20. Oktober 2004

# Quellenseparierung mit dem fastICA-Algorithmus

Jürgen Rinas

Inhalt

- Ansatz $\Longrightarrow$ Algorithmus
- Leistungsfähigkeit (Vergleich mit JADE)
- Zusammenfassung, Ausblick

## **Ansatz** $\Longrightarrow$ Algorithmus

- Übertragungssystem: $\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{c} + \nu$

  $\mathbf{x}$ $n_R \times 1$ Empfangssignale

  $\mathbf{H}$ $n_R \times n_T$ Kanalmatrix (Block-Fading, Schmalbandmodell)

  $\mathbf{c}$ $n_T \times 1$ Sendesignale

  $\nu$ $n_R \times 1$ Kanalrauschen

- Empfänger: $\tilde{c}_t = \mathbf{b}_t^T \overbrace{\mathbf{W}\mathbf{x}}^{=:\mathbf{y}}$

  $\mathbf{W}$ $n_T \times n_R$ Whitening-Matrix (bestimmt durch EVD von $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathrm{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$)

  $\mathbf{b}_t^T$ $1 \times n_T$ Separationsvektor für ein gesendetes Signal $t$

  $\tilde{c}_t$ Skalar – ein separiertes Signal

zur Implementierung werden aus allen Vektoren Matrizen der Signallänge $L$

- Ansatz: Maximierung oder Minimierung der Kurtosis $\mathrm{cum}_4(\tilde{\mathbf{c}}_t) = \mathrm{kurt}(\tilde{\mathbf{c}}_t)$
- Beispiel: BPSK $d \in \{-1, 1\}$

$$\mathrm{cum}_1(d) = 0,\ \mathrm{cum}_2(d) = 1,\ \mathrm{cum}_3(d) =,\ \mathrm{cum}_4(d) = -2$$

## **Ansatz** $\Longrightarrow$ Algorithmus

$\mathrm{kurt}(\tilde{\mathbf{c}}_t)$ = $\mathrm{kurt}(\mathbf{b}_t^T\mathbf{y})$

$\downarrow \mathrm{kurt}(a) = \mathrm{E}\left\{a^4\right\} - 3(\mathrm{E}\left\{a^2\right\})^2$

= $\mathrm{E}\left\{(\mathbf{b}_t^T\mathbf{y})^4\right\} - 3(\mathrm{E}\left\{(\mathbf{b}_t^T\mathbf{y})^2\right\})^2$

$\downarrow$ $\mathbf{y}$ ist weiß

= $\mathrm{E}\left\{(\mathbf{b}_t^T\mathbf{y})^4\right\} - 3||\mathbf{b}_t||^4$

$\mathbf{b}_t$ soll die Norm $1$ haben (alle $\mathbf{b}_t$ bilden später eine unitäre Matrix $\mathbf{B}$)

$\Longrightarrow$ „penalty term“ einführen

$J(\mathbf{b}_t) = \mathrm{E}\left\{(\mathbf{b}_t^T\mathbf{y})^4\right\} - 3||\mathbf{b}_t||^4 + F(||\mathbf{b}_t||^2) \Leftarrow$ Kostenfunktion $\min\limits_{\mathbf{b}_t}$ oder $\max\limits_{\mathbf{b}_t}$

Differenzieren nach $\mathbf{b}_t$:

$$\mathrm{E}\left\{\mathbf{y}(\mathbf{b}_t^T\mathbf{y})^3\right\} - 3||\mathbf{b}_t||^2\mathbf{b}_t + f(||\mathbf{b}_t||^2)\mathbf{b}_t = 0$$

Lösen mit gewöhnlichem Iterationsverfahren (*fixed-Point Iteration*) $x = f(x)$

$$\mathbf{b}_t = \underbrace{-1/f(||\mathbf{b}_t||^2)}_{\text{Skalar}}\left(\mathrm{E}\left\{\mathbf{y}(\mathbf{b}_t^T\mathbf{y})^3\right\} - 3||\mathbf{b}_t||^2\mathbf{b}_t\right)$$

Norm von $\mathbf{b}_t$ hier unwichtig bzw. $||\mathbf{b}_t||^2 = 1$ sichergestellt

$$\mathbf{b}_t = \mathrm{E}\left\{\mathbf{y}(\mathbf{b}_t^T\mathbf{y})^3\right\} - 3\mathbf{b}_t$$

Separation *eines* Signals $c_t$ – *fixed point* Iteration bzgl. $\mathbf{b}_t$

$n_t \times 1$ Vektor $\mathbf{b}_t(0)^\dagger$ mit Zufallszahlen initialisieren

$$\mathbf{b}_t(0) = \mathbf{b}_t^\dagger(i+1)/||\mathbf{b}_t^\dagger(0)|| \qquad \Leftarrow ||\mathbf{b}_t(0)||^2 \stackrel{!}{=} 1$$

