiale mixte de ordin doi in punctul a. Derivatele partiale de ordin superior se definesc in acelasi mod. Astfel derivatele partiale de ordinul 3, daca exista, se definesc ca derivate partiale de ordinul 1 ale derivatelor partiale de ordinul 2. De exemplu

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_k}\right)(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a).$$

FUnctia f se nuemste de clasa C^k, daca toate derivatele partiale de ordinul k exista si sunt continue pe D. Observam ca pentru $k \geq 2$, daca f este de clasa C^k atunci f este de clasa C^{k-1}.

Exemplu. Fie functia $f(x, y, z) = \sin(2xy + y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y\cos(2xy + y^2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x + y)\cos(2xy + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -4y^2\sin(2xy + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2\cos(y^2 + 2xy) - 4(x + y)^2\sin(2xy + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2\cos(y^2 + 2xy) - 4y(x + y)\sin(2xy + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 2\cos(y^2 + 2xy) - 4y(x + y)\sin(2xy + y^2)$$

Exemplu. Fie functia

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Observam ca

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

si

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

de unde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = x, x, y \neq 0.$$

De asemenea,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

si

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Derivatele mixte de ordinul 2 in origine sunt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$

si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{x} = -1$$

Asadar,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Teorema (Schwarz)**.** Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si $a \in D$. Daca derivatele partiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ exista intr-o vecinatate a lui a si acestea sunt continue in a, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unde D este o multime deschisa. Daca f admite derivate partiale de ordinul doi continue pe o vecinatate a punctului $a \in D$, functia $d^2f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita prin

$$d^2f(a)(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j$$

unde $u \in \mathbb{R}^n$, se numeste diferentiala de ordinul 2 a lui f in a. Similar, daca f admite derivate partiale de ordinul 3 continue pe o vecinatate a punctului $a \in D$, functia $d^3f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita prin

$$d^3f(a)(u) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i u_j u_k,$$

unde $u \in \mathbb{R}^n$ se numeste diferentiala de ordinul 3 a lui f in a. Similar se defineste diferentiala de ordinul k.

Teorema (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange in cazul n dimensional)**.** Daca D este o multime deschisa si convexa din $\mathbb{R}^k$ si $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este o functie care admite derivate partiale de ordinul $n+1$ continue pe multim D si atunci pentru orice $a \in D$ si orice $x \in D$ exista $\xi \in [a, x] = \{tx + (1-t)a, 0 \le t \le 1\}$ astfel incat

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2f(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(a)(x-a) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi)(x-a)$$

Extreme locale pentru functii de mai multe variabile

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punct $a \in A$ se numeste punct de maxim local (relativ) al functiei f daca exista vecinatate U a lui a astfel incat $f(x) \le f(a)$ pentru orice $x \in U \cap A$ (adica daca exista $r > 0$ astfel incat $f(x) \le f(a)$ pentru orice $x \in B(a, r) \cap A$).

Un punct $a \in A$ se numeste punct de minim local (relativ) al functiei f daca exista o vecinatate U al lui a astfel incat $f(x) \ge f(a)$ pentru orice $x \in U \cap A$, (adica daca exista $r > 0$ astfel incat $f(x) \ge f(a)$ pentru orice $x \in B(a, r) \cap A$). Punctele de maxim local si cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Fie D o multime deschisa si $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem ca $a \in D$ este punct critic (stationar) pentru f daca f este diferentiabila in a si $df(a) = 0$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o multime deschisa, $f : D \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^2 si $a \in D$. Matricea cu n linii si n coloane

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le n}$$

se numeste matricea hessiana asociata functiei f in punctul a. Observam ca

$$d^2f(a)(u) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot H_f(a) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

Theorem 3 (Fermat)**.** Fie D o multime deschisa si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o functie diferentiabila in $a \in D$. Daca a este punct de extrem local atunci a este punct critic, adica $df(a) = 0$

Demonstratie. Pentru simplitate vom demonstra teorema pentru o functie de doua variabile $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sa presupunem ca f este diferentiabila in punctul $a = (x_0, y_0) \in D$

si (x_0, y_0) este punct de maxim local. Trebuie sa aratam atunci $df(x_0, y_0) = 0$. Exista $r > 0$ astfel incat $B(a, r) \subset D$ si $f(x) \leq f(a)$ pentru orice $x \in B(a, r)$. Fie functia

$$\varphi : (-r, r) \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(x_0 + t, y_0).$$

Pentru $t \in (-r, r)$ avem $\varphi(t) \leq \varphi(0)$ si deci 0 este punct de maxim local pentru φ. Deoarece

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

si f are derivabila partiala in raport cu x in punctul (x_0, y_0), fiind diferentiabila in acest punct, rezulta ca φ este derivabila in 0 si

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

Conform Teoremei lui Fermat pentru functii de o variabila reala rezulta ca $\varphi'(0) = 0$ si deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Similar se arata ca derivata partiala a lui f in raport cu y in punctul (x_0, y_0) este egala cu zero.

Remark 4. Nu orice punct critic este punct de extrem local. Sa consideram functia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Observam ca funtia f este diferentiabila in orice punct. Punctul $(0, 0)$ este punct critic, deoarece

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Intrucat pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$f(a, 0) = a^2 > f(0, 0) \quad f(0, a) = -a^2 < f(0, 0).$$

rezulta ca in orice vecinatate a lui $(0, 0)$ functia ia atat valori strict mai mari cat si valori strict mai mici decat $f(0, 0)$ si in consecinta originea nu este punct de extrem local.

Teorema (Criteriu de stabilire a punctelor de extrem pentru functii de mai multe variabile)**.** Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o functie care admite derivate partiale de ordinul doi continue pe D si $a \in D$ un punct critic al sau.

(1) Daca $d^2 f(a)(u) > 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ atunci a este punct de minim local

(2) Daca $d^2 f(a)(u) < 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ atunci a este punct de maxim local

(3) Daca exista $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ astfel incat $d^2 f(a)(u) > 0$ si $d^2 f(a)(v) < 0$ atunci a nu este punct de extrem local

Demonstratie. Fie $\alpha > 0$ astfel incat $d^2(a)(u) \geq \alpha$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$ cu $\|u\| = 1$. Cum functia are derivate partiale de ordinul doi continue rezulta ca exista $\delta > 0$ astfel incat pentru orice $c \in \mathbb{R}^n$ cu $\|c - a\| < \delta$ si orice $u \in \mathbb{R}^n$ cu $\|u\| = 1$ sa avem

$$d^2(a)(u) \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Conform formulei lui Taylor din cazul n-dimesnional rezulta ca exista b pe segmentul $[a, a + tu]$ astfel incat

$$f(a + tu) = f(a) + df(a)(tu) + \frac{1}{2} d^2 f(b)(tu)$$

In concluzie

$$f(a + tu) - f(a) = \frac{t^2}{2} d^2 f(b)(u) \geq 0$$

De aici rezulta ca a este punct de minim local al lui f.

Celelalte afirmatii se demonsteaza utilizand argumente similare.

Proposition 5. (Conditii suficiente de extrem local pentru functii de doua variabile) Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ deschisa, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie de clasa C^2 si $(a, b) \in D$ un punct critic al lui f. Fie

$$H_f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

Notam $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ si $\Delta_2 = \det H_f(a, b)$.

