Cadenas de Markov de Tiempo Discreto

Tal como se ha analizado y usado en el laboratorio, es posible, a través del uso de matrices, determinar medidas importantes de las cadenas de Markov de tiempo discreto (CMTD) a través de la representación matricial de sus estados y clases. En particular, será de relevancia para el análisis de cadenas que presenten más de una clase recurrente.
Considere una CMTD con una matriz de transición P y con m clases recurrentes. Definimos los siguientes elementos:

- F la matriz que contiene la probabilidad de ir alguna vez desde un estado transiente i a una clase recurrente C, dado por $f_{i,C}$.
- Q el la matriz que posee los tiempos para ir desde los estados transientes a las clases recurrentes en una transición.
- N el conjunto de estados transientes de la CMTD.

Ahora bien, sabemos que Q se puede obtener directamente de la matriz de transición, así

$$q_{i,c} = \sum_{j \in C} p_{i,j}$$

Para el cálculo de F, tenemos que, para todo $i \in T$,

$$f_{i,C} = q_{i,C} + \sum_{j \in N} p_{i,j} f_{i,C}$$

lo cual se puede expresar matricialmente, como

$$F = Q + TF$$

donde T es la submatriz de la matriz de transición tomando únicamente las filas y columnas de los estados transientes.
Es posible obtener la matriz F a través del cálculo de la inversa de $(I - T)$, sin embargo, debemos determinar primeramente su existencia.

Proposición: La matriz $(I - T)$ es invertible.

Demostración:
Considere el sistema $(I - T)x = 0$, luego $x = Tx$, así que, $x = T^n x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Asumiendo la existencia de al menos un estado absorbente en la CMTD, cuando $n \to 0$, entonces $T^n \to 0$, luego la única solución posible es $x = 0$, es decir, la solución trivial. Dado lo anterior, $I - T$ es invertible.

Ahora que sabemos que la matriz $(I - T)$ es invertible, la solución del sistema $(I - T)F = Q$ posee la única solución

$$F = (I - T)^{-1} Q$$

.

Considere ahora que deseamos determinar la cantidad de tiempo promedio de veces que estaremos en un estado transiente j partiendo desde un estado transiente i hasta llegar a una clase recurrente, dado por $r_{i,j}$. Así,

$$r_{i,j} = v_{i,j} + \sum_{k \in N} T_{i,k} r_{k,j}$$

donde $v_{i,j}$ será 1 si es que $i = j$ y 0 en otro caso. Matricialmente tenemos que

$$S = I + PS$$

lo cual posee como única solución que

$$S = (I - T)^{-1}$$