

# Movimiento en dos Dimensiones - Projectiles



## Objetivos

1. Determinar, con la velocidad inicial y el modelo matemático para movimiento de proyectiles, la distancia horizontal que debía recorrer el proyectil si es lanzado horizontalmente desde una altura.
2. Determinar experimentalmente la distancia horizontal recorrida si es lanzado horizontalmente desde una altura  $h$ .
3. Contrastar resultados considerando la resistencia del aire y explicar los mismos.
4. Comparar esta distancia recorrida calculada usando el modelo matemático.
5. Determinar experimentalmente el alcance para proyectiles disparado a diferentes ángulos.
6. Investigar experimentalmente como cambia el alcance del proyectil con el ángulo.

## Introducción

Un objeto con una **velocidad inicial** que sigue una **trayectoria** (figura 1) determinada por los efectos de la **aceleración gravitacional** ( $\vec{g}$ ) y la **resistencia del aire**, se conoce como **proyectil**.

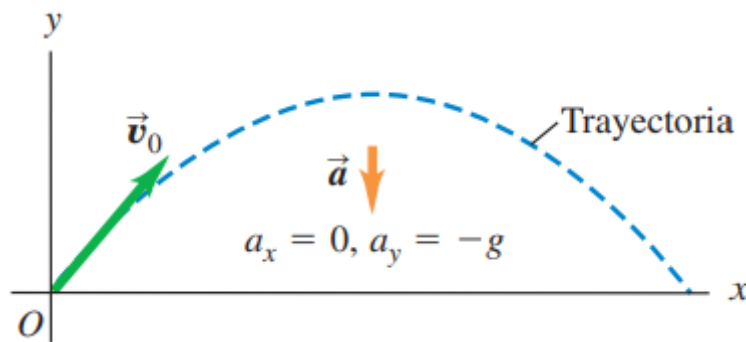


Figura 1: Trayectoria de un proyectil

Si se analiza la trayectoria en el plano “xy” (eje  $x$  horizontal y eje  $y$  vertical) del proyectil se puede notar que el movimiento del objeto puede determinarse en términos de dos componentes perpendiculares independientes una de otra. Esto permite realizar un tratamiento de este tipo de movimientos de manera separada para cada coordenada, si adicionalmente se desprecia la resistencia del aire, entonces se pueden expresar las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración de un proyectil en forma de ecuaciones independientes así:

	$x$	$y$
<b>Posición</b>	$x = x_0 + v_{0x}t$	$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$
<b>Velocidad</b>	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - gt$
<b>Aceleración</b>	$a_x = 0$	$a_y = -g$

Tabla 1: Relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración por componentes.

Siendo  $v_{0x} = v_0 \cos \theta$  y  $v_{0y} = v_0 \sin \theta$  las componentes de  $\vec{v}_0$  respectivamente (figura 2).

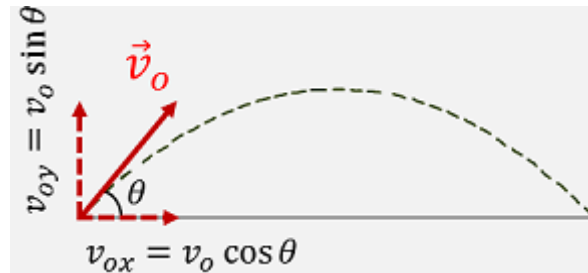


Figura 2: Componentes de la velocidad inicial

## Primera parte

Se inicia seleccionando un valor inicial de la velocidad con la que se lanza el proyectil, el lanzamiento del proyectil se realiza desde el origen de nuestro sistema de referencia. A continuación, se debe seleccionar la altura desde la que se hará el lanzamiento, el cual debe ser horizontal ( $\theta = 0^\circ$  y  $v_{0y} = 0$ ). En estas condiciones se puede a partir de las ecuaciones de la posición de la tabla 1, obtener los siguientes resultados:

$$x = v_{0x}t_v \rightarrow R = v_0t_v$$

Donde " $t_v$ " se conoce como **tiempo de vuelo** y " $R$ " como el **alcance máximo**, para el caso de la posición en " $y$ " se obtiene:

$$y_0 = \frac{1}{2}gt_v^2 \rightarrow h = \frac{1}{2}gt_v^2$$

Combinando estos dos resultados se obtiene una ecuación recurrente para encontrar " $t_v$ " y " $R$ ".

