

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI

KIERUNEK: Automatyka i Robotyka (AIR)
SPECJALNOŚĆ: Robotyka (ARR)

**PRACA DYPLOMOWA
MAGISTERSKA**

Odsprężanie wejściowo-wyjściowe dla
manipulatora z ruchomą bazą

Input-Output decoupling control for
manipulator with moving base

AUTOR:
inż. Bernard Malec

PROWADZĄCY PRACĘ:
Dr hab. inż. Alicja Mazur

OCENA PRACY:

Spis treści

1	Wstęp	2
1.1	Cel pracy	2
1.2	Zawartość pracy	3
2	Model manipulatora mobilnego	4
2.1	Model we współrzędnych uogólnionych	5
2.1.1	Ograniczenia nieholonomiczne	6
2.2	Model w prędkościach pomocniczych	6
3	Odsprzęganie wejściowo-wyjściowe dla manipulatora mobilnego	8
3.1	Podstawowy algorytm Yamamoto i Yuna	8
3.1.1	Specyfikacja podejścia	8
3.1.2	Wybór konfiguracji manipulatora	8
3.1.3	Funkcje wyjścia	9
3.1.4	Algorytm sterowania	9
3.1.5	Badania symulacyjne	10
3.2	Algorytm z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi	13
3.2.1	Specyfikacja podejścia	13
3.2.2	Funkcje wyjścia	13
3.2.3	Algorytm sterowania	14
3.2.4	Badania symulacyjne	15
4	Model satelity typu free-floating	19
4.1	Model we współrzędnych uogólnionych	19
4.2	Model we współrzędnych barycentrycznych	20
5	Odsprzęganie wejściowo-wyjściowe dla robota free-floating z manipulatorem	21
5.1	Algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego	21
5.2	Badania symulacyjne	23

Rozdział 1

Wstęp

Manipulatory mobilne oraz roboty free-floating z manipulatorami stanowią jedne z najważniejszych klas systemów robotycznych. Łączą one zdolność lokomotoryczną z możliwością manipulacji obiektami, co znacząco poszerza zakres realizowanych zadań w porównaniu ze stacjonarnymi manipulatorami przemysłowymi. Jednocześnie dynamiczne sprzężenie pomiędzy bazą a manipulatorem oraz obecność ograniczeń nieholonomicznych (w przypadku platform kołowych) lub brak napędu bazy (w przypadku robotów kosmicznych) stwarzają istotne wyzwania sterowania.

Jednym ze skutecznych podejść do rozwiązania tych problemów jest odsprężanie wejściowo-wyjściowe oparte na linearyzacji sprzężenia zwrotnego. Metoda ta pozwala na przekształcenie nieliniowej dynamiki systemu do postaci liniowego układu typu „podwójny integrator”, co umożliwia precyzyjne śledzenie zadanej trajektorii efektora końcowego.

1.1 Cel pracy

Celem niniejszej pracy jest implementacja i analiza algorytmów odsprężania wejściowo-wyjściowego dla manipulatorów z ruchomą bazą. W szczególności w pracy zrealizowano następujące zadania:

- wyprowadzenie modelu dynamiki manipulatora mobilnego typu (nh, h) – monocykl z manipulatorem RTR – we współrzędnych uogólnionych i prędkościach pomocniczych,
- wyprowadzenie modelu dynamiki robota free-floating z manipulatorem RR we współrzędnych uogólnionych i barycentrycznych,
- implementację podstawowego algorytmu Yamamoto i Yuna dla manipulatora mobilnego,
- implementację algorytmu z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi (Mazur) dla manipulatora mobilnego,
- implementację algorytmu odsprężania wejściowo-wyjściowego dla robota free-floating z manipulatorem we współrzędnych barycentrycznych,
- przeprowadzenie badań symulacyjnych w środowisku Matlab/Simulink dla każdego z zaimplementowanych algorytmów,
- symboliczne wyprowadzenie macierzy dynamiki (macierzy bezwładności, Coriolisa i sił potencjalnych) z wykorzystaniem środowiska Wolfram Mathematica,
- analizę zbieżności błędów śledzenia trajektorii efektora końcowego oraz wpływu nastaw regulatora PD na jakość sterowania,
- porównanie działania algorytmu podstawowego i rozszerzonego pod kątem koordynacji ruchu platformy i manipulatora.

1.2 Zawartość pracy

Praca składa się z czterech rozdziałów.

W **rozdziale 2** przedstawiono model manipulatora mobilnego typu (nh,h) , składającego się z platformy klasy $(2,0)$ – monocykla – oraz manipulatora RTR. Wyprowadzono równania dynamiki we współrzędnych uogólnionych z wykorzystaniem formalizmu Lagrange’a, opisano ograniczenia nieholonomiczne w postaci Pfaffa, a następnie przekształcono model do postaci wyrażonej w prędkościach pomocniczych.

W **rozdziale 3** opisano dwa algorytmy odsprzęgania wejściowo-wyjściowego dla manipulatora mobilnego: podstawowy algorytm Yamamoto i Yuna, w którym manipulator utrzymuje stałą konfigurację o maksymalnej manipulowalności, oraz algorytm z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi (Mazur), w którym platforma i manipulator działają w sposób skoordynowany. Dla obu algorytmów przeprowadzono badania symulacyjne.

W **rozdziale 4** przedstawiono model robota free-floating z manipulatorem RR – nienapędzanej platformy kosmicznej z dwuczłonowym manipulatorem. Wyprowadzono model we współrzędnych uogólnionych oraz we współrzędnych barycentrycznych.

W **rozdziale 5** opisano algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego dla robota free-floating z manipulatorem oraz przeprowadzono badania symulacyjne z wykorzystaniem modelu we współrzędnych barycentrycznych.

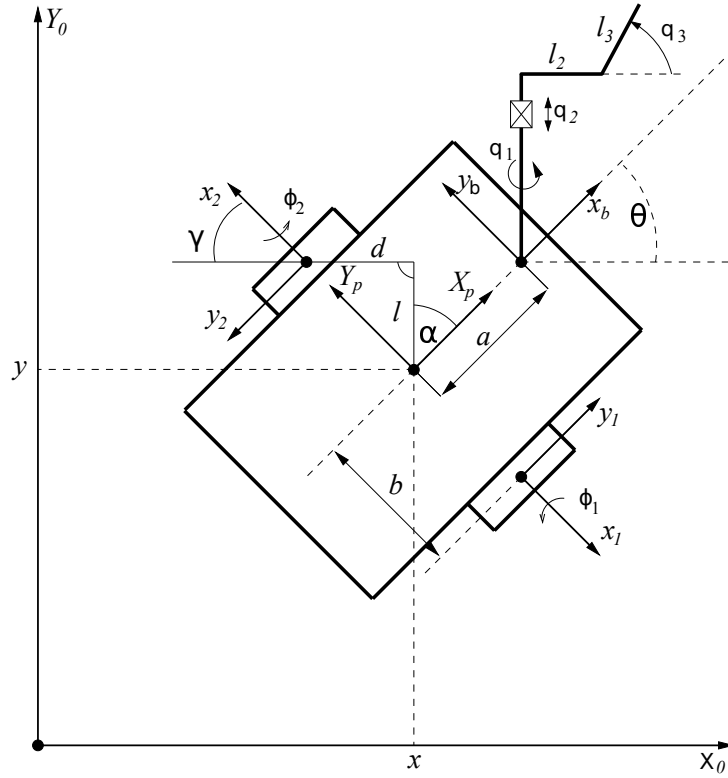
Rozdział 2

Model manipulatora mobilnego

Manipulator mobilny to platforma mobilna z zamontowanym na niej manipulatorem. Biorąc pod uwagę typ ograniczeń nałożonych kolejno na platformę i manipulator można wydzielić 4 typy manipulatorów mobilnych:

1. typ (h,h) – platforma i manipulator związane są ograniczeniami holonomicznymi,
2. typ (nh,h) – na platformę nałożone są ograniczenia nieholonomiczne, natomiast na manipulator ograniczenia holonomiczne,
3. typ (nh,nh) – ograniczenia nałożone na platformę i manipulator są nieholonomiczne. Taki rodzaj manipulatora mobilnego został przedstawiony w [5],
4. typ (h,nh) – na manipulator nałożone są ograniczenia nieholonomiczne, natomiast na platformę holonomiczne.

W tym rozdziale zostanie przedstawiony model manipulatora mobilnego typu (nh,h) . W szczególności w rozważanym manipulatorze platformą będzie monocykl, czyli robot mobilny klasy $(2,0)$. Za manipulator natomiast posłuży manipulator RTR. Rozważany manipulator mobilny przedstawiono na rys 2.1.



Rysunek 2.1 Manipulator mobilny z platformą klasy (2,0) i manipulatorem RTR

Przyjmijmy następujący wektor współrzędnych uogólnionych manipulatora mobilnego:

$$q = \begin{pmatrix} q_m \\ q_r \end{pmatrix} \in R^{n+p}, \quad (2.1)$$

gdzie $q_m = (x, y, \theta, \phi_1, \phi_2)^T \in R^n$ – wektor współrzędnych uogólnionych platformy mobilnej, $q_r = (q_1, q_2, q_3)^T \in R^p$ – wektor współrzędnych przegubowych manipulatora. Rozmiary przestrzeni wyniosą więc $n = 5$, $p = 3$.

