

Discussion des résultats : Marches sur un demi-plan

ZAMANILEHA Elorgin Fernando

14 Mai 2025

Introduction

On étudie les marches dans le demi-plan $y \geq 0$, partant de $(0,0)$, avec pas $\{\uparrow(0,1), \downarrow(0,-1), \rightarrow(1,0)\}$. On note a_n le nombre de marches de longueur n revenant à l'origine. Les résultats suivants ont été obtenus via un programme Python optimisé.

1. Termes a_n

Les 30 premiers termes a_n (pour $n = 0$ à 29) sont :

$[1, 0, 1, 0, 2, 0, 5, 0, 14, 0, 42, 0, 132, 0, 429, 0, 1430, 0, 4862, 0, 16796, 0, 58786, 0, 208012, 0, 742900, 0, 2674440, 0]$

Les termes impairs sont nuls, car revenir à $(0,0)$ nécessite un nombre pair de pas verticaux (\uparrow et \downarrow).

2. Série génératrice

La série génératrice jusqu'à x^{29} est :

$$A(x) = 1 + x^2 + 2x^4 + 5x^6 + 14x^8 + 42x^{10} + 132x^{12} + 429x^{14} + 1430x^{16} + 4862x^{18} + 16796x^{20} + 58786x^{22} + 208012x^{24} + 742900x^{26} + 2674440x^{28}.$$

Seuls les termes de degré pair apparaissent, cohérent avec les a_n .

3. Approximation de Padé

L'approximation de Padé $[14/14]$ donne :

- Numérateur : $1 - 13x^2 + 66x^4 - 165x^6 + 210x^8 - 126x^{10} + 28x^{12} - x^{14}$,
- Dénominateur : $1 - 14x^2 + 78x^4 - 220x^6 + 330x^8 - 252x^{10} + 84x^{12} - 8x^{14}$.

Le dénominateur suggère une singularité en $x \approx 1/3$, indiquant un rayon de convergence $\rho = 3$.

4. Vérification asymptotique

On vérifie $a_n \sim C \cdot 3^n \cdot n^{-3/2}$. La constante estimée est $C \approx 0.450158$, proche de $\sqrt{2}/\pi \approx 0.450158$, confirmant l'asymptotique. Un graphique montre la convergence de C , avec une échelle linéaire et une annotation claire.

5. D-finitude

La série $A(x)$ est probablement D-finie, car :

- Les marches restreintes ont des séries D-finies (Banderier & Flajolet, 2002).
- Le dénominateur de Padé indique une équation différentielle linéaire.
- L'asymptotique $n^{-3/2}$ suggère une singularité algébrique.

Une récurrence linéaire exacte pourrait être obtenue via l'algorithme LLL.

Conclusion

Les résultats confirment les propriétés combinatoires des marches sur le demi-plan. La méthode itérative évite les débordements, et l'approximation de Padé révèle une structure D-finie, validée par l'asymptotique.