$$t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (1)$$

$$R = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2)$$

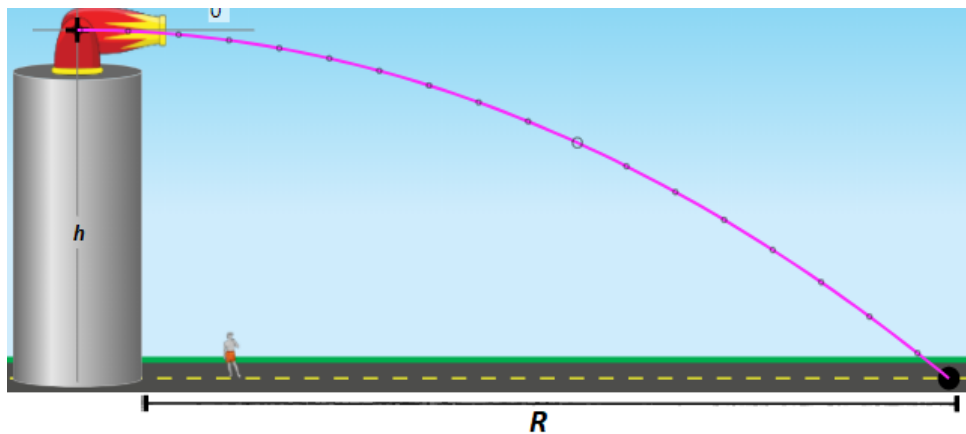


Figura 3: Proyectil lanzado horizontalmente desde una altura  $h$ .

## Procedimiento experimental

1. Ingrese al simulador en el siguiente enlace:  
[https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_en.html), luego hacer click sobre "Lab".
2. Seleccione una altura inicial desde la que realizara el primer lanzamiento, para cada lanzamiento debe seleccionar altura diferente, esto lo debe realizar un total de 7 veces.
3. Configure el panel a su derecha de la pantalla de la siguiente manera (por defecto se encuentra así).

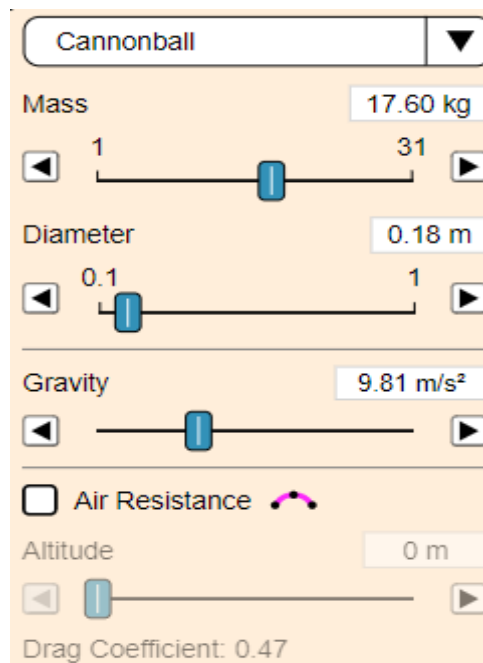





Figura 4: Configuración inicial del panel de opciones.

- Ajuste el ángulo del lanzador a cero grados de tal forma que el proyectil salga disparado horizontalmente (para hacer esto, debe tener como mínimo una altura  $h = 1\text{m}$ ).
- Seleccione la velocidad inicial.
- Realice el lanzamiento presionando el botón  en el simulador.
- Mida con la herramienta  el *alcance máximo*  $R$  (m) del proyectil. Apunte ese valor.
- Apunte el valor del *tiempo de vuelo*  $t_v$  (s) con la herramienta .



## Análisis

- Utilice las ecuaciones (1) y (2) para determinar el  $t_{v(\text{teórico})}$  y  $R_{\text{teórico}}$ , respectivamente. Compare estos resultados con los obtenidos experimentalmente para cada altura.