2.1 Model we współrzędnych uogólnionych

Do wyprowadzenia równań manipulatora mobilnego wykorzystamy formalizm Lagrange’a. Lagranżjan L jest zdefiniowany jako różnica pomiędzy energią kinetyczną, a potencjalną układu

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q). \quad (2.2)$$

Równania ruchu przy braku sił działających na system są następujące

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (2.3)$$

Lewą stronę równania (2.3) można przedstawić jako

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + D(q). \quad (2.4)$$

Przy obecności sił zewnętrznych równanie (2.3) wygląda następująco

$$Q(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + D(q) = F_e. \quad (2.5)$$

W naszym przypadku siły zewnętrzne F_e są sumą 2 składowych: $F_e = B(q)u + F_{nh}$, gdzie $B(q)u$ to uogólnione siły wejściowe (tj. wywierane na system przez elementy wykonawcze), a F_{nh} to siły więzów nieholonomicznych (tj. siły zapewniające spełnienie ograniczeń nieholonomicznych). Wektor $u = \begin{pmatrix} u_m \\ u_r \end{pmatrix} \in R^{(n+p-l)}$ jest wektorem sterowań.

Macierz $B(q) = \begin{bmatrix} B(q_m) & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \in R^{(n+p) \times (n+p-l)}$ nazywana jest macierzą wejściową.

Symbol l oznacza liczbę ograniczeń nieholonomicznych.

Łatwo zauważyć, że jeśli obecne jest chociaż jedno ograniczenie nieholonomiczne, to macierz $B(q)$ nie jest macierzą kwadratową, przez co nie można jej odwrócić.

2.1.1 Ograniczenia nieholonomiczne

W niniejszej pracy platformą manipulatora mobilnego jest monocykl. W założeniu ma poruszać się on bez poślizgu wzdłużnego i poprzecznego kół. Aby zapewnić spełnienie tych założeń, należy nałożyć trzy ograniczenia. Można pokazać, że jedynie dwa z nich to ograniczenia nieholonomiczne, a ostatnie można scałkować do ograniczenia holonomicznego i w rezultacie wyeliminować jedną współrzędną z q_m [7]. Aby jednak pokazać możliwość algorytmu w działaniu przy obecności ograniczeń holonomicznych i nieholonomicznych potraktujmy wszystkie trzy jednakowo i nie całkujmy żadnego z nich.

Przedstawmy ograniczenia w postaci Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (2.6)$$

Ponieważ ograniczenia te dotyczą tylko platformy, zapiszmy $A(q)$ następująco

$$A(q) = \begin{bmatrix} A(q_m) & 0 \end{bmatrix} \in R^{l \times (n+p)}. \quad (2.7)$$

Z [6] wiemy, że siła więzów nieholonomicznych równa jest $F_{nh} = A(q)^T \lambda$, gdzie λ to wektor mnożników Lagrange'a. Równanie dynamiki wyrażone we współrzędnych uogólnionych (2.5) można więc teraz zapisać jako

$$Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = B(q)u + A(q)^T \lambda. \quad (2.8)$$

2.2 Model w prędkościach pomocniczych

Model postaci (2.8) posiada pewne wady: jak wspomniano, pojawiająca się w (2.1) macierz $B(q)$ nie daje się odwrócić z powodu obecności ograniczeń nieholonomicznych. W jawnej postaci występują również mnożniki Lagrange'a odpowiadające siłom tarcia statycznego zależnego od u , q , \dot{q} , t . Aby pozbyć się tych wad można przekształcić (2.8) do modelu wyrażonego w prędkościach pomocniczych.

Zauważmy najpierw, że ograniczenia (2.6) wymagają, aby prędkość \dot{q} należała do jądra macierzy $A(q)$.

Niech baza jądra $A(q_m)$ będzie zbiorem wektorów $\{g_1(q_m), g_2(q_m), \dots, g_{n-l}(q_m)\}$. Zapiszmy prędkość platformy \dot{q}_m w następujący sposób

$$\dot{q}_m = \sum_{k=1}^{n-l} g_k(q_m) \eta_k = \begin{bmatrix} g_1(q_m) & g_2(q_m) & \dots & g_{n-l}(q_m) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-l} \end{pmatrix} = G_m(q_m) \eta. \quad (2.9)$$

Wektor η nazywamy wektorem prędkości pomocniczych.

Zauważmy, że wektor prędkość całego manipulatora mobilnego można przedstawić jako

$$\dot{q} = G(q)z, \quad (2.10)$$

gdzie $G(q) = \begin{bmatrix} G_m(q_m) & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \in R^{(n+p) \times (n+p-l)}$ i $z = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} \in R^{(n+p-l)}$ należy do jądra macierzy $A(q)$ i tym samym spełnia ograniczenia (2.6).

Możemy więc zapisać, że

$$A(q)G(q) = 0. \quad (2.11)$$

Biorąc transpozycje (2.11) otrzymamy

$$G^T(q)A^T(q) = 0^T. \quad (2.12)$$

Aby wyeliminować mnożniki Lagrange'a z (2.8), należy pomnożyć (2.8) lewostronnie przez G^T (dla czytelności pominijmy argumenty) i skorzystać z (2.12). Otrzymamy wtedy

$$G^T Q \ddot{q} + G^T C \dot{q} + G^T D = G^T B u + G^T A^T \lambda = G^T B u. \quad (2.13)$$

Zrózniczkujemy jeszcze (2.10) po czasie

$$\ddot{q} = \dot{G}z + G\dot{z}. \quad (2.14)$$

Po podstawieniu (2.10) i (2.14) do (2.13), otrzymamy model w prędkościach pomocniczych:

$$G^T Q (\dot{G}z + G\dot{z}) + G^T C G z + G^T D = G^T Q G \dot{z} + G^T (Q \dot{G} + C G) z + G^T D = G^T B u, \quad (2.15)$$

czyli

$$Q^* \dot{z} + C^* z + D^* = B^* u, \quad (2.16)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} Q^* &= G^T Q G, \\ C^* &= G^T (Q \dot{G} + C G), \\ D^* &= G^T D, \\ B^* &= G^T B. \end{aligned}$$

Równanie (2.16) opisuje dynamikę manipulatora mobilnego wyrażoną w prędkościach pomocniczych.

Rozdział 3

Odsprzęganie wejściowo-wyjściowe dla manipulatora mobilnego

Algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego jest wykorzystywany do sterowania manipulatorów mobilnych. Rozwiązuje on zadanie śledzenia zadanej trajektorii efektora $y_d(t)$ w przestrzeni zewnętrznej. Algorytm odsprzęgania wejściowo-wyjściowego wymaga pełnej znajomości modelu manipulatora mobilnego.

Istnieją dwie wersje tego algorytmu:

- podstawowy algorytm Yamamoto i Yuna [2],[3]
- algorytm z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi[1].

Różnią się one wyborem funkcji wyjściowych $y(\cdot)$. Yamamoto i Yun założyli, że funkcje te będą zależne tylko od konfiguracji platformy q_m , natomiast Mazur pozwala, aby funkcje wyjścia były zależne zarówno od konfiguracji platformy q_m , jak i od konfiguracji manipulatora q_r . Rozdział ten poświęcony jest opisowi obu podejść.

3.1 Podstawowy algorytm Yamamoto i Yuna

3.1.1 Specyfikacja podejścia

Yamamoto i Yun założyli, że manipulator ma ustawić się w stałej konfiguracji o maksymalnej manipulowalności, a zadanie śledzenia zadanej trajektorii ma być realizowane jedynie poprzez ruch platformy. Podejście takie traktuje cały manipulator mobilny bardziej jako samą platformę do której przymocowany jest unieruchomiony manipulator, niż pełen system, gdzie platforma i manipulator działają równocześnie.

Podstawowy algorytm Yamamoto i Yuna można stosować, np. gdy manipulator ma pozostać nieruchomy.

3.1.2 Wybór konfiguracji manipulatora

Ponieważ manipulator nie uczestniczy czynnie w realizacji zadania należy ustawić go w takiej konfiguracji, aby ułatwić platformie realizację zadania. Za przykładem Yamamoto i Yuna wybierzmy konfigurację maksymalizującą manipulowalność. Manipulowalność manipulatora zdefiniowana jest jako [7]

$$w = \sqrt{\det(J(q_r)J^T(q_r))}, \quad (3.1)$$

gdzie $J(q_r)$ to jacobian manipulatora. Jeśli manipulator jest nieredundantny, to manipulowalność (3.1) można zredukować do

$$w = |\det(J(q_r))|. \quad (3.2)$$

Pożądaną konfigurację maksymalizującą manipulowalność można osiągnąć w trakcie działania algorytmu, ale mając na względzie przedstawienie algorytmu w prosty sposób założymy, że ustawił się on w tej konfiguracji wcześniej.

