离散语文数学

命题逻辑

- 命题:不是悖论的陈述句
- 与、或、非、蕴含、双蕴含
- **异或**：要么p要么q——当且仅当成立一个，不能两个都成立。和**或**区分开

> 例：如果天不下雨，我就上街，否则在家
> 如果形式化成：不下雨且上街且不在家（或）下雨且不上街且在家。
> 是有问题的，因为下雨和不下雨只能成立一个。所以要用异或。

- **只有...才**：后推前。

- **除非...否则**：除非不用管，否则——否前则后。

- 析取范式和合取范式
  主析取范式 ——极小项 m ——成真赋值(小溪镇)
  主合取范式 ——极大项 M ——成假赋值(大河家) 主合取的时候注意把T的写成¬（TF倒过来），但标数的时候都是p写1，$\neg p$写0，转换的时候求补+求余

  - 永真式的主合取范式为空公式
  - 矛盾式的主析取范式为空公式

- 逆波兰表达式注意把¬ 后置

- 等值演算只能用这些基本等值式

  - 双重否定律
  - 结合律
  - 交换律
  - 分配律
  - 等幂律
  - 吸收律
  - 摩根律
  - 同一律
  - 零律
  - 补余律
    置换：
  - 蕴含等值式
  - 等价（否定）等值式
  - 假言易位
  - 前提合取合并$p \to (q \to r) = (p \wedge q) \to r$
    - 前提条件可交换次序：$p \to (q \to r) = q \to (p \to r)$

  判断普遍有效：带入前件为1，后件取0，看能不能成立。

- 命题连接词的个数：对n个命题变元，每个变元有两种取值，从而对这n个命题变元有2^n种取值，于是相应的真值函项（n元命题连接词）有$2^(2^n)$个

- 两个容易忽略的命题连接词：

  - $\uparrow$：与非，是完备集
  - $\downarrow$：或非，是完备集

- 完备集：$\{\neg,\vee\}$、$\{\neg,\wedge\}$、$\{\neg,\rightarrow\}$都是完备集，带$\neg$的只有$\{\neg,\leftrightarrow\}$不是完备集

- 对偶式：A^*，把$\vee$、 $\wedge$ 、F、T都换成相反的
  A^-'是把所有命题变元都加一遍$\neg$

- 推理形式

  - 证明 A⇒B 的几种方法:
    - 证 A→B 是重言式
    - 证 A∧¬B 为矛盾式
    - 真值表法
  - 推理公式
  - 推理演算，注意附加前提引入和条件证明规则
  - 归结法

罗素公理系统

- 附加一个相同的东西用公理4，即已知$q \rightarrow r$，变成$p \vee q \rightarrow p \vee r$
- 左右两边项数不同考虑并or或上自己
- 左右同时加¬or去掉¬用定理7，（假言易位）
- 两个非不要直接消，用$\neg\neg p \rightarrow p$的定理加三段论（定理1）导一下

谓词逻辑

- ∀用→，∃用∧
- 自然语言形式化：唯一（对任意y，如果y满足条件，能推出来x=y）；异或(黑猫白猫)
- 等值式
  - 否定等值式（改变存在任意）
  - 量词辖域收缩与扩张等值式
  - 量词分配等值式
    - 注意：量词对析取和合取的分配律不用动，但对蕴含词的分配律，前件量词要换
    - 注意：∃对∨分配，∀对∧分配
- 等值演算写依据：等值式、否定等值式、置换
- 范式
  - SKOLEM 标准型：仅保留全称量词的前束范式
  - 步骤：
    - 消去联接词
    - ¬内移
    - 量词左移

    - 变元易名再左移
- 基本推理公式（不带量词）
  - 析取附加式
  - 合取化简式
  - 分离
  - 拒取
  - 并发
  - 析取三段
  - 假言三段
- 推理演算（四条推理规则）
  - 全称量词消去(UI)
  - 全称量词引入(UG)
  - 存在量词消去(EI)
  - 存在量词引入(EG)
- 谓词逻辑的归结推理法
  - 把前提和结论的¬都分别化为skolem标准型
  - 建立子句集时不用管量词。