(1) Daca $\Delta_1 > 0$ si $\Delta_2 > 0$ atunci (a, b) este punct de minim local;

(2) Daca $\Delta_1 < 0$ si $\Delta_2 > 0$ atunci (a, b) este punct de maxim local;

(3) Daca $\Delta_2 < 0$ atunci (a, b) nu este punct de extrem local

(4) Daca $\Delta_2 = 0$ nu putem trage nicio concluzie.

Demonstratie. Fie

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b),\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b),\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

Atunci observam ca

$$d^2 f(a, b)(u, v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 = A\left[\left(u + \frac{B}{A}v\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}v^2\right]$$

Sa presupunem ca $\Delta_2 = AC - B^2 > 0$. Atunci $d^2 f(a, b)$ este pozitiv definita daca $\Delta_1 = A > 0$ si negativ definita daca $\Delta_1 < 0$. Conform teoremei anterioare rezulta pentru

$\Delta_1, \Delta_2 > 0$ punctul (a,b) este punct de minim local si pentru $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ punctul (a,b) este punct de maxim local.

Daca $\Delta_2 < 0$ atunci $d^2 f(a,b)$ nu pastreaza semn constant si prin urmare (a,b) nu este punct de extrem.

Remark 6. Sa consideram functiile $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^4$ si $g(x,y) = x^2 - y^4$. Observam ca $(0,0)$ este punct critic pentru ambele functii.

$$H_f(0,0) = H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci $\Delta_2 = 0$. Punctul $(0,0)$ este punct de minim global pentru f deoarece $f(x,y) \geq f(0,0) =$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pe de alta parte pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ avem

$$g(a,0) = a^2 > 0 = g(0,0) > g(0,a) = -a^4.$$

Asadar in orice vecinatate a lui $(0,0)$ functia g ia atat valori strict mai mari decat $g(0,0)$ cat si valori strict mai mici decat $g(0,0)$ si deci $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

Asadar, daca $\Delta_2 = 0$ nu putem trage nicio concluzie si pentru a determina natura punctului trebuie folosite alte metode.

Example 7. Determinati punctele de extrem local ale functiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Solutie. Domeniul de definitie $\mathbb{R}^2$ al lui f este o multime deschisa si f este de clasa C^2. Prin urmare, punctele de extrem local se gasesc printre punctele stationare ale lui f. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12$$

Pentru a determina punctele critice rezolvam sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \text{adica} \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

Obtinem punctele critice $(1,2), (-1,-2), (2,1), (-2.-1)$. Deoarece

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6y$$

matricea hessiana este

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}.$$

$$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 < 0 \Rightarrow (1,2) \text{ nu este punct de extrem local}$$

$$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 < 0 \Rightarrow (-1,-2) \text{ nu este punct de extrem local}$$

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 12 > 0,\ \Delta_2 = 108 > 0 \Rightarrow (2,1) \text{ este punct de minim local}$$

$$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = -12 < 0,\ \Delta_2 = 108 > 0 \Rightarrow (-2,-1) \text{ este pct de maxim local}$$

Proposition 8. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o multime deschisa, $f : D \to \mathbb{R}$ functie de clasa C^2 (adica admite derivate partiale de ordinul doi continue pe o multime deschisa D) si $a \in D$ un punct critic. Fie

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

unde $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

(1) Daca $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ atunci a este punct de minim local

(3) Daca $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$ atunci a este punct de maxim local

(3) Daca $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, \Delta_n \geq 0$ sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \geq 0$ dar exista j astfel incat $\Delta_j = 0$ atunci nu se poate trage nicio concluzie

(4) In celelalte cazuri nu este punct de extrem local al lui f.

Example 9. Determinati punctele de extrem local ale functiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 y + yz + 32x - z^2$

Solutie. Domeniul de definitie $\mathbb{R}^3$ al lui f este o multime deschisa si f este de clasa C^2. Prin urmare, punctele de extrem local se gasesc printre punctele critice ale lui f. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy + 32, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 + z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y - 2x$$

Pentru a determina punctele critice rezolvam sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0 \end{cases} \quad \text{adica} \quad \begin{cases} 2xy+32=0 \\ x^2+z=0 \\ y-2x=0 \end{cases}$$

Obtinem un singur punct critic $(2,-8,4)$. Matricea hessiana este

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Deci

$$H_f(2,-8,4)=\begin{pmatrix} -16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Atunci $\Delta_1=-16,\quad \delta_2=\begin{vmatrix} -16 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=-16,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} -16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=48$

si deci $(2,-8,4)$ nu este punct de extrem local.

Exercitii

1) Calculati derivatele partiale de ordinul I, derivatele partiale de ordinul II si $df(2,1)$ pentru urmatoarele functii:

(1) $f(x,y)=\frac{x+y}{2x-y}$

(2) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$

2) Calculati derivatele partiale de ordinul I, derivatele partiale de ordinul II si $df(1,-1,1)$ pentru urmatoarele functii:

(1) $f(x,y,z)=xz+x^2z+\sin(x+2y+z)$

(2) $f(x,y,z)=z\ln(x+y^2)+e^{x+yz}$

3) Determinati punctele de extrem local ale functiilor

(1) $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R},\ f(x,y)=x^3+y^3-6xy+2$

(2) $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R},\ f(x,y)=x^3+8y^3-2xy-1$

(3) $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R},\ f(x,y)=2x^2-2xy+y^2+4x+2y$

(4) $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R},\ f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-2$

(5) $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R},\ f(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2-xy$

(6) $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R},\ f(x,y)=3xy^2-x^3-15x-36y$

(7) $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$

(8) $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x^4+y^4+4xy+z^4-4z$

(9) $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R},\ f(x,y,z)=z^3+3zy^2-15z-12y+x^2-2x$

Integrala Riemann pentru functii de o variabila reala

Fie $[a,b]$ un interval inchis si marginit din $\mathbb{R}$. Se numeste diviziune a intervalului $[a,b]$ un sistem de puncte

$$\Delta : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

Vom nota cu $D[a,b]$ multimea diviziunilor intervalului $[a,b]$. Numarul

$$\|\Delta\|=\max_{1\le i\le n}|x_i-x_{i-1}|$$

se numeste norma diviziunii Δ. Spunem ca diviziunea Δ' este mai fina decat diviziunea Δ si notam $\Delta\prec\Delta'$ daca Δ' contine punctele diviziunii Δ. Un sistem de n puncte $\xi=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ se numeste sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ. Suma

$$\sigma_\Delta(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

se numeste suma Riemann asociata diviziunii Δ si sistemului de puncte intermediare ξ.

Definitie. O functie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeste integrabila Riemann daca exista un numar real I cu proprietatea ca pentru orice $\varepsilon>0$ exista $\eta_\varepsilon>0$ astfel incat

$$|\sigma_\Delta(f,\xi)-I|<\varepsilon$$

oricare ar fi diviziunea Δ cu $\|\Delta\|<\eta_\varepsilon$ si oricare ar fi sistemul de puncte intermediare ξ asociat lui Δ. Numarul I este unic determinat, se numeste integrala lui f pe $[a,b]$ si se noteaza $\int_a^b f(x)dx$.