3.1.3 Funkcje wyjścia

Algorytm Yamamoto i Yuna wymaga, aby funkcje wyjścia były zależne jedynie od konfiguracji platformy tj. $y(q_m, \bar{q}_r) = y(q_m)$. Symbol \bar{q}_r oznacza stałą konfigurację manipulatora. Wybór funkcji wyjścia należy podporządkować rodzajowi zadania, jakie należy zrealizować.

3.1.4 Algorytm sterowania

Przed wyprowadzeniem algorytmu Yamamoto i Yuna zlinearyzujemy dynamikę manipulatora mobilnego (2.16). Nie jest to krok konieczny, ale ułatwia on późniejsze obliczenia. Do linearyzacji dynamiki wykorzystamy prawo sterowania z grupy 'obliczanego momentu'

$$u = B^{*(-1)}[C^*z + D^* + Q^*v]. \quad (3.3)$$

Po użyciu sterowania (3.3) do modelu (2.16) uzyskamy system z nowym wejściem v

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix} = v. \quad (3.4)$$

Mając liniowy model (3.4) wyprowadźmy algorytm Yamamoto i Yuna.

Algorytm Yamamoto i Yuna realizowany jest dzięki zastosowaniu do modelu (3.4) dwóch pętli sprzężenia zwrotnego.

Pierwsza pętla - pętla wewnętrzna - przekształca układ do postaci liniowej typu "podwójny integrator". Druga pętla - zewnętrzna - zapewnia realizację zadania tj. śledzenia trajektorii w uzyskanym układzie liniowym.

Prawo sterowania pierwszej pętli wyprowadza się w następujący sposób: najpierw zróżniczkujemy $y(q_m)$ dwukrotnie po czasie

$$\dot{y}(q_m) = \frac{\partial y(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_m = \frac{\partial y(q_m)}{\partial q_m} G_m(q_m) \eta = \Phi_m(q_m) \eta, \quad (3.5)$$

$$\ddot{y}(q_m, \dot{q}_m) = \dot{\Phi}_m(q_m, \dot{q}_m) \eta + \Phi_m(q_m) \dot{\eta} = \dot{\Phi}_m(q_m, \dot{q}_m) \eta + \Phi_m(q_m) v_m. \quad (3.6)$$

Macierz $\Phi_m(q_m)$ jest równa

$$\Phi_m(q_m) = \frac{\partial y(q_m)}{\partial q_m} G_m(q_m).$$

Łatwo sprawdzić, że przy użyciu następującego prawa sterowania

$$v = \begin{pmatrix} v_m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$v_m = \Phi_m^{-1}(q_m)[- \dot{\Phi}_m(q_m)\eta + \zeta]. \quad (3.8)$$

do równania (3.6) otrzymamy

$$\ddot{y} = \zeta. \quad (3.9)$$

Wynikowy układ liniowy (3.9) steruje się przy użyciu drugiej pętli. Można ją zrealizować, na przykład, jako regulator PD z korekcją:

$$\zeta = \ddot{y}_d(t) - K_d \dot{e}(t) - K_p e(t), \quad (3.10)$$

gdzie $\ddot{y}_d(t)$ - druga pochodna zadanej funkcji wejściowej,
 $e(t) = y_d(t) - y(t)$, $\dot{e}(t) = \dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)$ błąd położenia i jego pochodna,
 $K_d > 0$, $K_p > 0$ - nastawy regulacji.

Warunki działania algorytmu Ponieważ algorytm wykorzystuje odwrotność macierzy Φ_m należy zapewnić, aby

$$\det(\Phi_m(q_m)) \neq 0 \quad (3.11)$$

3.1.5 Badania symulacyjne

Rozważany monocykl posiada dwa wejścia (sterowania obu kół), można więc odsprząć dwie współrzędne efektora. Odsprężnijmy współrzędne x i y efektora w podstawowym układzie odniesienia (X_0, Y_0) . Funkcja wyjściowa $y(q_m, \bar{q}_r) = y(q_m)$ dla nieruchomego chwytaka, a więc ustalonych q_1, q_2, q_3 przyjmie wtedy postać

$$y(q_m) = \begin{pmatrix} y_1(q_m) \\ y_2(q_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ac_0 + l_2c_{01} + l_3c_{01}c_3 \\ y + as_0 + l_2s_{01} + l_3s_{01}c_3 \end{pmatrix}.$$

Jakobian manipulatora będzie wtedy równy

$$J(\bar{q}_r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1(q_m, \bar{q}_r)}{\partial \bar{q}_r} \\ \frac{\partial y_2(q_m, \bar{q}_r)}{\partial \bar{q}_r} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1(l_2 + l_3c_3) & 0 & -c_1s_3l_3 \\ c_1(l_2 + l_3c_3) & 0 & -s_1s_3l_3 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

w związku z czym manipulowalność (3.1) dana będzie wzorem

$$w = |s_3|(l_2 + c_3l_3)|l_3|. \quad (3.13)$$

Pojawiające się symbole oznaczają: $c_0 = \cos(\theta)$, $c_1 = \cos(q_1)$, $c_3 = \cos(q_3)$, $s_0 = \sin(\theta)$, $s_1 = \sin(q_1)$, $s_3 = \sin(q_3)$, $c_{01} = \cos(\theta + q_1)$, $s_{01} = \sin(\theta + q_1)$.

Parametry geometryczne ustalono jako $l_2 = 0.3\text{m}$, $l_3 = 0.2\text{m}$, $a = 0.2\text{m}$. Maksymalną manipulowalność osiągniemy dla $q_3 = 1.1314$ i dowolnych q_1 i q_2 .

Do symulacji wybrano więc następujące konfiguracje początkowe platformy i manipulatora

$$q(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \\ \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ q_1(0) \\ q_2(0) \\ q_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1.1314 \end{pmatrix}$$

Przyjęto zerowe prędkości początkowe $\dot{q}(0)$.

Funkcje wyjściowe w chwili 0 były następujące

$$y(q_m(0)) = \begin{pmatrix} 0.5851 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wektor pochodnych \dot{y} w chwili 0 równy był zeru.

Wybrano następujące trajektorie zadane $y_d(t)$

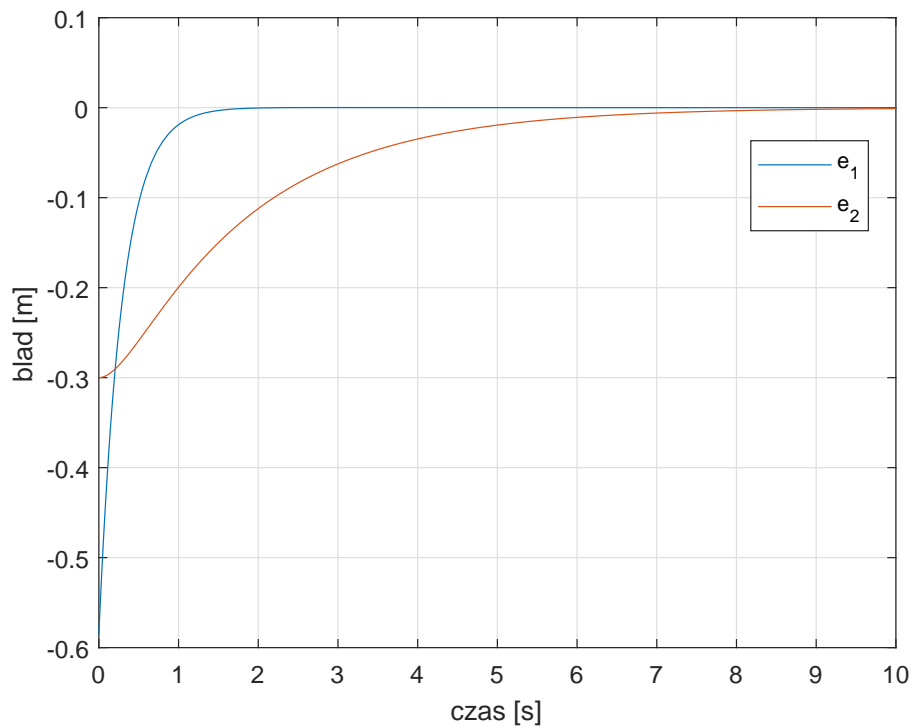
$$y_d(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -0.3 \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Błąd początkowy $e(t) = y_d(t) - y(t)$ i jego pochodna były równe

$$e(0) = \begin{pmatrix} -0.5851 \\ -0.3 \end{pmatrix}, \quad \dot{e}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

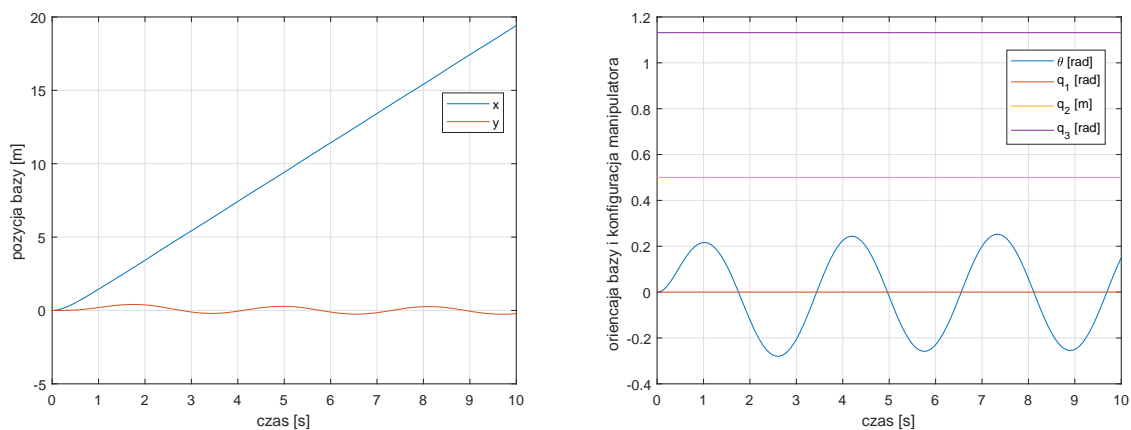
Do sterowania układem liniowym użyto regulatora PD z korekcją (3.10) z nastawami $K_d = 4$, $K_p = 2$. W badaniach wykorzystano środowisko Matlab/Simulink.

