

# Семинар №5 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»

## Синтез цифрового фильтра

Кузнецов В.В., ассистент кафедры ЭИУ1-КФ

2 ноября 2014 г.

### 1 Цель работы

Целью семинара является синтез цифровых фильтров Чебышева, Баттерворта и Кауэра с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ) в среде численных расчётов GNU/Octave.

### 2 Теоретические сведения о БИХ (рекурсивных) цифровых фильтрах

Рекурсивный фильтр для формирования  $i$ -го выходного отсчёта использует не только предыдущие значения входного сигнала, но и предыдущие значения выходного сигнала:

$$y(i) = a_0x(i) + a_1x(i-1) + a_2x(i-2) + \dots + a_mx(i-m) + b_1y(i-1) + b_2y(i-2) + \dots + b_ny(i-n) \quad (1)$$

Причём коэффициенты  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  определяющие рекурсивную часть алгоритма фильтрации не равны нулю одновременно.

Применив Z-преобразование к выражению (1) получим системную функцию рекурсивного ЦФ:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m}}{1 - b_1z^{-1} - \dots - b_nz^{-n}} = \frac{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_mz^{n-m}}{z^n - b_1z^{n-1} - \dots - b_n} \quad (2)$$

Структурная схема рекурсивного ЦФ показана на рис.1.

Верхняя часть схемы отвечает трансверсальной (нерекурсивной) части алгоритма фильтрации. Для её реализации требуется в общем случае  $m+1$  масштабных блоков (операций умножения) и  $m$  ячеек памяти, в которых хранятся входные отсчёты.

Рекурсивной части алгоритма соответствует нижняя часть схемы. Здесь используется  $n$  последовательных значений сигнала, которые перемещаются из ячейки в ячейку путём сдвига.

Рекурсивные фильтры имеют бесконечную импульсную характеристику, так как в данном алгоритме имеются обратные связи. Приведём без вывода выражение для импульсной характеристики такого ЦФ 1-го порядка. Передаточная функция для него равна:

$$H(z) = \frac{a}{1 - bz^{-1}} = \frac{az}{z - b} \quad (3)$$

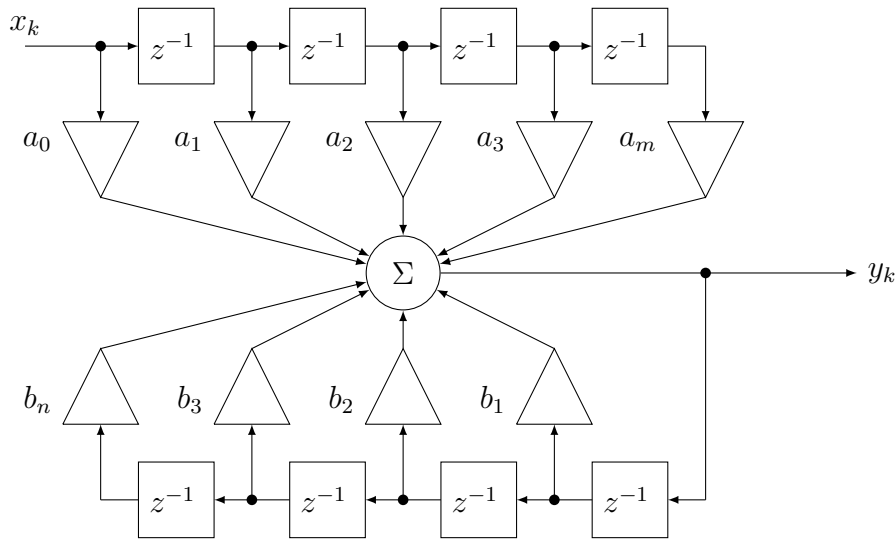


Рис. 1. Схема построения рекурсивного ЦФ

Импульсная характеристика вычисляется методом вычетов и представляет собой убывающую геометрическую прогрессию:

$$h(k) = Z^{-1}[H(z)] = (a, ab, ab^2, \dots) \quad (4)$$

Так как рекурсивный ЦФ имеет бесконечную импульсную характеристику, то он может быть неустойчивым. Практически могут применяться только устойчивые ЦФ. Критерий устойчивости рекурсивного ЦФ состоит в том, что фильтр является устойчивым, если полюсы его системной функции  $H(z)$  располагаются на комплексной плоскости внутри окружности с радиусом равным единице и с центром  $z = 0$ . Это утверждение приведём без вывода.