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie marginita si fie

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

o diviziune a intervalului $[a,b]$. Fie

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Definim

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ suma Darboux inferioara}$$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \text{ suma Darboux superioara}$$

Lema. Daca $\Delta \prec \Delta'$ atunci $s_\Delta(f) \le s_{\Delta'}(f) \le S_{\Delta'}(f) \le S_\Delta(f)$

Lema. Pentu oricare diviziuni Δ si Δ' $s_\Delta(f) \le S_{\Delta'}(f)$

Fie $\underline{\int_a^b} f = \sup_\Delta s_\Delta(f)$ si $\overline{\int_a^b} f = \inf_\Delta S_\Delta(f)(f)$. Din lemele anterioare rezulta ca

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

Theorem 10. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Atunci urmatoarele afirmatii sunt echivalente

(i) f este integrabila Riemann

(ii) $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

(iii) pentru orice $\varepsilon > 0$ exista o diviziunea Δ a intervalului $[a,b]$ astfel incat $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

(iv) pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\eta_\varepsilon > 0$ astfel incat oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului $[a,b]$, cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ sa avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

Teorema. Daca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o functie monotona, atunci este integrabila Riemann.

Demonstratie. Sa presupunem ca f este crescatoare si nu este o functie constanta. Fie $\varepsilon > 0$ si fie

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ unde $\eta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ Deoarece f este crescatoare, avem $m_i = f(x_{i-1})$ si $M_i = f(x_i)$. Atunci avem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \le \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Din Teorema 10, deducem ca f este integrabila.

Teorema. Daca $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o functie continua pe $[a, b]$, atunci este integrabila Riemann.

Demonstratie. Fie $\varepsilon > 0$. Functia f fiind continua pe $[a, b]$, este uniform continua pe $[a, b]$. Rezulta ca exista $\eta_\varepsilon > 0$ astfel incat oricare ar fi $x, y \in [a, b]$ cu $|x - y| < \eta_\varepsilon$ avem $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$. Deoarece o functie continua pe un interval constanat este marginita si isi atinge marginile rezulta ca exista $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ astfel incat $m_i = f(\xi_i)$ si $M_i = f(\eta_i)$. Atunci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i) - f(\xi_i))(x_i - x_{i-1})$$

si deci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i) - f(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon.$$

Aplicand Teorema 10 rezulta ca f este integrabila.

Definitie. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Functia $F \to \mathbb{R}$ se numeste primitiva a functiei f pe intervalul I, daca F este derivabila pe I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

Teorema. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie continua si fie $F(x) = \int_a^x f(t)dy$, $x \in [a, b]$. Atunci F este o primitiva a lui f, adica F este derivabila pe $[a, b]$ si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$.

Demonstratie. Fie $x_0 \in [a, b]$ si $\varepsilon > 0$. Deoarece f este continua in x_0, exista $\delta > 0$ astfel incat

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,\ \text{pentru orice } x \in U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$$

Daca $x \in J$, $x < x_0$ atunci

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_x^{x_0}(f(t) - f(x_0))}{x_0 - x}\right| < \varepsilon.$$

Similar se arata ca daca $x \in J$, $x < x_0$,

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Deci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)=f(x_0)$$

si atunci F este derivabila in x_0 si $F'(x_0)=f(x_0)$.

Teorema. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o functie continua si fie F o primitiva a ei. Atunci

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Demonstratie. Fie

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Rezulta ca $G'(x)=f(x)$ si deci $(F-G)'=0$. In consecinta F si G difera printr-o constanta C. Asadar $F(x)=G(x)+C$ pentru orice $x\in[a,b]$ Dar $G(a)=0$ si deci $F(a)=C$ si atunci $F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt$.

Teorema. Fie $g:[a,b]\to J$ o functie derivabila si cu derivata continua pe $[a,b]$. Daca $f:J\to\mathbb{R}$ este continua atunci

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)}f(x)dx.$$

Demonstratie. Pentru $x\in J$, fie

$$F(x)=\int_{g(a)}^x f(u)du$$

Deoarece f este continua, rezulta ca F este derivabila si $F'=f$ pe J. Atunci $F\circ g$ este derivabila si

$$(F\circ g)'=f\circ g\cdot g'$$

Functia $f\circ g\cdot g'$ este integrabila (fiind continua) si avem

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=F\circ g(b)-F\circ g(a)=F(g(b))-F(g(a))=\int_{g(a)}^{g(b)}f(x)dx.$$

Integrale improprii pe intervale nemarginite

Definitie. Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ o functie integrabila pe orice interval $[a,c]$ cu $c>a$. Daca exista $\lim\limits_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$ aceasta limita se numeste integrala improprie a functie f pe $[a,\infty)$ si se noteaza cu $\int_a^\infty f(x)dx$, adica

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$$

Daca limita este finita spunem ca integrala este convergenta. Daca limita este infinita sau nu exista, integrala este divergenta. Analog, daca $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ este integrabila pe orice interval $[a, c]$ cu $c < b$ si daca exista $\lim\limits_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx$ aceasta limita se numeste integrala improprie a functie f pe $[a, \infty)$ si se noteaza cu $\int_a^\infty f(x)dx$, adica

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)dx$$

Daca limita este infinita sau nu exista, integrala este divergenta. Daca $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si daca integralele $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ si $\int_c^\infty f(x)dx$ sunt convergente atunci $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ este convergenta si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

unde c este orice numar real.

Exemplu. Studiati coonvergenta integralei

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$$

Pentru $c > 0$ aven

$$\int_0^c \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan c$$

Deoarece

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{c\to\infty} \arctan c = \frac{\pi}{2}$$

Deci integrala este convergenta si

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplu. Studiati coonvergenta integralei

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx$$

Pentru $c < 0$ aven

$$\int_c^0 e^x dx = e^x|_c^0 = 1 - e^c$$

si atunci

$$\lim_{c\to-\infty} \int_c^0 e^x dx = \lim_{c\to\infty} (1 - e^c) = 1.$$

Deci integrala este convergenta si

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1.$$

Exemplu. Integrala improprie

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\lambda}dx, \quad a > 0$$

este convergenta daca si numai daca $\lambda > 1$.

Pentru $\lambda = 1$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to\infty}\int_a^c \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to\infty}(\ln c - \ln a) = \infty$$

Pentru $\lambda \neq 1$

$$\lim_{c\to\infty}\int_a^c \frac{1}{x^\lambda}dx = \lim_{c\to\infty}\frac{a}{1-\lambda}(c^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}) = \begin{cases} +\infty & \text{daca } \lambda < 1 \\ \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} & \text{daca } \lambda > 1. \end{cases}$$

Asadar,

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\lambda}dx = \begin{cases} +\infty & \text{daca } \lambda \leq 1 \\ \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} & \text{daca } \lambda > 1. \end{cases}$$

Integrale improprii pentru functii nemarginite

Definitie. Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ astfel incat $\lim\limits_{x\nearrow b}|f(x)| = \infty$. Daca f este integrabila pe orice interval $[a, c]$ cu $c < b$ si daca exista $\lim\limits_{c\nearrow b}\int_a^c f(x)dx$ aceasta limita se numeste integrala improprie a functie f pe $[a, b)$ si se noteaza cu $\int_a^b f(x)dx$, adica

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\nearrow b}\int_a^c f(x)dx$$

Daca limita este finita spunem ca integrala este convergenta. Daca limita este infinita sau nu exista, integrala este divergenta. Analog, daca $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabila pe orice interval $[c, b]$ cu $c > a$ si daca exista $\lim\limits_{c\searrow a}\int_c^b f(x)dx$ aceasta limita se numeste integrala improprie a functie f pe (a, b) si se noteaza cu $\int_c^b f(x)dx$, adica

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\searrow a}\int_c^b f(x)dx$$

Daca limita este infinita sau nu exista, integrala este divergenta.

Exemplu. Integrala improprie

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}dx,$$

este convergenta daca si numai daca $\lambda > 1$.