## Datos y resultados

#	$h$ (m)	$v_0(\frac{m}{s})$	$t_v$ (s)	$t_{v(\text{teórico})}$ (s)	% Dif ( $t_v$ )	$R$ (m)	$R_{\text{teórico}}$ (m)	% Dif ( $R$ )
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

Tabla 2: Tabla para toma de datos primera parte.

- Realice el procedimiento anterior esta vez considerando la resistencia del aire, para ello marque **únicamente** la opción  **Air Resistance**  y después responda de manera argumentada:
  - ¿Cuánto cambia los resultados obtenidos?
  - Explique porque considera que se puede dar estos cambios.

## Segunda parte

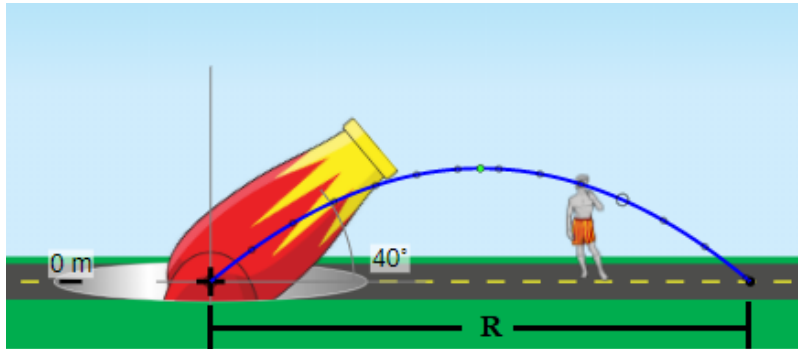


Figura 5: Proyectil lanzado a un ángulo  $\theta$  con la horizontal para la altura de lanzamiento y la altura de aterrizaje iguales.

Cuando el proyectil es lanzado a un ángulo  $\theta$  con la horizontal, la velocidad inicial tendrá un componente en “y” y otro en “x”. En el caso que la *altura de lanzamiento* y la *altura de aterrizaje* sean iguales, las ecuaciones de posición mostradas en la tabla 1 se simplifican y toman la forma.

$$R = (v_0 \cos \theta) t_v \quad (3)$$


$$0 = (v_0 \sin \theta) t_v - \frac{1}{2} g t_v^2 \quad (4)$$

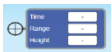
Se puede solucionar simultáneamente estas ecuaciones para el tiempo de vuelo y alcance de lo cual para esta situación se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$t_v = \frac{2v_0}{g} \sin \theta \quad (5)$$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) \quad (6)$$

## Procedimiento Experimental

1. En el mismo simulador, ahora seleccione una altura inicial de  $h = 0m$  (mantener esta altura fija para todos los lanzamientos).
2. Configure el panel a su derecha de la pantalla de la misma forma que se muestra en la figura 4 de la primera parte.
3. Seleccione el ángulo de lanzamiento iniciando en  $\theta = 30^\circ$  y continuando con los que aparecen en la tabla 4.
4. Seleccione una velocidad inicial de **13 m/s** para todos los lanzamientos.
5. Realice el lanzamiento presionando el botón  en el simulador.

6. Seleccione el botón  y arrástrelo hacia el proyectil para obtener el tiempo de vuelo y el alcance los cuales debe anotar en la tabla 4.

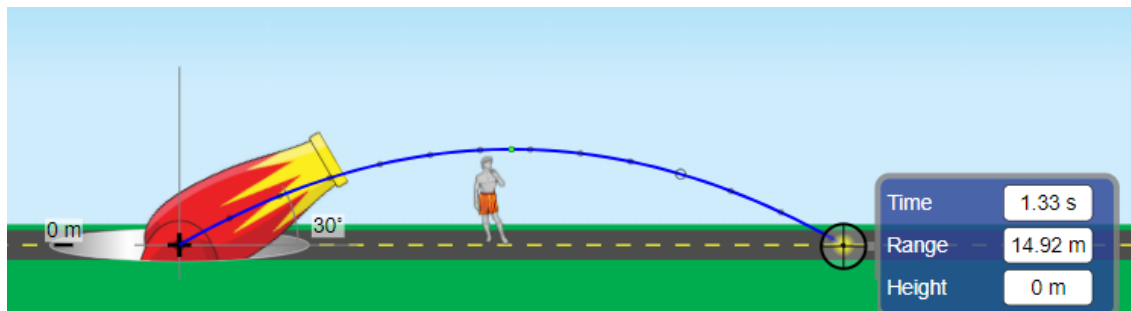


Figura 6: Ejemplo de cómo obtener el tiempo de vuelo y alcance para el proyectil.