Przebiegi błędów śledzenia trajektorii chwytaka pokazano na rys. 3.1

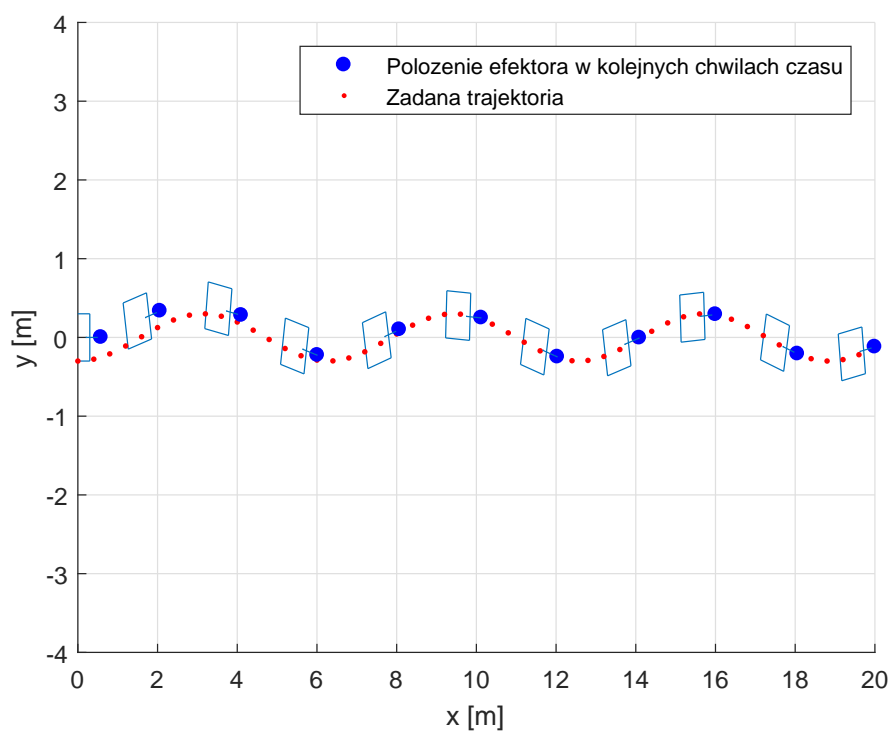


Rysunek 3.1 Przebiegi błędów śledzenia trajektorii chwytaka

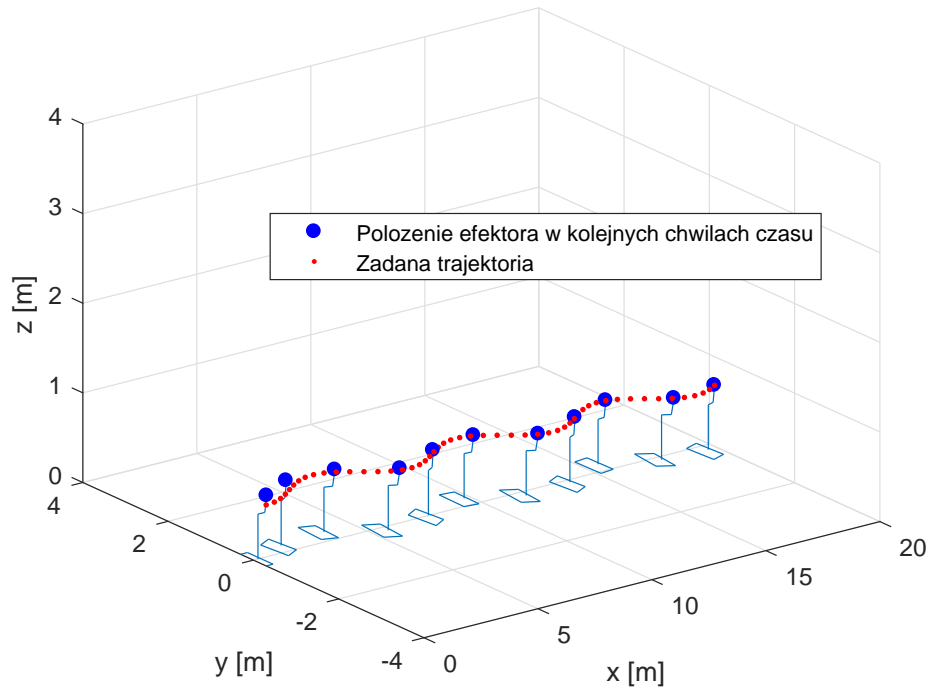
Przebiegi konfiguracji bazy i manipulatora pokazano na rys. 3.2



Rysunek 3.2 Przebiegi konfiguracji bazy i manipulatora



Rysunek 3.3 Pozycja robota w kolejnych chwilach czasu – widok na płaszczyznę XY



Rysunek 3.4 Pozycja robota w kolejnych chwilach czasu – widok 3D

3.2 Algorytm z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi

3.2.1 Specyfikacja podejścia

Odmienne od założeń Yamamoto i Yuna rozszerzony algorytm nie wymaga bezruchu manipulatora. Dzięki temu platforma i manipulator mogą działać równolegle w sposób skoordynowany. Sterowanie platformy nie odbywa się w sposób bezpośredni.

Algorytm ten stosować można nawet wówczas, gdy np. sterowanie bazą jest niemożliwe (np. w przypadku robota free-floating).

3.2.2 Funkcje wyjścia

Funkcja wyjściowa zależy teraz od konfiguracji całego robota tj. zarówno od platformy, jak i manipulatora. Przyjmuje ona postać[1]:

$$y(q) = \begin{pmatrix} y_1(q_m, q_r) \\ y_2(q_r) \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

gdzie $y_1(q_m, q_r)$ jest wektorem wybranych współrzędnych efektora w podstawowym układzie odniesienia (X_0, Y_0) , a $y_2(q_r)$ to wektor wybranych współrzędnych efektora w lokalnym układzie odniesienia (X_P, Y_P) związanym ze środkiem masy platformy.

Liczba współrzędnych efektora w układzie (X_0, Y_0) , które można odsprząć zależy od liczby sterowań platformą. W przypadku platformy klasy $(2, 0)$ możemy śledzić dwie współrzędne.

3.2.3 Algorytm sterowania

Przed wyprowadzeniem algorytmu odsprężania wejściowo-wyjściowego dla manipulatora mobilnego, zlinearyzujemy jego dynamikę (2.16) przy użyciu prawa sterowania z grupy 'obliczanego momentu'. Tak jak wspomniano poprzednio nie jest to krok konieczny, ale zastosujemy go w celu ułatwienia późniejszych obliczeń. Prawo sterowania linearyzujące dynamikę ma następującą postać

$$u = B^{*-1}[C^*z + D^* + Q^*v]. \quad (3.15)$$

Po użyciu sterowania (3.15) do modelu dynamiki (2.16) uzyskamy system z nowym wejściem v

$$\dot{z} = v. \quad (3.16)$$

Identycznie jak w przypadku algorytmu podstawowego, algorytm z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi złożony jest z dwóch pętli sprzężenia zwrotnego[1]

- wewnętrznej pętli linearyzującej transformację wejście-wyjście
- zewnętrznej pętli sterującej zlinearyzowanym układem

Prawo pętli wewnętrznej wyprowadzimy analogicznie jak w 3.1.4

Obliczmy pochodną funkcji wyjściowej $y(q)$ po czasie

$$\dot{y}(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \dot{q}_r \\ \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \dot{q}_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} G_m(q_m) & \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \Phi(q)z, \quad (3.17)$$

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} G_m(q_m) & \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_m & \Phi_{mr} \\ 0 & \Phi_r \end{bmatrix}.$$

Ponownie zróżniczkujemy $\dot{y}(q)$ po czasie

$$\ddot{y}(q, \dot{q}) = \dot{\Phi}(q, \dot{q})z + \Phi(q)\dot{z} = \dot{\Phi}(q, \dot{q})z + \Phi(q)v. \quad (3.18)$$

Aby zapewnić linearyzację wejściowo-wyjściową układu (3.18) należy więc użyć następującej pętli wewnętrznej

$$v = \Phi^{-1}(q)[- \dot{\Phi}(q, \dot{q})z + \zeta]. \quad (3.19)$$

Po zastosowaniu pierwszej pętli otrzymamy funkcję wyjściową o liniowej postaci

$$\ddot{y}(q, \dot{q}) = \zeta. \quad (3.20)$$

Otrzymaliśmy system identyczny jak ten po zastosowaniu algorytmu Yamamoto i Yuna tj. układ liniowy typu "podwójny integrator". Jego sterowaniem zajmuje się pętla zewnętrzna, którą również można zrealizować jako regulator PD z korekcją(3.10).

