Prima Prova in Itinere

12/04/2022 — versione 1 — ♡♣◇♠♡♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 1 pt (***) No Multichance

Per l'insieme dei numeri floating point $\mathbb{F}(2, 4, -5, 5)$, dati la mantissa $m = (1011)_2$, il segno $s = 0$ e l'esponente $e = 2$, si riporti il numero reale x così rappresentato in base 10.

2.75

2 — 1 pt

Si consideri la seguente successione $S_n = 4 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, per $n = 0, 1, 2, \ldots$, che fornisce un'approssimazione di π. Posto $n = 90$, si riporti il valore dell'approssimazione S_n così ottenuta, usando almeno quattro cifre decimali.

3.1526

3 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il sistema lineare $L\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice triangolare inferiore nella forma seguente

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & & & & \\ 0 & l_{42} & l_{43} & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & l_{53} & l_{54} & 1 & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 & l_{n,n-2} & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

mentre $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Quante operazioni effettua l'algoritmo delle sostituzioni in avanti applicato al sistema lineare $L\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di cui sopra se $n = 2000$?

7994

4 — 2 pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice di Hilbert di ordine n (comando Matlab® `>> A = hilb( n )`), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b} = \mathbf{5} \in \mathbb{R}^n$. Dopo aver posto $n = 7$ e aver risolto al calcolatore tale sistema lineare tramite il metodo diretto implementato in Matlab® nel comando \ , si stimi l'*errore relativo* in norma 2 così commesso.

$1.1753 \cdot 10^{-4}$

5 — 1 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, dove $\gamma > 0$. Posto $x^{(0)} = (0, 1)^T$, qual è l'approssimazione $\lambda^{(1)}$ dell'autovalore di modulo massimo di A ottenuta applicando un passo del metodo delle potenze? Si riporti l'espressione di $\lambda^{(1)}$ in funzione di γ.

$\dfrac{3\gamma + 37}{10}$

6 — 2 pt

Si consideri la matrice $A = \text{tridiag}\,(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dotata degli autovalori $\lambda_j = 2 + 2\cos\left(\pi \dfrac{j}{n+1}\right)$ per $j = 1, \ldots, n$. Posto $n = 100$, si determinino i valori dello shift $s \in \mathbb{R}$ tale per cui è possibile applicare il metodo delle potenze inverse con shift all'approssimazione dell'autovalore λ_{47} di A.

$2.1863 < s < 2.2482$

7 — 1 pt

Si consideri il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 0$ della funzione $f(x) = e^{3x} - 1$. Sapendo che all'iterata $x^{(k)}$ del metodo, comunque già "sufficientemente" vicina ad α, corrisponde l'errore $e^{(k)} = \left|x^{(k)} - \alpha\right| = 10^{-2}$, si *stimi* l'errore commesso al passo $x^{(k+1)}$, ovvero $e^{(k+1)} = \left|x^{(k+1)} - \alpha\right|$.

$1.5 \cdot 10^{-4}$

8 — 2 pt

Il metodo di Steffensen approssima lo zero α di una funzione $f(x)$ applicando la seguente iterata

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(f\left(x^{(k)}\right)\right)^2}{f\left(x^{(k)} + f\left(x^{(k)}\right)\right) - f\left(x^{(k)}\right)} \qquad \text{per } k \geq 0,$$

dopo aver scelto $x^{(0)}$.

Si applichi il metodo allo zero α della funzione $f(x) = e^{-4x} - 2x$ scegliendo $x^{(0)} = 1$ e arrestando il metodo quando $\left|f\left(x^{(N)}\right)\right| < 10^{-2}$. Si riportino il numero di iterazioni N effettuate e il valore dell'approssimazione $x^{(N)}$ così ottenuta.

9,   0.2135

9 — 1 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x - \frac{9}{2}\log\left(\frac{x}{3}\right)$. Si applichi il metodo delle iterazioni di punto fisso partendo dall'iterata iniziale $x^{(0)} = 2$. Si riporti il valore dell'iterata $x^{(4)}$ così ottenuta.

2.9291

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x - \frac{140}{11}\left(e^{(x/7-1)} - 1\right)$ nell'intervallo $[a, b]$ contenente il punto fisso $\alpha = 7$. Senza applicare esplicitamente il metodo delle iterazioni di punto fisso, si determino i valori di $a \geq 4$ e $b \leq 8$ tali per cui sono garantite l'unicità di $\alpha \in [a, b]$ e la convergenza delle iterazioni di punto fisso ad α per ogni scelta di $x^{(0)} \in [a, b]$.

$a \geq 5.4013, \quad b < 7.6672$

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica e definita positiva, e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$. In particolare, si pongano $n = 100$ e

$$A = \text{pentadiag}\,(\,1,\ -11,\ 20,\ -11,\ 1\,) \in \mathbb{R}^{100\times 100}.$$

Punto 1) — 3 pt

Si determini se i metodi di Jacobi e Gauss–Seidel applicati al sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risultano convergenti per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$; si commenti inoltre la velocità di convergenza attesa da tali metodi. Si motivi dettagliatamente la risposta data, definendo tutta la notazione usata e riportando eventuali comandi Matlab® .