## Datos y resultados

#	$\Theta$ (grados)	$v_0 (\frac{m}{s})$	$t_v$ (s)	$R$ (m)
1	30			
2	40			
3	45			
4	50			
5	60			

Tabla 3: Datos de la segunda parte de la simulación.

## Análisis

1. En Excel o el graficador de su preferencia ingrese los datos de la columna de los ángulos  $\Theta$  y la del alcance  $R$  (m), grafique en “x” los ángulos y en “y” el alcance.
2. Observe la tendencia de la gráfica y encuentre la relación matemática entre las variables “x” y “y” (este punto debe ser explicado por su instructor).
3. De la gráfica ¿Cuál de los ángulos obtiene un mayor alcance? ¿A qué se debe que este ángulo tenga el mayor alcance?

## Referencias

- [1] J. López, P. Marrero, E. Roura, Manual de Experimentos de Física I, pág. 37-44 (2008).

## **Movimiento en Dos Dimensiones - Projectiles**

Paola V. Náter, Alec J. Nuñez, Raúl A. Ortiz

Laboratorio Física General 3173-101

Instructor: Kevin García Gallardo

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez

15 de septiembre de 2021.

### **Resumen**

En este experimento, se esperaba cumplir con los siguientes objetivos: determinar la distancia horizontal recorrida por método experimental y por cálculos, diferenciar cómputos considerando la resistencia del aire, determinar experimentalmente el alcance para proyectiles disparado a diferentes ángulos e investigar experimentalmente como cambia el alcance del proyectil respecto al ángulo. Al momento de calcular el rango y el tiempo sin tener en cuenta la resistencia del aire, se obtuvo un valor de diferencia de 0.00% dando a entender la precisión de los datos. Mientras que, al repetir los pasos, teniendo en cuenta la resistencia del aire, el valor mayor de diferencia en rango fue 0.81%, mientras que la mayor diferencia en el tiempo resultó ser 0.90%. El ángulo con mayor alcance resultó ser el de 45°.

### **I. Introducción**

El movimiento se puede encontrar en una dimensión al igual que también se estudia movimiento en dos direcciones, el cual se puede tomar como ejemplo, un proyectil. Este termino es representado como un objeto con cambios en velocidades que sigue una trayectoria determinada por el efecto de la aceleración gravitacional al igual que la resistencia del aire. Al estudiar la trayectoria en el plano compuesto por los ejes x, y, se puede observar que el movimiento del objeto puede determinarse en componentes perpendiculares. Es decir, que se puede determinar el movimiento en x con respecto a (y) o viceversa. Esto facilita calcular el movimiento separado en coordenadas. Si no se tomara en cuenta la resistencia del aire en el objeto, se pueden expresar las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil por las siguientes ecuaciones:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$R = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\%diferencia = \frac{\text{Valor teorico} - \text{Valor experimental}}{\frac{\text{Valor teorico} + \text{valor experimental}}{2}} \times 100$$

## II. Datos y resultados

Para obtener los datos de la primera parte del experimento se utilizó el simulador PhET-Projectile Motion. La escala de altura utilizada fue aumentando 1m en cada intento y así hasta que llegó a 7m. la masa establecida en el simulador fue de 17.60kg, el diámetro de 0.18m, la gravedad de 9.81m/s<sup>2</sup>, además se consideró inexistente la resistencia del aire. Como velocidad inicial se utilizó 10m/s para cada uno de los intentos de la tabla 2. Luego, se realizaron los cálculos experimentales del tiempo de vuelo y alcance utilizando ecuaciones 7 y 8, respectivamente. Además, se calculó el porcentaje de diferencia utilizando la ecuación 9. Como valor teórico se tomó el valor calculado a través de las ecuaciones y como experimental, se tomó el valor brindado por el simulador. Por último se realizó nuevamente el proceso completo, resultados reflejados en la tabla 3.



