Rozdział 1

Model manipulatora mobilnego

Manipulator mobilny to platforma mobilna z zamontowanym na niej manipulatorem. Biorąc pod uwagę typ ograniczeń nałożonych kolejno na platformę i manipulator można wydzielić 4 typy manipulatorów mobilnych:

1. typ (*h,h*) - platforma i manipulator związane są ograniczeniami holonomicznymi,
2. typ (*nh,h*) - na platformę nałożone są ograniczenia nieholonomiczne, natomiast na manipulator ograniczenia holonomiczne,
3. typ (*nh,nh*) - ograniczenia nałożone na platformę i manipulator są nieholonomiczne. Taki rodzaj manipulatora mobilnego został przedstawiony w [6],
4. typ (*h,nh*) - na manipulator nałożone są ograniczenia nieholonomiczne, natomiast na platformę holonomiczne.

W tym rozdziale zostanie przedstawiony model manipulatora mobilnego typu (*nh,h*). W szczególności w rozważanym manipulatorze platformą będzie monocykl, czyli robot mobilny klasy (2,0). Za manipulator natomiast posłuży manipulator RTR. Rozważany manipulator mobilny przedstawiono na rys 1.

Przyjmy następujący wektor współrzędnych uogólnionych manipulatora mobilnego:

$$q = \begin{pmatrix} q_m \\ q_r \end{pmatrix} \in R^{n+p}, \tag{1.1}$$

gdzie $q_m = (x, y, \theta, \phi_1, \phi_2)^T \in R^n$ - wektor współrzędnych uogólnionych platformy mobilnej, $q_r = (q_1, q_2, q_3)^T \in R^p$ - wektor współrzędnych przegubowych manipulatora. Rozmiary przestrzeni wyniosą więc $n = 5$, $p = 3$.

1.1 Model we współrzędnych uogólnionych

Do wyprowadzenia równań manipulatora mobilnego wykorzystamy mechanikę Langrange'ą.
Lagranżjan L jest zdefiniowany jako różnica pomiędzy energią kinetyczną, a potencjalną układu

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q). \tag{1.2}$$

Równania ruchu przy braku sił działających na system są następujące

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{1.3}$$

Lewą stronę równania (1.3) można przedstawić jako

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D(q). \tag{1.4}$$

Przy obecności sił zewnętrznych równanie (1.3) wygląda następująco

$$Q(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D(q) = F_e. \tag{1.5}$$

W naszym przypadku siły zewnętrze F_e są sumą 2 składowych: $F_e = B(q)u + F_{nh}$, gdzie $B(q)u$ to uogólnione siły wejściowe(tj. wywierane na system przez elementy wykonawcze), a F_{nh} to siły więzów nieholonomicznych(tj. siły zapewniające spełnienie ograniczeń nieholonomicznych).

1.2 Ograniczenia nieholonomiczne dla platformy

W naszym przypadku platforma manipulatora mobilnego to monocykl, który w założeniu będzie poruszać się bez poślizgu wzdłużnego i poprzecznego kół.
Warunek na brak poślizgu poprzecznego to

$$\dot{x}\sin(\theta) - \dot{y}\cos(\theta) = 0, \tag{1.6}$$

a warunki na brak poślizgu wzdłużnego pierwszego i drugiego koła to:

$$\dot{x}\cos(\theta) + \dot{y}\sin(\theta) - L\dot{\theta} - R\phi_1 = 0, \tag{1.7}$$

$$\dot{x}\cos(\theta) + \dot{y}\sin(\theta) + L\dot{\theta} - R\phi_2 = 0. \tag{1.8}$$

Ograniczenia te są nieholonomiczne i można je przedstawić w postaci Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0, \tag{1.9}$$

gdzie

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & -L & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & L & 0 & -R & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Z [6] wiemy, że siła więzów nieholonomicznych równa jest $F_{nh} = A(q)^T\lambda$, gdzie λ to wektor mnożników Lagrange'a. Równanie (1.5) można więc teraz zapisać jako

$$Q(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D(q) = B(q)u + A(q)^T\lambda. \tag{1.11}$$

1.3 Model w prędkościach pomocniczych

Model postaci (1.11) posiada pewne wady: macierz B jest prostokątna i nie daje się odwrócić. W jawnej postaci występują również mnożniki Lagrange'a odpowiadające siłom tarcia statycznego zależnego od u, q, $\dot{q}$, t. Aby pozbyć się tych wad można przekształcić (1.11) do modelu wyrażonego w prędkościach pomocniczych.

Najpierw zauważmy, że ograniczenia (1.9) wymagają aby prędkości $\dot{q}$ należały do jądra macierzy $A(q)$. Niech baza jądra $A(q)$ będzie zbiorem wektorów $\{g_1(q), g_2(q), ..., g_m(q)\}$. Jeśli więc zapiszemy prędkość $\dot{q}$ w następujący sposób

$$\dot{q} = \sum_{k=1}^{m} g_k(q)\eta_k = \begin{pmatrix} g_1(q), g_2(q), ..., g_m(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = G(q)\eta \tag{1.12}$$

to będzie ona spełniać ograniczenia (1.9). Wektor η nazywamy wektorem prędkości pomocniczych.

