

# Spis treści

<b>1 Wstęp</b>	<b>2</b>
1.1 Cel pracy . . . . .	2
1.2 Zawartość pracy . . . . .	2
<b>2 Model manipulatora mobilnego</b>	<b>3</b>
2.1 Model we współrzędnych uogólnionych . . . . .	3
2.2 Ograniczenia nieholonomiczne . . . . .	4
2.3 Model w prędkościach pomocniczych . . . . .	4
<b>3 Odsprzęganie wejściowo-wyjściowe dla manipulatora mobilnego</b>	<b>6</b>
3.1 Struktura układu sterowania . . . . .	6
3.2 Odprzegnanie według Yamamoto i Yuna . . . . .	6
3.2.1 Specyfikacja podejścia . . . . .	6
3.2.2 Algorytm sterowania . . . . .	7
3.2.3 Badania symulacyjne . . . . .	7
3.3 Odprzegnanie z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi . . . . .	7
3.3.1 Specyfikacja podejścia . . . . .	7
3.3.2 Algorytm sterowania . . . . .	7
3.3.3 Badania symulacyjne . . . . .	8
<b>4 Model satelity typu free-floating</b>	<b>10</b>
<b>5 Odsprzęganie wejściowo-wyjściowe dla satelity typu free-floating</b>	<b>11</b>

# Rozdział 1

## Wstęp

1.1 Cel pracy

1.2 Zawartość pracy

## Rozdział 2

# Model manipulatora mobilnego

Manipulator mobilny to platforma mobilna z zamontowanym na niej manipulatorem. Biorąc pod uwagę typ ograniczeń nałożonych kolejno na platformę i manipulator można wydzielić 4 typy manipulatorów mobilnych:

1. typ  $(h,h)$  - platforma i manipulator związane są ograniczeniami holonomicznymi,
2. typ  $(nh,h)$  - na platformę nałożone są ograniczenia nieholonomiczne, natomiast na manipulator ograniczenia holonomiczne,
3. typ  $(nh,nh)$  - ograniczenia nałożone na platformę i manipulator są nieholonomiczne. Taki rodzaj manipulatora mobilnego został przedstawiony w [6],
4. typ  $(h,nh)$  - na manipulator nałożone są ograniczenia nieholonomiczne, natomiast na platformę holonomiczne.

W tym rozdziale zostanie przedstawiony model manipulatora mobilnego typu  $(nh,h)$ . W szczególności w rozważanym manipulatorze platformą będzie monocykl, czyli robot mobilny klasy  $(2,0)$ . Za manipulator natomiast posłuży manipulator RTR. Rozważany manipulator mobilny przedstawiono na rys 1.

Przyjmy następujący wektor współrzędnych uogólnionych manipulatora mobilnego:

$$q = \begin{pmatrix} q_m \\ q_r \end{pmatrix} \in R^{n+p}, \quad (2.1)$$

gdzie  $q_m = (x, y, \theta, \phi_1, \phi_2)^T \in R^n$  - wektor współrzędnych uogólnionych platformy mobilnej,  $q_r = (q_1, q_2, q_3)^T \in R^p$  - wektor współrzędnych przegubowych manipulatora. Rozmiary przestrzeni wyniosą więc  $n = 5$ ,  $p = 3$ .

## 2.1 Model we współrzędnych uogólnionych

Do wyprowadzenia równań manipulatora mobilnego wykorzystamy mechanikę Langrange'a. Lagranżjan  $L$  jest zdefiniowany jako różnica pomiędzy energią kinetyczną, a potencjalną układu

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q). \quad (2.2)$$

Równania ruchu przy braku sił działających na system są następujące

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (2.3)$$

Lewą stronę równania (2.3) można przedstawić jako

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q). \quad (2.4)$$

Przy obecności sił zewnętrznych równanie (2.3) wygląda następująco

$$Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = F_e. \quad (2.5)$$

W naszym przypadku siły zewnętrzne  $F_e$  są sumą 2 składowych:  $F_e = B(q)u + F_{nh}$ , gdzie  $B(q)u$  to uogólnione siły wejściowe(tj. wywierane na system przez elementy wykonawcze), a  $F_{nh}$  to siły więzów nieholonomicznych(tj. siły zapewniające spełnienie ograniczeń nieholonomicznych).

Wektor  $u = \begin{pmatrix} u_m \\ u_r \end{pmatrix} \in R^{(n+p-l)}$  jest wektorem sterowań.

