Méthodes de Monte-Carlo en Finance
(Projets informatiques)

V. Lemaire & G. Pagès

Master 2 Probabilités et Finance,

Sorbonne Université - École Polytechnique

2018-2019

21 janvier 2019

1 Les règles du jeu

• Les projets sont à réaliser par binôme (=groupe de deux personnes) ou (éventuellement) seul, à l'exclusion de toute autre configuration. Un projet ne peut pas être pris par plus de 2 binômes

• Le travail à rendre (les “livrables")

– Un rapport écrit de dix à quinze pages sur les aspects théoriques du sujet et la mise en œuvre algorithmique (incluant en guise d'introduction la recopie exhaustive de l'énoncé du sujet que vous avez choisi).

– Les sources informatiques respectant le cahier des charges précisé dans le **guide technique** joint. Il s'agit d'un cahier des charges impératif : aucun effort ne sera fait pour ouvrir, exécuter des scripts ne remplissant pas ces recommandations. La première de ces recommandations est **l'envoi à l'adresse e-mail spécifique**.

Le tout dans un dossier compressé.

• Le rapport écrit doit contenir

1. Une présentation mathématique du modèle et de la technique employée. Vous devez montrer que vous avez compris et que vous pouvez prendre un peu de recul, quitte à travailler dans un cadre simplifié dans lequel les mathématiques sont plus simples (ex : cadre Black-Scholes pour le calcul de Malliavin). Attention aux termes dont vous n'êtes pas certains (par exemple une intégrale de Skorohod n'est pas une intégrale d'Itô,...)
2. Une étude numérique de la robustesse de la méthode proposée (pour différentes valeurs des paramètres, différents pay-offs,. . .) et/ou une comparaison critique des différentes approches utilisées. La méthodologie suivies dans les expériences numériques doivent être explicitées, puis leurs résultats présentés sous formes de graphiques et de tableaux commentés.
3. La présentation des résultats de simulation sous forme d'intervalles de confiance lorsque cela a un sens est impérative. Même lorsque ce n'est pas précisé explicitement, il faudra, à chaque fois que c'est possible, mettre en œuvre (en les explicitant) des méthodes de réduction de variance et évaluer leur impact sur la qualité du résultat.
4. Un page contenant le choix de l'implémentation informatique en C++ : choix des classes, du type de programmation : générique ou dynamique, etc.

• Une fois votre binôme formé et votre sujet choisi, vous devez vous inscrire sur le site *doodle* donné dans le mail et sur le site web `www.lpsm.paris/~lemaire/projets_MC/`. *Aucun sujet ne peut être pris par plus de deux binômes.*

• Vous pouvez passer nous (= V. Lemaire ou G. Pagès) voir si vous avez des questions

les jeudis de 13h à 15h.

Contact : V. Lemaire Bureau 16-26-208, et G. Pagès Bureau 16-26-202.

Dans la mesure du possible, prévenez-nous par e-mail de votre visite. Les projets sont à choisir dans la liste ci-dessous et

Les rapports seront envoyés
exclusivement à l'adresse e-mail : m2financep6@gmail.com
au plus tard le 15 avril 2019 !

La note finale tiendra compte de la qualité de l'exposé de la problématique et du programme (rapidité, facilité d'utilisation), de votre esprit d'initiative et de la difficulté du sujet.

2 Liste des sujets de projets

Tous les projets peuvent être réalisés en CUDA. Un tel choix donnera lieu à l'attribution d'un bonus (en terme de note s'entend)sous réserve que cette implémentation donne lieu à une comparaison numérique des performances résultant de cette parallélisa-tion sur GPU. Certains projets se prêtent mieux à la mise en œuvre de ces techniques de programmation, notamment ceux reposant massivement sur une simulation de type Monte Carlo standard.

2.1 Schémas de discrétisation du modèle CIR

▷ Comparer numériquement les schémas de discrétisation de l'EDS du CIR (et/ou de la volatilité dans le modèle de Heston) proposés dans les travaux[1] et [3]. On testera les schémas sur diverses options et on comparera avec les valeurs de référence obtenues par les formules semi-fermées de l'article originel [41] (que l'on programmera donc).