## 2.1 Параметры фильтров Баттерворта, Чебышева и Кауэра

Идеальный фильтр имеет АЧХ прямоугольной формы. Физически реализуемые фильтры имеют АЧХ, формы описываемой различными аппроксимациями. Рассмотрим наиболее употребительные из них. Фильтр Баттерворта имеет наиболее равномерную АЧХ в полосе пропускания и равномерно спадающую АЧХ в полосе задерживания.

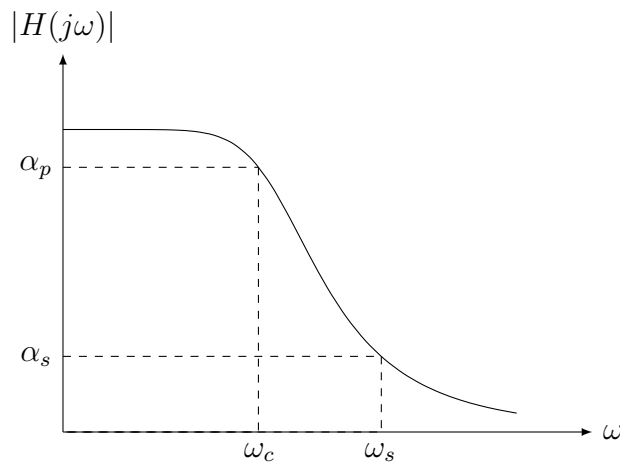


Рис. 2. Типичная АЧХ фильтра Баттерворта 4-го порядка

Фильтр Чебышева имеет более резкий спад АЧХ в полосе задерживания, но зато имеет пульсации АЧХ в полосе пропускания. Он характеризуется допустимой амплитудой пульсаций  $R_p$ .

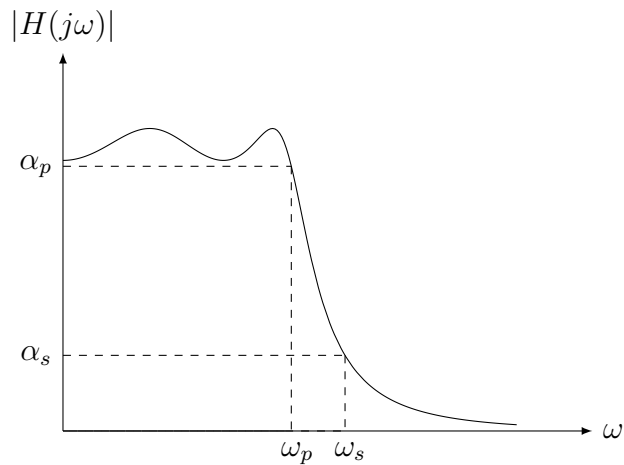


Рис. 3. Типичная АЧХ фильтра Чебышева 4-го порядка

Фильтр Кауэра (Эллиптический фильтр) имеет наиболее резкий спад АЧХ, но пульсации присутствуют и в полосе пропускания, и в полосе задерживания. Фильтр характеризуется допустимыми амплитудами пульсаций в полосе пропускания  $R_p$  и минимально допустимым затуханием в полосе задерживания  $R_s$ .

