# Exercício: Fronteira de Decisão em Modelos Generativos

## Exercício 1: Análise da Fronteira de Decisão em Modelos Generativos

### Resolução

(a) A fronteira de decisão ocorre onde as probabilidades posteriores das classes são iguais, ou seja, $p(C_1|\mathbf{x}) = p(C_2|\mathbf{x})$. Assumindo priors iguais $p(C_1) = p(C_2) = 0.5$, pela regra de Bayes:

$$p(\mathbf{x}|C_1) = p(\mathbf{x}|C_2)$$

A densidade Gaussiana multivariada é dada por:

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

Substituindo para cada classe:

$$\frac{1}{(2\pi)^{D/2}|\boldsymbol{\Sigma}_1|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)\right) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}|\boldsymbol{\Sigma}_2|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)\right)$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os lados:

$$-\frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}_1| - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) = -\frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}_2| - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)$$

Multiplicando por $-2$ e rearranjando:

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) - (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) = \ln\frac{|\boldsymbol{\Sigma}_1|}{|\boldsymbol{\Sigma}_2|}$$

A equação resultante é uma expressão quadrática em $\mathbf{x}$, indicando que a fronteira de decisão é uma superfície quadrática.

(b) Com priors $p(C_1) = \pi$, $p(C_2) = 1 - \pi$ e $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$, temos:

$$p(\mathbf{x}|C_1)\pi = p(\mathbf{x}|C_2)(1 - \pi)$$

Tomando o logaritmo natural:

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1) + \ln\pi = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2) + \ln(1 - \pi)$$

Como as covariâncias são iguais, os termos quadráticos de $\mathbf{x}$ se cancelam. Restando:

$$\mathbf{w}^T\mathbf{x} + w_0 = 0$$

Onde:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2), \quad w_0 = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_1^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_2) - \ln\frac{\pi}{1 - \pi}$$

Geometricamente, a variação de $\pi$ afeta o termo $w_0$, que desloca a fronteira, mas não altera sua orientação, que depende apenas de $\mathbf{w}$.

(c) A distância de Mahalanobis:

$$\Delta_1^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1)$$

mede quão distante um ponto $\mathbf{x}$ está do centro da classe normal. Se também houver um modelo Gaussiano para a classe fraude:

$$\Delta_2^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)^T \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2)$$

pode-se classificar $\mathbf{x}$ pela menor distância. Isso assume:

- Ambas as classes seguem distribuições Gaussianas multivariadas.
- Os parâmetros $(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)$ são bem estimados.
- Priors são iguais, ou incorporados via Bayes:

$$p(C_k|\mathbf{x}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\Delta_k^2\right) |\boldsymbol{\Sigma}_k|^{-1/2} p(C_k)$$