Prima Prova in Itinere

19/04/2023 — versione 1 — ♡♣◇♠♡♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 1 pt

Per l'insieme dei numeri floating point $\mathbb{F}(2, 5, L, U)$ dipendente da due parametri $L, U \in \mathbb{Z}$ tali che $L < -2$ e $U > 6$, dati la mantissa $m = (10101)_2$, il segno $s = 0$ e l'esponente $e = 3$, si riporti il numero reale x così rappresentato in base 10.

5.25

2 — 1 pt (***) No Multichance

Il metodo di Heron consente di approssimare $\sqrt{5}$ applicando il seguente algoritmo: dato x_0, porre $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 5/x_n}{2}$ per $n = 0, 1, 2 \ldots$; si ottiene $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{5}$. Quante operazioni elementari vengono effettuate per ottenere x_{50}?

150

3 — 1 pt

Si considerino 10 sistemi lineari $A\,\mathbf{x}_j = \mathbf{b}_j$ per $j = 1, \ldots, 10$, dove la matrice $A \in \mathbb{R}^{90\times 90}$ è fissata, tridiagonale e a dominanza diagonale stretta per righe, mentre i vettori $\mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^{90}$ rappresentano diversi termini noti. Qual è il numero di operazioni richiesto per la risoluzione di tali sistemi lineari per $j = 1, \ldots, 10$ attraverso l'uso computazionalmente più efficiente di un metodo diretto?

4727

4 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri un sistema sovradeterminato $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ ha rango pieno e $\mathbf{b} = (1,\, 2,\, 2)^T \in \mathbb{R}^3$. La fattorizzazione QR ridotta di A è tale che $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$ e $R = \begin{bmatrix} 2 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dove $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro positivo ($\gamma > 0$).
Si riporti la soluzione $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^2$ del sistema nel senso dei minimi quadrati.

$\mathbf{x}^* = \left(\gamma + 3\sqrt{2}/4,\, 2\right)^T$

5 — 2 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}$. Per quali valori dello shift $s \in \mathbb{R}$ è possibile applicare il metodo delle potenze inverse con shift per l'approssimazione dell'autovalore 3 di A?

$1 < s < 4,\ s \neq 3$

6 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = x - \sqrt{5}$, dotata di uno zero $\alpha \in [0, 5]$. Quante iterazioni $k_{min} > 0$ sono necessarie al metodo di bisezione al fine di garantire un errore inferiore a 10^{-3}?

12

7 — 2 pt

Si consideri la funzione $\Phi(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 3x + 5$. Si applichi il metodo di Newton all'approssimazione del punto di minimo α di Φ partendo dall'iterata iniziale $x^{(0)} = 0$. Si riportino i valori delle iterate $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(5)}$ così ottenute con almeno quattro cifre decimali.

3.0000, 2.0357, 1.2144

8 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il metodo di Newton modificato per l'approssimazione dello zero $\alpha = 3$ della funzione $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)(x-3)^2$. Si applichi opportunamente tale metodo partendo dall'iterata iniziale $x^{(0)} = 4$ e si riportino i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ così ottenute.

2.8482, 3.0004

9 — 1 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x - \frac{1}{3}\left(1 - e^{1-3x}\right)$ e il suo punto fisso $\alpha = \frac{1}{3}$. Qual è l'ordine di convergenza atteso dal metodo delle iterazioni di punto fisso ad α per $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α?

2

10 — 2 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = \gamma\left(x^2 - 4x - 5\right) + 5$, dipendente dal parametro $\gamma \in \mathbb{R}$. Relativamente al suo punto fisso $\alpha = 5$, per quali valori di γ il metodo delle iterazioni di punto fisso converge ad α per ogni $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α e in modo da garantire che $\left|x^{(k)} - \alpha\right| < \left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|$ per ogni $k \geq 0, 1, \ldots$?

$\gamma \in (-1/6, 0)$

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica e definita positiva, e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$. In particolare, si pongano: $n = 225$, $A \in \mathbb{R}^{225\times 225}$ assegnata con il comando Matlab® seguente

```
>> A = full( gallery( 'poisson', 15 ) )
```

e $\mathbf{b} = (2, 2, \ldots, 2)^T \in \mathbb{R}^{225}$.

Punto 1) — 2 pt

Si verifichi che la matrice A è simmetrica e definita positiva giustificando tutti i passaggi. Quale metodo diretto è computazionalmente conveniente applicare per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ assegnato? Si giustifichi dettagliatamente la risposta e si riporti in numero di operazioni stimato.