Iteration $i = 0 \ldots 9$

$$\mathbf{b}_t^\dagger(i+1) = \mathrm{E}\left\{\mathbf{y}(\mathbf{b}_t^T(i)\mathbf{y})^3\right\} - 3\mathbf{b}_t(i)$$

$$\mathbf{b}_t(i+1) = \mathbf{b}_t^\dagger(i+1)/||\mathbf{b}_t^\dagger(i+1)|| \qquad \Leftarrow ||\mathbf{b}_t(i+1)||^2 \stackrel{!}{=} 1$$

$$\tilde{c}_t = \mathbf{b}_t^T\mathbf{y}$$

Separation *aller* Signale $c_t$

$\mathbf{B}_0 = [\ ]$

Iteration $t = 0 \ldots n_T - 1$

$n_t \times 1$ Vektor $\mathbf{b}_t^\ddagger(0)$ mit Zufallszahlen initialisieren

$\mathbf{b}_t^\dagger(0) = \mathbf{b}_t^\ddagger(0) - \mathbf{B}_0\mathbf{B}_0^T\mathbf{b}_t^\ddagger(0)$

$\mathbf{b}_t(0) = \mathbf{b}_t^\dagger(0)/||\mathbf{b}_t^\dagger(0)|| \qquad \Leftarrow ||\mathbf{b}_t(0)||^2 \stackrel{!}{=} 1$

Iteration $i = 0 \ldots 9$

$\mathbf{b}_t^\ddagger(i+1) = \mathrm{E}\left\{\mathbf{y}(\mathbf{b}_t^T(i)\mathbf{y})^3\right\} - 3\mathbf{b}_t(i)$

$\mathbf{b}_t^\dagger(i+1) = \mathbf{b}_t^\ddagger(i+1) - \mathbf{B}_t\mathbf{B}_t^T\mathbf{b}_t^\ddagger(i+1)$

$\mathbf{b}_t(i+1) = \mathbf{b}_t^\dagger(i+1)/||\mathbf{b}_t^\dagger(i+1)|| \qquad \Leftarrow ||\mathbf{b}_t(i+1)||^2 \stackrel{!}{=} 1$

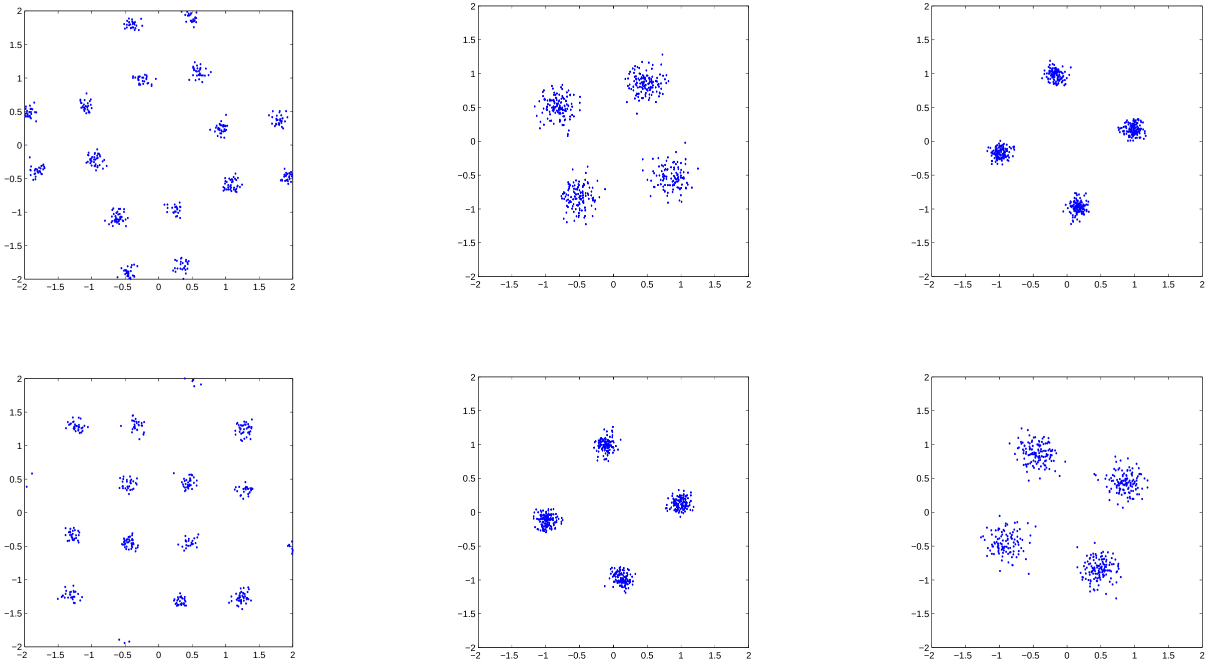
$\mathbf{B}_{t+1} = [\mathbf{B}_t,\ \mathbf{b}_t(9)]$

