

# Rozdział 1

## Model satelity typu free-floating

### 1.1 Model we współrzędnych uogólnionych

Robot free-floating z manipulatorem to nienapędzana platforma (baza) z zamontowanym na niej napędzanym manipulatorem. Robot taki znajduje się w przestrzeni kosmicznej w stanie mikrogravitacji (nieważkości).

W rozważanym robocie platformą będzie jednolita prostokątna płyta, a za manipulator posłuży manipulator RR. Rozważanego robota free-floating z manipulatorem przedstawiono na rys 1.

Robot taki jest użyteczny ze względów praktycznych. Do badań eksperymentalnych bowiem, można wykorzystać płaską granitową płytę, po której baza może ślizgać się bez tarcia. Dzięki temu testy można przeprowadzać na Ziemi, a nie w warunkach mikrogravitacji.

Do wyprowadzenia modelu we współrzędnych uogólnionych weźmy następujące współrzędne

$$q = \begin{pmatrix} q_b \\ q_r \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

gdzie  $q_b = (x, y, \theta)^T$  – wektor współrzędnych uogólnionych bazy,  $q_r = (q_1, q_2)^T$  – wektor współrzędnych przegubowych manipulatora.

Równania dynamiki we współrzędnych uogólnionych takiego robota można, ponownie korzystając z formalizmu Lagrange’a, zapisać jako

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Brak wektora sił potencjalnych  $D(q)$  wynika z braku grawitacji.

Sterowanie  $u$  pojawia się tylko w dolnej części równania dynamiki (1.2), ponieważ dotyczy jedynie manipulatora, jako że baza jest nienapędzana (free-floating).

### 1.2 Model we współrzędnych barycentrycznych

Jeśli środek masy robota free-floating z manipulatorem ma pozostać nieruchomy (lub poruszać się ze stałą prędkością), konieczne jest zamodelowanie dynamiki we współrzędnych barycentrycznych.

Położenie środka masy robota free-floating z manipulatorem można wyliczyć z definicji jako

$$\left( \sum_{i=1}^w m_i \right) \phi_b = \sum_{i=1}^w m_i r_i, \quad (1.3)$$

gdzie  $r_i$  to środek masy  $i$ -tego członu robota w podstawowym układzie współrzędnych, a  $m_i$  to masa  $i$ -tego członu. Z kolei  $w$  to liczba członów robota. W naszym przypadku  $w$  wynosi trzy, robot posiada bowiem jedną bazę i dwa ramiona.

$\phi_b$  to współrzędne barycentryczne układu, czyli

$$\phi_b = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \theta \end{pmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^w m_i r_i}{\sum_{i=1}^w m_i}. \quad (1.4)$$

Kompletne współrzędne barycentryczne satelity wraz z manipulatorem  $\phi$  mają postać

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_b \\ q_r \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Model we współrzędnych barycentrycznych można więc wyrazić jako

$$\bar{H}\ddot{\phi} + \bar{C}\dot{\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

Macierze  $\bar{H}$  i  $\bar{C}$  uzyskuje się przez przeliczenie energii kinetycznej do układu współrzędnych barycentrycznych i wykorzystanie formalizmu Lagrange'a dla nowej energii kinetycznej.

## Rozdział 2

# Odsprzęganie wejściowo-wyjściowe dla robota free-floating z manipulatorem

Ponieważ baza robota free-floating z manipulatorem nie jest napędzana, do odsprzęgania wejściowo-wyjściowego nie można zastosować podstawowego algorytmu Yamamoto i Yuna. Do realizacji zadania śledzenia trajektorii w przestrzeni zadaniowej wykorzystamy więc algorytm z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi.

Algorytm ten można stosować zarówno dla modelu robota free-floating z manipulatorem we współrzędnych uogólnionych, jak i we współrzędnych barycentrycznych. Wybór

modelu należy podporządkować rodzajowi zadania, jakie ma zostać wykonane. Jeśli środek masy ma pozostać nieruchomy wykorzystać należy model we współrzędnych barycentrycznych, natomiast gdy środek masy ma się przemieszczać, to można użyć modelu we współrzędnych uogólnionych.