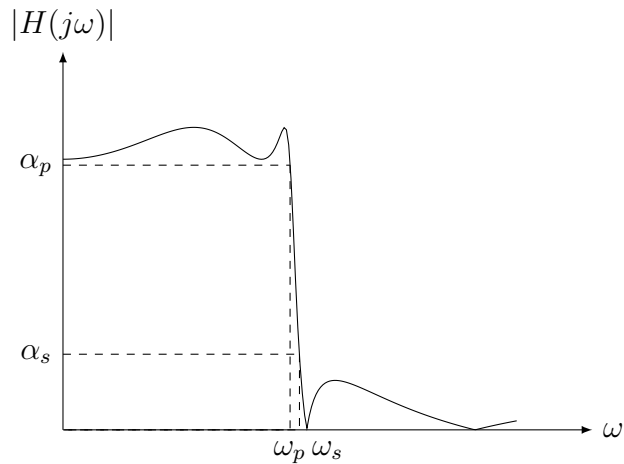


Рис. 4. Типичная АЧХ фильтра Кауэра 4-го порядка

### 3 Пример синтеза рекурсивного ЦФ

Для синтеза рекурсивного ЦФ необходимо использовать аналоговый фильтр-прототип. В качестве прототипа служит фильтр Баттерворта, Чебышева или Кауэра (эллиптический). В системе GNU/Octave реализованы следующие функции синтеза фильтров:

- `butter(n,w)` синтезирует фильтра Баттерворта порядка `n` с относительной частотой среза `w`.
- `cheby1(n,Rp,w)` синтезирует фильтр Чебышева порядка `n` с частотой среза `w` и амплитудой пульсаций `Rp` (дБ) в полосе пропускания.

- `ellip(n,Rp,Rs,w)` синтезирует фильтр Кауэра порядка `n` с частотой среза `w`, амплитудой пульсаций `Rp` (дБ) в полосе пропускания и допустимым затуханием `Rs` (дБ) в полосе задерживания.

Рассмотрим пример использования данных функций. Синтезируем ЦФ Баттерворта, Чебышева и Кауэра. Для этого служит приведённый ниже листинг. Выполнив его в Octave, Matlab или Scilab получим три АЧХ фильтров (5, 6, 7) и вектора `ab,bb`, `ac,bc`, `ae,be`, которые содержат коэффициенты рекурсивной и нерекурсивной частей фильтра.

```
#!/usr/bin/octave -qf
pkg load signal;
f=600; # частота среза
fs=8000; # частота дискретизации
order=8; # порядок фильтра
Rp=3; # допустимая амплитуда пульсаций в полосе пропускания
Rs=30; # допустимое затухание вне полосы пропускания
[bb,ab]=butter(order,f/fs); # синтезируем фильтр Баттерворта
[bc,ac]=cheby1(order,Rp,f/fs); # синтезируем фильтр Чебышева
[be,ae]=ellip(order,Rp,Rs,f/fs); # синтезируем фильтр Кауэра(Эллиптический)
freqz(bb,ab); # посмотрим АЧХ фильтров
pause;
freqz(bc,ac); #
pause;
freqz(be,ae);
pause;
```

## 4 Задание для самостоятельной работы

Используя листинг, приведённый в семинаре синтезировать ЦФ Баттерворта, Чебышева и Кауэра 10 порядка с частотой среза согласно варианту. Частота среза вычисляется по формулам:

Для группы РПД-91:

$$f_2 = 30N + 60, \quad \text{Гц} \quad (5)$$

Для группы РПД\_С-91:

$$f_2 = 32N + 100, \quad \text{Гц} \quad (6)$$

Используя материал семинара №4, подобрать частоту двухтонального сигнала для демонстрации работы одного из синтезированных фильтров при помощи функции `filter()`. В отчёт включить три АЧХ фильтров и осциллограммы демонстрационного сигнала до и после наложения фильтра.