$\tilde{c}_t = \mathbf{b}_t^T\mathbf{y}$

## Leistungsfähigkeit

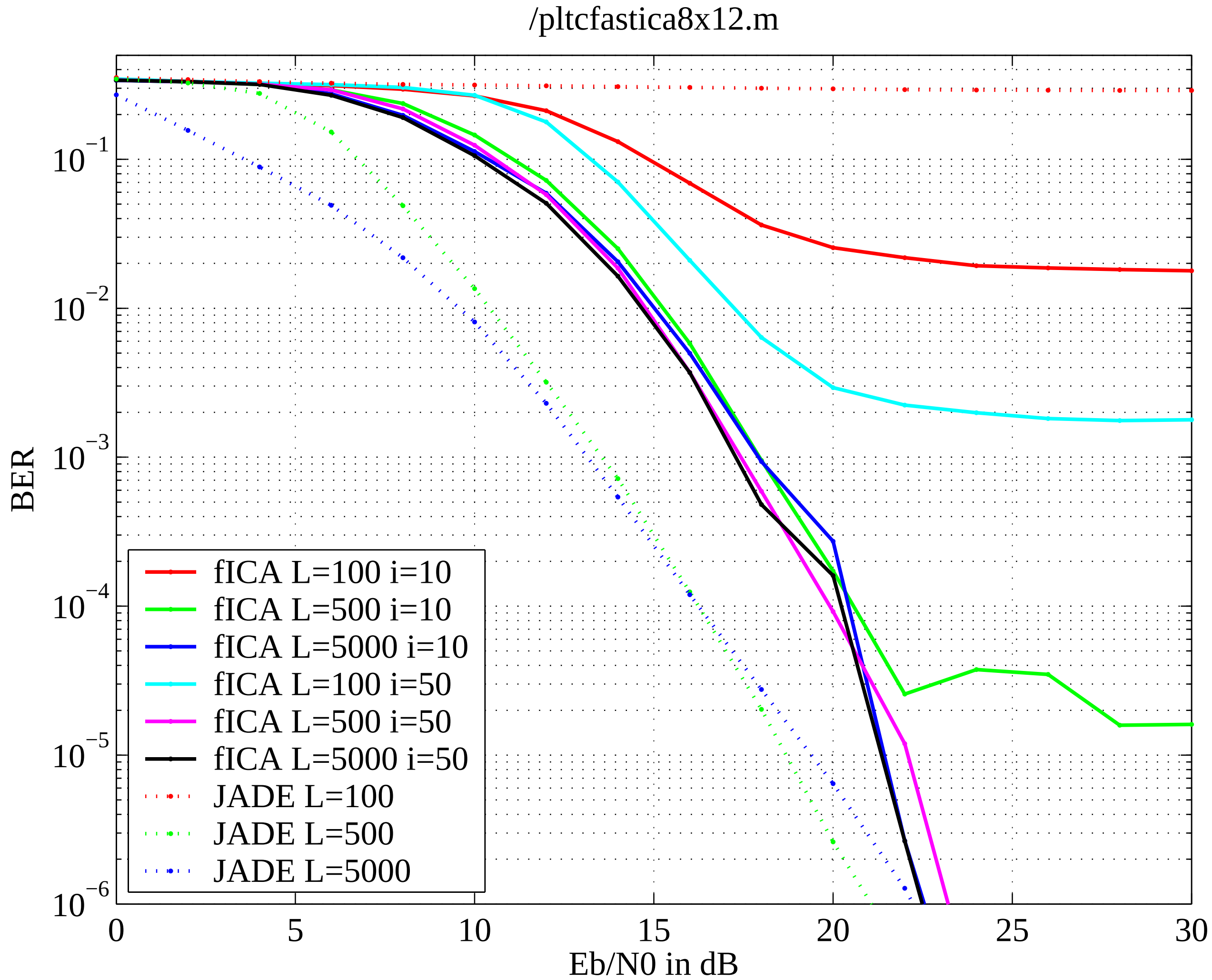
$2 \times 2$ System, QPSK, $E_b/N_0 = 20\,\mathrm{dB}$, $L = 500$

Mixtur      fastICA, $i = 10$      JADE



fastICA benötigt bei einem $8 \times 12$ System ca. 1/5 der MATLAB-flops von JADE
jedoch: Struktur vom fastICA ist sehr viel einfacher!

## **Leistungsfähigkeit** (Vergleich mit JADE)




- $8 \times 12$ System
- QPSK

- JADE bei geringem SNR günstiger
  - fastICA „sieht“ nur ein Ausgangssignal
  - JADE berücksichtigt auch Kreuzkumulanten

## **Zusammenfassung**, Ausblick

- JADE $\Longleftrightarrow$ Batch-Algorithmus
- fastICA $\Longleftrightarrow$ *one-unit* Algorithmus
  Interference Cancellation? Sortierung?
  Subraumeinschränkung nach jeder Iteration
- ca. 20% des Rechenaufwands von JADE,
  vergleichbare Leistungsfähigkeit bei hohem SNR
- Vorteile bei kurzen Blocklängen $L$