集合

- 幂集：$P(A)=x|x\subseteq A$，A的所有子集组成的集合，$x\in P(A)\Leftrightarrow x\subseteq A$
  - $P(A)\in P(B)\Rightarrow A\in B$，逆定理不成立！！
  - $A\subseteq B\Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$
- 传递集合：集合A的任一元素的元素都是A的元素(内层括号里的内容，在外层也能找得到)
  - $(\forall x)(\forall y)((x\in y\wedge y\in A)\rightarrow x\in A)$
- 对称差
- 广义交：拆掉两层括号求交再加上一层括号，空集的广义交没有意义
  - $x\in\cap A\Leftrightarrow(\forall y)(y\in A\rightarrow x\in y)$
- 广义并：空集的广义并还是空集
  - $x\in\cup A\Leftrightarrow(\exists y)(x\in y\wedge y\in A)$
- 证明两个集合相等：互相包含
- 证明$A\subseteq B$：$(\forall x)(x\in A\rightarrow x\in B)$

关系

- 对于关系R：$dom(R),ran(R),fld(R)$
- 逆，合成，限制，象
- 五种关系

- 自反：所有点都有自环，对角元需要全是1（很绝对性）
    - 非自反：一个自环都没有，对角元需要全是0（绝对性）
    - 对称：若两点有边，则相互，要么就没有边。只要有一个单向边出现就不是对称。（相对绝对）
    - 反对称：若有变，是单向边，要么就没有边。只要有一对双向边就不是反对称。（相对绝对）
    - 传递
- 自反和非自反，可以都不成立，但不可以都成立
- 对称和反对称，可以都不成立，也可以都成立（当除了对角元以外都是0的时候，一条相互边都没有的时候就可以对称和反对称都成立）（对称或者反对称和对角元没有一点关系）
- 空关系：
    - 非空集合上的空关系 : 非自反，反对称，对称，传递
    - 空集合上的空关系 : **自反**，非自反，反对称，对称，传递
- 闭包：传递闭包注意新生成的边也要再去参与传递。
  r : 自反t : 传递s : 对称
  注意：对称会破坏传递，所以先求对称再求传递，自反放在哪都行
- 等价关系：自反，对称，传递
    - 证明：分别证明自反、对称和传递
    - 等价类：$[x]_R = y|y \in A \wedge xRy$
      把集合元素划分成若干个不相交的小集合
        - 等价类数目
        - 等价关系的数量：stirling数：
            - 递推关系：$S(n,m) = mS(n-1,m) + S(n-1,m-1),(n>1,m\geq 1)$
            - 通项：$S(n,m) = \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m} C(m,k)(-1)^k(m-k)^n$
    - 商集：A/R
      以所有等价类为元素的大集合
    - 划分：集合$1,2,3$的划分有{% raw %} {{1,2,3}}，{{1，2}，{3}}，{{1，3}，{2}}，{{2，3}，{1}}，{{1}，{2}，{3}}{% endraw %}这五种划分，这个例子确定了五种等价关系，比如对{% raw %}{{1}，{2}，{3}}{% endraw %}这个划分可以得到等价关系：{$<1,1>,<2,2>,❤️,3>$}
- 相容关系：自反，对称
    - 每个完全多边形构成一个相容类
    - 覆盖：和划分是一个层级的概念，一个划分是一个覆盖
- 偏序关系（小于等于）：自反，反对称，传递
    - 证明：分别证明自反、反对称、传递
    - 区分偏序关系和偏序集
- 拟序关系（小于）：非自反，（反对称）传递
- 全序关系：对偏序集，任意两元素可比（哈斯图是一根棍子）
    - 链：任意均可比
    - 反链：任意均不可比
- 盖住关系：哈斯图,写关系的时候记得加上自反
- 良序关系：**良序=全序+有下确界**，关系集合为有限集的全序关系一定是良序关系，而关系集合为无限集的全序关系则不一定是良序关系--两者的区别在于偏序关系集合是否存在下确界
- 八大元！！！