Tabla 2; Tabla para toma de datos primera parte sin resistencia al aire

#	$h$ (m)	$v_0$ ( $\frac{m}{s}$ )	$t_v$ (s)	$t_v(\text{teórico})$ (s)	% Dif ( $t_v$ )	$R$ (m)	$R_{\text{teórico}}(m)$	% Dif ( $R$ )
1	1m	10m/s	0.45s	0.45s	0.00%	4.52m	4.52m	0.00%
2	2m	10m/s	0.64s	0.64s	0.00%	6.39m	6.39m	0.00%
3	3m	10m/s	0.78s	0.78s	0.00%	7.82m	7.82m	0.00%
4	4m	10m/s	0.90s	0.90s	0.00%	9.03m	9.03m	0.00%
5	5m	10m/s	1.01s	1.01s	0.00%	10.10m	10.10m	0.00%
6	6m	10m/s	1.11s	1.11s	0.00%	11.06m	11.06m	0.00%
7	7m	10m/s	1.19s	1.19s	0.00%	11.95m	11.95m	0.00%



Figura 2.1: Intento 1 sin resistencia al aire

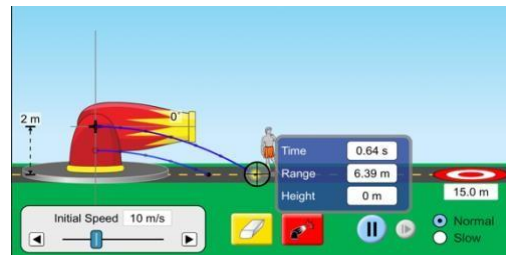


Figura 2.2: Intento 2 sin resistencia al aire

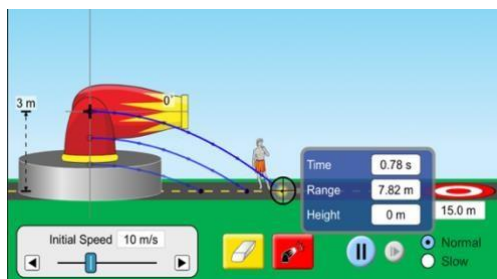


Figura 2.3: Intento 3 sin resistencia al aire



Figura 2.4: Intento 4 sin resistencia al aire

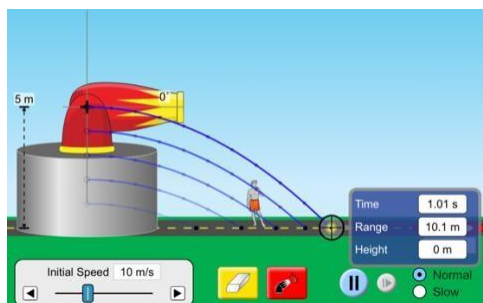


Figura 2.5: Intento 5 sin resistencia al aire



Figura 2.6: Intento 6 sin resistencia al aire

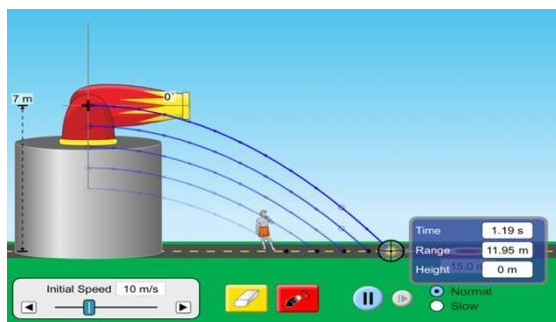


Figura 2.7: Intento 7 sin resistencia al aire

Tabla 3: Tabla para toma de datos de primera parte con resistencia al aire

#	$h(m)$	$v_0(\frac{m}{s})$	$tv(s)$	$tv(teórico)(s)$	%Dif( $t_v$ )	$R(m)$	$R(teórico)(m)$	% Dif ( $R$ )
1	1m	10m/s	0.45s	0.45s	0.00%	4.51m	4.52m	0.22%
2	2m	10m/s	0.64s	0.64s	0.00%	6.38m	6.39m	0.16%
3	3m	10m/s	0.78s	0.78s	0.00%	7.81m	7.82m	0.13%
4	4m	10m/s	0.90s	0.90s	0.00%	9.02m	9.03m	0.11%
5	5m	10m/s	1.01s	1.01s	0.00%	10.08m	10.10m	0.20%