Macierz  $B(q) = \begin{bmatrix} B(q_m) & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \in R^{(n+p) \times (n+p-l)}$  nazywana jest macierzą wejściową.

$l$  jest liczbą ograniczeń nieholonomicznych.

Łatwo zauważyc, że jeśli obecne jest chociaż jedno ograniczenie nieholonomiczne macierz  $B(q)$  nie jest macierzą kwadratową, przez co nie można jej odwrócić.

## 2.2 Ograniczenia nieholonomiczne

W naszym przypadku platformą manipulatora mobilnego jest monocykl. W założeniu ma poruszać się ona bez poślizgu wzdłużnego i poprzecznego kół. Ograniczenia te są z natury nieholonomiczne i można je przedstawić w postaci Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (2.6)$$

Jako, że ograniczenia nieholonomiczne dotyczą tylko platformy zapiszmy  $A(q)$  następująco

$$A(q) = \begin{bmatrix} A(q_m) & 0 \end{bmatrix} \in R^{l \times (n+p)}. \quad (2.7)$$

Z [6] wiemy, że siła więzów nieholonomicznych równa jest  $F_{nh} = A(q)^T \lambda$ , gdzie  $\lambda$  to wektor mnożników Lagrange'a. Równanie (2.5) można więc teraz zapisać jako

$$Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = B(q)u + A(q)^T \lambda. \quad (2.8)$$

## 2.3 Model w prędkościach pomocniczych

Model postaci (2.8) posiada pewne wady: jak wspomniano w (2.1) macierz  $B(q)$  nie daje się odwrócić z powodu obecności ograniczeń nieholonomicznych. W jawnej postaci występują również mnożniki Lagrange'a odpowiadające siłom tarcia statycznego zależnego od  $u, q, \dot{q}, t$ . Aby pozbyć się tych wad można przekształcić (2.8) do modelu wyrazonego w prędkościach pomocniczych.

Zauważmy najpierw, że ograniczenia (2.6) wymagają aby prędkość  $\dot{q}$  należała do jądra macierzy  $A(q)$ .

Niech baza jądra  $A(q_m)$  będzie zbiorem wektorów  $\{g_1(q_m), g_2(q_m), \dots, g_m(q_m)\}$ . Zapiszmy prędkość  $\dot{q}_m$  w następujący sposób

$$\dot{q}_m = \sum_{k=1}^n g_k(q_m) \eta_k = \begin{bmatrix} g_1(q_m) & g_2(q_m) & \dots & g_m(q_m) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = G_m(q_m) \eta. \quad (2.9)$$

Wektor  $\eta$  nazywamy wektorem prędkości pomocniczych.

Zauważmy, że prędkość

$$\dot{q} = G(q)z, \quad (2.10)$$

gdzie  $G(q) = \begin{bmatrix} G_m(q_m) & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$  i  $z = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}$  należy do jądra macierzy  $A(q)$  i tym samym spełnia ograniczenia (2.6).

Możemy więc zapisać, że

$$A(q)G(q) = 0. \quad (2.11)$$

Biorąc transpozycje (2.11) otrzymamy

$$G^T(q)A^T(q) = 0. \quad (2.12)$$

Aby wyeliminować mnożniki Lagrange'a z (2.8) należy pomnożyć (2.8) lewostronnie przez  $G^T$  (dla czytelności pomińmy argumenty) i skorzystać z (2.12). Otrzymamy wtedy

$$G^T Q \ddot{q} + G^T C \dot{q} + G^T D = G^T Bu + G^T A^T \lambda = G^T Bu. \quad (2.13)$$

Zróżniczkujmy jeszcze (2.10) po czasie

$$\ddot{q} = \dot{G}z + G\dot{z}. \quad (2.14)$$

Po podstawieniu (2.10) i (2.14) do (2.13), otrzymamy model w prędkościach pomocniczych:

$$G^T Q(\dot{G}z + G\dot{z}) + G^T C G z + G^T D = G^T Q G \dot{z} + G^T(Q\dot{G} + CG)z + G^T D = G^T Bu, \quad (2.15)$$

czyli

$$Q^* \dot{z} + C^* z + D^* = B^* u, \quad (2.16)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} Q^* &= G^T Q G, \\ C^* &= G^T(Q\dot{G} + CG), \\ D^* &= G^T D, \\ B^* &= G^T B. \end{aligned}$$

# Rozdział 3

## Odsprzęganie wejściowo-wyjściowe dla manipulatora mobilnego

Algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego jest wykorzystywany do sterowania manipulatorów mobilnych. Rozwiązuje on zadanie śledzenia zadanej trajektorii efektora  $y_d(t)$  w przestrzeni zewnętrznej. Algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego wymaga pełnej znajomości modelu manipulatora mobilnego.