Références : [41], [1], [3].

2.2 Schéma de Ninomiya-Victoir

Etudier le schéma d'ordre faible élevé introduit dans [56] et étendu dans [2] pour les modèles affines.

▷ Appliquer cette méthode pour le pricing d'options asiatiques dans le modèle de Heston. Comparer avec différentes méthodes de réduction de variance.

▷ Comment mettre en œuvre cette méthode dans le cadre Quasi-Monte Carlo ? Tester numériquement.

Références : [56], [2].

2.3 Modèle(s) à volatilité stationnaire I

▷ À partir des méthodes de mesure d'occupation de schémas d'Euler à pas décroissant présentées dans les articles [49, 63, 62, 59], calculer le prix d'options vanilles, puis asiatiques dans un modèle de Heston à volatilité sous régime stationnaire puis dans un modèle à sauts de type Bates (tel que celui considéré dans [59]).

▷ On pourra mettre en œuvre une extrapolation de type Richardson-Romberg à accroissements browniens consistents dans ce cadre à pas décroissant en s'inspirant de [58]. dans ce cadre (me consulter directement éventuellement).

Références : [49], [63], [62], [59], [58].

2.4 Modèle(s) à volatilité stationnaire II

▷ À partir des méthodes de mesure d'occupation de schémas d'Euler à pas décroissant présentées dans les articles [49, 63, 62, 59], calculer le prix d'options barrières dans un modèle de Heston à volatilité sous régime stationnaire.

▷ On pourra mettre en œuvre une méthode de pont brownien avec ou sans préconditionnement adaptée de celle du cours.

Références : [49], [63], [62], [59], [58].

2.5 Calcul de sensibilités

▷ Calculer les sensibilités (delta, gamma, vega) d'un call européen vanille dans le modèle de Black-Scholes. On utilisera et comparera : l'approche par différences finies à pas fixe (cf. polycopié), l'approche par différences finies à pas décroissant (cf. polycopié), l'approche par processus tangent (on dérive/différentie formellement le payoff lorsque c'est possible) et l'approche par "calcul de Malliavin" (on utilise la formule avec poids obtenue après intégration par parties ou différentiation de la densité).

▷ Reprendre ces 4 approches pour une option digitale européenne de payoff $\mathbf{1}_{\{X_T \leq K\}}$. On justifiera les approches effectivement implémentées (et celles qui ne le sont/peuvent pas).

▷ Implémenter ces méthodes dans un modèle de type pseudo-CEV ($\vartheta \in]0,1[$) :

$$dX_t = rX_t dt + X_t^{\vartheta} \frac{X_t}{\sqrt{1+X_t^2}} dW_t, \qquad X_0 = x_0 > 0.$$

Références : [33], [32], [18], [45].

2.6 Options Lookback et sensibilités.

▷ Étudier et implémenter la méthode de calcul du delta (et du gamma) par calcul de Malliavin proposée par [14] pour différentes options de type lookback de votre choix.

▷ Calculer également le delta la par méthode du flot, par différences finies : à pas fixe , à pas décroissant. Dans le second cas on chosira avec soin la constante "c" qui gouverne le pas de différence finie. On pourra ajouter des réducteurs de variance.

▷ Comparer le poids de Malliavin avec celui obtenu par l'approche martingale dans [40].

▷ Calculer le gamma par différences finies, par une approche mixte (différences finies sur la méthode du flot) et comparer les résultats obtenus par les deux méthodes. On pourra ajouter des réducteurs de variance.

Références : [14], [33], [40].

