# Appello 2 — Parte 1

## 30/08/2024 — versione 1 — ♡♣♢♠

## 32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

## TEST – 18 pt

### 1 — 2 pt (***) No Multichance

Quanti numeri (escluso lo zero) sono rappresentati nell'insieme $\mathbb{F}(2,5,-4,4)$? Quale numero in base 10 si ottiene per questo insieme scegliendo segno $s=0$, mantissa $m=(11001)_2$ ed esponente $e=-1$?

$2*288=576,\ 0.390625$

### 2 — 2 pt

Il numero di Nepero $e$ può essere approssimato come $s_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}$, tale che $e=\lim_{N\to\infty} s_N$. Quanto vale $s_5$? Si determini il valore minimo $N_{min}$ tale per cui l'errore commesso approssimando $e$ con $s_{N_{min}}$ risulti inferiore a $10^{-4}$.

$s_5=2.7167,\ N_{min}=7$

### 3 — 1 pt

Sia $A\in\mathbb{R}^{20\times 20}$ una matrice tridiagonale che ammette fattorizzazione LU senza pivoting. Si valuti il numero di operazioni necessarie per calcolare il determinante di $A$ utilizzando un metodo computazionalmente efficiente.

$3(n-1)+(n-1)=76$

## 4 — 2 pt

Si consideri la fattorizzazione LU senza pivoting di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si indichino le affermazioni *false*:

1. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ si hanno $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -\frac{cb}{a} \end{bmatrix}$.
2. Se la matrice $A$ è invertibile allora esiste sempre la fattorizzazione LU.
3. Per $n = 60$, il calcolo della fattorizzazione LU richiede 144 000 operazioni.
4. Se un elemento pivotale è nullo allora la matrice $A$ è singolare.
5. Se la matrice A è sparsa allora anche L e U sono matrici sparse.

false (2), (4) e (5)

## 5 — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri il sistema sovradeterminato $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$. Si risolva il sistema con il metodo della fattorizzazione QR e si riportino il valore dell'elemento $(Q)_{12}$ della matrice $Q$ e dell'ultima componente del vettore soluzione $(\mathbf{x})_3$.

$q_{12} = 0.3052$; $x_3 = 0.2744$

## 6 — 2 pt

Si consideri la matrice tridiagonale $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$, tale che $(A)_{i,i} = 5$, per $i = 1, \ldots, 100$, $(A)_{i+1,i} = (A)_{i,i+1} = -2$, per $i = 1, \ldots, 99$. Si approssimi l'autovalore di $A$ più vicino a $s = 6$ utilizzando il metodo delle potenze inverse con shift, implementato nella funzione Matlab® `invpowershift.m`, a partire dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ 1,\ \ldots,\ 1)^T \in \mathbb{R}^{100}$ e con una tolleranza di $10^{-8}$. Si riportino l'approssimazione ottenuta e il numero di iterazioni effettuate.

$\lambda = 6.0453$, 7 iterazioni

## 7 — 2 pt

Si vuole approssimare l'*unico* zero $\alpha \in I = [a, b]$ di una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $I$ usando il metodo di bisezione. Si indichino le affermazioni *vere*.

1. La convergenza è garantita se $f(a)\,f(b) < 0$, ma solo se $a$ e $b$ sono sufficientemente vicini a $\alpha$.
2. La convergenza non è garantita se $\alpha$ è uno zero di molteplicità maggiore di 1.
3. La convergenza non è garantita se $\alpha$ è uno zero avente molteplicità pari ($m = 2, 4, 6, \ldots$).
4. La convergenza è garantita se $|f'(\alpha)| < 1$.
5. La convergenza è garantita se $|f'(\alpha)| > 0$.

Vere (3), (5)

## 8 — 2 pt

Si vuole approssimare il punto di minimo della funzione $f(x) = (x-1)\sin(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$. Si eseguano a tal fine 5 iterazioni del metodo di Newton. Si riportino le iterate $x^{(1)}$ e $x^{(5)}$ ottenute applicando il metodo a partire da $x^{(0)} = 1$, oltre al valore $f\left(x^{(5)}\right)$ corrispondente.