6	6m	10m/s	1.10s	1.11s	0.90%	10.97m	11.06m	0.81%
7	7m	10m/s	1.20s	1.19s	0.84%	11.92m	11.95m	0.25%



Figura 3.1: Intento 1 con resistencia al aire



Figura 3.2: Intento 2 con resistencia al aire

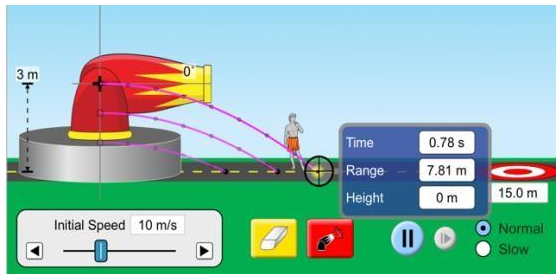


Figura 3.3: Intento 3 con resistencia al aire

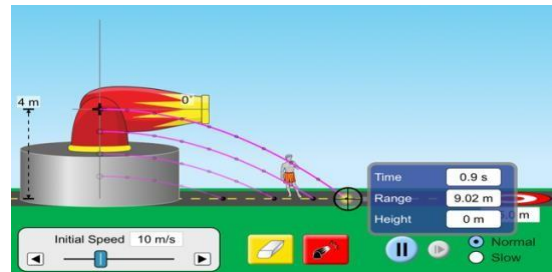


Figura 3.4: Intento 4 con resistencia al aire

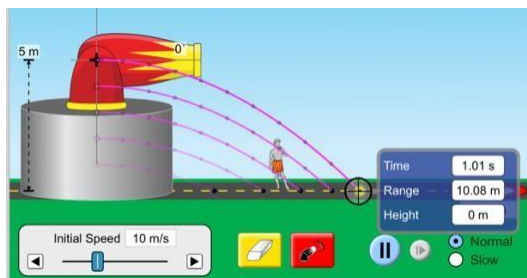


Figura 3.5: Intento 5 con resistencia al aire

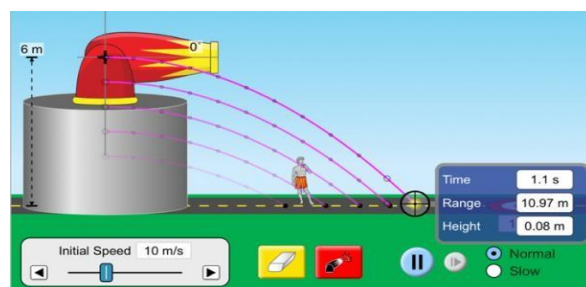


Figura 3.6: Intento 6 con resistencia al aire

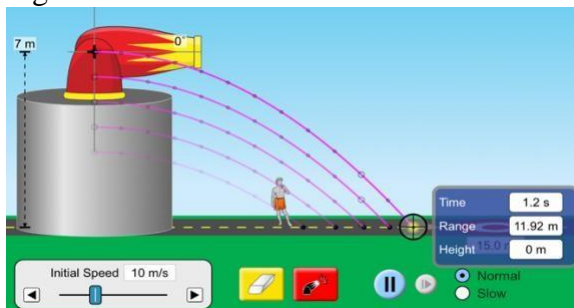


Figura 3.7: Intento 7 con resistencia al aire

Cálculos intento #1 tabla 2:

$$T_v = \frac{\sqrt{2h}}{g} = \sqrt{\frac{2(1m)}{\frac{9.81m}{s^2}}} = 0.451s$$

$$R = v_0 \frac{\sqrt{2h}}{g} = 10m/s \sqrt{\frac{2(1m)}{\frac{9.81m}{s^2}}} = 4.515m$$

$$\% \text{ de dif.}(tv) = |0.45s - 0.45s| / (0.45s + 0.45s) \times 100 = 0.00\%$$

$$\% \text{ de dif.}(R) = |4.52m - 4.452m| / (4.52m + 4.52m) \times 100 = 0.00\%$$

Para obtener los datos de la segunda parte, se utilizó nuevamente el simulador, pero esta vez utilizando fijamente para todos los lanzamientos la altura inicial de  $h=0m$ . Como ángulos de lanzamiento, se utilizaron los ángulos brindados en la tabla 4. Para cada lanzamiento, como velocidad inicial se utilizó 13m/s, y luego, de la tabla ubicada en la esquina derecha de cada una de las imágenes, se obtuvo el tiempo de vuelo y el alcance calculados.

