

# Rozdział 1

## Model manipulatora mobilnego

Manipulator mobilny to platforma mobilna z zamontowanym na niej manipulatorem. Biorąc pod uwagę typ ograniczeń nałożonych kolejno na platformę i manipulator można wydzielić 4 typy manipulatorów mobilnych:

1. typ  $(h,h)$  - platforma i manipulator związane są ograniczeniami holonomicznymi,
2. typ  $(nh,h)$  - na platformę nałożone są ograniczenia nieholonomiczne, natomiast na manipulator ograniczenia holonomiczne,
3. typ  $(nh,nh)$  - ograniczenia nałożone na platformę i manipulator są nieholonomiczne. Taki rodzaj manipulatora mobilnego został przedstawiony w [6],
4. typ  $(h,nh)$  - na manipulator nałożone są ograniczenia nieholonomiczne, natomiast na platformę holonomiczne.

W tym rozdziale zostanie przedstawiony model manipulatora mobilnego typu  $(nh,h)$ . W szczególności w rozważanym manipulatorze platformą będzie monocykl, czyli robot mobilny klasy  $(2,0)$ . Za manipulator natomiast posłuży manipulator RTR. Rozważany manipulator mobilny przedstawiono na rys 1.

Przyjmy następujący wektor współrzędnych uogólnionych manipulatora mobilnego:

$$q = \begin{pmatrix} q_m \\ q_r \end{pmatrix} \in R^{n+p}, \quad (1.1)$$

gdzie  $q_m = (x, y, \theta, \phi_1, \phi_2)^T \in R^n$  - wektor współrzędnych uogólnionych platformy mobilnej,  $q_r = (q_1, q_2, q_3)^T \in R^p$  - wektor współrzędnych przegubowych manipulatora. Rozmiary przestrzeni wyniosą więc  $n = 5$ ,  $p = 3$ .

### 1.1 Model we współrzędnych uogólnionych

Do wyprowadzenia równań manipulatora mobilnego wykorzystamy mechanikę Langrange'a. Lagranżjan  $L$  jest zdefiniowany jako różnica pomiędzy energią kinetyczną, a potencjalną układu

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q). \quad (1.2)$$

Równania ruchu przy braku sił działających na system są następujące

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (1.3)$$

Lewą stronę równania (1.3) można przedstawić jako

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q). \quad (1.4)$$

Przy obecności sił zewnętrznych równanie (1.3) wygląda następująco

$$Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = F_e. \quad (1.5)$$

W naszym przypadku siły zewnętrzne  $F_e$  są sumą 2 składowych:  $F_e = B(q)u + F_{nh}$ , gdzie  $B(q)u$  to uogólnione siły wejściowe(tj. wywierane na system przez elementy wykonawcze), a  $F_{nh}$  to siły więzów nieholonomicznych(tj. siły zapewniające spełnienie ograniczeń nieholonomicznych).

## 1.2 Ograniczenia nieholonomiczne dla platformy

W naszym przypadku platforma manipulatora mobilnego to monocykl, który w założeniu będzie poruszać się bez poślizgu wzdłużnego i poprzecznego kół.

Warunek na brak poślizgu poprzecznego to

$$\dot{x} \sin(\theta) - \dot{y} \cos(\theta) = 0, \quad (1.6)$$

a warunki na brak poślizgu wzdłużnego pierwszego i drugiego koła to:

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) - L\dot{\theta} - R\phi_1 = 0, \quad (1.7)$$

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) + L\dot{\theta} - R\phi_2 = 0. \quad (1.8)$$

Ograniczenia te są nieholonomiczne i można je przedstawić w postaci Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (1.9)$$

gdzie

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & -L & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & L & 0 & -R & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Z [6] wiemy, że siła więzów nieholonomicznych równa jest  $F_{nh} = A(q)^T \lambda$ , gdzie  $\lambda$  to wektor mnożników Lagrange'a. Równanie (1.5) można więc teraz zapisać jako

$$Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = B(q)u + A(q)^T \lambda. \quad (1.11)$$

## 1.3 Model w prędkościach pomocniczych

Model postaci (1.11) posiada pewne wady: macierz  $B$  jest prostokątna i nie daje się odwrócić. W jawnej postaci występują również mnożniki Lagrange'a odpowiadające siłom tarcia statycznego zależnego od  $u, q, \dot{q}, t$ . Aby pozbyć się tych wad można przekształcić (1.11) do modelu wyrażonego w prędkościach pomocniczych.