Pentru $\lambda = 1$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{c\searrow 0\infty} \int_c^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\searrow 0}(\ln 1 - \ln c) = \infty$$

Daca $\lambda \neq 1$

$$\lim_{c\searrow 0} \int_c^1 \frac{1}{x^\lambda}dx = \lim_{c\searrow \infty} \frac{a}{1-\lambda}(1-c^{1-\lambda}) = \begin{cases} +\infty & \text{daca } \lambda > 1 \\ \frac{1}{1-\lambda} & \text{daca } \lambda > 1. \end{cases}$$

Asadar,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}dx = \begin{cases} +\infty & \text{daca } \lambda \leq 1 \\ \frac{1}{\lambda-1} & \text{daca } \lambda > 1. \end{cases}$$

Exemplu. Studiati coonvergenta integralei

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Deoarece

$$\lim_{c\nearrow 1} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{c\nearrow 1} \arcsin c = \frac{\pi}{2}.$$

Rezulta ca integrala este convergenta si

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$$

Functiile Beta si Gama ale lui Euler

Teorema. Integrala improprie $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ este convergenta pentru orice $p, q > 0$.

Integrala $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{x-1}dx$ este convergenta pentru orice $p > 0$

Funcria $B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ se nuemste functia Beta a lui Euler si functia $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ se numeste functia Gama a lui Euler.

Propozitie. (1) $\Gamma(1) = 1$

(2) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \forall p > 0 \;\; \Gamma(n+1) = n!, \;\forall n \in \mathbb{N}$

(3) $B(p,q) = B(q,p)$

(4) $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \forall p,q > 0$ si $B(p,q) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}, \forall m,n \in \mathbb{N}^*$

Exercitii. Sa se studieze natura urmtoarelor integrale improprii si sa se determine valorile acestora, in caz de convergenta

(1) $\int_0^\infty \sin x dx$

(2) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$

(3) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx$

(4) $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$

(5) $\int_0^\infty x e^{-x} dx$

(6) $\int_3^\infty \frac{1}{x^2-3x+2} dx$

(7) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^3} dx$

(8) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

Serii de puteri

Se numeste serie de puteri o serie de forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Numarul

$$R = \sup\left\{ r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ este convergenta} \right\}$$

se numeste raza de convergenta a seriei de puteri. Intervalul $(-R, R)$ se numeste intervalul de convergenta al seriei de puteri. Multimea A a punctelor in care seria de puteri este convergenta se numeste multimea de convergenta a seriei de puteri.

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Daca exista $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{daca} \quad 0 < \omega < \infty \\ 0 & \text{daca} \quad \omega = \infty \\ \infty & \text{daca} \quad \omega = 0 \end{cases}$$

Daca exista $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{daca} \quad 0 < \omega < \infty \\ 0 & \text{daca} \quad \omega = \infty \\ \infty & \text{daca} \quad \omega = 0 \end{cases}$$

Teorema (Teorema I a lui Abel)**.** Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie de puteri cu raza de convergenta R. Atunci

(i) pentru orice $x \in (-R, R)$ seria este absolut convergenta.

(ii) pentru orice $x \notin [-R, R]$ seria este divergenta.

Corolar. Cu notatiile de mai sus, daca $0 < R < \infty$, atunci $(-R, R) \subset A \subset [-R, R]$

Exercitiu. Determinati multimea de convergenta pentru urmatoarele serii de puteri

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} x^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^3} x^n \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^3} x^n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} x^n$$
$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} x^n \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$$

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta $R > 0$. Atunci functia $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$ definita prin

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

este continua pe $(-R, R)$.

Teorema (Teorema a II-a a lui Abel)**.** Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta $R > 0$ si multimea de convergenta A. Daca seria de puteri este convergenta in punctul R (respectiv $-R$) atunci suma s a seriei, adica functia $s : A \to \mathbb{R}$ definita prin

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

este o functie continua in R (respectiv $-R$).

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta R. Atunci seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ are aceasi raza de convergenta R. Daca $R > 0$, atunci functia $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

este derivabila si

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

pentru orice $x \in (-R, R)$.

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta R. Atunci seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ obtinuta prin integrarea termen cu termen a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are aceasi raza de convergenta R. Daca $R > 0$, atunci functia $S : (-R, R) \to \mathbb{R}$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

este o primitiva a functiei $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

adica $S'(x) = s(x)$ pentru orice $x \in (-R, R)$.

Fie I un interval deschis astfel incat $0 \in I$ si fie $f \in C^{\infty}(I)$. Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!} x^n + \cdots$$

se numeste seria Taylor asociata functiei f in punctul 0. Cu aceste notatii avem

Teorema. Seria Taylor a functiei f in punctul 0 este convergenta in punctul $x \in I$ si suma ei este egala cu $f(x)$ daca si numai daca valorile in x ale resturilor R_n ale formulelor lui Taylor formeaza un sir $(R_n(x))_{n \geq 1}$ convergent catre 0.

Exemplu. Folosind teorema de mai sus sa se arate ca:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sa consideram $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Intrucat $f^{(n)}(0) = 1$ pentru orice $n \geq 1$, polinomul Taylor de grad n asociat lui f in punctul 0 este

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

iar seria Taylor corespunzatoare este

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Fie $x \in \mathbb{R}$. Folosind Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange, obtinem $0 < \theta_x < x$ astfel incat

$$f(x) = T_n(x) + e^{\theta_x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Deoarece $|\theta_x| < |x|$ avem $|e_x^\theta| \leq e^{|\theta_x|} < e^{|x|}$ si atunci

$$\lim_{n\to\infty} \left| e^{\theta_x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \lim_{n\to\infty} e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Asadar, pentru orice $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_n(x)| = 0$$

si in concluzie

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pentru sin si cos se procedeaza similar (exercitiu !)

Exemplu. Este binecunoscut faptul ca pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

si in consecinta, daca $x \in (-1, 1)$, trecand la limita cu $n \to \infty$ rezulta ca

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}. \tag{3}$$

Inlocuind pe x cu $-x$ in relatia de mai sus, pentru $x \in (-1, 1)$ avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}. \tag{4}$$

Exemplu. Sa se dezvolte in serie de puteri ale lui x functia $f(x) = \arctan x$ si sa se precizeze intervalul pe care dezvoltare este valabila.

Evident

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Inlocuind pe x cu x^2 in relatia (4), rezulata ca

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \cdots + (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1) \tag{5}$$

De aici prin integrare termen cu termen obtinem

$$\arctan x = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

Facand acum $x = 0$ rezulta ca $c = 0$ si deci

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

Pentru $x = 1$ seria din membru stang devine

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

Cu criteriul lui Leibniz deducem ca aceasta serie este convergenta si atunci din Teorema I lui Abel pentru serii de puteri obtinem

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \arctan x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

In mod similar avem

$$-\frac{\pi}{4} = \lim_{\substack{x \to -11 \\ x > 1}} \arctan x = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

Asadar

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Exercitiu. Sa se dezvolte in serie de puteri ale lui x functia $f(x) = \ln(1 - x)$, $x > -1$ si sa se precizeze intervalul pe care dezvoltarea este valabila.