Warunki działania algorytmu Tak jak w przypadku podstawowego algorytmu Yamamoto i Yuna należy zapewnić odwracalność macierzy Φ . Warunek taki trzeba spełnić aby algorytm funkcjonował. Ma on następującą postać

$$\det(\Phi) = \det(\Phi_m)\det(\Phi_r) \neq 0 \quad (3.21)$$

3.2.4 Badania symulacyjne

Rozważany monocykl posiada dwa wejścia (sterowania obu kół), można więc odsprężać dwie współrzędne efektora.

Podczas badań odsprężnięto współrzędne x i y efektora w podstawowym układzie odniesienia (X_0, Y_0) . Funkcja wyjścia $y_1(q_m, q_r)$ ma postać

$$y_1(q_m, q_r) = \begin{pmatrix} x + ac_0 + l_2c_{01} + l_3c_{01}c_3 \\ y + as_0 + l_2s_{01} + l_3s_{01}c_3 \end{pmatrix}.$$

Funkcja $y_2(q_r)$ to wektor współrzędnych x , y i z efektora w układzie środka masy platformy (X_P, Y_P)

$$y_2(q_r) = \begin{pmatrix} a + l_2c_1 + l_3c_1c_3 \\ l_2s_1 + l_3s_1c_3 \\ s_3l_3 + q_2 \end{pmatrix}.$$

Ponownie, symbole oznaczają: $c_0 = \cos(\theta)$, $c_1 = \cos(q_1)$, $c_3 = \cos(q_3)$, $s_0 = \sin(\theta)$, $s_1 = \sin(q_1)$, $s_3 = \sin(q_3)$, $c_{01} = \cos(\theta + q_1)$, $s_{01} = \sin(\theta + q_1)$.

Parametry geometryczne ustalono jako: $l_2 = 0.3\text{m}$, $l_3 = 0.2\text{m}$, $a = 0.2\text{m}$.

Początkowe położenie platformy było równe $q_m(0) = (x(0), y(0), \theta(0), \phi_1(0), \phi_2(0)) = (0, 0, 0, 0, 0)$, a początkowa konfiguracja manipulatora była równa $q_r(0) = (q_1(0), q_2(0), q_3(0)) = (\frac{\pi}{2}, 0.2, -\frac{\pi}{2})$.

Prędkości początkowe $\dot{q}(0)$ były równe zeru.

Funkcje wyjściowe miały następujące wartości początkowe

$$y(q_m(0), q_r(0)) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wektor pochodnych \dot{y} był zerowy.

Wybrano następujące trajektorie zadane $y_d(t)$

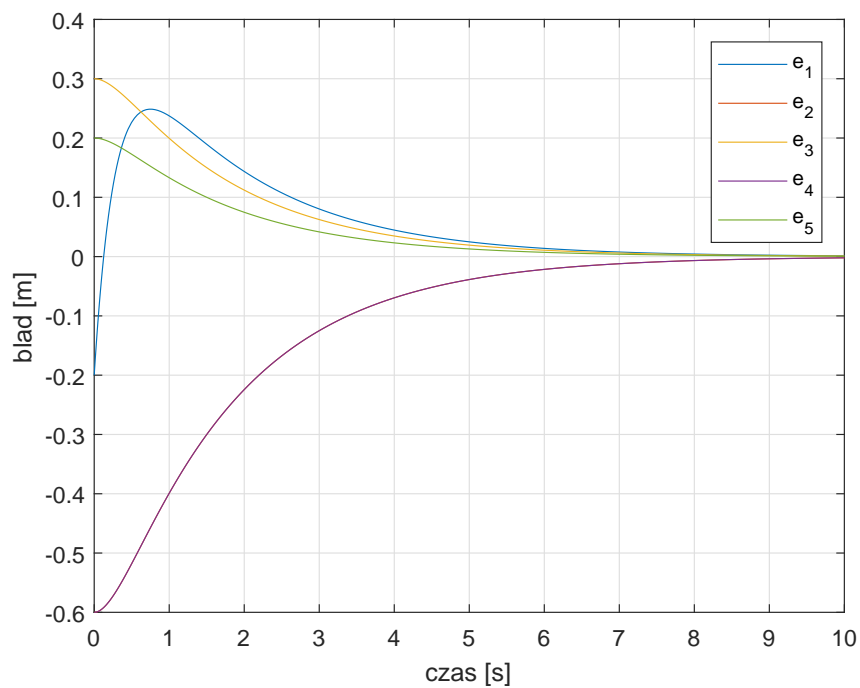
$$y_d(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -0.3 \cos(2t) \\ 0.5 \\ -0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Błąd początkowy $e(t) = y_d(t) - y(t)$ i jego pochodna były równe

$$e(0) = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.6 \\ 0.3 \\ -0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad \dot{e}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

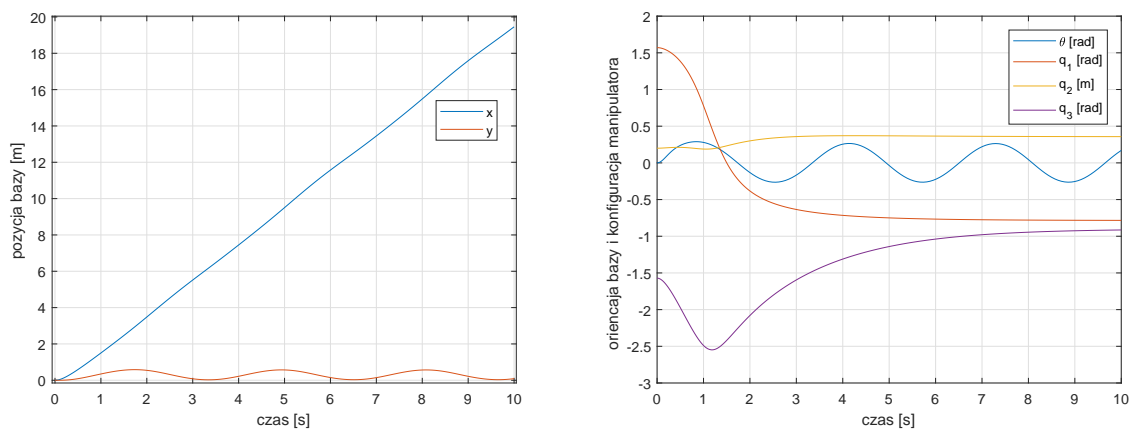
Do sterowania układem liniowym użyto regulator PD z korektą (3.10) z nastawami $K_d = 4$, $K_p = 2$. W badaniach wykorzystano środowisko Matlab/Simulink.