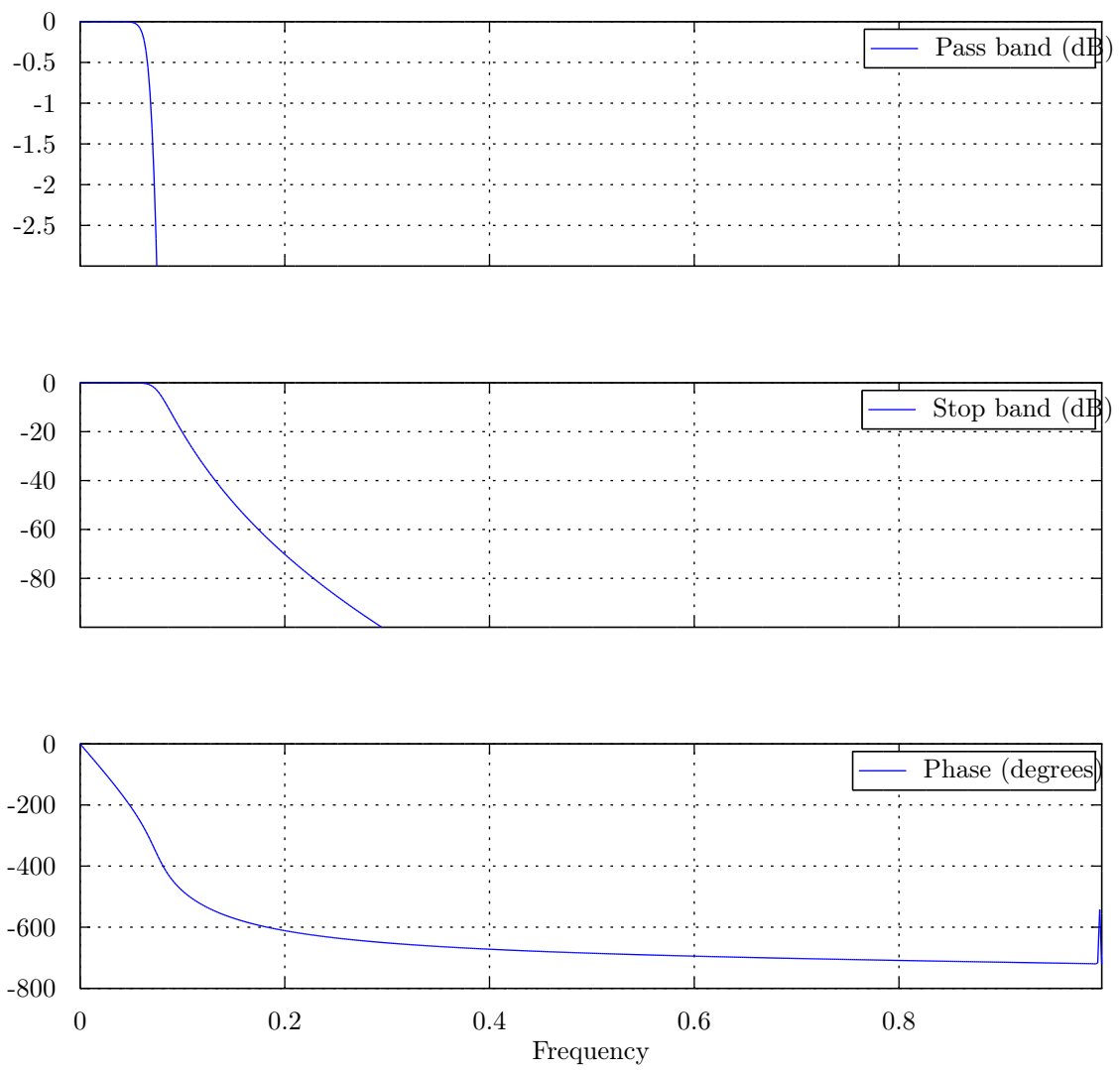


Рис. 5. АЧХ цифрового фильтра Баттерворта