Zauważmy, że

$$A(q)G(q) = 0. \tag{1.13}$$

Biorąc transpozycje (1.13) otrzymamy

$$G^T(q)A^T(q) = 0. \tag{1.14}$$

Aby wyeliminować mnożniki Lagrange'a z (1.11) należy pomnożyć (1.11) lewostronnie przez G^T(dla czytelności pomińmy argumenty) i skorzystać z (1.14). Otrzymamy wtedy

$$G^TQ\ddot{q} + G^TC\dot{q} + G^TD = G^TBu + G^TA^T\lambda = G^TBu. \tag{1.15}$$

Zróżniczkujmy jeszcze (1.12) po czasie

$$\ddot{q} = \dot{G}\eta + G\dot{\eta}. \tag{1.16}$$

Po podstawieniu (1.12) i (1.16) do (1.15), otrzymamy model w prędkościach pomocniczych:

$$G^TQ(\dot{G}\eta + G\dot{\eta}) + G^TCG\eta + G^TD = G^TQG\dot{\eta} + G^T(Q\dot{G} + CG)\eta + G^TD = G^TBu, \tag{1.17}$$

czyli

$$Q^*\dot{\eta} + C^*\eta + D^* = B^*u, \tag{1.18}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
Q^* &= G^TQG, \\
C^* &= G^T(Q\dot{G} + CG), \\
D^* &= G^TD, \\
B^* &= G^TB.
\end{aligned}$$

Rozdział 2

Odsprzęganie wejściowo-wyjściowe

Algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego jest wykorzystywany do sterowania manipulatorów mobilnych. Rozwiązuje on zadanie śledzenia zadanej trajektorii efektora $y_d(t)$ w przestrzeni zewnętrznej. Polega on na zastosowaniu dwóch pętli sprzężenia zwrotnego, aby sprowadzić równania manipulatora mobilnego do liniowej postaci $\ddot{y}(t) = \zeta$, gdzie ζ jest nowym sterowaniem. Algorytm odpsprzęgania wejściowo-wyjściowego wymaga pełnej znajomości modelu manipulatora mobilnego.

Istnieją dwie wersje tego algorytmu dla manipulatorów mobilnych (nh,h):

- oryginalny algorytm Yamamoto i Yuna [2][3]
- algorytm z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi[1]

W tej pracy użyto algorytmu z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi. Funkcje wyjściowe mają wtedy postacie[1]:

$$y(q) = \begin{pmatrix} y_1(q_m, q_r) \\ y_2(q_r) \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

gdzie $y_1(q_m, q_r)$ jest wektorem wybranych współrzędnych efektora w podstawowym układzie odniesienia (X_0,Y_0), a $y_2(q_r)$ to wektor wybranych współrzędnych efektora w lokalnym układzie odniesienia (X_P,Y_P) związanym ze środkiem masy[1].
Algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego dla manipulatorów mobilnych złożony jest z dwóch pętli sprzeżeń zwrotnych[1]:

- wewnętrznej pętli linearyzującej transformację wejście-stan
- zewnętrzej pętli linearyzującej transformację wejście-wyjście

Wewnętrzna pętla realizuje linearyzacje transformacji wejście-stan i wykorzystuje w tym celu prawo sterowania z rodziny algorytmów 'obliczanych momentów'[1]:

$$u = B^{*-1}[C^* z + D^* + Q^* v]. \tag{2.2}$$

Zewnętrza pętla zapewnia linearyzacje transformacji wejście-wyjście i jest realizowana za pomocą prawa sterowania[1]:

$$v = \Phi^{-1}[-\Phi z + \zeta]. \tag{2.3}$$

Macierz $\Phi(q)$ jest następująca

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_m & \Phi_{mr} \\ 0 & \Phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} G & \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \end{bmatrix}.$$

Prawo sterowania zewnętrznej pętli (2.3) wyprowadza się w następujący sposób:
Oblicza się pochodną funkcji wyjściowej $y(q)$ po czasie:

$$\dot{y}(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial y_1}{\partial q_r}\dot{q}_r \\ \frac{\partial y_2}{\partial q_r}\dot{q}_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m}G & \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \Phi(q)z, \tag{2.4}$$

$\dot{y}(q)$ ponownie różniczkuje się po czasie:

$$\ddot{y} = \dot{\Phi}z + \Phi\dot{z}. \tag{2.5}$$

Stosując pierwszą pętlę (2.2) do modelu (**??**) mamy:

$$\dot{z} = v. \tag{2.6}$$

Po podstawieniu zależności (2.6) do równania (2.5) uzyskamy:

$$\ddot{y} = \dot{\Phi}z + \Phi v. \tag{2.7}$$

Aby zapewnić linearyzację wejściowo-wyjściową należy więc użyć wejścia:

$$v = \Phi^{-1}[-\Phi z + \zeta]. \tag{2.8}$$

2.0.1 Warunki działania algorytmu

Wyżej przedstawiony algorytm wymaga odwracalności macierzy Φ. Warunek jaki trzeba spełnić aby algorytm funkcjonował jest więc następujący:

$$\det(\Phi) = \det(\Phi_m)\det(\Phi_r) \neq 0 \tag{2.9}$$

Bibliografia

[1] Mazur A. *New approach to designing input-output decoupling controllers for mobile manipulators.* Bull. of the Polish Academy of sciences Tech. Sci. 53(1):31-37, (2005)

[2] Yamamoto Y, Yun X. *Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator.* IEEE Trans. on Automatic Control, 39(6):1326-1332, (1994)

[3] Yamamoto Y, Yun X. *Effect of the dynamic interaction on coordinated control of mobile manipulators.* IEEE Trans. Robotics Automat, 12(5):816-824, (1996)

[4] Mazur A, Arent K. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 335:55-71 (2007)

[5] Tchoń K, Jakubiak J. *Acceleration-Driven Kinematics of Mobile Manipulators: An Endogenous Configuration Space Approach*, pp.(469-476), (2004)

[6] M. R. Flannery. *The Enigma of Nonholonomic Constraints.* American Association of Physics Teachers, 73(3):265–272, 2005.