函数

- A到B的函数，写为A_B,个数：$|B|^{|A|}$
  二元关系是笛卡尔积的子集，从A到B的笛卡尔积个数有$|A| \times |B|$个，所以二元关系有$2^{|A| \times |B|}$个
- 空函数
  - $\neg\emptyset \to \emptyset$，函数不存在
  - $\neg\emptyset \to \neg\emptyset$，函数不存在
  - $\emptyset \to \neg\emptyset, f = \emptyset$, 单射，非满射
  - $\emptyset \to \emptyset$，$f = \emptyset$, 单射，且满射

数与集合

- 把自然数看成集合！基数=这个自然数
- 自然数集合的基数：$\aleph_0$
  实数集合的基数：$\aleph_1$
- $2^{\aleph_0} = \aleph_1$
- 对于任意基数k、l、m，有：$(k^l)^m = k^{l \cdot m}$
- $card(Z) = card(Q) = card(N) = card(N \times N) = \aleph_0$
- $card([0,1]) = card((0,1)) = card(R_+) = card(R) = \aleph_1$
- 基本定理：
  - 对于任意基数k，有$k \leq 2^k$（集合和它的幂集）
  - 对于任意无限基数k，有：$k^k = 2^k$
  - 对任意基数 $k \leq l$的大小比较
  - 无限基数$+ or \times$一个更小的基数（可以是无限的）还是等于自身
- 快速判断法：不带括号求指数的：把指数上的东西搬下来下标加1，和本来是底数的形成乘法关系，如：$\aleph_3^{\aleph_1} = \aleph_3\aleph_2$；同层加和乘保留最大；带括号的，用第3条，把指数直接搬下来变成乘法关系。
- 幂集和到数1的函数是等势的（把自然数理解为集合）。
- 可数集合：基数等于$\aleph_0$
- 连续统假设

证明等势：

- 定义法——构造双射
  - 从一维到二维：绕圈法，顺序标数
  - **记得滤重**
  - **开闭区间**对任何一个对开区间和闭区间，都可以通过构造$[a,b] \Rightarrow [0,1] \Rightarrow (0,1) \Rightarrow (a,b)$ 的方式，复合映射
  - **错位填坑**：$[0,1] \Rightarrow (0,1)$：把$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$ 都除4，往后挪，空开$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$，然后把0投到$\frac{1}{2}$，把1投到$\frac{1}{4}$.
  - 有限无限集合还可以用$\tan(x)$和e^x来构造
- 不要求定义证明的时候，可以利用基数，证明：$A \leq B$ 和 $B \leq A$

基本的等势

- 可数集和可数集等势：可数集的元素可以按照一定顺序枚举出来
- $N \approx Q \approx Q_+$:将正有理数按如下规律排列，其中，分子与分母之和按顺序递增：1，1/2，2/1，1/3，3/1，1/4，2/3，3/2，4/1......对每个正有理数，我们总能找到它在序列中的次序，我们将其次序作为映射

f，显然该映射为一一映射，故正有理数集与自然数集等势。

- $R/Q \approx R$，无理数集与实数集等势：（思路：利用$\sqrt{2}$把有理数挪到无理数，把实数分开成有理数和特殊无理数and无理数）
  - $x \in Q \cup Q+\sqrt{2}, f(x)=g(x)$ ，g(x)是$Q \cup Q+\sqrt{2} \to Q\sqrt{2}$ 的映射（可数集一一对应）
  - $x \notin Q \cup Q+\sqrt{2}, f(x)=x$
- $R \approx (0,1)$,$f:(0,1) \to R$ $(f=g \circ h, h:(0,1) \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), g:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to R), g(x)=tan(x)$
- $Z \approx N$
  - $f: Z \to N$
    - $f(x)=2x, x \geq 0$
    - $f(x)=-2x-1, x<0$
- $[0,1] \approx (0,1)$：把$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\dots$都除4，往后挪，空开$\frac{1}{2}$，然后把0投到$\frac{1}{2}$.
- $R \approx (0,1)$：$f(x)=\frac{1}{\pi}arctan(x)+\frac{1}{2}$
- 若$A \approx B \Rightarrow P(A) \approx P(B)$