2.7 Calcul des sensibilités par différentiation automatique

▷ Etudier la méthode numérique introduit dans [22] (cf. aussi [23]) pour calculer des sensibilités par la méthode du flot (ou processus tangent) en utilisant une technique de différentiation automatique (algorithm differentiation).
▷ Vérifier numériquement l'approche en insisant sur le coût numérique (la complexité). Il est possible d'appeler ou d'adapter des librairies existentes de différentiation automatique (cf. le site `http://www.autodiff.org`)

Références : [23], [22].

2.8 Calcul des sensibilités : méthode hybride Vibrato Monte Carlo et différentiation automatique

▷ Etudier la méthode numérique introduit dans [60] (cf. aussi [36]) pour calculer des sensibilités du premier ordre (delta, vega) et du second ordre par la méthode de Vibrato Monte Carlo (qui consiste à régulariser les payoffs).
▷ Vérifier numériquement l'approche en insisant sur le coût numérique (la complexité). Il est possible d'appeler ou d'adapter des librairies existentes de différentiation automatique (cf. le site `http://www.autodiff.org`)

Références : [60], [36].

2.9 Multilevel Monte Carlo pour les diffusions

▷ Implémenter la méthode Multilevel Monte Carlo proposée et analysée dans [35] (voir aussi [44] dans le cas $L = 2$) en considérant dans un premier temps les payoffs asiatiques de l'article, puis appliquer la méthode à d'autres options exotiques (barrières, lookback, etc) en partant d'une méthode de simulation déjà validée (typiquement approche par ponts browniens, etc).

▷ Comparer avec la méthode Multistep Romberg introduite dans [58].

▷ Étudier numériquement cette méthode avec la méthode Antithetic Multilevel introduite dans [37].

Références : [44], [35], [58], [37].

2.10 Multilevel Richardson-Romberg pour les diffusions

▷ Implémenter la méthode Multilevel Richadrson-Romberg proposée et analysée dans [53] (voir aussi [44] dans le cas $L = 2$) en considérant les exempls numériques de l'article.

▷ Comparer numériquement cette méthode avec la méthode Multilevel Monte Carlo introduite dans [35] et avec la méthode Multistep Romberg introduite dans [58].

Références : [53], [35], [58].

2.11 Simulations imbriquées et calcul de risques

▷ Etudier et implémenter les 5 estimateurs introduits dans [19] de la probabilité d'une grande perte d'un portefeuille donné.

▷ Comparer les résultats numériques avec ceux obtenus en programmant l'estimateur Multilevel Richarson-Romberg pour nested Monte Carlo introduit dans [53].

Références : [19], [53].

2.12 Options américaines par l'approche duale.

▷ Étudier l'approche développée par Rogers dans [64] pour l'évaluation des options américaines.

▷ Faire une étude numérique dans le cas d'un put américain de payoff $(K - X_t^1)_+$, puis d'une option américaine sur moyenne géométrique de payoff $(K - \sqrt{X_t^1 X_t^2})_+$ où X^1 et X^2 suivent une dynamique de Black-Scholes bi-dimensionnelle. Peut-on observer un biais d'évaluation ?

▷ Implémenter l'algorithme Multilevel introduit dans [13].

Références : [64], [13].

2.13 Options américaines par régression.

▷ Étudier et implémenter l'approche développée dans [55] pour l'évaluation d'un put américan de payoff $(K - X_t^1)_+$, puis d'une option américaine sur moyenne géométrique de payoff $(K - \sqrt{X_t^1 X_t^2})_+$ où X^1 et X^2 suivent une dynamique de Black-Scholes bi-dimensionnelle. Faire une étude numérique sur le prix du delta.

Références : [55], [25], [24], [26].

2.14 Options Americaine par méthode de quantification

▷ Implémenter l'algorithme de quantification optimale proposés par [6, 7]. On pourra utiliser les grilles gaussiennes pré-calculées téléchargeables sur le site référencé ci-dessous.

▷ On pourra prendre comme payoffs des put vanille en dimension 1, des options d'échange et des puts sur moyenne géométrique en dimension 2. Proposer des mèthodes de type "réduction de variance" et les implémenter.

▷ En faisant une hypothèse sur le développement de l'erreur de quantification, proposer une méthode d'extrapolation de type Romberg.