Przy wyprowadzaniu algorytmu wykorzystamy model dynamiki we współrzędnych uogólnionych. Algorytm dla modelu we współrzędnych barycentrycznych wyprowadza się analogicznie, podstawiając jedynie za współrzędne uogólnione  $q$  i macierze  $H$  i  $C$  oraz ich odpowiedniki w modelu we współrzędnych barycentrycznych, tj. współrzędne barycentryczne  $\phi$  i macierze  $\bar{H}$  i  $\bar{C}$ .

Korzystamy z algorytmu z rozszerzonymi funkcjami wyjściowymi, więc postać funkcji wyjściowej będzie zależeć od całej konfiguracji  $q$ :

$$y = k(q). \quad (2.1)$$

## 2.1 Algorytm odsprężania wejściowo-wyjściowego

Przy wyprowadzaniu algorytmów odsprężania wejściowo-wyjściowego dla manipulatora mobilnego linearyzowaliśmy jego dynamikę w celu ułatwienia obliczeń. W przypadku robota free-floating z manipulatorem linearyzacja taka jest kłopotliwa, ponieważ tylko manipulator jest napędzany. Aby nie utrudniać sobie zadania i pokazać, że linearyzacja dynamiki nie jest konieczna, nie zastosujemy jej przy wyprowadzaniu algorytmu odsprężania wejściowo-wyjściowego dla robota free-floating z manipulatorem.

Struktura algorytmu nie zmienia się i nadal składa się z dwóch pętli sprzężenia zwrotnego: pierwsza przekształca układ do postaci liniowej typu "podwójny integrator", druga steruje uzyskanym układem liniowym.

Prawo sterowania pierwszej pętli wyprowadza się analogicznie, jak w przypadku manipulatorów mobilnych. Niech  $y_i = k_i(q)$  oznacza  $i$ -tą współrzędną chwytaka satelity, wyrażoną względem układu podstawowego. Oczywiście jest, że  $i = 1, \dots, p$ , gdzie  $p \leq 6$ .

Zrózniczkujemy wszystkie elementy wektora  $y(q)$  dwukrotnie po czasie

$$\dot{y}_i = \frac{d}{dt} (k_i(q)) = \frac{\partial k_i(q)}{\partial q} \dot{q} = J_i \dot{q}, \quad (2.2)$$

$$\ddot{y}_i = \dot{q}^T \frac{\partial^2 k_i(q)}{\partial q^2} \dot{q} + J_i \ddot{q} = P_i + J_i \ddot{q}, \quad (2.3)$$

gdzie

$$J_i = \frac{\partial k_i(q)}{\partial q}, \quad (2.4)$$

$$P_i = \dot{q}^T \frac{\partial^2 k_i(q)}{\partial q^2} \dot{q}. \quad (2.5)$$

Zapiszmy  $\dot{y}$  i  $\ddot{y}$  w postaci wektorowej

$$\dot{y} = J \dot{q}, \quad (2.6)$$

$$\ddot{y} = P + J \ddot{q}, \quad (2.7)$$

gdzie

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_p \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_p \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$p$  jest liczbą zmiennych wyjściowych  $y$ .

Korzystając z dynamiki we współrzędnych uogólnionych (1.2), zapiszmy  $\ddot{q}$  jako

$$\ddot{q} = H^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} - C\dot{q} \right]. \quad (2.10)$$

Podstawmy teraz (2.10) do (2.7)

$$\ddot{y} = P + JH^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} - C\dot{q} \right], \quad (2.11)$$

a otrzymamy równanie o postaci

$$\ddot{y} = P - JH^{-1}C\dot{q} + JH^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Zapiszmy więc  $\ddot{y}$  następująco

$$\ddot{y} = F + G \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

gdzie

$$F = P - JH^{-1}C\dot{q}, \quad (2.14)$$

$$G = JH^{-1}. \quad (2.15)$$

macierz  $G$  zapiszmy jako  $G = [G_1|G_2]$ . Macierz  $G_2$  jest rozmiaru  $p \times p$ . Wektor  $\ddot{y}$  można zapisać wtedy jako