Procedand ca in exemplul anterior se obtine

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \forall x \in (-1, 1]$$

Integrale duble

Pe parcursul intregului curs D va fi o multime din plan marginita de o curba inchisa si neteda pe portiuni.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ si fie $\Delta = \{D_i, i = 1, \dots, n\}$ o acoperire a multimii D (adica $D \subset \cup_i D_i$) cu multimi de forma dreptunghiulara (sau mai general avand forma de paralelograme) astfel incat

$$\begin{cases} D \cap D_i \neq \varnothing \text{ pentru } i = 1, \dots, n \\ \text{interior}(D_i) \cap \text{interior}(D_k) = \varnothing \text{ pentru } i \neq k \end{cases}$$

Fie

$$\text{diam}(D_i) = \sup\left\{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} : (x,y), (x', y') \in D_i\right\}$$

diametrul multimii A si fie

$$\|\Delta\| = \max\{\text{diam}(D_i), i = 1, 2, \dots, n\}$$

norma acoperirii. Daca $(x_i, y_i) \in D_i$ si definim suma Riemann

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\text{aria}(D_i)$$

Integrala functiei f este prin definitie

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f)$$

cu conditia ca limita sa existe si sa fie finita. In acest caz spunem ca f este integrabila pe D.

Clase de functii integrabile

1) Daca D este o multime compacta si f este continua pe D atunci este integrabila pe D.
2) Daca functia f este marginita si are discontinuitati pe un numar finit de curbe netede atunci ea este integrabila.

Interpretare geometrica a integralei duble

1) Daca $f \geq 0$, atunci $\iint_D f(x,y)dxdy$ reprezinta volumul cuprins intre graficul functiei si planul XOY;
2) $\iint_D dxdy$ preprezinta aria multimii D.

Poprietati ale integralei duble

1) Daca f este integrabil pe D si $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci αf este integrabila pe D si avem

$$\iint_D \alpha f(x,y)dxdy = \iint_D \alpha f(x,y)dxdy$$

2) Daca f si g sunt functii integrabile pe D si atunci $f+g$ este integrabila pe D si avem

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y,x)dxdy$$

3) Daca f este integrabile pe D si D' iar D si D' nu au puncte interioare comune atunci F este integrabile pe $D \cup D'$ si avem

$$\iint_{D\cup D'} f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{D'} \alpha f(x,y)dxdy.$$

4) Daca $f \geq 0$ este o functie integrabila pe D atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

Reducerea integralei duble la o integrala iterata

1) Fie $D = [a,b] \times [c,d]$ si $f : D \to \mathbb{R}$ o functie integrabila pe D. Atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

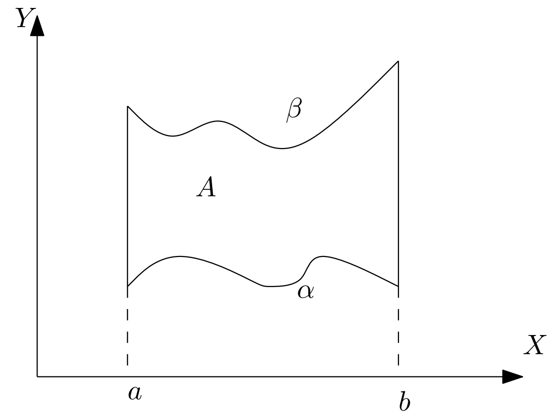
Example 11. Sa se calculze integrala

$$\iint_D (2x+y)dxdy, \text{ unde } D = [0,1] \times [0,2]$$

$$\iint_D (2x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (2x+y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + 2xy\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 (2+4x)dx = 5.$$

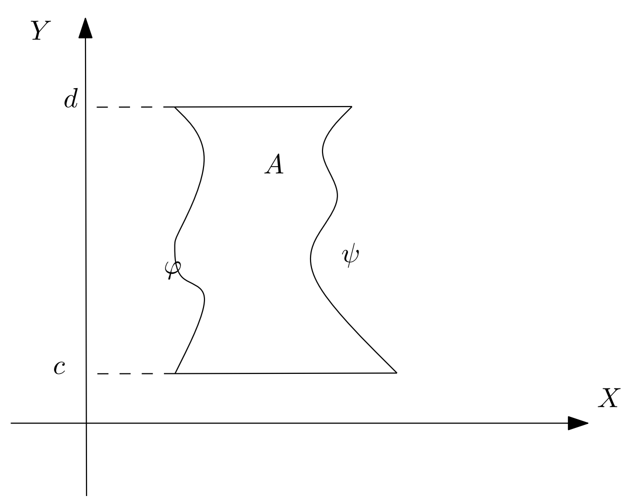
2) Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ unde $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt continue. O astfel de multime se numeste domeniu simplu in raport cu Oy. Daca $f : D \to \mathbb{R}$ este o functie integrabila pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$



3) Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ unde $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ sunt continue. O astfel de multime se numeste domeniu simplu in raport cu axa Ox . Daca $f : D \to \mathbb{R}$ este o functie integrabila pe D, atunci

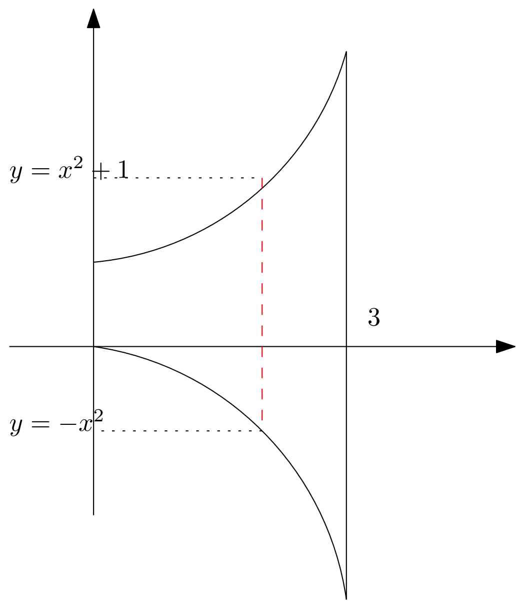
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$



Exemplu. Sa se calculeze

$$\iint_D (3x + 2y)dxdy$$

unde D este multimea marginita de curbele $y = x^2 + 1 \quad y = -x^2, \quad x = 0, \quad x = 3.$
Solutie. Observam ca



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 3, \ -x^2 \le y \le x^2 + 1\}$$

Fie $\alpha, \beta : [0, 3] \to \mathbb{R}$

$$\alpha(x) = -x^2, \quad \beta(x) = x^2 + 1$$

Functiile α si β sunt continue pe $[0, 3]$ si functia $f : D \to \mathbb{R}$ este continua pe D. Atunci

$$\iint_D (3x+2y)dxdy = \int_0^3 \left(\int_{-x^2}^{x^2+1} (3x + 2y)dy \right) dx = \int_0^3 \left(3x \int_{-x^2}^{x^2+1} dy + \int_{-x^2}^{x^2+1} 2ydy \right) dx$$

$$\int_0^3 (3xy + y^2) \Big|_{y=-x^2}^{y=x^2+1} dx = \int_0^3 (6x^3 + 3x + 2x^2 + 1)dx$$

Exemplu. Sa se calculeze integrala

$$\iint_D (x + y)dxdy$$

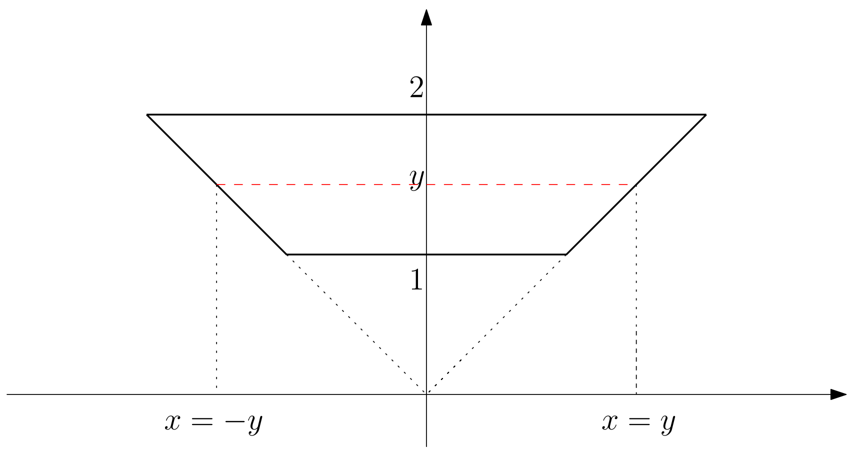
unde D este multimea delimitata de dreptele $x + y = 0, \ x - y = 0, \ y = 1$ si $y = 2$.