Tabla 4: Datos de la segunda parte de la simulación

#	$\Theta$ (grados)	$v_0 \left( \frac{m}{s} \right)$	$t_v$ (s)	$R$ (m)
1	30°	13m/s	1.33s	14.92m
2	40°	13m/s	1.7s	16.97m
3	45°	13m/s	1.87s	17.23m
4	50°	13m/s	2.03s	16.97m
5	60°	13m/s	2.3s	14.92m

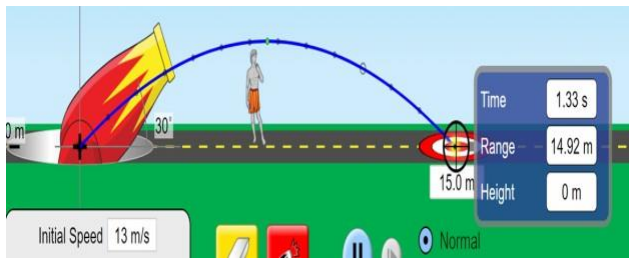


Figura 4.1: proyectil con  $30^\circ$

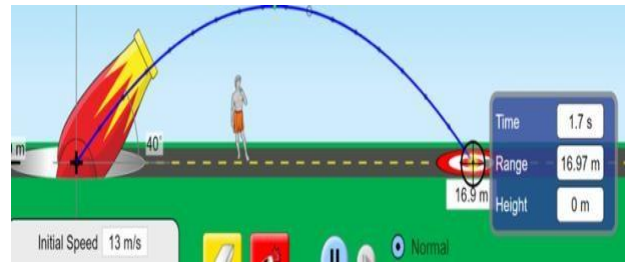


Figura 4.2: proyectil con  $40^\circ$

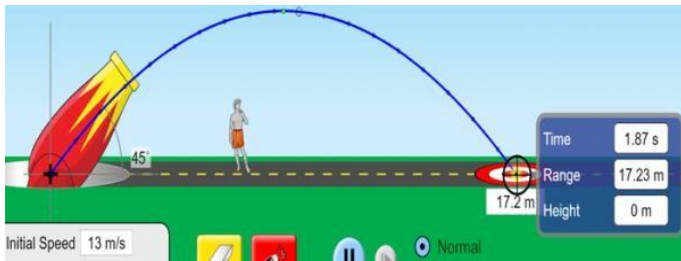


Figura 4.3: proyectil con  $45^\circ$

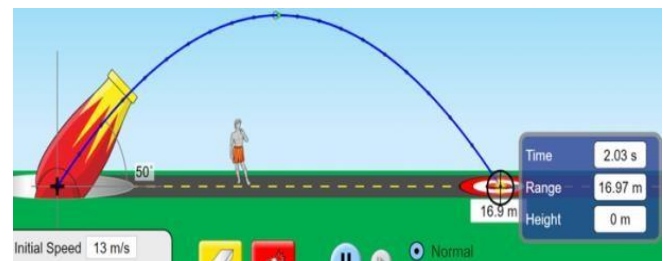
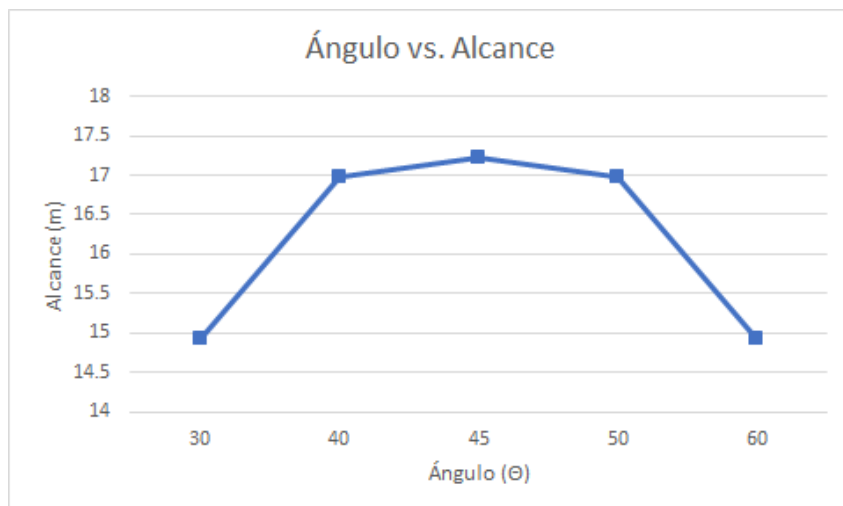