$$\ddot{y} = F + G_2 u. \quad (2.16)$$

Prawo sterowania pętli linearyzującej jest następujące

$$u = G_2^{-1}(-F + \zeta), \quad (2.17)$$

przy czym symbolem  $\zeta$  oznaczono nowe wejście do układu. Podstawiając (2.17) do (2.16) otrzymujemy równanie układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego

$$\ddot{y} = \zeta. \quad (2.18)$$

Jak widać, jest to układ liniowy typu "podwójny integrator". Za wysterowanie go odpowiada druga pętla. Zrealizować ją, można np. jako regulator PD z korekcją (??).

### 2.1.1 Badania symulacyjne

Podrozdział ten jest poświęcony symulacji algorytmu odsprężania wejściowo-wyjściowego dla robota free-floating z manipulatorem.

Algorytm zbadano na przedstawionym w pracy modelu dynamiki we współrzędnych barycentrycznych.

Parametry geometryczne i masowe ustalono jako:  $l_1=1\text{m}$ ,  $l_2=1\text{m}$ ,  $m_0=20\text{kg}$ ,  $m_1=m_2=10\text{kg}$ . Początkowa konfiguracja manipulatora była równa

$$q_r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Początkową konfigurację bazy  $q_b(0)$  we współrzędnych uogólnionych ustalono jako

$$q_b(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

co odpowiada następującej konfiguracji początkowej bazy we współrzędnych barycentrycznych

$$\phi_b(0) = \begin{pmatrix} \bar{x}(0) \\ \bar{y}(0) \\ \theta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4994 \\ 0.0125 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wynika to z przekształcenia (1.4). W naszym wypadku  $\bar{x}$  i  $\bar{y}$  są równe

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{m_2 \left( l_1 c_{01} + \frac{1}{2} l_2 c_{012} \right)}{m_1 + m_2 + m_0} + \frac{l_1 m_1 c_{01}}{2(m_1 + m_2 + m_0)} + x, \\ \bar{y} &= \frac{m_2 \left( l_1 s_{01} + \frac{1}{2} l_2 s_{012} \right)}{m_1 + m_2 + m_0} + \frac{l_1 m_1 s_{01}}{2(m_1 + m_2 + m_0)} + y. \end{aligned}$$

Prędkości początkowe były równe

$$\dot{q}_r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{q}_b(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\phi}_b(0) = \begin{pmatrix} -0.0012 \\ 0.0874 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

Konieczne jest, aby liczba sterowań była równa liczbie wyjść. Wówczas sterować można dwoma przegubami manipulatora, a więc możliwe jest odsprężenie dwóch współrzędnych efektora. Wybrano współrzędne  $x$  i  $y$  efektora w podstawowym układzie odniesienia  $(X_0, Y_0)$ .

Funkcja wyjścia  $y$  ma postać

$$\begin{aligned} y(t) &= y(q_b, q_r) = y(\phi_b, q_r) = \begin{pmatrix} x + l_1 c_{01} + l_2 c_{012} \\ y + l_1 s_{01} + l_2 s_{012} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{l_1(m_1 + 2m_0)c_{01} + l_2(2m_1 + m_2 + 2m_0)c_{012} + 2\bar{x}(m_1 + m_2 + m_0)}{2(m_1 + m_2 + m_0)} \\ \frac{l_1(m_1 + 2m_0)s_{01} + l_2(2m_1 + m_2 + 2m_0)s_{012} + 2\bar{y}(m_1 + m_2 + m_0)}{2(m_1 + m_2 + m_0)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Funkcje wyjścia miały następujące wartości początkowe

$$y(0) = y(q_b(0), q_r(0)) = y(\phi_b(0), q_r(0)) = \begin{pmatrix} 1.9950 \\ 0.0998 \end{pmatrix}.$$

