자료구조설계: 2013

Equivalence Relations

강지훈
jhkang@cnu.ac.kr
충남대학교 컴퓨터공학과

Relations

Relation

- Let S be a set.
  A subset *R* of a Cartesian product S×S is said to be a (binary) relation over S.
- Example:
  - S = { a, b, c }
  - $S \times S = \{ <a,a>, <a,b>, <a,c>, <b,a>, <b,b>, <b,c>, <c,a>, <c,b>, <c,c>) \}$
  - $R_1 = \{<a,a>, <b,b>, <c,c>, <a,b>, <b,c>, <a,c> \}$
- Note: 관계(relation)도 집합이다.

Useful Relations?

- 주어진 집합 S 상에 존재할 수 있는 relation은 매우 많다.
  - S의 cardinality(원소의 개수)가 3 이라면,
    가능한 relation의 수는?
  - S의 cardinality가 n 이라면, 가능한 relation의 수는?

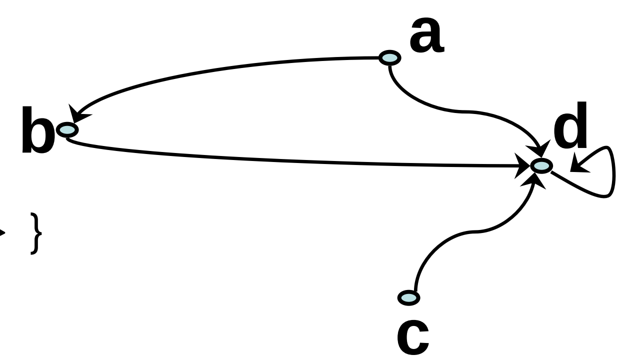
- 이 많은 relation이 모두 유용할까?
  - 우리는 특별한 relation에 관심이 있다.
  - 어떤 특수한 성질을 갖는 relation들이 관심의 대상이다.

- 관계의 특수한 성질이란?

Some Properties for Relations [1]

Transitivity

- A (binary) relation R over a set X is said to be transitive iff <x,y> $\in$ R and <y,z> $\in$ R implies <x,z> $\in$ R for all x, y, z in X.



- Example 1:
  - X = {a, b, c, d }
  - R = { <a,b>, <b,d>, <a,d>, <c,d>, <d,d> }
  - Then, R is transitive over X.
- Intuitive meaning in the graph: If we have a path from node x to node z via some other node y, then we should have a direct arc from x to z.
  - We know from the graph that <a,b> $\in$ R and <b,d> $\in$ R. Then, We can identify that the direct arc (a,d) is also in R.
- Example 2: Relation $\leq$ (less than or equal to).
  - Relation $\leq$ over the set of natural number N is transitive.
  - $\leq$ = { <1,1>, <1,2>, <1,3>, ···· <2,2>, <2,3>, ····}

Some Properties for Relations [2]

Reflexivity

- A relation R over a set X is said to be reflexive iff $<x, x> \in R$ for all $x \in X$.
- Intuitive meaning: Every node has a self-loop.
- Example:
  - $X = \{ a, b\}$
  - $R = \{ <a,a>, <b,b>, <a,b> \}$
  - Then, R is reflexive over X.

Symmetricity

- A relation R over a set X is said to be symmetric iff $<x, y> \in R$ implies $<y, x> \in R$ for all x, y in X.
- Intuitive meaning: If there is an arc from x to y, then there is also an arc from y to x.
- Example:
  - $X = \{ a, b \}$
  - $Y = \{ <a,a>, <a,b>, <b,a> \}$
  - Then, R is symmetric over X.

예: 유용한 관계 [1]

- S = { x | x는 자료구조를 수강하는 학급의 학생}
  - 학생들은 다양한 고등학교를 졸업했다.
    - 홍길동: 의적고
    - 김삿갓: 방랑고
    - 임꺽정: 의적고
    - 일지매: 의적고

- 이제 같은 학교를 졸업한 학생들의 쌍 <x,y>를 생각해보자.
  - <x, y>의 의미: “x는 y와 동문이다”
    - <홍길동,임꺽정>: “홍길동은 임꺽정과 동문이다”
  - <x,y> ≠ <y,x>
    - <홍길동,임꺽정>: “홍길동은 임꺽정과 동문이다”
    - <임꺽정,홍길동>: “임꺽정은 홍길동과 동문이다”
    - 이 둘의 언어적 의미는 동일하다. 그러나 우리는 그 방향성에 유의할 필요가 있다.
    - 관계의 원소로서 <홍길동,임꺽정>과 <임꺽정,홍길동>은 동일한 원소가 아니다.