Références : [11], [20], [26], website : `www.quantize.maths-fi.com`.

2.15 Options Americaines par projection sur le payoff et par arbre aléatoire

▷ Implémenter l'algorithme de Barraquant-Martineau présenté dans[11] et l'algorithme d'arbre stochastique proposé dans[20].
On pourra prendre comme payoffs des put vanille en dimension 1, des options d'échange et des puts sur moyenne géométrique en dimension 2.

Références : [11], [20], [5].

2.16 Options américaines par Malliavin

▷ Mettre en place l'algorithme d'évaluation d'options américaines proposé par [54] et [17] dans le modèle de Black et Scholes en dimension 1.

▷ Évaluer un put américain ainsi que le delta associé. Étudier la vitesse de convergence en terme de nombre de pas de temps et de simulations. Proposer et implémenter une méthode de réduction de variance.

▷ Évaluer un put sur moyenne géométrique dans le modèle de Black et Scholes en dimension 2.
Reprendre le projet précédent mais cette fois-ci en le combinant avec l'approche de Longstaff-Schwartz [55], *i.e.*, en estimant les temps d'exercice plutôt que les prix.

Références : [16], [17], [33], [54].

2.17 Options swing "Take or Pay" par régression

▷ En vous appuyant sur[12] programmer un algorithme de calcul d'options swing "Take or Pay" par une approche "régression" (on se restreindra au modèle dit "1 facteur"). On pourra prendre comme (premières) fonctions de base de projection les monômes, les polynômes d'Hermite. *Références* : [12] [26].

2.18 Options swing "Take or Pay" par quantification

▷ En vous appuyant sur[8] (et[9] si nécessaire), programmer un algorithme de calcul d'options swing "Take or Pay" par quantification (on se restreindra au modèle dit "1 facteur").

Références : [8], [9], [21], website : `www.quantize.maths-fi.com`.

2.19 Échantillonage d'importance récursive pour la réduction de variance

▷ À partir des articles [4],[52] et du polycopié. Testez différentes approches de réduction de variance récursives par importance sampling et leur implantation adaptative (ou batch) dans la méthode de Monte Carlo. On s'attachera à tester différents types de parmétrisation (translation, Esscher, etc).

▷ Comparer avec l'algorithme introduit dans [42].

Références : [4], [52], [42].

2.20 Algorithmes stochastiques, réduction de variance récursive et QMC

▷ Programmer la suite de Van der Corput (de base 2) puis, plus généralement la machine à additionner de Kakutani, uni- et multi-dimensionnelles. Comparer les performances des deux modes de génération lorsque les suites coïncident.

▷ Implanter ces suites dans l'algorithmes de réduction de variance par échantillonnage d'importance récursif proposé en cours. On testera plusieurs valeurs initiales ("angles") pour les suites à discrépance faible obbtenues par la machine de Kakutani (notamment celles préconisées dans le poly).

▷ Mettre en œuvre l'algorithme d'extraction de la corrélation implicite sur une option Best-of dans ce cadre.

Références : [51, 50, 57, 15], polycopié de cours.

2.21 Calcul de VaR et CVaR par algorithmes stochastiques

▷ Implanter les algorithmes de calcul de V@R et CV@R proposés en cours sur diverses lois (exponentielles, gaussiennes, $\gamma(\alpha, \beta)$, etc). Noter que, pour les lois exponentielles ou des fonctions monotones de variables exponentielles, des formules fermées existent. On commencera par des niveaux de confiance médian (ce qui n'est pas réaliste).

▷ Lorsque les niveaux s'éloignent de $1/2$ on introduira une méthode de réduction de variance récursive et un seuil de risque adaptatif tel que décrit dans[10] (dont le but est de réduire la variance liée à l'estimation de la CV@R). On prendra un soin particulier au réglage du pas et s'attachera à mettre en évidence numériquement des vitesses de convergence.

Références : [51, 50, 57], [10].