Przebiegi błędów śledzenia trajektorii chwytaka pokazano na rys. 3.5

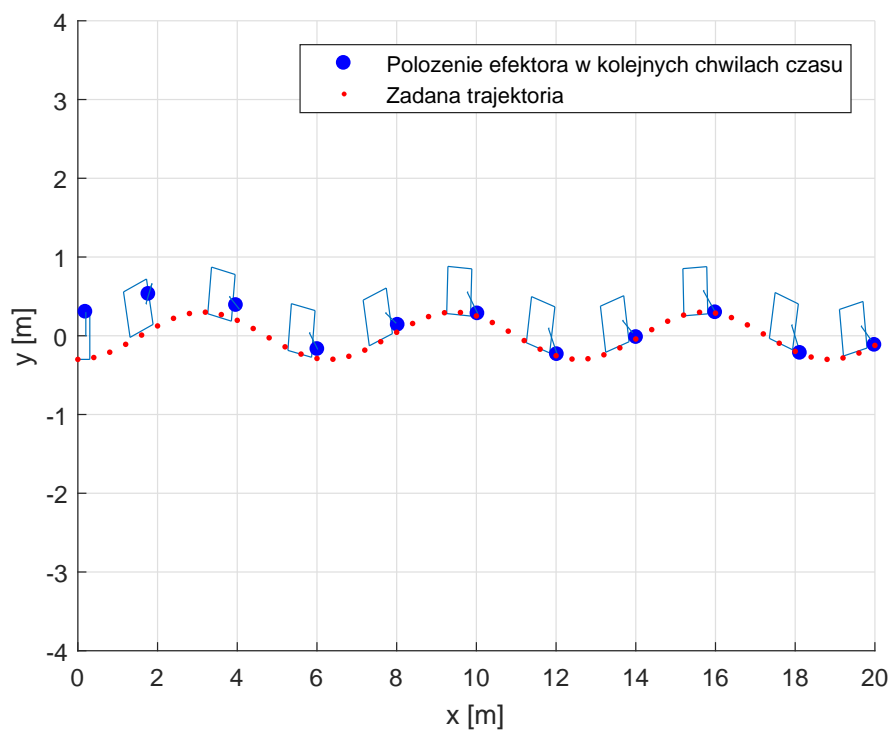


Rysunek 3.5 Przebieg błędów śledzenia trajektorii chwytaka

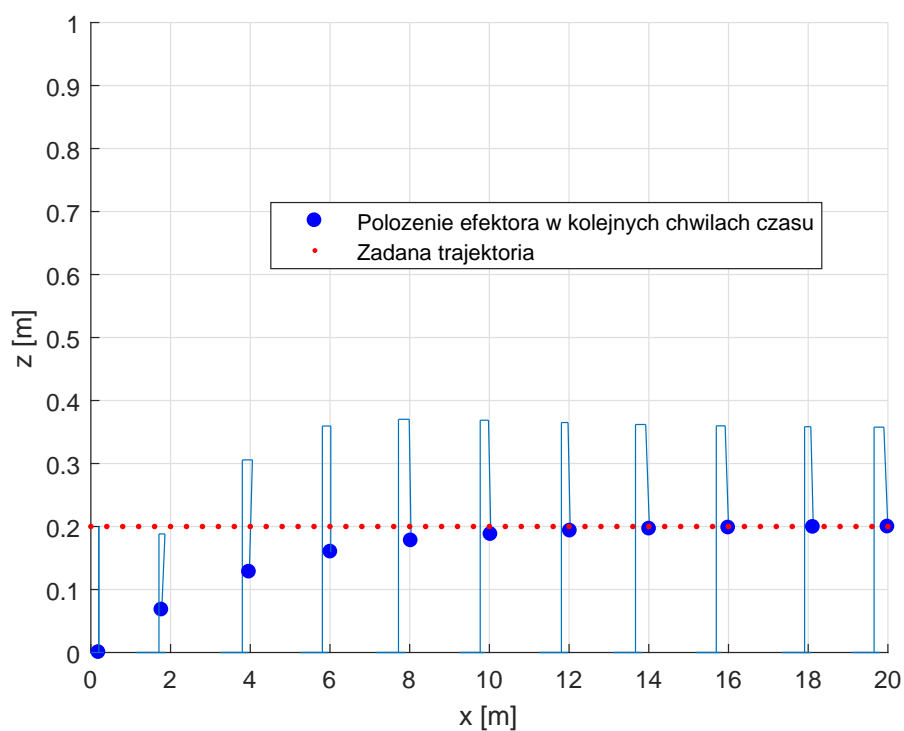
Przebiegi konfiguracji bazy i manipulatora pokazano na rys. 3.6



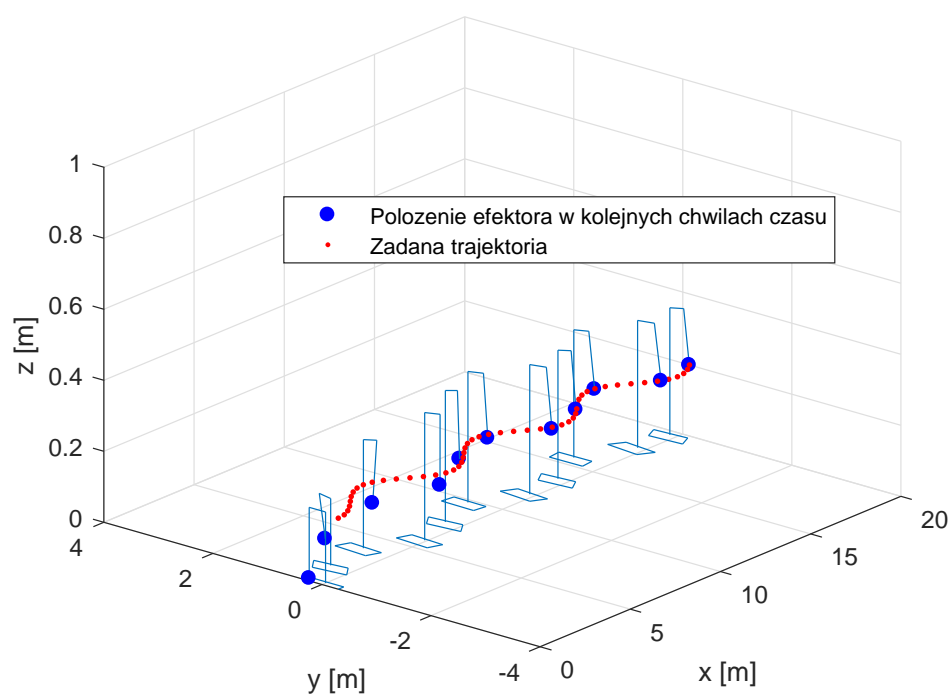
Rysunek 3.6 Przebieg konfiguracji bazy i manipulatora



Rysunek 3.7 Pozycja robota w kolejnych chwilach czasu – widok na płaszczyznę XY



Rysunek 3.8 Pozycja robota w kolejnych chwilach czasu – widok na płaszczyznę XZ



Rysunek 3.9 Pozycja robota w kolejnych chwilach czasu – widok 3D

Rozdział 4

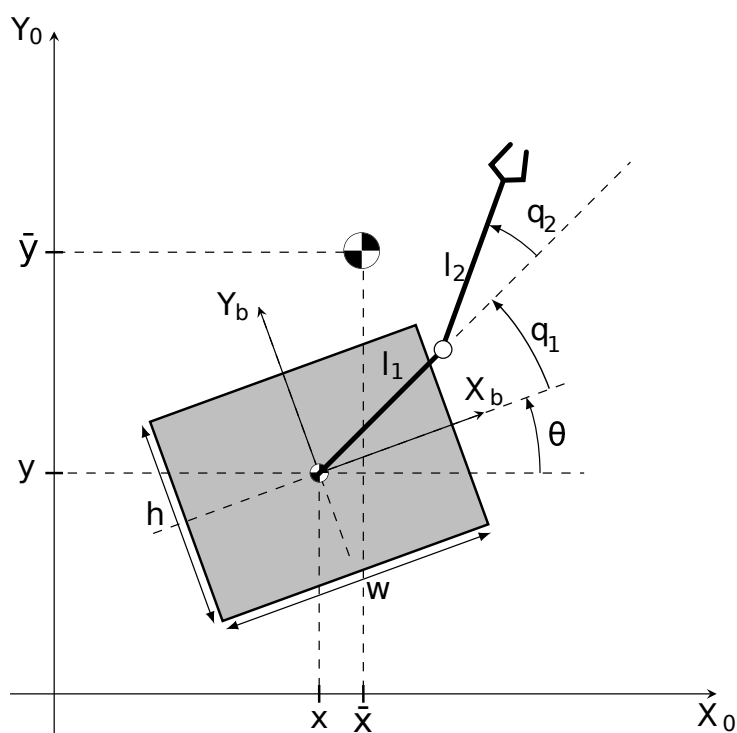
Model satelity typu free-floating

4.1 Model we współrzędnych uogólnionych

Robot free-floating z manipulatorem to nienapędzana platforma (baza) z zamontowanym na niej napędzanym manipulatorem. Robot taki znajduje się w przestrzeni kosmicznej w stanie mikrogravitacji (nieważkości).

W rozważanym robocie platformą będzie jednolita prostokątna płyta, a za manipulator posłuży manipulator RR. Rozważanego robota free-floating z manipulatorem przedstawiono na rys 4.1.

Robot taki jest użyteczny ze względów praktycznych. Do badań eksperymentalnych bowiem, można wykorzystać płaską granitową płytę, po której baza może ślizgać się bez tarcia. Dzięki temu testy można przeprowadzać na Ziemi, a nie w warunkach mikrogravitacji.



Rysunek 4.1 Robot free-floating z manipulatorem

Do wyprowadzenia modelu we współrzędnych uogólnionych weźmy następujące współ-

rzędne

$$q = \begin{pmatrix} q_b \\ q_r \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

gdzie $q_b = (x, y, \theta)^T$ – wektor współrzędnych uogólnionych bazy, $q_r = (q_1, q_2)^T$ – wektor współrzędnych przegubowych manipulatora.

Równania dynamiki we współrzędnych uogólnionych takiego robota można, ponownie korzystając z formalizmu Lagrange’a, zapisać jako

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Brak wektora sił potencjalnych $D(q)$ wynika z braku grawitacji.

Sterowanie u pojawia się tylko w dolnej części równania dynamiki (4.2), ponieważ dotyczy jedynie manipulatora, jako że baza jest nienapędzana (free-floating).

4.2 Model we współrzędnych barycentrycznych

Jeśli środek masy robota free-floating z manipulatorem ma pozostać nieruchomy (lub poruszać się ze stałą prędkością), konieczne jest zamodelowanie dynamiki we współrzędnych barycentrycznych.

Położenie środka masy robota free-floating z manipulatorem można wyliczyć z definicji jako

$$\left(\sum_{i=1}^w m_i \right) \phi_b = \sum_{i=1}^w m_i r_i, \quad (4.3)$$

gdzie r_i to środek masy i -tego członu robota w podstawowym układzie współrzędnych, a m_i to masa i -tego członu. Z kolei w to liczba członów robota. W naszym przypadku w wynosi trzy, robot posiada bowiem jedną bazę i dwa ramiona.