Istnieją dwie wersje tego algorytmu dla manipulatorów mobilnych ( $nh, h$ ):

- oryginalny algorytm Yamamoto i Yuna [2][3]
- algorytm z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi[1]

### 3.1 Struktura układu sterowania

Obie wersje algorytmu mają identyczną strukturę układu sterowania. Składa się ona z dwóch pętli sprzężenia zwrotnego, które mają sprowadzić równania manipulatora mobilnego do liniowej postaci  $\ddot{y}(t) = \zeta$ , gdzie  $\zeta$  jest nowym sterowaniem.

- pętla wewnętrzna - przekształca układ do postaci liniowej typu "podwójny integrator"
- pętla zewnętrzna - zapewnia realizację zadania tj. śledzenia trajektorii w uzyskanym układzie liniowym

### 3.2 Odprzęganie według Yamamoto i Yuna

#### 3.2.1 Specyfikacja podejścia

Yamamoto i Yun założyli, że manipulator ma ustawić się w stałej konfiguracji o maksymalnej manipulowalności, natomiast zadanie jest realizowane głównie przez ruch platformy

### 3.2.2 Algorytm sterowania

### 3.2.3 Badania symulacyjne

## 3.3 Odprzeganie z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi

### 3.3.1 Specyfikacja podejścia

Odmiennie od podejścia Yamamoto i Yun'a w tym podejściu nie jest wymagany bezruch manipulatora. Może on czynnie uczestniczyć w realizacji zadania.

### 3.3.2 Algorytm sterowania

Funkcje wyjściowe mają wtedy postacie[1]:

$$y(q) = \begin{pmatrix} y_1(q_m, q_r) \\ y_2(q_r) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

gdzie  $y_1(q_m, q_r)$  jest wektorem wybranych współrzędnych efektora w podstawowym układzie odniesienia ( $X_0, Y_0$ ), a  $y_2(q_r)$  to wektor wybranych współrzędnych efektora w lokalnym układzie odniesienia ( $X_P, Y_P$ ) związanym ze środkiem masy platformy[1].

Algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego dla manipulatorów mobilnych złożony jest z dwóch pętli sprzężeń zwrotnych[1]:

- wewnętrznej pętli linearyzującej transformację wejście-stan
- zewnętrznej pętli linearyzującej transformację wejście-wyjście

Weewnętrzna pętla realizuje linearyzacje transformacji wejście-stan i wykorzystuje w tym celu prawo sterowania z rodziny algorytmów 'obliczanych momentów'[1]:

$$u = B^{*-1}[C^*z + D^* + Q^*v]. \quad (3.2)$$

Zewnętrzna pętla zapewnia linearyzacje transformacji wejście-wyjście i jest realizowana za pomocą prawa sterowania[1]:

$$v = \Phi^{-1}[-\Phi z + \zeta]. \quad (3.3)$$

Macierz  $\Phi(q)$  jest następująca

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_m & \Phi_{mr} \\ 0 & \Phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} G_m & \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \end{bmatrix}.$$

Prawo sterowania zewnętrznej pętli (3.3) wyprowadza się w następujący sposób:  
Oblicza się pochodną funkcji wyjściowej  $y(q)$  po czasie:

$$\dot{y}(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \dot{q}_r \\ \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \dot{q}_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} G_m & \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \Phi(q)z, \quad (3.4)$$

$\dot{y}(q)$  ponownie różniczuje się po czasie:

$$\ddot{y} = \dot{\Phi}z + \Phi\dot{z}. \quad (3.5)$$

Stosując pierwszą pętlę (3.2) do modelu (2.16) mamy:

$$\dot{z} = v. \quad (3.6)$$

Po podstawieniu zależności (3.6) do równania (3.5) uzyskamy:

$$\ddot{y} = \dot{\Phi}z + \Phi v. \quad (3.7)$$

Aby zapewnić linearyzację wejściowo-wyjściową należy więc użyć wejścia:

$$v = \Phi^{-1}[-\Phi z + \zeta]. \quad (3.8)$$

Po zastosowaniu algorytmu otrzymuje się więc funkcje wyjściowe w liniowej postaci:

$$\ddot{y} = \zeta. \quad (3.9)$$

System taki można sterować, na przykład za pomocą regulatora PD z korektą

$$\zeta = \ddot{y}_d(t) - K_d \dot{e}(t) - K_p e(t), \quad (3.10)$$

gdzie  $\ddot{y}_d(t)$  - druga pochodna zadanej funkcji wejściowej,  
 $e(t) = y_d(t) - y(t)$ ,  $\dot{e}(t) = \dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)$  - błąd i jego pochodna,  
 $K_d > 0$ ,  $K_p > 0$  - nastawy regulacji.

