

Rozdział 1

Model manipulatora mobilnego

Manipulator mobilny to platforma mobilna z zamontowanym na niej manipulatorem. Biorąc pod uwagę typ ograniczeń nałożonych kolejno na platformę i manipulator można wydzielić 4 typy manipulatorów mobilnych:

1. typ (h, h) - platforma i manipulator związane są ograniczeniami holonomicznymi,
2. typ (nh, h) - na platformę nałożone są ograniczenia nieholonomiczne, natomiast na manipulator ograniczenia holonomiczne,
3. typ (nh, nh) - ograniczenia nałożone na platformę i manipulator są nieholonomiczne. Taki rodzaj manipulatora mobilnego został przedstawiony w [6],
4. typ (h, nh) - na manipulator nałożone są ograniczenia nieholonomiczne, natomiast na platformę holonomiczne.

W tym rozdziale zostanie przedstawiony model manipulatora mobilnego typu (nh, h) . W szczególności w rozważanym manipulatorze platformą będzie monocykl, czyli robot mobilny klasy $(2, 0)$. Za manipulator natomiast posłuży manipulator RTR. Rozważany manipulator mobilny przedstawiono na rys 1.

Przyjmy następujący wektor współrzędnych uogólnionych manipulatora mobilnego:

$$q = \begin{pmatrix} q_m \\ q_r \end{pmatrix} \in R^{n+p}, \quad (1.1)$$

gdzie $q_m = (x, y, \theta, \phi_1, \phi_2)^T \in R^n$ - wektor współrzędnych uogólnionych platformy mobilnej, $q_r = (q_1, q_2, q_3)^T \in R^p$ - wektor współrzędnych przegubowych manipulatora. Rozmiary przestrzeni wyniosą więc $n = 5$, $p = 3$.

Do wyprowadzenia równań manipulatora mobilnego wykorzystamy mechanikę Lagrange'a.

Lagranżjan L jest zdefiniowany jako różnica pomiędzy energią kinetyczną, a potencjalną układu

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q). \quad (1.2)$$

Równania ruchu przy braku sił działających na system są następujące

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (1.3)$$

Lewą stronę równania (1.3) można przedstawić jako

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + D(q). \quad (1.4)$$

Przy obecności sił zewnętrznych równanie (1.3) wygląda następująco

$$Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = F_e. \quad (1.5)$$

W naszym przypadku siły zewnętrzne F_e są sumą 2 składowych: $F_e = B(q)u + F_{nh}$, gdzie $B(q)u$ to uogólnione siły wejściowe (tj. wywierane na system przez elementy wykonawcze), a F_{nh} to siły więzów nieholonomicznych (tj. siły zapewniające spełnienie ograniczeń nieholonomicznych).

1.1 Ograniczenia nieholonomiczne dla platformy

W naszym przypadku platforma manipulatora mobilnego to monocykl, który w założeniu będzie poruszać się bez poślizgu wzdłużnego i poprzecznego kół.

Warunek na brak poślizgu poprzecznego to

$$\dot{x} \sin(\theta) - \dot{y} \cos(\theta) = 0, \quad (1.6)$$

a warunki na brak poślizgu wzdłużnego pierwszego i drugiego koła to:

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) - L\dot{\theta} - R\phi_1 = 0, \quad (1.7)$$

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) + L\dot{\theta} - R\phi_2 = 0. \quad (1.8)$$

Ograniczenia te są nieholonomiczne i można je przedstawić w postaci Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (1.9)$$

gdzie

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & -L & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & L & 0 & -R & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Z [6] wiemy, że siła więzów nieholonomicznych równa jest $F_{nh} = A(q)^T \lambda$, gdzie λ to wektor mnożników Lagrange'a. Równanie (1.5) można więc teraz zapisać jako

$$Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = B(q)u + A(q)^T \lambda. \quad (1.11)$$

1.2 Model w prędkościach pomocniczych

Model postaci (1.11) posiada pewne wady: macierz B jest prostokątna i nie daje się odwrócić. W jawnej postaci występują również mnożniki Lagrange'a odpowiadające siłom tarcia statycznego zależnego od u, q, \dot{q}, t . Aby pozbyć się tych wad można przekształcić (1.11) do modelu wyrażonego w prędkościach pomocniczych.

Najpierw zauważmy, że ograniczenia (1.9) wymagają aby prędkości \dot{q} należały do jądra macierzy $A(q)$. Niech baza jądra $A(q)$ będzie zbiorem wektorów $\{g_1(q), g_2(q), \dots, g_m(q)\}$. Jeśli więc zapiszemy prędkość \dot{q} w następujący sposób

$$\dot{q} = \sum_{k=1}^m g_k(q)\eta_k = \begin{pmatrix} g_1(q), g_2(q), \dots, g_m(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = G(q)\eta \quad (1.12)$$

to będzie ona spełniać ograniczenia (1.9). Wektor η nazywamy wektorem prędkości pomocniczych.

Zauważmy, że

$$A(q)G(q) = 0. \quad (1.13)$$

Biorąc transpozycje (1.13) otrzymamy

$$G^T(q)A^T(q) = 0. \quad (1.14)$$

Aby wyeliminować mnożniki Lagrange'a z (1.11) należy pomnożyć (1.11) lewostronnie przez G^T (dla czytelności pomińmy argumenty) i skorzystać z (1.14). Otrzymamy wtedy

$$G^T Q \ddot{q} + G^T C \dot{q} + G^T D = G^T B u + G^T A^T \lambda = G^T B u. \quad (1.15)$$

Zróżniczkujemy jeszcze (1.12) po czasie

$$\ddot{q} = \dot{G}\eta + G\dot{\eta}. \quad (1.16)$$

Po podstawieniu (1.12) i (1.16) do (1.15), otrzymamy model w prędkościach pomocniczych:

$$G^T Q (\dot{G}\eta + G\dot{\eta}) + G^T C G \eta + G^T D = G^T Q G \dot{\eta} + G^T (Q \dot{G} + C G) \eta + G^T D = G^T B u, \quad (1.17)$$

czyli

$$Q^* \dot{\eta} + C^* \eta + D^* = B^* u, \quad (1.18)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} Q^* &= G^T Q G, \\ C^* &= G^T (Q \dot{G} + C G), \\ D^* &= G^T D, \\ B^* &= G^T B. \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] Mazur A. *New approach to designing input-output decoupling controllers for mobile manipulators*. Buletin of the Polish Academy of Science vol. 53, no. 1 (2005)
- [2] Yamamoto Y, Yun X. *Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator*. IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 39, no. 6 (1994)
- [3] Yamamoto Y, Yun X. *Effect of the dynamic interaction on coordinated control of mobile manipulators*. IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 12, no. 5 (1996)
- [4] Mazur A, Arent K. *Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 335, strony 55-71*. IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 12, no. 5 (2007)
- [5] Tchoń K, Jakubiak J. *Acceleration-driven kinematics of mobile manipulators: an endogenous configuration space approach w: J. Lenarcic, C. Galletti (Eds.) On Advances in Robot Kinematics*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands (2004)
- [6] M. R. Flannery. *The Enigma of Nonholonomic Constraints*. American Association of Physics Teachers, 73(3):265–272, 2005.