Najpierw zauważmy, że ograniczenia (1.9) wymagają aby prędkości  $\dot{q}$  należały do jądra macierzy  $A(q)$ . Niech baza jądra  $A(q)$  będzie zbiorem wektorów  $\{g_1(q), g_2(q), \dots, g_m(q)\}$ . Jeśli więc zapiszemy prędkość  $\dot{q}$  w następujący sposób

$$\dot{q} = \sum_{k=1}^m g_k(q) \eta_k = \begin{pmatrix} g_1(q), g_2(q), \dots, g_m(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = G(q)\eta \quad (1.12)$$

to będzie ona spełniać ograniczenia (1.9). Wektor  $\eta$  nazywamy wektorem prędkości pomocniczych.

Zauważmy, że

$$A(q)G(q) = 0. \quad (1.13)$$

Biorąc transpozycje (1.13) otrzymamy

$$G^T(q)A^T(q) = 0. \quad (1.14)$$

Aby wyeliminować mnożniki Lagrange'a z (1.11) należy pomnożyć (1.11) lewostronnie przez  $G^T$  (dla czytelności pomińmy argumenty) i skorzystać z (1.14). Otrzymamy wtedy

$$G^T Q \ddot{q} + G^T C \dot{q} + G^T D = G^T B u + G^T A^T \lambda = G^T B u. \quad (1.15)$$

Zróżniczkujmy jeszcze (1.12) po czasie

$$\ddot{q} = \dot{G}\eta + G\dot{\eta}. \quad (1.16)$$

Po podstawieniu (1.12) i (1.16) do (1.15), otrzymamy model w prędkościach pomocniczych:

$$G^T Q(\dot{G}\eta + G\dot{\eta}) + G^T C G \eta + G^T D = G^T Q G \dot{\eta} + G^T(Q\dot{G} + CG)\eta + G^T D = G^T B u, \quad (1.17)$$

czyli

$$Q^* \dot{\eta} + C^* \eta + D^* = B^* u, \quad (1.18)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} Q^* &= G^T Q G, \\ C^* &= G^T(Q\dot{G} + CG), \\ D^* &= G^T D, \\ B^* &= G^T B. \end{aligned}$$

## Rozdział 2

# Odsprzęganie wejściowo-wyjściowe dla manipulatora mobilnego

Algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego jest wykorzystywany do sterowania manipulatorów mobilnych. Rozwiązuje on zadanie śledzenia zadanej trajektorii efektora  $y_d(t)$  w przestrzeni zewnętrznej. Polega on na zastosowaniu dwóch pętli sprzężenia zwrotnego, aby sprowadzić równania manipulatora mobilnego do liniowej postaci  $\dot{y}(t) = \zeta$ , gdzie  $\zeta$  jest nowym sterowaniem. Algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego wymaga pełnej znajomości modelu manipulatora mobilnego.

Istnieją dwie wersje tego algorytmu dla manipulatorów mobilnych ( $nh, h$ ):

- oryginalny algorytm Yamamoto i Yuna [2][3]
- algorytm z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi[1]

W tej pracy użyto algorytmu z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi. Funkcje wyjściowe mają wtedy postacie[1]:

$$y(q) = \begin{pmatrix} y_1(q_m, q_r) \\ y_2(q_r) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

gdzie  $y_1(q_m, q_r)$  jest wektorem wybranych współrzędnych efektora w podstawowym układzie odniesienia  $(X_0, Y_0)$ , a  $y_2(q_r)$  to wektor wybranych współrzędnych efektora w lokalnym układzie odniesienia  $(X_P, Y_P)$  związanym ze środkiem masy platformy[1].

Algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego dla manipulatorów mobilnych złożony jest z dwóch pętli sprzężeń zwrotnych[1]:

- wewnętrznej pętli linearyzującej transformację wejście-stan
- zewnętrznej pętli linearyzującej transformację wejście-wyjście

Wewnętrzna pętla realizuje linearyzacje transformacji wejście-stan i wykorzystuje w tym celu prawo sterowania z rodziny algorytmów 'obliczanych momentów'[1]:

$$u = B^{*-1}[C^*z + D^* + Q^*v]. \quad (2.2)$$

Zewnętrzna pętla zapewnia linearyzacje transformacji wejście-wyjście i jest realizowana za pomocą prawa sterowania[1]:

$$v = \Phi^{-1}[-\Phi z + \zeta]. \quad (2.3)$$

Macierz  $\Phi(q)$  jest następująca

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_m & \Phi_{mr} \\ 0 & \Phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} G & \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \end{bmatrix}.$$

Prawo sterowania zewnętrznej pętli (2.3) wyprowadza się w następujący sposób:  
Oblicza się pochodną funkcji wyjściowej  $y(q)$  po czasie:

$$\dot{y}(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \dot{q}_r \\ \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \dot{q}_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} G & \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \Phi(q)z, \quad (2.4)$$