Solutie. Observam ca

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le y \le 2, \ -y \le x \le y\}$$

Fie $\alpha, \beta : [1, 2] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(y) = -y, \quad \psi(y) = y.$$



Functiile φ si ψ sunt continue pe $[1,2]$ si functia $f : D \to \mathbb{R}$ este continua pe D. Atunci

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_{-y}^{y} (x+y)dx \right) dy$$

Cum

$$\int_{-y}^{y} (x+y)dx = \int_{-y}^{y} xdx + y\int_{-y}^{y} dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_{-y}^{y} + yx\bigg|_{x=-y}^{x=y} = 2y^2$$

rezulta ca

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_{-y}^{y} (x+y)dx \right) dy = \int_1^2 2y^2 dy = \frac{2y^3}{3}\bigg|_1^2 = 5.$$

Example 12. Sa se calculze

$$\iint_D (3x+y)dx$$

unde D este multimea marginita de curbele $y = x^2 + 1 \quad y = -x^2 \quad x = 0 \quad x = 3.$

$$\iint_D (3x+2y)dx = \int_0^3 (3xy+y^2)|_{-x^2}^{x^2+1} dx = \int_0^3 (6x^3+3x+2x^2+1)dx$$

Schimbarea de Variabila in integrala dubla

Fie $T : \Omega \to D$, o aplicatie bijectiva de clasa C^1, definita prin

$$T : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

astfel incat

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } \Omega.$$

Cu aceste notatii,

Formula de schimbare de variabila

Fie f este o functie integrabila pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.$$

Fie $A_1(u,v),\ A_2(u+\Delta u, v),\ A_3(u+\Delta u, v+\Delta v),\ A_4(u, v+\Delta v)$ un dreptunghi infinitezimal din Ω. Fie $P_1P_2P_3P_4$ imaginea dreptunghiului $A_1A_2A_3A_4$ prin transformarea T. Aria patrulateriu curbiliniu $P_1P_2P_3P_4$ poate fi aporximata cu aria paralelogramului $B_1B_2B_3B_4$, unde

$B_1(x(u,v), y(u,v))$,
$B_2(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u,\ y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u)$,
$B_3(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v,\ y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v)$
$B_4(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v,\ y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v)$,

Aria triunghiului $B_1B_2B_4$ este egala cu

$$\pm\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc} x(u,v) & y(u,v) & 1 \\ x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u & y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u & 1 \\ x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v & y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v & 1 \end{array}\right|$$

$$\pm\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v \end{array}\right|$$

$$\pm\frac{1}{2}\left|\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right| \Delta u \Delta v.$$

Cum aceasi arie o are si triunghiul $B_2B_3B_4$, rezulta ca

$$\text{aria}(B_1B_2B_3B_4) = \left|\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right| \Delta u \Delta v.$$

Daca (s,t) este un punct din dreptunghiul $A_1A_2A_3A_4$, atunci

$$\text{aria}(P_1P_2P_3P_4) \approx \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(s,t)\right| \text{aria}(A_1A_2A_3A_4).$$

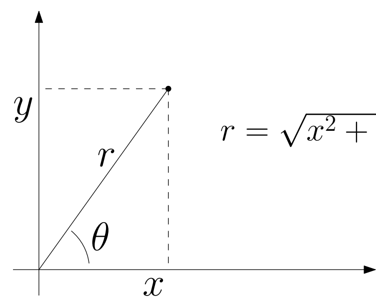
Fie $\Delta = \{A_1, A_2, \dots A_n\}$ o acoperire a multimii Ω cu multimi de forma dreptunghiulara. Notam cu P_i imaginea multimii $R_i \cup \Omega$ prin transformarea T. Fie $P = \{P_1, \dots, P_n\}$.

Observam ca $\|P\| \to 0$ daca si numai $\|\Delta\| \to 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_i f(x_i, y_i)\text{aria}(P_i) \\ &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_i f(x(s_i,t_i), y(s_i,t_i)\text{aria}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(s_i,t_i)\right| \text{aria}(A_i) \\ &= \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.\end{aligned}$$

Trecerea de la coordonate polare la coordonate carteziene

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & \rho \in [0,\infty) \\ y = \rho\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$$

Trecerea de la coordonate polare generalizate la coordonate carteziene

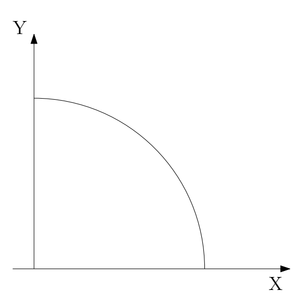
$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta & \rho \in [0,\infty) \\ y = b\rho\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = ab\rho$$

Exemplu. 1) Calculati

$$\iint_D ydxdy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le 4, x, y \ge 0\}$$



Trecem la coordonate polare

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$$

si atunci domeniul D devine

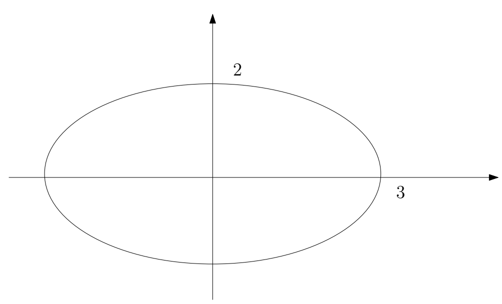
$$\rho \in [0,2], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ adica } D' = [0,2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

Cum $dxdy = \left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho d\theta = \rho d\rho d\theta$, avem

$$\iint_D ydxdy = \iint_{D'} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\theta d\theta\right) d\rho = \int_0^2 (-\rho^2\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\rho = \int_0^2 \rho^2 d\rho = \frac{8}{3}$$

2) Calculati

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} dxdy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\}$$



Trecem la coordonate polare generalizate

$$x = 3\rho\cos\theta, y = 2\rho\sin\theta$$

In coordonate polare generalizate domesniul D devine

$$\rho \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Avem

$$dxdy = \left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho d\theta = 6\rho d\rho d\theta,$$

si atunci

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 6\rho\sqrt{1-\rho^2} d\theta\right) d\rho = 4\pi.$$

Integrale tripla

In cele ce urmeaza multimea V va fi o multime din plan marginita de o suprafata inchisa si neteda pe portiuni.

Fie $f : V \to \mathbb{R}$ si fie $\Delta = \{V_i : \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ o acoperire a multimii V (adica $V \subset \cup_i V_i$) cu multimi de forma paralelipipedica astfel incat

$$\begin{cases} V \cap V_i \neq \varnothing \\ \text{interior}(V_i) \cap \text{interior}(V_j) = \varnothing \text{ pentru } i \neq j \end{cases}$$

Fie

$$\text{diam}(V_i) = \max\left\{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (y-y')^2} : (x, y, z), (x', y', z') \in V_i\right\}$$

diametrul multimii A si fie

$$\|\Delta\| = \max\{\text{diam}(V_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$$

norma acoperirii. Daca $(x_i, y_i, z_i) \in V_i \cap V$ definim suma Riemann

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\text{vol}(V_i)$$

Integrala functiei f pe domeniul V este prin definitie

$$\iiint_V f(x, y)dxdy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f)$$

cu conditia ca limita sa existe si sa fie finita. In acest caz spunem ca f este integrabila pe V.