Spazio per risposta lunga

($\rho_J = 1.1993 > 1$ (no Jacobi), $\rho_{GS} = 0.9993$ (si Gauss–Seidel))

Punto 2) — 2 pt

Dato il vettore $\mathbf{b} = (5,\ 5,\ \ldots, 5)^T \in \mathbb{R}^{100}$, si applichi il metodo di Gauss–Seidel implementato nella funzione Matlab® `gs.m` usando la tolleranza sul criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato $tol = 10^{-2}$, il numero massimo di iterazioni pari a 10^4 e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la prima componente della soluzione approssimata $x_1 = \left(\mathbf{x}^{(N)}\right)_1$, il valore del residuo normalizzato $r_{norm}^{(N)} = \frac{\|\mathbf{r}^{(N)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ e i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga

($N = 6607, \quad x_1 = 31.3231, \quad r_{norm}^{(N)} = 0.0100$)

Punto 3) — 2 pt (***) No Multichance

Sulla base del risultato ottenuto al Punto 2), si discuta l'affidabilità del criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato stimando l'errore relativo $e_{rel}^{(N)}$.

Spazio per risposta lunga $(K_2(A) = 6.4617 \cdot 10^3,\ e_{rel}^{(N)} = 64.5901)$

Punto 4) — 3 pt (***) No Multichance

Si consideri un metodo iterativo lineare, dipendente dal parametro $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_\omega \, \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}_\omega \quad \text{per } k \geq 0,$$

dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Data la matrice di precondizionamento $P_\omega = \dfrac{1}{\omega} T$, essendo $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice triangolare inferiore estratta da A, si riportino le espressioni di $B_\omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{g}_\omega \in \mathbb{R}^n$ affinché il metodo iterativo risulti fortemente consistente. Si motivi la risposta data.

Considerando ora la matrice A assegnata, per quale tra i seguenti valori di $\omega = 1.45,\ 1.55,\ 1.65,\ 1.75,\ 1.85$ è garantita la convergenza più rapida del metodo iterativo precedente? Si motivi la risposta data e si riportino i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga $(B_\omega = I - \omega T^{-1} A,\ \mathbf{g}_\omega = \omega\, T^{-1}\, \mathbf{b},\ \omega_{opt} = 1.65)$

Punto 5) — 3 pt

Si consideri ora il metodo del *gradiente precondizionato* con matrici di precondizionamento

$$P_1 = I \in \mathbb{R}^{100 \times 100} \quad \text{e} \quad P_2 = \text{tridiag}\,(\,-1,\,2,\,-1\,) \in \mathbb{R}^{100 \times 100}.$$

Senza applicare esplicitamente il metodo, si determini per quale delle due matrici di precondizionamento il metodo del gradiente precondizionato converge più rapidamente a $\mathbf{x}$ per ogni scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$.

Per la matrice di precondizionamento per cui il metodo converge più rapidamente, si *stimi* il fattore di abbattimento dell'errore $\dfrac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A}{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A}$ dopo $k = 10$ iterazioni del metodo. Si motivi dettagliatamente la risposta, definendo la notazione usata e riportando i comandi Matlab® .

Spazio per risposta lunga
$(K(P_1^{-1}A) = K(A) > K(P_2^{-1}A) = 1.5704, \text{fatt. abb. con } P_2 = 2.8976{\cdot}10^{-7})$

Punto 6) — 1 pt

Dopo aver risposto al Punto 5) e per la matrice di precondizionamento selezionata, si *stimi* ora il fattore di abbattimento dell'errore $\dfrac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A}{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A}$ dopo $k = 10$ iterazioni del metodo del *gradiente coniugato precondizionato*. Si commenti la risposta data confrontando il risultato con quello ottenuto al Punto 5), definendo la notazione e riportando i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga (fatt. abb. con $P_2 = 6.4159 \cdot 10^{-10}$)

Punto 7) — 3 pt

Data una generica matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e definita positiva, il suo numero di condizionamento spettrale $K(A) = \dfrac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$ si può approssimare applicando il seguente algoritmo.

Algorithm 1: Approssimazione di $K(A)$ tramite metodi delle potenze e potenze inverse

Dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, con $\|\mathbf{x}^{(0)}\| \neq 0$;

$\mathbf{y}_{max}^{(0)} = \dfrac{\mathbf{x}^{(0)}}{\|\mathbf{x}^{(0)}\|}$;

$\mathbf{y}_{min}^{(0)} = \mathbf{y}_{max}^{(0)}$;

$K^{(0)} = 1$;

for $k = 1, 2, \ldots,$ *fino a che un criterio d'arresto è soddisfatto* **do**

- $\mathbf{x}_{max}^{(k)} = A\,\mathbf{y}_{max}^{(k-1)}$;
- $\mathbf{y}_{max}^{(k)} = \dfrac{\mathbf{x}_{max}^{(k)}}{\|\mathbf{x}_{max}^{(k)}\|}$;
- risolvere $A\,\mathbf{x}_{min}^{(k)} = \mathbf{y}_{min}^{(k-1)}$ tramite metodo diretto;
- $\mathbf{y}_{min}^{(k)} = \dfrac{\mathbf{x}_{min}^{(k)}}{\|\mathbf{x}_{min}^{(k)}\|}$;
- $K^{(k)} = \dfrac{(\mathbf{y}_{max}^{(k)})^T A\,\mathbf{y}_{max}^{(k)}}{(\mathbf{y}_{min}^{(k)})^T A\,\mathbf{y}_{min}^{(k)}}$;

end

Si implementi il precedente algoritmo modificando per esempio la funzione Matlab® `eigpower.m`. Lo si applichi alla matrice A assegnata partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{100}$. Si riportino le approssimazioni $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ e $K^{(100)}$ di $K(A)$ così ottenute. Si riportino inoltre la funzione Matlab® implementata e i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga
($K^{(1)} = 3.2157 \cdot 10^3$, $K^{(2)} = 4.5359 \cdot 10^3$, $K^{(100)} = 6.4156 \cdot 10^3$)