예: 유용한 관계 [2]

- R = { <x,y> | x와 y는 자료구조를 수강하는 학급의 학생으로, x는 y와 동문이다.}
  - 자료구조를 수강하는 학생 홍길동과 임꺽정은 의적고를 졸업했다. 즉, 홍길동은 임꺽정과 동문이다. 그러므로, <홍길동,임꺽정>의 쌍은 R 안에 존재한다.
    - <홍길동,임꺽정> $\in$ R
  - 물론 <임꺽정, 홍길동>의 쌍도 R 안에 존재한다. (Symmetricity)
    - <임꺽정, 홍길동> $\in$ R
  - 김삿갓은 방랑고를 졸업했으므로,
    - <홍길동,김삿갓>의 쌍은 R 안에 존재하지 않는다.
    - 당연히 <김삿갓,홍길동> $\notin$ R
  - <홍길동,임꺽정> $\in$ R 이고 <임꺽정, 신윤복> $\in$ R 이다.
    - 그런데 당연히, <홍길동,신윤복> $\in$ R 이다.
    - 즉, R 안에 <홍길동,임꺽정>의 쌍과 <임꺽정, 일지매> 의 쌍이 존재한다는 것을 안다면, 우리는 <홍길동, 일지매>의 쌍도 R 안에 존재하리라는 것을 유추할 수 있다. (Transitivity)
  - 누구든지 자신은 자신과 같은 학교를 졸업했다. (Reflexivity)
    - <홍길동, 홍길동> 도 R 안에 존재한다.
    - <김삿갓, 김삿갓> $\in$ R

예: 유용한 관계 [3]

- S = {홍길동, 김삿갓, 임꺽정, 일지매}
- 각 원소의 성질
  - 홍길동(의적고), 김삿갓(방랑고), 임꺽정 (의적고), 일지매 (의적고)
- 그러므로, R의 모든 원소는?

  R = {

  <홍길동,홍길동>, <임꺽정,임꺽정>, <일지매,일지매>, <김삿갓,김삿갓>,

  <홍길동,임꺽정>,<임꺽정,홍길동>,

  <홍길동,일지매>, <일지매,홍길동>,

  <임꺽정,일지매>, <일지매,임꺽정>

  }
  - R is reflexive.
  - R is symmetric.
  - R is transitive.
- 어떻게 유용할까?

예: 유용한 관계 [3]

- 어떻게 유용할까?
  - S = {홍길동, 김삿갓, 임꺽정, 일지매}
  - R: 동문들의 쌍의 관계

R = {

<홍길동,홍길동>, <임꺽정,임꺽정>, <일지매,일지매>, <김삿갓,김삿갓>,
<홍길동,임꺽정>,<임꺽정,홍길동>,
<홍길동,일지매>, <일지매,홍길동>,
<임꺽정,일지매>, <일지매,임꺽정>

}

- S와 R을 알 때, 각 학교별 동문들을 알 수 있을까?

{홍길동, 임꺽정, 일지매}
{김삿갓}

Equivalence Relations

❑ Equivalence Relation [1]

- A relation ≡, over a set S, is said to be an equivalence relation over S iff it is reflexive, symmetric, and transitive over S.

- Example:
  - S = { a, b, c}
  - S×S = { <a,a>, <a,b>, <a,c>,
<b,a>, <b,b>, <b,c>,
<c,a>, <c,b>, <c,c> }
  - R1 = { <a,a>, <b,b>, <c,c>, <a,b>, <b,c>, <a,c> }
    - R1 is reflexive and transitive over S.
    - But it is not symmetric.
  - R2 = { <a,a>, <b,b>, <c,c>,
<a,b>, <b,c>, <a,c>,
<b,a>, <c,b>, <c,a> }
    - R2 is reflexive, symmetric and transitive over S.
    - R2 is an equivalence relation over S.

Equivalence Relation [2]

- S = {홍길동, 김삿갓, 임꺽정, 일지매}
- 동문들의 쌍인 관계 R:

  R = {

  <홍길동,홍길동>, <임꺽정,임꺽정>, <일지매,일지매>, <김삿갓,김삿갓>,
  <홍길동,임꺽정>, <임꺽정,홍길동>,
  <홍길동,일지매>, <일지매,홍길동>,
  <임꺽정,일지매>, <일지매,임꺽정>

  }

  - R is reflexive.
  - R is symmetric.
  - R is transitive.
- Therefore, R is an equivalence relation over S.

Equivalence Classes

- An equivalence relation R over the set S can partition S into equivalence classes $E_1, \ldots, E_k$ such that $x, y \in E_i$ for some i iff $<x,y> \in R$.

- Note:
  - $<x,y> \in R \Leftrightarrow x\, R\, y$
  - $<x,y> \in\ < \ \Leftrightarrow x < y$
  - $<x,y> \in\ \equiv\ \Leftrightarrow x \equiv y$

- Example
  - A given equivalence relation
    - 0 ≡ 4, 3 ≡ 1, 6 ≡ 10, 8 ≡ 9, 7 ≡ 4, 6 ≡ 8, 3 ≡ 5, 2 ≡ 11, 11 ≡ 0
  - Equivalence classes
    - { 0, 2, 4, 7, 11 } ; { 1, 3, 5 } ; { 6, 8, 9, 10 }

예: 동등 클래스

- 주어진 S 와 그 위에 정의된 동등 관계 R
  - S = {홍길동, 김삿갓, 임꺽정, 일지매}
  - R: 동문들의 쌍의 관계

R = {

<홍길동,홍길동>, <임꺽정,임꺽정>, <일지매,일지매>, <김삿갓,김삿갓>,
<홍길동,임꺽정>,<임꺽정,홍길동>,
<홍길동,일지매>, <일지매,홍길동>,
<임꺽정,일지매>, <일지매,임꺽정>

}

- 각 학교별 동문들을 알 수 있다.

{홍길동, 임꺽정, 일지매}
{김삿갓}

- 어떻게? ⇒ 동등 클래스를 찾는다.
  - <홍길동,임꺽정> & <임꺽정,일지매> ⇒ {홍길동,임꺽정,일지매}

End of Equivalence Relations