Clase de functii integrabile

1) Daca V este o multime compacta iar f este continua pe V atunci este integrabila pe V.
2) Daca functia f este marginita si are discontinuitati pe un numar finit de suprafete netede atunci ea este integrabila.

Interpretare geometrica a integralei triple

$\iint_V dxdy$ preprezinta volumul multimii $V \subset \mathbb{R}^3$

Poprietati ale integralei triple

1) Daca f este integrabila pe V si $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci αf este integrabila pe V si avem

$$\iiint_V \alpha f(x,y,z)dxdydz = \alpha \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

2) Daca f si g sunt functii integrabile pe V si atunci $f+g$ este integrabila pe V si avem

$$\iiint_V (f(x,y,z)+g(x,y,z))dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

3) Daca f este integrabile pe V si V' iar V si V' nu au puncte interioare comune atunci F este integrabile pe $V \cup V'$ si avem

$$\iiint_{V \cup V'} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V'} \alpha f(x,y,z)dxdydz.$$

4) Daca $f \geq 0$ este o functie integrabila pe V atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

Metode de calcul

1) Daca $V = [a,b] \times [c,d] \times [k,p]$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_k^p f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

2) Domeniul V este cuprins ntre planele $z=a$ si $z=b$. Notam cu V_z proiectia pe planul XOY a intersectiei lui V cu planul $z=z_0$ unde $a \leq z_0 \leq b$, Daca

$$V_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z_0) \in V\}.$$

Atunci,

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{V_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz.$$

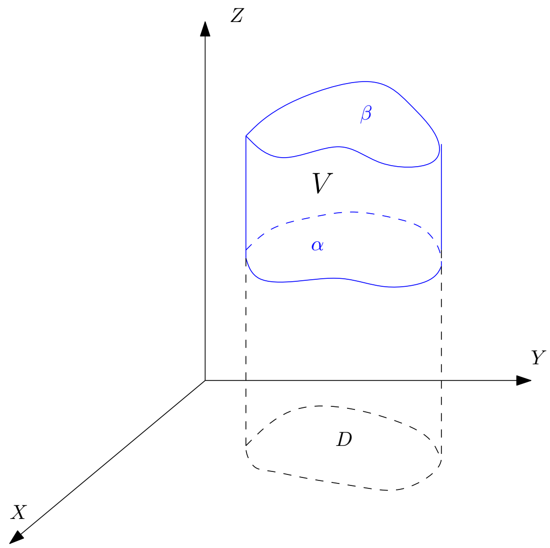
3) Domeniul V este simplu in raport cu Oz, adica este limitat de o suprafata laterala

cilindrica cu generatoarele paralele cu axa Oz si marginita de suprafetele $z=\alpha(x,y)$, $(x,y) \in D$ si $z=\beta(x,y)$, $(x,y) \in D$. Asadar

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y), (x,y) \in D\}.$$

Atunci,

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$



Example 13. Calculati

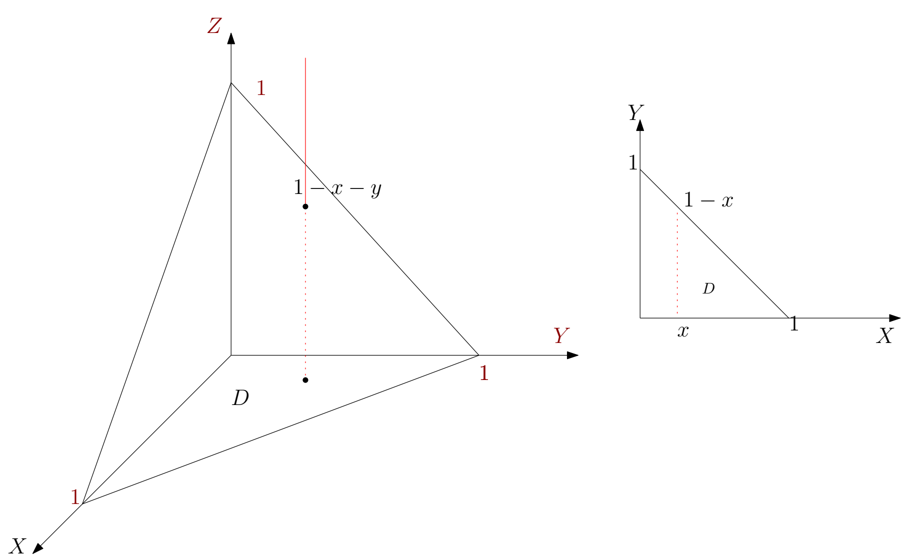
$$\iiint_V x dx dy dz,\ V : x + y + z \leq 1,\ x, y, z \geq 0$$

Observam ca

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x - y,\ \ (x, y) \in D\}$$

unde D, proiectia lui V pe planul xOy este

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2), x + y \leq 1,\ x, y \geq 0\}$$



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

Atunci

$$\iiint_V zdxdydz = \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} xdz\right) dxdy = \iint_D x(1-x-y)dxdy$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x - x^2 - xy)dy\right) dx = \int_0^1 \left(xy - x^2y - x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx$$
$$= \int_0^1 \left[x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{x(1-x)^2}{2}\right] dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} dx = \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{2}\right] dx$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}.$$

Example 14. Calculati

$$\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz,\ V: x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 3$$

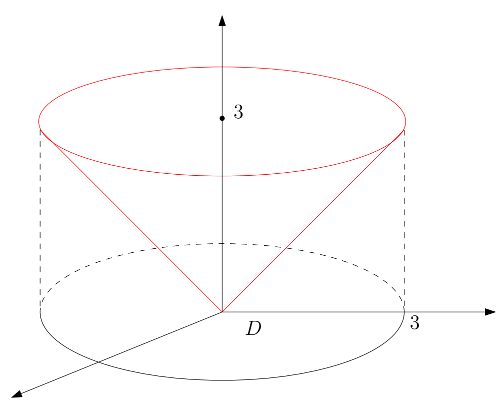
Observam ca

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 3, \quad (x,y) \in D\}$$

unde unde D, proiectia lui V pe planul xOy este

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 9\}.$$

Deci,



$$\iiint_V zdxdydz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^3 (x^2+y^2)dz\right) dxdy = \iint_D (x^2+y^2)(3-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