**Warunki działania algorytmu** Wyżej przedstawiony algorytm wymaga odwracalności macierzy  $\Phi$ . Warunek jaki trzeba spełnić aby algorytm funkcjonował jest więc następujący:

$$\det(\Phi) = \det(\Phi_m)\det(\Phi_r) \neq 0 \quad (3.11)$$

### 3.3.3 Badania symulacyjne

Rozważany monocykl posiada dwa wejścia (sterowania obu kół), można więc odsprząc dwie współrzędne efektora. Podczas badań postanowiono odsprząć współrzędne  $x$  i  $y$  efektora w podstawowym układzie odniesienia ( $X_0, Y_0$ ). Funkcja wyjściowa  $y_1(q_m, q_r)$  ma więc postać

$$y_1(q_m, q_r) = \begin{pmatrix} x + ac_0 + l_2 c_{01} + l_3 c_{01} c_3 \\ y + as_0 + l_2 s_{01} + l_3 s_{01} c_3 \end{pmatrix}.$$

Funkcja  $y_2(q_r)$  to wektor współrzędnych  $x$ ,  $y$  i  $z$  efektora w układzie środka masy platformy ( $X_P, Y_P$ )

$$y_2(q_r) = \begin{pmatrix} a + l_2 c_1 + l_3 c_1 c_3 \\ l_2 s_1 + l_3 s_1 c_3 \\ s_3 l_3 + q_2 \end{pmatrix}.$$

Początkowe położenie platformy było równe  $q_m(0) = (x(0), y(0), \theta(0), \phi_1(0), \phi_2(0)) = (0, 0, 0, 0, 0)$ , a początkowa konfiguracja manipulatora była równa  $q_r(0) = (q_1(0), q_2(0), q_3(0)) = (\frac{\pi}{2}, 0.2, -\frac{\pi}{2})$ . Prędkości początkowe  $\dot{q}(0)$  były równe zeru.

Parametry geometryczne ustalono jako:  $l_2 = 0.3\text{m}$ ,  $l_3 = 0.2\text{m}$ ,  $a = 0.2\text{m}$ .

Funkcje wyjściowe miały więc następujące wartości początkowe

$$y(q_m(0), q_r(0)) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wektor pochodnych  $\dot{y}$  równy był wektorowi zer.

Wybrano następujące trajektorie zadane  $y_d(t)$

$$y_d(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -0.3 \cos(2t) \\ 0.5 \\ -0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Błąd początkowy  $e(t) = y_d(t) - y(t)$  i jego pochodna były więc równe

$$e(0) = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.6 \\ 0.3 \\ -0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad \dot{e}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

W badaniach wykorzystano środowisko Matlab/Simulink.

## Rozdział 4

### Model satelity typu free-floating

## Rozdział 5

Odsprzeganie wejściowo-wyjściowe  
dla satelity typu free-floating

# Bibliografia

- [1] Mazur A. *New approach to designing input-output decoupling controllers for mobile manipulators.* Bull. of the Polish Academy of sciences Tech. Sci. 53(1):31-37, (2005)
- [2] Yamamoto Y, Yun X. *Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator.* IEEE Trans. on Automatic Control, 39(6):1326-1332, (1994)
- [3] Yamamoto Y, Yun X. *Effect of the dynamic interaction on coordinated control of mobile manipulators.* IEEE Trans. Robotics Automat, 12(5):816-824, (1996)
- [4] Mazur A, Arent K. *Lecture Notes in Control and Information Sciences,* 335:55-71 (2007)
- [5] Tchoń K, Jakubiak J. *Acceleration-Driven Kinematics of Mobile Manipulators: An Endogenous Configuration Space Approach,* pp.(469-476), (2004)
- [6] M. R. Flannery. *The Enigma of Nonholonomic Constraints.* American Association of Physics Teachers, 73(3):265–272, 2005.