2.22 Stratification adaptative *vs* randomized QMC

▷ Comparer les performances des méthodes de stratification exposées dans [31] et de QMC randomisées exposées dans [69] sur les exemples présentés dans [31].

Références : [69], [31].

2.23 Stratification par quantification produit

▷ En vous inspirant de l'article [27] et du polycopié, ecrire et implémanter un algorithme de réduction de variance par stratification basé sur la quantification produit (et non la quantification fonctionnelle utilisée dans l'article [27]).

Référence : [27]

2.24 Options vanilles et processus de Lévy

▷ Implémenter la méthode de simulation d'une EDS dirigée par un Lévy proposée dans [66] pour différents types de payoffs et de mesures de Lévy. Étudier la convergence et la stabilité empirique de la procédure utilisée.

▷ Comparer le pricing par Monte Carlo à un pricing par Fourier dans les exemples considérés dans [67].

Références : [66], [67].

2.25 Options parisiennes

Une option parisienne sur le sous-jacent X est une option dont le payoff est de la forme :

$$g(X_T)\mathbf{1}_{\{\text{le temps que } X \text{ passe au-dessus de } U \text{ est à chaque fois inférieur à } \theta\}}$$

où $\theta < T$ et U est une barrière. ▷ En utilisant une approche par ponts de diffusion, proposer une méthode d'évaluation de ces options. Faire une étude numérique dans le cas où $g(x) = (x - K)_+$. Considérer ensuite deux cas où la barrière dépend du temps :

- $U = u(t)$ où u est de la forme $u(t) = u_0 e^{at+b}$,
- $U = u(t)$ où u est de la forme $u(t) = at + b$.

▷ Implémenter les méthodes de type Laplace/Fourier inverse de [47]. Dans un second temps étendre aux double-barrières en vous appuyant sur[48].

Références : [34] (et les deux références qui y sont citées), [47], [48].

2.26 Options barrière up-and-in.

Une option barrière up-and-in est une option dont le payoff est de la forme

$$(X_T - K)_+\mathbf{1}_{\{\sup_{t\in[0,T]} X_t \geq U\}}.$$

▷ En utilisant l'approche par conditionnement et ponts de diffusions, proposer une algorithme d'évaluation par simulation de Monte Carlo. Considérer ensuite le cas où la barrière dépend du temps :

$$(X_T - K)_+\mathbf{1}_{\{\sup_{t\in[0,T]}(X_t \geq U_t \geq 0\}}.$$

avec U_t de la forme $U_t = u_0 + t$.

▷ Proposer une méthode de réduction de variance de type échantillonnage d'importance lorsque $u_0 \ll X_0$.

▷ Faites une hypothèse sur le développement asymptotique “fin" de l'erreur faible. Déduisez-en une méthode d'extrapolation de Romberg. Validez-là numériquement et utilisez-là.

Références : [38], [39], [65], [18], [58].

2.27 Options barrières dans le LIBOR Market Model

▷ Implémenter l'algorithme introduit dans [46] (similaire à la méthode du pont Brownien pour le pricing des options barrières dans un modèle de diffusion).

▷ Faire le pricing de barrier cap et de barrier swaption par cette méthode et comparer à un Monte Carlo classique.

Référence : [46].

2.28 Pricing de CDO

▷ Implanter un programme de pricing de tranches de CDO par la méthode de Monte Carlo en vous appuyant sur [43]. On commencera par considérer le cadre standard gaussien, puis on traitera divers autre types de lois : student, Normal Inverse Gaussian. Comparer. Toutes les réductions de variance sont bienvenues.

▷ Substituer des suites à discrépance faible aux nombres pseudo-aléatoires (Halton, Kakutani "spéciale" du poly) *que vous aurez programmées vous-même*. Comparaison possible avec la suite de Sobol [voir *e.g.* `http://people.sc.fsu.edu/burkardt/cpp_src/sobol/sobol.C`].