Spazio per risposta lunga $(O(3'898'125))$

Punto 2) — 3 pt

Si applichi tramite Matlab® il metodo diretto di cui al Punto 1) alla soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ riportando tutti i passaggi svolti. Dopo aver ottenuto la soluzione numerica $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, si stimi l'errore relativo ottenuto $e_{rel} = \frac{\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}$. Si definisca tutta la notazione usata e si riportino tutti i comandi Matlab® utilizzati.

?

0

Spazio per risposta lunga $(K_2(A) = 103.0869,\ e_{rel}^{(N)} = 9.1175e-13)$

Punto 3) — 2 pt

Si consideri ora il metodo di *Jacobi* per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si verifichi che il metodo di Jacobi converge per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ e, senza applicare il metodo, si *stimi* il fattore di abbattimento dell'errore $\dfrac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|}$ dopo $k = 100$ iterazioni del metodo. Si motivi dettagliatamente la risposta, definendo la notazione e riportando i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga $(\rho(B) = 0.9808 < 1$, fatt. abb. $= 0.1437)$

Punto 4) — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri ora il metodo del *gradiente* per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a cui è associata la funzione energia $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dove $\Phi(\mathbf{y}) := \dfrac{1}{2}\mathbf{y}^T A\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{b}$. Scelta l'iterata inziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, si calcolino e si riportino i valori $\Phi\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ e $\Phi\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)$, essendo $\mathbf{x}^{(1)}$ l'iterata ottenuta applicando un'iterazione del metodo del gradiente.

Spazio per risposta lunga $\left(\Phi\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = -780,\ \Phi\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = -1.6603e+03\right)$

Punto 5) — 3 pt (***) No Multichance

Si consideri ora il metodo del *gradiente precondizionato* con matrici di precondizionamento

$$P_1 = \text{tridiag}\,(-1,\ 4,\ -1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

e $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ottenuta tramite i seguenti comandi Matlab® :

```
>> R2 = ichol( sparse( A ) ); P2 = R2' * R2;
```

Senza applicare esplicitamente il metodo, si determini per quale delle due matrici di precondizionamento il metodo del gradiente precondizionato converge più rapidamente a $\mathbf{x}$ per ogni scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$.

Per la matrice di precondizionamento per cui il metodo converge più rapidamente, si *stimi* il fattore di abbattimento dell'errore $\dfrac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A}{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A}$ dopo $k = 20$ iterazioni del metodo. Si motivi dettagliatamente la risposta, definendo la notazione e riportando i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga
$(K(P_1^{-1}A) > K(P_2^{-1}A) = 10.0966$, fatt. abb. con $P_2 = 0.0188)$

Punto 6) — 2 pt

Si consideri il metodo delle potenze per approssimare l'autovalore $\lambda_1(A)$. Si applichi il metodo, a partire dall'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$, modificando opportunamente la funzione `eigpower.m` per *stimare* l'ordine e il fattore di convergenza asintotico ottenuti applicando tale metodo iterativo. Si riportino i comandi Matlab® usati e si giustifichi il risultato ottenuto.

Spazio per risposta lunga $(p = 1,\ \mu = 0.9338)$

Punto 7) — 3 pt

Data una generica matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva, i suoi autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}$ si possono approssimare applicando il seguente algoritmo che migliora l'efficienza del metodo delle iterazioni QR.

Algorithm 1: Metodo delle iterazioni QR con shift

porre $A^{(0)} = A$;
porre $\mu^{(0)} = 0$;
for $k = 0, 1, \ldots,$ *fino a che un criterio d'arresto è soddisfatto* **do**
  determinare la fattorizzazione QR (ridotta) di $A^{(k)}$, ovvero le matrici $Q^{(k+1)}$ e $R^{(k+1)}$ tali che $Q^{(k+1)}\, R^{(k+1)} = A^{(k)} - \mu^{(k)}\, I$;
  porre $A^{(k+1)} = R^{(k+1)}\, Q^{(k+1)} + \mu^{(k)}\, I$;
  porre $\mu^{(k+1)} = \left(A^{(k+1)}\right)_{n,n}$;
  $\lambda_i^{(k+1)} = (A^{(k+1)})_{ii}$ per $i = 1, \ldots, n$;
end

Si implementi il precedente algoritmo modificando per esempio la funzione Matlab® `qrbasic.m` e usando laddove necessario il comando Matlab® `qr`.

Si applichi l'algoritmo alla matrice A assegnata. Si riportino le approssimazioni $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_2^{(2)}$ e $\lambda_2^{(20)}$ di $\lambda_2(A)$ così ottenute. Si riportino la funzione Matlab® implementata e i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga ($\lambda_2^{(1)} = 4.5500$, $\lambda_2^{(2)} = 5.2779$, $\lambda_2^{(20)} = 7.3791$)