$x^{(1)} = 0.7727, \quad x^{(5)} = 0.4797, \quad f(x^{(5)}) = -0.2401$

## 9 — 2 pt (***) No Multichance

Si vuole calcolare il punto di intersezione delle funzioni $f(x) = \sin(2\pi x)$ e $g(x) = \pi(x - 1/6) + \sqrt{3}/2$ nel semipiano $x > 0$, trovando lo zero della funzione $h(x) = f(x) - g(x)$ mediante il metodo di Newton implementato nella funzione Matlab® `newton.m` con iterata iniziale $x^{(0)} = 0$ e una tolleranza di $10^{-4}$ sul criterio d'arresto. Si riportino le coordinate del punto di intersezione, il numero di iterazioni effettuate e l'ordine di convergenza del metodo.

$(0.1667, 0.8659)^T$, 11, 1

## 10 — 2 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = \eta\left(1 - e^{2x-1}\right) + x$, dipendente dal parametro $\eta \in \mathbb{R}$ e dotata del punto fisso $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Per quali valori di $\eta$ è garantita la convergenza del metodo delle iterazioni di punto fisso ad $\alpha$ , scegliendo l'iterata iniziale "sufficientemente" vicina a $\alpha$? Per quali valori di $\eta$ tale convergenza è *monotona*?

Conv. $\eta \in (0, 1)$; Conv. monotona $\eta \in (0, 1/2)$

## ESERCIZIO – 14 pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica e definita positiva, con $\mathbf{x}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$. In particolare, si pongano $n = 100$ e

$$A = \text{pentadiag}\,(1,\ -4,\ 6,\ -4,\ 1) \in \mathbb{R}^{100\times 100},$$

mentre $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{100}$ è tale per cui $\mathbf{x} = \mathbf{1}\ \in \mathbb{R}^{100}$.

***NOTA****: Si riportino nelle risposte: tutti i valori richiesti, tutti i comandi Matlab® usati, tutte le funzioni Matlab® implementate, le descrizioni dei procedimenti usati, le giustificazioni teoriche dei risultati e tutte le definizioni della notazione.*

### Punto 1) — 3 pt

Si consideri il metodo della fattorizzazione LU con pivoting per riga per risolvere il sistema lineare.

- Si illustrino i passaggi principali del metodo, includendo l'eventuale permutazione delle righe ed evidenzando i costi computazionali corrispondenti. Lo si applichi alla soluzione del sistema lineare ottenendo la soluzione numerica $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, per cui si calcoli e si riporti il valore del residuo normalizzato (relativo) corrispondente. Viene effettuata la permutazione per righe?
- Dopo aver risposto al punto precedente, si *stimi* l'errore relativo commesso applicando il metodo, definendo tutta la notazione usata. Si verifichi che l'errore relativo è effettivamente inferiore all'errore precedentemente stimato.
- Quale metodo diretto sarebbe stato più conveniente applicare dal punto di vista computazionale? Perchè?

Spazio per risposta lunga $O(6.7e5)$ ops, $P \neq I$, $res_{rel} = 9.2222e-16$, $K(A) = 3.4579e6$, $err_{stim} = 3.1889e-9$, $err_{vero} = 1.2079e-12$, Cholesky $O(3.3e5)$ ops

### Punto 2) — 3 pt (***) No Multichance

Si considerino i metodi di Jacobi e Gauss–Seidel per l'approssimazione della soluzione $\mathbf{x}$ del sistema lineare.

- Si determini se i metodi di Jacobi e Gauss–Seidel convergono a $\mathbf{x}$ per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{100}$.
- Si applichi il metodo di Gauss–Seidel usando la funzione Matlab® `gs.m` con iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{100}$, tolleranza sul criterio d'arresto del residuo normalizzato $tol = 10^{-3}$ e massimo numero di iterazioni pari a $10^3$. Si riportino il numero di iterazioni $N_{it}$ effettuate, il valore del residuo normalizzato $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(N_{it})}\|/\|\mathbf{b}\|$ e l'errore relativo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(N_{it})}\|/\|\mathbf{x}\|$ corrispondenti.
- Dopo aver risposto al punto precedente, si commenti l'accuratezza del risultato ottenuto applicando il metodo di Gauss–Seidel.