▷ Comparer ces prix Monte Carlo et Quasi Monte Carlo à ceux obtenus par la méthode de Stein [29, 28] et par un arbre de quantification duale [61].

Références : [43], [68], [29], [28] [61].

2.29 Call option avec dividendes discrets

▷ Utiliser les formules de développement stochastique introduites dans [30] pour pricer des Call avec dividendes discrets.

▷ Comparer avec une méthode de Monte Carlo sans et avec variable de contrôle (par exemple la variable de contrôle optimale dérivée du pricing d'un Call sans dividende).

Référence : [30].

Références

[1] A. Alfonsi. On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes. *Monte Carlo Methods Appl.*, 11(4) :355–384, 2005.

[2] A. Alfonsi. High order discretization schemes for the cir process : Application to affine term structure and heston models. *Math. Comput.*, 79(269) :209–237, 2010.

[3] L. B. Andersen. Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model. *SSRN eLibrary*, 2007.

[4] B. Arouna. Adaptative Monte Carlo method, a variance reduction technique. *Monte Carlo Methods Appl.*, 10(1) :1–24, 2004.

[5] A. Avramidis and P. Hyden. Efficiency improvements for pricing american options with a stochastic mesh. In *Simulation Conference Proceedings, 1999 Winter*, volume 1, pages 344–350. IEEE, 2002.

[6] V. Bally and G. Pagès. A quantization algorithm for solving multi-dimensional discrete-time optimal stopping problems. *Bernoulli*, 9(6) :1003–1049, 2003.

[7] V. Bally, G. Pagès, and J. Printems. A quantization tree method for pricing and hedging multidimensional American options. *Math. Finance*, 15(1) :119–168, 2005.

[8] O. Bardou, S. Bouthemy, and G. Pagès. Optimal quantization for the pricing of swing options. *Appl. Math. Finance*, 16(1-2) :183–217, 2009.

[9] O. Bardou, S. Bouthemy, and G. Pagès. When are swing options bang-bang ? *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13(06) :867–899, 2010.

[10] O. Bardou, N. Frikha, and G. Pagès. Computing VaR and CVaR using stochastic approximation and adaptive unconstrained importance sampling. *Monte Carlo Methods Appl.*, 15(3) :173–210, 2009.

[11] J. Barraquand and D. Martineau. Numerical valuation of high dimensional multivariate american securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30(03) :383–405, 1995.

[12] C. Barrera-Esteve, F. Bergeret, C. Dossal, E. Gobet, A. Meziou, R. Munos, and D. Reboul-Salze. Numerical methods for the pricing of swing options : a stochastic control approach. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 8(4) :517–540, 2006.

[13] D. Belomestny, J. Schoenmakers, and F. Dickmann. Multilevel dual approach for pricing american style derivatives. *Finance and Stochastics*, 17(4) :717–742, 2013.

[14] G. Bernis, E. Gobet, and A. Kohatsu-Higa. Monte Carlo evaluation of Greeks for multidimensional barrier and lookback options. *Math. Finance*, 13(1) :99–113, 2003. Conference on Applications of Malliavin Calculus in Finance (Rocquencourt, 2001).

[15] J.-P. Borel, G. Pagès, and Y. Xiao. Suites à discrépance faible et intégration numérique. In *Probabilités numériques*, volume 10 of *Collect. Didact.*, pages 7–22. INRIA, Rocquencourt, 1992.

[16] B. Bouchard, I. Ekeland, and N. Touzi. On the Malliavin approach to Monte Carlo approximation of conditional expectations. *Finance Stoch.*, 8(1) :45–71, 2004.

[17] B. Bouchard and N. Touzi. Discrete-time approximation and Monte-Carlo simulation of backward stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.*, 111(2) :175–206, 2004.

[18] P. Boyle, M. Broadie, and P. Glasserman. Monte Carlo methods for security pricing. *J. Econom. Dynam. Control*, 21(8-9) :1267–1321, 1997. Computational financial modelling.