Prędkości chwytaka w chwili początkowej były równe

$$\dot{y}(0) = \begin{pmatrix} -0.0100 \\ 0.2995 \end{pmatrix}.$$

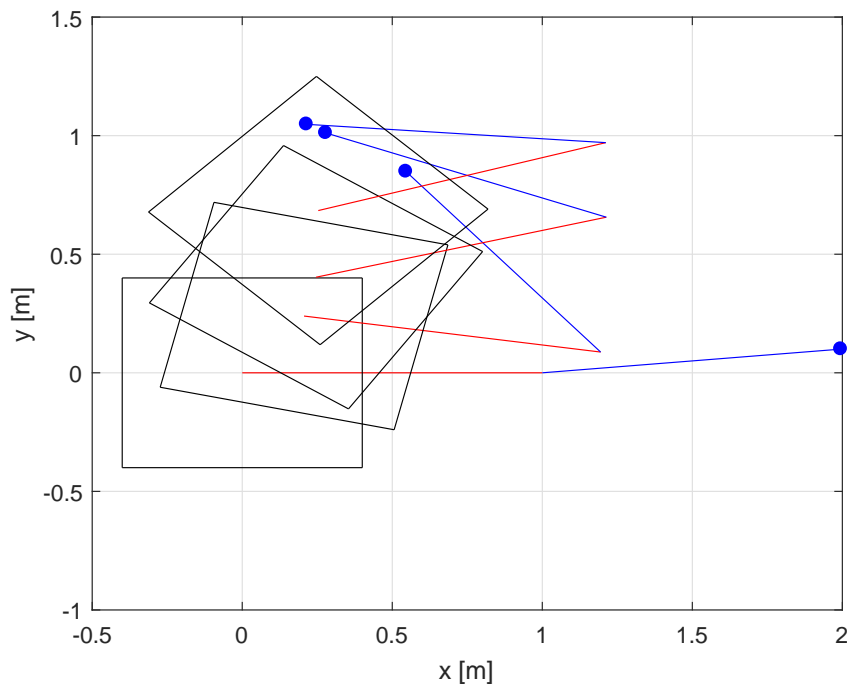
Wybrano następujące trajektorie zadane  $y_d(t)$

$$y_d(t) = \begin{pmatrix} 0.2 \sin(0.2t) \\ 1 + 0.01 \ln(30(t+1)) \end{pmatrix}.$$

Błąd początkowy  $e(t) = y_d(t) - y(t)$  i jego pochodna były równe

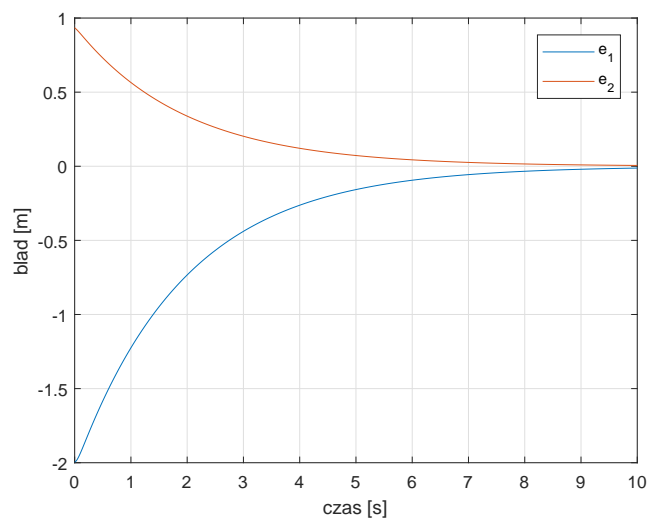
$$e(0) = \begin{pmatrix} -1.9950 \\ 0.9342 \end{pmatrix}, \quad \dot{e}(0) = \begin{pmatrix} 0.0500 \\ -0.2895 \end{pmatrix}.$$

Do sterowania układem liniowym użyto regulatora PD z korekcją (??) z nastawami  $K_d = 4$ ,  $K_p = 2$ . W badaniach raz jeszcze wykorzystano środowisko Matlab/Simulink. Rezultaty badań przedstawiono poniżej.



