Matemática e Física para Jogos - Exercícios Recomendados 1

Diego Rabelo de Sá

Conjuntos disjuntos

São dois conjuntos que não possuem nenhum elemento em comum, ou seja, sua intersecção é o conjunto vazio:

$$A \cap B = \emptyset$$

Operações clássicas

União de conjuntos

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Interseção de conjuntos

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Diferença de conjuntos

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Produto cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

Conjunto das partes

O conjunto das partes de um conjunto A, denotado por $\wp P(A)$, é o conjunto formado por todas as permutações de subconjuntos formados a partir dos elementos de A. Logo, tal conjunto terá uma cardinalidade igual a $2^{|A|}$.

$$\wp P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\wp P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

O Problema de Monty Hall

Esse é um famoso problema da probabilidade, geralmente descrito como:
"Imagine que você está em um programa de televisão, em que existem três portas: em duas delas, há cabras, e em apenas uma, um prêmio em dinheiro. Porém, você não sabe o que está atrás de cada porta em específico. Seu objetivo é escolher a porta que contém o prêmio. Após a sua escolha, o apresentador revela uma das portas que continha uma cabra, e te dá uma chance de trocar para a porta que restou. Qual é a melhor decisão a ser tomada, para obter mais chances de receber o prêmio?"
O problema ficou famoso por ser extremamente contra-intuitivo, já que à primeira vista, trocar ou não de porta não parece afetar as chances de você ganhar o prêmio, já que ambas parecem ser de $\frac{1}{2}$.
Entretanto, a chance de você obter o prêmio se trocar de porta, na verdade, é maior, sendo de $\frac{2}{3}$, enquanto a de permanecer na porta escolhida antes da revelação é de apenas $\frac{1}{3}$.
Isso acontece, pois, quando escolhemos a porta antes da revelação, temos inicialmente $\frac{1}{3}$ de chance de ter escolhido a porta correta, e "deixamos" $\frac{2}{3}$ para as outras duas portas. Quando o apresentador revela que uma dessas duas portas possui uma cabra, isso não interfere nessa probabilidade, mas sim, transfere toda essa probabilidade para a porta que restou.

Inferência Bayesiana

Quando se trata de estatística, somos mais acostumados com a filosofia **frequentista**, que observa apenas para a informação em forma de dados que temos sobre um problema. Por exemplo, dada uma variável aleatória θ, que representa a chance de uma moeda M cair em cara, nós calculamos seu valor seguindo a fórmula $p(\theta) = \frac{N_K}{N}$, onde N_K é o número de lançamentos que resultaram em cara, e N o número total de lançamentos.
Entretanto, existe uma abordagem diferente, chamada de **bayesiana**, em que antes de você analisar os dados de um problema, você já assume uma **priori** acerca do problema. Essa priori influenciará a sua nova tomada de decisão a partir da **regra de Bayes**:

$$p(\theta|D) = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{p(D)}$$

Onde D são os dados do problema, $p(\theta)$ é a priori, $p(D|\theta)$ a verossimilhança, $p(\theta|D)$ a posteriori, e $p(D)$ a evidência.
Um modelo estatístico que podemos utilizar no problema da moeda mencionado anteriormente, é o **Beta-Binomial**, em que assumimos uma distribuição Beta para a variável θ.
Essa filosofia estatística é amplamente utilizada em problemas com poucos resultados conhecidos, mas que já podemos assumir algumas características dos dados de outras formas, por exemplo, casos de doenças raríssimas.