Spazio per risposta lunga $\rho_{B_J} = 1.6654 > 1$, $\rho_{B_{GS}} = 0.999\overline{9} < 1$, $N_{it} = 546$, $res_{norm} = 9.9920e-4$, $err_{norm} = 0.9395$

## Punto 3) — 3 pt

Si consideri il metodo del gradiente coniugato precondizionato per l'approssimazione di $\mathbf{x}$ con le seguenti matrici di precondizionamento (precondizionatori):

$$P_1 = I \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad P_2 = \text{tridiag}\,(-1,\, 2,\, -1) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad P_3 = T \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

dove $I$ è la matrice identità, mentre $T$ è la matrice tridiagonale *estratta* dalla matrice $A$.

- Quale o quali precondizionatori $P_1$, $P_2$ oppure $P_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è possibile utilizzare per il metodo?
- Per quale precondizionatore $P_1$, $P_2$ oppure $P_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è garantita la convergenza più rapida del metodo per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$? Perchè?
- Con il precondizionatore selezionato si applichi il metodo usando la funzione Matlab® `pcg` con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ e tolleranza sul criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato $tol = 10^{-6}$. Si riportino il numero di iterazioni $N_{it}$ effettuate e il valore dell'errore $\|\mathbf{x}^{(N_{it})} - \mathbf{x}\|_A$ corrispondente.

Spazio per risposta lunga $\quad P_3$ non SDP, $P_2$, $K(P_2^{-1}A) = 1.0542e3 \ll K(A)$, $c = 0.9402$, $N_{it} = 50$, $err = 5.9580e-14$

## Punto 4) — 3 pt

Si consideri il metodo delle potenze per approssimare l'autovalore $\lambda_1(A)$.

- Si riportino il numero di iterazioni $N_{it}$ e il valore dell'approssimazione $\lambda_1^{(N_{it})}$ ottenuti tramite la funzione Matlab® `eigpower.m` con iterata iniziale $\mathbf{y}^{(0)} = \dfrac{\mathbf{x}^{(0)}}{\|\mathbf{x}^{(0)}\|} \in \mathbb{R}^n$, dove $\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)_i = i$ per $i = 1, \ldots, n$, e tolleranza $tol = 10^{-3}$.
- Per $A$ reale e simmetrica e il metodo delle potenze vale la stima:

$$\left|\lambda_1(A) - \lambda_1^{(k)}\right| \leq C \left|\frac{\lambda_2(A)}{\lambda_1(A)}\right|^{2k} \qquad \text{per } k \to +\infty,$$

  dove $C > 0$ è una costante. La si utilizzi per stimare il numero di iterazioni $N$ necessarie al metodo delle potenze affinchè $\dfrac{\left|\lambda_1(A) - \lambda_1^{(N)}\right|}{\left|\lambda_1(A) - \lambda_1^{(0)}\right|} < 10^{-3}$. Qual è l'ordine di convergenza atteso dal metodo? Perchè?

Spazio per risposta lunga $\quad N_{it} = 28$, $15.5799$, $N = 2393$, $p = 1$

## Punto 5) — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente metodo iterativo dipendente da un parametro $\mu \in \mathbb{R}$ per la risoluzione di un generico sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

**Algorithm 1:** metodo iterativo

scegliere $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathbb{R}$;

**for** $k = 0, 1, \ldots,$ *fino a che* $\left\|\mathbf{b} - A\,\mathbf{x}^{(k)}\right\| / \|\mathbf{b}\| > tol$ **do**

  **for** $i = 1, 2, \ldots, n$ **do**

$$x_i^{(k+1)} = (1-\mu)\, x_i^{(k)} + \frac{\mu}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right);$$

  **end**

**end**

essendo $a_{ij} = (A)_{ij}$, $b_i = (\mathbf{b})_i$ e $x_i^{(k)} = \left(\mathbf{x}^{(k)}\right)_i$ per $i$, $j = 1, \ldots, n$.

Si implementi l'algoritmo in una funzione Matlab® e la si riporti. Si applichi poi l'algorithmo alla soluzione del sistema lineare precedentemente assegnato per $n = 100$, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{100}$, $\mu = 1.7$ e $tol = 10^{-3}$. Si riportino il numero di iterazioni effettuate $N_{it}$ e i valori $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$ e $x_1^{(N_{it})}$ ottenuti.

Spazio per risposta lunga $N_{it} = 187$, $x_1^{(1)} = 0.8500$, $x_1^{(2)} = 0.8755$, $x_1^{(N_{it})} = 0.9767$