Figura 4.4: proyectil con  $50^\circ$



Figura 4.5: proyectil con  $60^\circ$

Figura 4.6: Gráfica de Ángulo y Alcance



La gráfica refleja que donde mayor alcance hay es en el ángulo de  $45^\circ$ , y esto se debe a que, al calcular el alcance, se obtiene seno de  $90^\circ$ , donde este es el punto máximo de seno.

### III. Análisis de Datos

A través de la información recopilada en la primera parte del laboratorio virtual se observó que, al comparar los datos del alcance y tiempo de vuelo sin resistencia de aire, se obtuvo un porcentaje de diferencia de 0.00% en todos los casos. Esto significa que todos los casos fueron precisos entre sí mismos. Luego al compararlos con la resistencia al aire, se obtuvo un porcentaje de 0.11% a 0.90% de diferencia respectivamente. El aumento de diferencia tomando en consideración la resistencia del aire da como resultado que el área y la velocidad son directamente proporcionales a la resistencia del aire. Cuando se tiene en consideración la resistencia del aire, aumenta el área y velocidad, provocando que aumente la distancia y disminuya el tiempo. El cambio en el porcentaje de error puede ser debido a un error de la simulación. En la segunda parte se pudo observar que el objeto que se lanzó a 45 grados obtiene el alcance máximo. El alcance mayor se obtuvo desde dicho ángulo ya que se lanzó y cayó a la misma altura. Un dato adicional es que los ángulos complementarios siempre tendrán el mismo alcance cuando su velocidad sea igual. Los ángulos con menos alcance fueron  $30^\circ$  y  $60^\circ$  respectivamente, mientras que  $40^\circ$  y  $50^\circ$  obtuvieron el mismo alcance.

### IV. Conclusión

Durante este experimento virtual se cumplieron varios objetivos tales como determinar la distancia horizontal recorrida por método experimental y por medio de cálculos. Se calculó la distancia ya teniendo la velocidad inicial y el modelo para el movimiento de proyectiles. Esto ayudó a contrastar resultados considerando la resistencia del aire, y determinar experimental el alcance de proyectiles disparados a diferentes ángulos. En la primera parte se obtuvo que la resistencia del aire afecta el comportamiento de los proyectiles en dos dimensiones. El porcentaje de diferencia encontrado fue uno de 0.00 % al no considerarse el efecto de la resistencia del aire. Al sí considerarse el efecto de la resistencia del aire se obtuvieron varios porcentajes de diferencias entre el 0.11% y el 0.90%. La resistencia del aire siempre dependerá de la velocidad con la que se lance el objeto y el área de este. Es decir, que a mayor velocidad lanzado el proyectil se verá una alta resistencia del aire efectuando sobre el proyectil. Sin embargo, en la segunda parte se observó la tendencia de que el ángulo donde mayor alcance hubo fue en del 45 grados. Finalmente, a través de este experimento se logró observar el movimiento de proyectiles para su interpretación y su análisis relacionado al comportamiento de acuerdo con las ecuaciones utilizadas.

## V. Referencias

Dubson M., Rouinfar A., *Movimiento de un Proyectil*, University of Colorado Boulder, 2002.  
[https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_en.html)

López J., Marrero P., Roura E. *Manual de Experimentos de Física I*. John Wiley and Sons, Inc. 2008. Pags21-26.

OpenStax. *University Physics Volume 1*. Rice University 2018. Pags43-104.

INICIALES: R. O. R.<sup>1</sup>, A. J. N. P.<sup>2</sup>, P. N. O.<sup>3</sup>