[19] M. Broadie, Y. Du, and C. C. Moallemi. Efficient risk estimation via nested sequential simulation. *Management Science*, 57(6) :1172–1194, 2011.

[20] M. Broadie and P. Glasserman. A stochastic mesh method for pricing high-dimensional american options. *Journal of Computational Finance*, 7 :35–72, 2004.

[21] A. Bronstein, G. Pagès, and B. Wilbertz. How to speed up the quantization tree algorithm with an application to swing options. *Quantitative Finance*, 99999(1) :1–13, 2010.

[22] L. Capriotti. Fast greeks by algorithmic differentiation. *Journal of Computational Finance*, 14(3) :3, 2011.

[23] L. Capriotti and M. Giles. Fast Correlation Greeks by Adjoint Algorithmic Differentiation. page Risk Magazine, Apr. 2010.

[24] J. Carriere. Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression. *Insurance : mathematics and Economics*, 19(1) :19–30, 1996.

[25] E. Clément, D. Lamberton, and P. Protter. An analysis of a least squares regression method for American option pricing. *Finance Stoch.*, 6(4) :449–471, 2002.

[26] P. Cohort. Monte carlo methods for pricing american style options. Documentation Premia 4, 2002.

[27] S. Corlay and G. Pagès. Functional quantization-based stratified sampling methods, Oct. 2014.

[28] N. El Karoui and Y. Jiao. Stein's method and zero bias transformation for CDO tranche pricing. *Finance Stoch.*, 13(2) :151–180, 2009.

[29] N. El Karoui, Y. Jiao, and D. Kurtz. Valuation and VaR Computation for CDOs Using Stein's Method. *Applied Quantitative Finance*, pages 161–189, 2008.

[30] P. Etoré and E. Gobet. Stochastic expansion for the pricing of call options with discrete dividends. *Applied Mathematical Finance*, 19(3) :233–264, 2012.

[31] P. Étoré and B. Jourdain. Adaptive optimal allocation in stratified sampling methods. *Methodology and Computing in Applied Probability*, pages 1–26, 2008.

[32] E. Fournié, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, and P.-L. Lions. Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. II. *Finance Stoch.*, 5(2) :201–236, 2001.

[33] E. Fournié, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions, and N. Touzi. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Finance Stoch.*, 3(4) :391–412, 1999.

[34] I. Garreau and C. Lagneau. Rapport sur le pricing d'options parisiennes. Mémoire Probabilités et Finance, 2003.

[35] M. B. Giles. Multilevel Monte Carlo path simulation. *Operations Research*, 56(3) :607–617, 2008.

[36] M. B. Giles. Vibrato monte carlo sensitivities. In *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2008*, pages 369–382. Springer, 2009.

[37] M. B. Giles and L. Szpruch. Antithetic multilevel Monte Carlo estimation for multi-dimensional SDEs without Lévy area simulation, Aug. 2013.

[38] E. Gobet. Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes. *Stochastic Process. Appl.*, 87(2) :167–197, 2000.

[39] E. Gobet. Euler schemes and half-space approximation for the simulation of diffusion in a domain. *ESAIM Probab. Statist.*, 5 :261–297 (electronic), 2001.

[40] E. Gobet. Revisiting the Greeks for European and American options. In *Stochastic processes and applications to mathematical finance*, pages 53–71. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.

[41] S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of financial studies*, 6(2) :327, 1993.

[42] B. Jourdain and J. Lelong. Robust adaptive importance sampling for normal random vectors. page Annals of Applied Probability, Oct. 2009.

[43] A. Kalemanova, B. Schmid, and R. Werner. The normal inverse gaussian distribution for synthetic cdo pricing. *The Journal of Derivatives*, 14(3) :80–94, 2007.

[44] A. Kebaier. Statistical Romberg extrapolation : a new variance reduction method and applications to option pricing. *Ann. Appl. Probab.*, 15(4) :2681–2705, 2005.

[45] P. E. Kloeden and E. Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*, volume 23 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[46] M. Krivko and M. Tretyakov. Application of simplest random walk algorithms for pricing barrier options. *arXiv preprint arXiv :1211.5726*, 2012.