ϕ_b to współrzędne barycentryczne układu, czyli

$$\phi_b = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \theta \end{pmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^w m_i r_i}{\sum_{i=1}^w m_i}. \quad (4.4)$$

Kompletne współrzędne barycentryczne satelity wraz z manipulatorem ϕ mają postać

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_b \\ q_r \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Model we współrzędnych barycentrycznych można więc wyrazić jako

$$\bar{H}\ddot{\phi} + \bar{C}\dot{\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

Macierze \bar{H} i \bar{C} uzyskuje się przez przeliczenie energii kinetycznej do układu współrzędnych barycentrycznych i wykorzystanie formalizmu Lagrange’a dla nowej energii kinetycznej.

Rozdział 5

Odsprężanie wejściowo-wyjściowe dla robota free-floating z manipulatorem

Ponieważ baza robota free-floating z manipulatorem nie jest napędzana, do odsprężania wejściowo-wyjściowego nie można zastosować podstawowego algorytmu Yamamoto i Yuna. Do realizacji zadania śledzenia trajektorii w przestrzeni zadaniowej wykorzystamy więc algorytm z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi.

Algorytm ten można stosować zarówno dla modelu robota free-floating z manipulatorem we współrzędnych uogólnionych, jak i we współrzędnych barycentrycznych. Wybór modelu należy podporządkować rodzajowi zadania, jakie ma zostać wykonane. Jeśli środek masy ma pozostać nieruchomy wykorzystać należy model we współrzędnych barycentrycznych, natomiast gdy środek masy ma się przemieszczać, to można użyć modelu we współrzędnych uogólnionych.

Przy wyprowadzaniu algorytmu wykorzystamy model dynamiki we współrzędnych uogólnionych. Algorytm dla modelu we współrzędnych barycentrycznych wyprowadza się analogicznie, podstawiając jedynie za współrzędne uogólnione q i macierze H i C oraz ich odpowiedniki w modelu we współrzędnych barycentrycznych, tj. współrzędne barycentryczne ϕ i macierze \bar{H} i \bar{C} .

Korzystamy z algorytmu z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi, więc postać funkcji wyjściowej będzie zależeć od całej konfiguracji q :

$$y = k(q). \quad (5.1)$$

5.1 Algorytm odsprężania wejściowo-wyjściowego

Przy wyprowadzaniu algorytmów odsprężania wejściowo-wyjściowego dla manipulatora mobilnego linearyzowaliśmy jego dynamikę w celu ułatwienia obliczeń. W przypadku robota free-floating z manipulatorem linearyzacja taka jest kłopotliwa, ponieważ tylko manipulator jest napędzany. Aby nie utrudniać sobie zadania i pokazać, że linearyzacja dynamiki nie jest konieczna, nie zastosujemy jej przy wyprowadzaniu algorytmu odsprężania wejściowo-wyjściowego dla robota free-floating z manipulatorem.

Struktura algorytmu nie zmienia się i nadal składa się z dwóch pętli sprzężenia zwrotnego: pierwsza przekształca układ do postaci liniowej typu "podwójny integrator", druga steruje uzyskanym układem liniowym.

Prawo sterowania pierwszej pętli wyprowadza się analogicznie, jak w przypadku manipulatorów mobilnych. Niech $y_i = k_i(q)$ oznacza i -tą współrzędną chwytaka satelity, wyrażoną względem układu podstawowego. Oczywiście jest, że $i = 1, \dots, p$, gdzie $p \leq 6$.

Zróżniczkujemy wszystkie elementy wektora $y(q)$ dwukrotnie po czasie

$$\dot{y}_i = \frac{d}{dt}(k_i(q)) = \frac{\partial k_i(q)}{\partial q} \dot{q} = J_i \dot{q}, \quad (5.2)$$

$$\ddot{y}_i = \dot{q}^T \frac{\partial^2 k_i(q)}{\partial q^2} \dot{q} + J_i \ddot{q} = P_i + J_i \ddot{q}, \quad (5.3)$$

gdzie

$$J_i = \frac{\partial k_i(q)}{\partial q}, \quad (5.4)$$

$$P_i = \dot{q}^T \frac{\partial^2 k_i(q)}{\partial q^2} \dot{q}. \quad (5.5)$$

Zapiszmy \dot{y} i \ddot{y} w postaci wektorowej

$$\dot{y} = J \dot{q}, \quad (5.6)$$

$$\ddot{y} = P + J \ddot{q}, \quad (5.7)$$

gdzie

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_p \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_p \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

p jest liczbą zmiennych wyjściowych y .

Korzystając z dynamiki we współrzędnych uogólnionych (4.2), zapiszmy \ddot{q} jako

$$\ddot{q} = H^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} - C \dot{q} \right]. \quad (5.10)$$

Podstawmy teraz (5.10) do (5.7)

$$\ddot{y} = P + JH^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} - C \dot{q} \right], \quad (5.11)$$

a otrzymamy równanie o postaci

$$\ddot{y} = P - JH^{-1}C \dot{q} + JH^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Zapiszmy więc \ddot{y} następująco

$$\ddot{y} = F + G \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

gdzie

$$F = P - JH^{-1}C\dot{q}, \quad (5.14)$$

$$G = JH^{-1}. \quad (5.15)$$

macierz G zapiszmy jako $G = [G_1|G_2]$. Macierz G_2 jest rozmiaru $p \times p$. Wektor \ddot{y} można zapisać wtedy jako

$$\ddot{y} = F + G_2u. \quad (5.16)$$

Prawo sterowania pętli linearyzującej jest następujące

$$u = G_2^{-1}(-F + \zeta), \quad (5.17)$$

przy czym symbolem ζ oznaczono nowe wejście do układu. Podstawiając (5.17) do (5.16) otrzymujemy równanie układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego

$$\ddot{y} = \zeta. \quad (5.18)$$

Jak widać, jest to układ liniowy typu "podwójny integrator". Za wysterowanie go odpowiada druga pętla. Zrealizować ją, można np. jako regulator PD z korekcją (3.10).

5.2 Badania symulacyjne

Podrozdział ten jest poświęcony symulacji algorytmu odsprężania wejściowo-wyjściowego dla robota free-floating z manipulatorem.

Algorytm zbadano na przedstawionym w pracy modelu dynamiki we współrzędnych barycentrycznych.

Parametry geometryczne i masowe ustalono jako: $l_1=1\text{m}$, $l_2=1\text{m}$, $m_0=20\text{kg}$, $m_1=m_2=10\text{kg}$. Początkowa konfiguracja manipulatora była równa

$$q_r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Początkową konfigurację bazy $q_b(0)$ we współrzędnych uogólnionych ustalono jako

$$q_b(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

co odpowiada następującej konfiguracji początkowej bazy we współrzędnych barycentrycznych

$$\phi_b(0) = \begin{pmatrix} \bar{x}(0) \\ \bar{y}(0) \\ \theta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4994 \\ 0.0125 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wynika to z przekształcenia (4.4). W naszym wypadku \bar{x} i \bar{y} są równe

$$\bar{x} = \frac{m_2 \left(l_1 c_{01} + \frac{1}{2} l_2 c_{012} \right)}{m_1 + m_2 + m_0} + \frac{l_1 m_1 c_{01}}{2(m_1 + m_2 + m_0)} + x,$$

$$\bar{y} = \frac{m_2 \left(l_1 s_{01} + \frac{1}{2} l_2 s_{012} \right)}{m_1 + m_2 + m_0} + \frac{l_1 m_1 s_{01}}{2(m_1 + m_2 + m_0)} + y.$$

Prędkości początkowe były równe

$$\dot{q}_r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{q}_b(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\phi}_b(0) = \begin{pmatrix} -0.0012 \\ 0.0874 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

Konieczne jest, aby liczba sterowań była równa liczbie wyjść. Wówczas sterować można dwoma przegubami manipulatora, a więc możliwe jest odsprężenie dwóch współrzędnych efektora. Wybrano współrzędne x i y efektora w podstawowym układzie odniesienia (X_0, Y_0) .