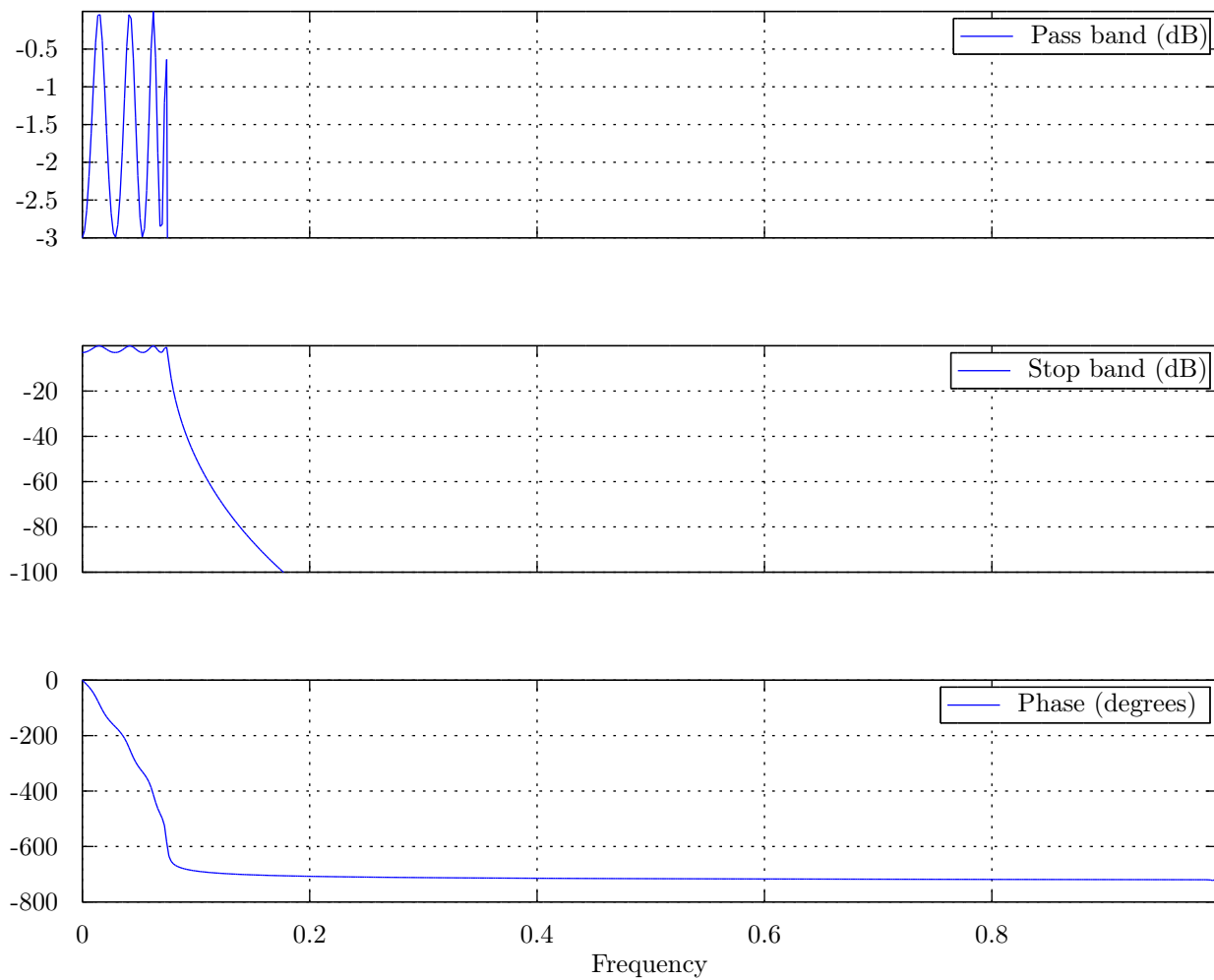


Рис. 6. АЧХ цифрового фильтра Чебышева