[47] C. Labart and J. Lelong. Pricing parisian options. Technical report, Technical report, ENPC, http ://cermics. enpc. fr/reports/CERMICS-2005/CERMICS-2005-294. pdf, 2005.

[48] C. Labart and J. Lelong. Pricing double barrier Parisian options using Laplace transforms. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 12(1) :19–44, 2009.

[49] D. Lamberton and G. Pagès. Recursive computation of the invariant distribution of a diffusion. *Bernoulli*, 8(3) :367–405, 2002.

[50] B. Lapeyre and G. Pagès. Familles de suites à discrépance faible obtenues par itération de transformations de [0, 1]. *Note aux CRAS, Série I*, 17 :507–509, 1989.

[51] B. Lapeyre, G. Pagès, and K. Sab. Sequences with low discrepancy—generalisation and application to Robbins-Monro. *Statistics*, 21(2) :251–272, 1990.

[52] V. Lemaire and G. Pagès. Unconstrained recursive importance sampling. *Ann. Appl. Probab.*, 20(3) :1029–1067, 2010.

[53] V. Lemaire and G. Pagès. Multilevel Richardson-Romberg extrapolation, Jan. 2014.

[54] P. Lions and H. Regnier. Calcul du prix et des sensibilités d'une option américaine par une méthode de monte carlo. preprint, 2001.

[55] F. Longstaff and E. Schwartz. Valuing american options by simulation : A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14(1) :113, 2001.

[56] S. Ninomiya and N. Victoir. Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing. *Appl. Math. Finance*, 15(1-2) :107–121, 2008.

[57] G. Pagès. van der Corput sequences, Kakutani transforms and one-dimensional numerical integration. *J. Comput. Appl. Math.*, 44(1) :21–39, 1992.

[58] G. Pagès. Multi-step Richardson-Romberg extrapolation : remarks on variance control and complexity. *Monte Carlo Methods Appl.*, 13(1) :37–70, 2007.

[59] G. Pagès and F. Panloup. Approximation of the distribution of a stationary Markov process with application to option pricing. *Bernoulli*, 15(1) :146–177, 2009.

[60] G. Pagès, O. Pironneau, and G. Sall. Vibrato and Automatic Differentiation for High Order Derivatives and Sensitivities of Financial Options. working paper or preprint, Nov. 2015.

[61] G. Pagès and B. Wilbertz. Dual Quantization for random walks with application to credit derivatives. *Arxiv preprint arXiv :0910.5655*, 2009.

[62] F. Panloup. Computation of the invariant measure for a Lévy driven SDE : rate of convergence. *Stochastic Process. Appl.*, 118(8) :1351–1384, 2008.

[63] F. Panloup. Recursive computation of the invariant measure of a stochastic differential equation driven by a Lévy process. *Ann. Appl. Probab.*, 18(2) :379–426, 2008.

[64] L. C. G. Rogers. Monte Carlo valuation of American options. *Math. Finance*, 12(3) :271–286, 2002.

[65] L. C. G. Rogers and O. Zane. Value moving barrier options. *Journal of Computational Finance*, 1 :5–11, 1997.

[66] S. Rubenthaler. Numerical simulation of the solution of a stochastic differential equation driven by a Lévy process. *Stochastic Process. Appl.*, 103(2) :311–349, 2003.

[67] P. Tankov and E. Voltchkova. Jump-diffusion models : a practitioner's guide. *Banque et Marchés*, 99 :1–24, 2009.

[68] G. Taraldsen and B. Lindqvist. The multiple roots simulation algorithm, the inverse gaussian distribution, and the sufficient conditional monte carlo method. *Relation*, 10(1.57) :7355, 2005.

[69] B. Tuffin. Randomization of quasi-Monte Carlo methods for error estimation : survey and normal approximation. *Monte Carlo Methods Appl.*, 10(3-4) :617–628, 2004.