Funkcja wyjścia y ma postać

$$y(t) = y(q_b, q_r) = y(\phi_b, q_r) = \begin{pmatrix} x + l_1 c_{01} + l_2 c_{012} \\ y + l_1 s_{01} + l_2 s_{012} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{l_1(m_1 + 2m_0)c_{01} + l_2(2m_1 + m_2 + 2m_0)c_{012} + 2\bar{x}(m_1 + m_2 + m_0)}{2(m_1 + m_2 + m_0)} \\ \frac{l_1(m_1 + 2m_0)s_{01} + l_2(2m_1 + m_2 + 2m_0)s_{012} + 2\bar{y}(m_1 + m_2 + m_0)}{2(m_1 + m_2 + m_0)} \end{pmatrix}.$$

Funkcje wyjścia miały następujące wartości początkowe

$$y(0) = y(q_b(0), q_r(0)) = y(\phi_b(0), q_r(0)) = \begin{pmatrix} 1.9950 \\ 0.0998 \end{pmatrix}.$$

Prędkości chwytaka w chwili początkowej były równe

$$\dot{y}(0) = \begin{pmatrix} -0.0100 \\ 0.2995 \end{pmatrix}.$$

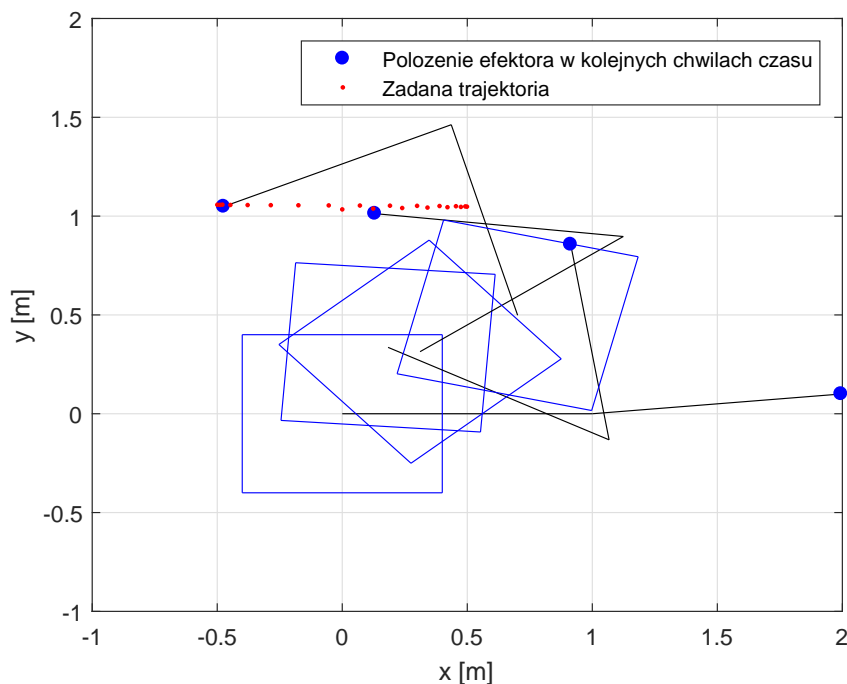
Wybrano następujące trajektorie zadane $y_d(t)$

$$y_d(t) = \begin{pmatrix} 0.5 \sin(0.5t) \\ 1 + 0.01 \ln(30(t+1)) \end{pmatrix}.$$

Błąd początkowy $e(t) = y_d(t) - y(t)$ i jego pochodna były równe

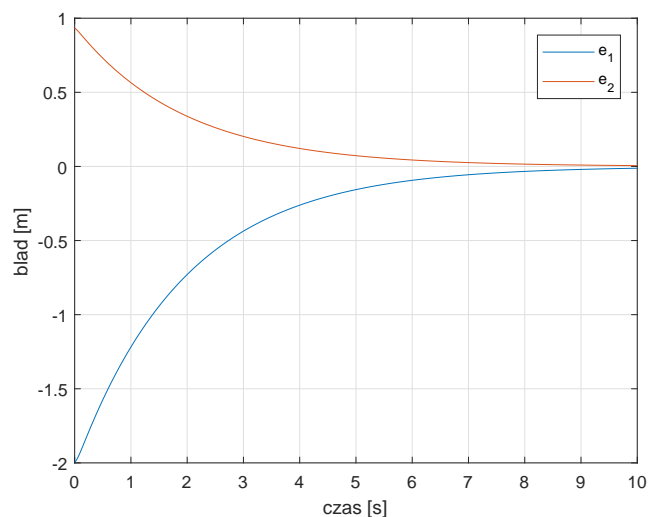
$$e(0) = \begin{pmatrix} -1.9950 \\ 0.9342 \end{pmatrix}, \quad \dot{e}(0) = \begin{pmatrix} 0.2600 \\ -0.2895 \end{pmatrix}.$$

Do sterowania układem liniowym użyto regulatora PD z korekcją (3.10) z nastawami $K_d = 4$, $K_p = 2$. W badaniach raz jeszcze wykorzystano środowisko Matlab/Simulink. Rezultaty badań przedstawiono poniżej.



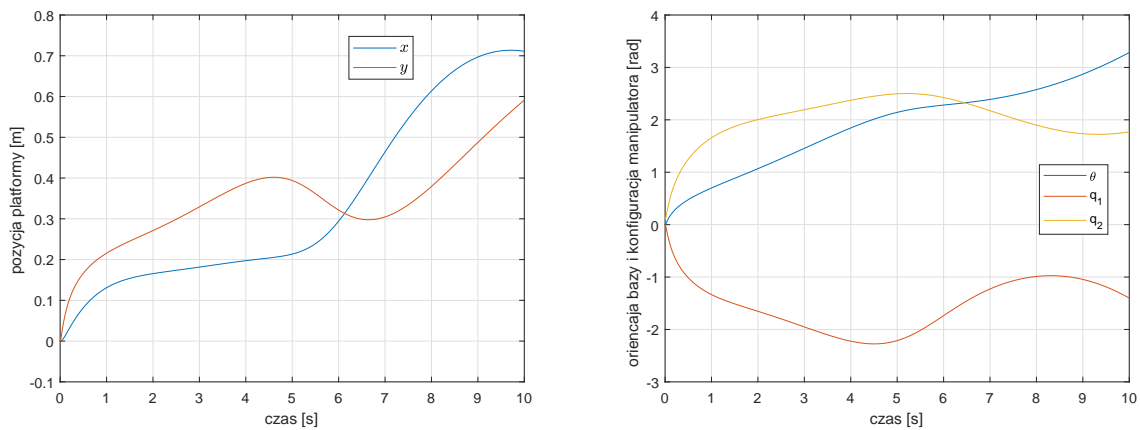
Rysunek 5.1 Robot free-floating z manipulatorem w kolejnych chwilach czasu

Przebiegi błędów śledzenia trajektorii chwytaka pokazano na rys. 5.2

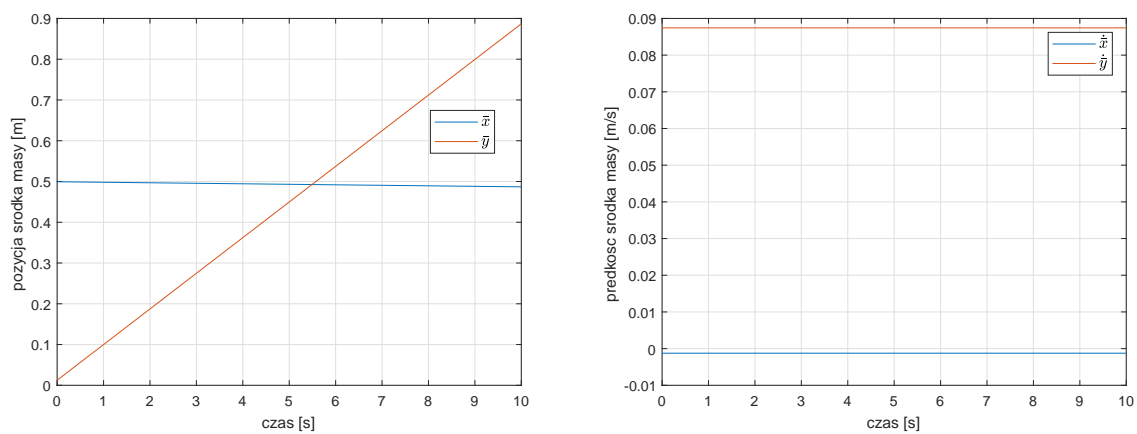


Rysunek 5.2 Przebiegi błędów śledzenia trajektorii chwytaka

Przebiegi współrzędnych uogólnionych q_b i q_r pokazano na rys. 5.3

Rysunek 5.3 Przebiegi współrzędnych uogólnionych q_b i q_r

Przebiegi współrzędnych barycentrycznych \bar{x} i \bar{y} i ich prędkości pokazano na rys. 5.4

Rysunek 5.4 Przebiegi współrzędnych barycentrycznych \bar{x} i \bar{y} i ich prędkości

Bibliografia

- [1] Mazur A. *New approach to designing input-output decoupling controllers for mobile manipulators*. Bull. of the Polish Academy of sciences Tech. Sci. 53(1):31-37, (2005)
- [2] Yamamoto Y, Yun X. *Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator*. IEEE Trans. on Automatic Control, 39(6):1326-1332, (1994)
- [3] Yamamoto Y, Yun X. *Effect of the dynamic interaction on coordinated control of mobile manipulators*. IEEE Trans. Robotics Automat, 12(5):816-824, (1996)
- [4] Mazur A, Arent K. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 335:55-71 (2007)
- [5] Tchoń K, Jakubiak J. *Acceleration-Driven Kinematics of Mobile Manipulators: An Endogenous Configuration Space Approach*, pp.(469-476), (2004)
- [6] M. R. Flannery. *The Enigma of Nonholonomic Constraints*. American Association of Physics Teachers, 73(3):265–272, (2005).
- [7] Yamamoto Y, Yun X. *Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator*. In Proceedings of 31st IEEE Conference on Decision and Control, pp.(2643-2648), (1992)