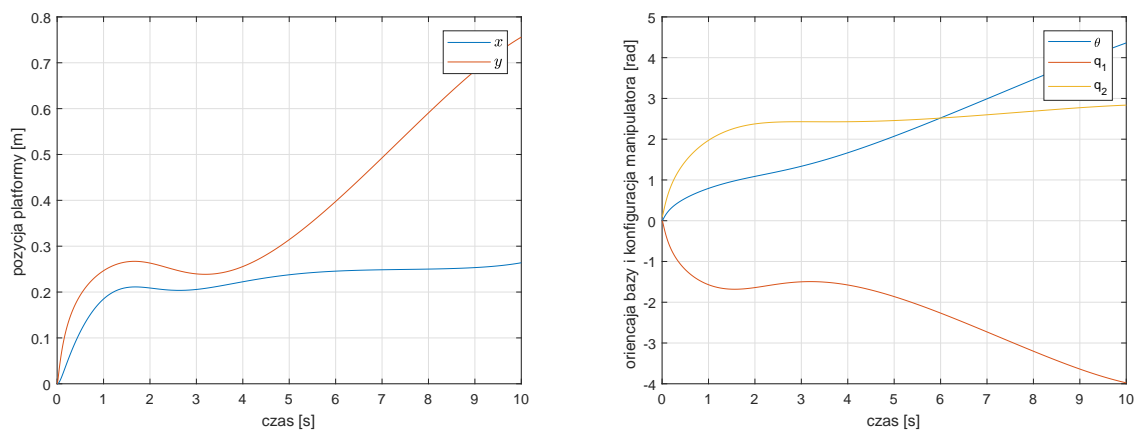
Rysunek 2.1 Robot free-floating z manipulatorem w kolejnych chwilach czasu

Przebiegi błędów śledzenia trajektorii chwytaka pokazano na rys. 2.2

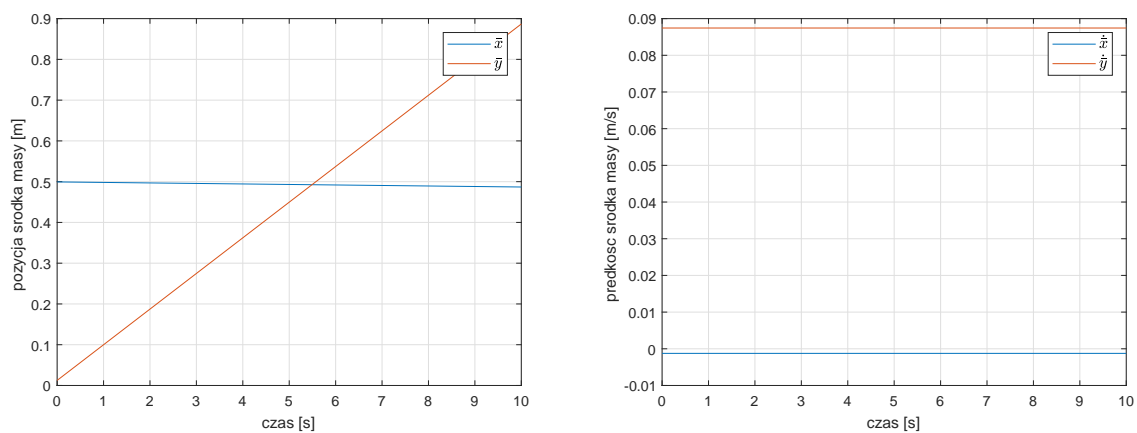


Rysunek 2.2 Przebiegi błędów śledzenia trajektorii chwytaka

Przebiegi współrzędnych uogólnionych  $q_b$  i  $q_r$  pokazano na rys. 2.3

Rysunek 2.3 Przebiegi współrzędnych uogólnionych  $q_b$  i  $q_r$ 

Przebiegi współrzędnych barycentrycznych  $\bar{x}$  i  $\bar{y}$  i ich prędkości pokazano na rys. 2.4

Rysunek 2.4 Przebiegi współrzędnych barycentrycznych  $\bar{x}$  i  $\bar{y}$  i ich prędkości