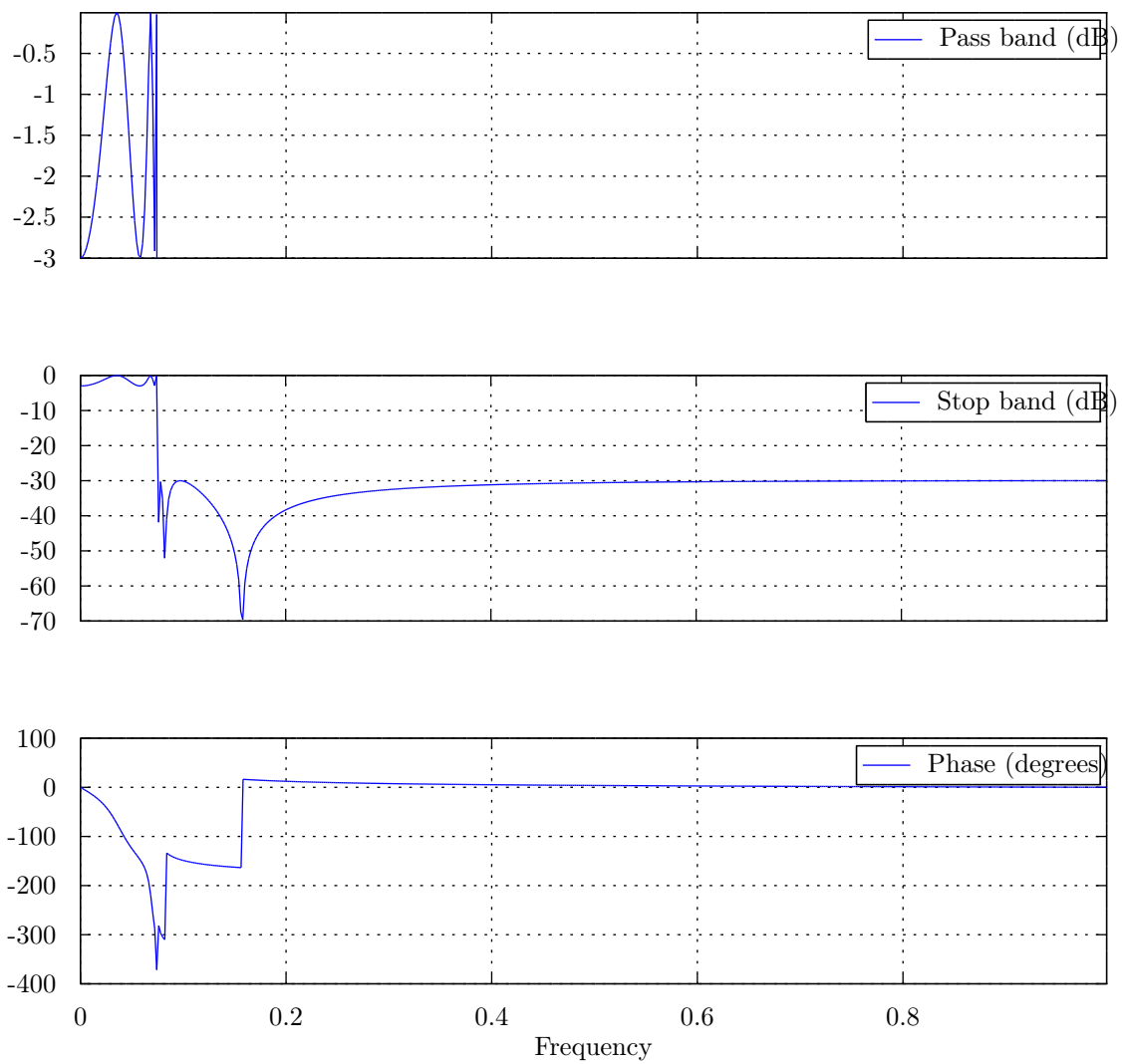


Рис. 7. АЧХ цифрового фильтра Кауэра