$\dot{y}(q)$  ponownie różniczkuje się po czasie:

$$\ddot{y} = \dot{\Phi}z + \Phi\dot{z}. \quad (2.5)$$

Stosując pierwszą pętlę (2.2) do modelu (??) mamy:

$$\dot{z} = v. \quad (2.6)$$

Po podstawieniu zależności (2.6) do równania (2.5) uzyskamy:

$$\ddot{y} = \dot{\Phi}z + \Phi v. \quad (2.7)$$

Aby zapewnić linearyzację wejściowo-wyjściową należy więc użyć wejścia:

$$v = \Phi^{-1}[-\Phi z + \zeta]. \quad (2.8)$$

Po zastosowaniu algorytmu otrzymuje się więc funkcje wyjściowe w liniowej postaci:

$$\ddot{y} = \zeta. \quad (2.9)$$

### 2.0.1 Warunki działania algorytmu

Wyżej przedstawiony algorytm wymaga odwrotności macierzy  $\Phi$ . Warunek jaki trzeba spełnić aby algorytm funkcjonował jest więc następujący:

$$\det(\Phi) = \det(\Phi_m)\det(\Phi_r) \neq 0 \quad (2.10)$$

## 2.1 Badania symulacyjne dla manipulatora mobilnego

Rozważany monocykl posiada dwa wejścia (sterowania obu kół), można więc odsprząc dwie współrzędne efektora. Podczas badań postanowiono odsprząć współrzędne  $x$  i  $y$  efektora w podstawowym układzie odniesienia  $(X_0, Y_0)$ . Funkcja wyjściowa  $y_1(q_m, q_r)$  ma więc postać

$$y_1(q_m, q_r) = \begin{pmatrix} x + ac_0 + l_2c_{01} + l_3c_{01}c_3 \\ y + as_0 + l_2s_{01} + l_3s_{01}c_3 \end{pmatrix}.$$

Funkcja  $y_2(q_r)$  to wektor współrzędnych  $x$ ,  $y$  i  $z$  efektora w układzie środka masy platformy  $(X_P, Y_P)$

$$y_2(q_r) = \begin{pmatrix} a + l_2c_1 + l_3c_1c_3 \\ l_2s_1 + l_3s_1c_3 \\ s_3l_3 + q_2 \end{pmatrix}.$$

Początkowe położenie platformy było równe  $q_m(0) = (x(0), y(0), \theta(0), \phi_1(0), \phi_2(0)) = (0, 0, 0, 0, 0)$ , a początkowa konfiguracja manipulatora była równa  $q_r(0) = (q_1(0), q_2(0), q_3(0)) = (\frac{\pi}{2}, 0.2, -\frac{\pi}{2})$ . Prędkości początkowe  $\dot{q}(0)$  były równe zeru.

Parametry geometryczne ustalono jako:  $l_2 = 0.3\text{m}$ ,  $l_3 = 0.2\text{m}$ ,  $a = 0.2\text{m}$ .

Funkcje wyjściowe miały więc następujące wartości początkowe

$$y(q_m(0), q_r(0)) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wektor pochodnych  $\dot{y}$  równy był wektorowi zer.

Wybrano następujące trajektorie zadane  $y_d(t)$

$$y_d(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -0.3 \cos(2t) \\ 0.5 \\ -0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Błąd początkowy i jego pochodna były więc równe

$$e(0) = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.6 \\ 0.3 \\ -0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad \dot{e}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

W badaniach wykorzystano środowisko Matlab/Simulink.

# Bibliografia

- [1] Mazur A. *New approach to designing input-output decoupling controllers for mobile manipulators.* Bull. of the Polish Academy of sciences Tech. Sci. 53(1):31-37, (2005)
- [2] Yamamoto Y, Yun X. *Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator.* IEEE Trans. on Automatic Control, 39(6):1326-1332, (1994)
- [3] Yamamoto Y, Yun X. *Effect of the dynamic interaction on coordinated control of mobile manipulators.* IEEE Trans. Robotics Automat, 12(5):816-824, (1996)
- [4] Mazur A, Arent K. *Lecture Notes in Control and Information Sciences,* 335:55-71 (2007)
- [5] Tchoń K, Jakubiak J. *Acceleration-Driven Kinematics of Mobile Manipulators: An Endogenous Configuration Space Approach,* pp.(469-476), (2004)
- [6] M. R. Flannery. *The Enigma of Nonholonomic Constraints.* American Association of Physics Teachers, 73(3):265–272, 2005.