Rapport sur les constantes et l'algorithme PSLQ appliqué à l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx$

1 Évaluation de I à 50, 100 puis 200 décimales

On a calculé I en utilisant `mpmath`.

Pour pouvoir mieux évaluer I en fonction de la précision en décimales, la fonction `calculer_I` retourne deux valeurs, qui sont la valeur de I et l'erreur estimée.

On applique la fonction sur chaque précision en décimales.

On constate que l'erreur à 50 décimales est la plus grande, puis celle à 100 décimales, et la plus petite erreur est celle à 200 décimales.

2 Application de PSLQ ou nau vecteur $(I,\ \zeta(2),\ \ln^2 2,\ \ln 2)$

On utilise PSLQ pour trouver une relation entre des constantes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ connues.

En effet, on l'utilise pour calculer des nombres entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Ici, on a le vecteur $(I,\ \zeta(2),\ \ln^2 2,\ \ln 2)$, donc on doit chercher une relation entre les éléments de ce vecteur en utilisant PSLQ.

Pour mieux évaluer les relations, on a pris chaque valeur de I avec une précision de 50, 100, puis 200 décimales.

Dans les résultats, on voit qu'il n'y a pas de relation entre les éléments de ce vecteur. En particulier, I n'a pas de relation avec les autres constantes du vecteur.

3 Détecter une relation rationnelle et la vérifier à haute précision

Pour détecter une relation rationnelle, pour $x_0, x_1, \ldots, x_n$ constantes connues, on doit trouver des nombres rationnels $q_0, q_1, \ldots, q_n$ tels que

$$q_0 x_0 + q_1 x_1 + \cdots + q_n x_n = 0.$$

En multipliant cette équation par le dénominateur commun des $q_0, \ldots, q_n$, on obtient une relation entière entre les constantes. Par contraposé, si on n'a pas une relation entière, on n'a donc pas de relation rationnelle.

Donc, il est inutile de considérer le vecteur $(I,\, \zeta(2),\, \ln^2 2,\, \ln 2)$. Nous avons par contre considéré le vecteur $(I,\, \pi \ln 2)$.

On a obtenu une relation [2, 1], c'est-à-dire :

$$2I + \pi \ln 2 = 0$$

et on a vérifié cette relation avec une précision de 1000 décimales, la valeur obtenue est très proche de 0. Ce qui prouve la validité de la relation.

4 Étude de la stabilité de PSLQ quand la précision varie

Pour étudier la stabilité de PSLQ quand la précision varie, on a utilisé le vecteur $(I,\, \pi \ln 2)$ et on constate que plus la précision augmente, plus le résidu s'approche de 0 et donc PSLQ est plus stable (en incluant le calcul avec les 1000 décimales de précision qu'on a fait plus haut).

Remarque : On voit que pour 80, 100, 400, 500 décimales de précision, les résidus sont égaux à 0, mais ce ne sont pas des 0 exacts, le nombre de 0 après la virgule dépasse la précision en décimales que l'on veut.

5 une conjecture fermée pour I et littérature

D'après les résultats obtenus avec l'algorithme PSLQ appliqué à l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx,$$

nous avons mis en évidence la relation suivante :

$$2I + \pi \ln 2 = 0.$$

Cette relation suggère que I peut s'exprimer de façon fermée comme :

$$I = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Cette conjecture est confirmée numériquement avec une grande précision (jusqu'à 1000 décimales), et elle est également connue dans la littérature mathématique classique (voir par exemple [**?**], [**?**], [**?**]).

Conjecture fermée :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2}$$

Cette formule apparaît dans plusieurs ouvrages de référence sur les intégrales spéciales, notamment :

- I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 8th Edition, formule 4.224.1.
- E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis.*
- M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions.*

References

[1] H.R.P. Ferguson, D.H. Bailey, S. Arno, *Analysis of PSLQ, An Integer Relation Finding Algorithm*, Mathematics of Computation, 1999.