Trecand la coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

domeniul D devine

$$D' : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Cum

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\ dxdy = \rho\ d\rho d\theta$$

avem

$$\iint_D (x^2+y^2)(3-\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \iint_{D'} \rho^3(3-\rho)d\rho d\theta = \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi}(3\rho^3-\rho^4)d\theta\right)d\rho$$

$$= 2\pi\int_0^3(3\rho^3-\rho^4)d\rho = \frac{243}{10}\pi.$$

Schimbarea de variabila in integrala tripla

Fie $T : \Omega \to V$, o aplicatie bijectiva de clasa C^1, definita prin

$$T : \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

astfel incat

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } \Omega$$

Cu aceste notatii,

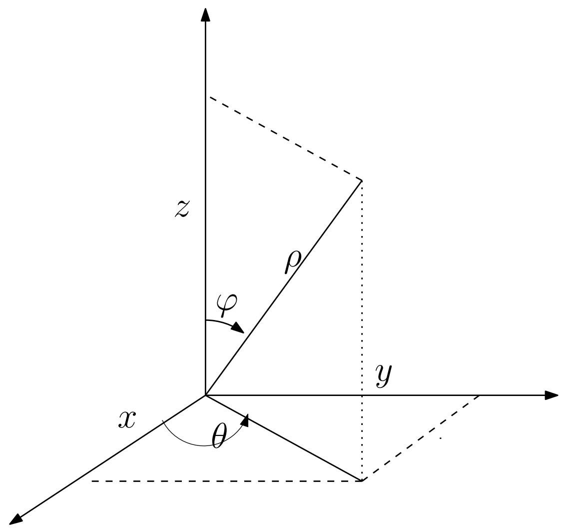
Formula de schimbare de variabila

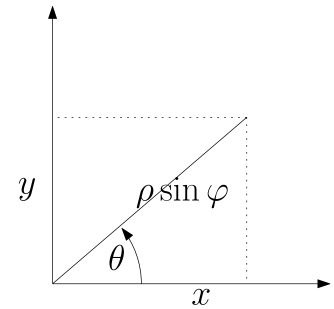
Daca f este o functie integrabila pe V, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw.$$

Coordonate sferice

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \rho\in[0,\infty),\ \theta\in[0,2\pi],\ \varphi\in[0,\pi]$$





In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\varphi$$

si deci

$$dxdydz = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}\right| d\rho d\theta d\varphi = \rho^2 \sin\varphi \; d\rho d\theta d\varphi$$

Coordonate sferice generalizate

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \rho \in [0,\infty),\; \theta \in [0,2\pi],\; \varphi \in [0,\pi]$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\varphi & -a\rho\sin\theta\sin\varphi & a\rho\cos\theta\cos\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & b\rho\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\varphi & 0 & -c\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = -abc\rho^2\sin\varphi.$$

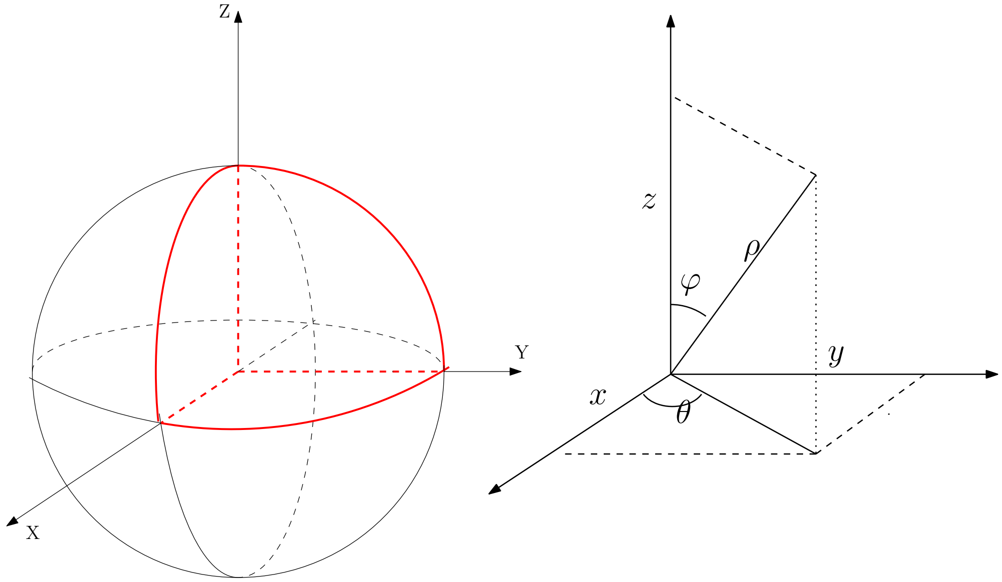
si deci

$$dxdydz = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}\right| d\rho d\theta d\varphi = abc\rho^2 \sin\varphi \; d\rho d\theta d\varphi$$

Exemplu. Sa se calculeze

$$\iiint_V x^2 dxdydz \quad V = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 9, x,y,z \ge 0\}$$

Vom trece la coordonate sferice



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

si atunci

$$(x,y,z) \in V \iff \begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}$$

Asadar, in urma acestei transformari V devine $V' = [0,3] \times [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$.

$$\iiint_V x^2 dxdydz = \iiint_{V'} \rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi \cdot \rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4\cos^2\rho\sin^3\varphi d\varphi \right) d\theta \right) d\rho = \left(\int_0^2 \rho^4 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi \right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta = \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi(1-\cos^2\varphi) d\varphi = -\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)'\cos^2\varphi d\varphi$$

$$= 1 + \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 1/3 = \frac{2}{3}.$$

$$\int_0^2 \rho^4 d\rho = \frac{2^5}{5} = \frac{32}{5}$$

In concluzie

$$\iiint_V x^2 dxdydz = \frac{32}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{16\pi}{15}.$$

Exemplu. Calculati integrala

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2\right) dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

$$\begin{cases} x = 2\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = 3\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \rho \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi],\ \varphi \in [0,\pi/2]$$

$$dxdydz = 6\rho^2 \sin\varphi.$$

Prin aceasta transformare domeniul V define $V' = [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi/2]$ Avem

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2\right) dxdydz = \iiint_{V'} \rho^2 \cdot 6\rho^2 \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi = \iiint_{V'} 6\rho^4 \sin\varphi \cdot d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 6\rho^4 \sin\varphi d\varphi\right) d\theta\right) d\rho = \int_0^1 2\pi \cdot 6\rho^4 d\rho = \int_0^1 12\pi\rho^4 d\rho = 12\pi/5$$

Exercitii

Calculati integralele

(1) $\iint\limits_D (2xy + e^x)dxdy$ unde $D = [0,1] \times [0,4]$

(2) $\iint\limits_D (x + \sin(2y))dxdy$ unde D este marginit de curbele $y = x - 1,\ y = -x + 1, x = 0$

(3) $\iint\limits_D (3x^2y - 1)dxdy$ unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$

(4) $\iint\limits_D (2xy + x^2 - y^2)dxdy$ unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 9, x - y \leq 0, x + y \geq 0\}$

(5) $\iiint\limits_V (y \sin^2 z + x \cos 2z)dxdydz,$ unde $V = [2,4] \times [1,3] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

(6) $\iiint\limits_V (x + z)dxdydz,$ unde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x, y \geq 0, z \leq 0\}$

(7) $\iiint\limits_V (xz + y)dxdydz,$ unde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y, z \geq\ 0\}.$

(8) $\iint_D (x + xy)dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 9,\ x \geq y\}$

(9) $\iint_D (x^2 + y)dxdy, \quad D$ este limiat de curbele $y = x^2, x = y^2$

(10) $\iint_D \frac{1}{(y + x)^2} dxdy,\ D$ este limitat de dreptele $y - 2x = 0, y + 2x = 0, y = 1,\ y = 2$

(11) $\iiint_V (xy + z)dxdydz, \quad V = [0,1] \times [0,2] \times [1,3]$

(12) $\iiint_V (z + 1)dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y + z = 6,\ x, y, z \geq 0\}$

(13) $\iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2z,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2\}$

(14) $\iiint_V xydxdydz, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 2\}$

(15) $\iiint_V (x + y + xz^2)dxdydz, \quad V = [0,1] \times [1,3] \times [0,2]$