TINCGR02 — Computer Graphics

dr. Wouter Bergmann Tiest

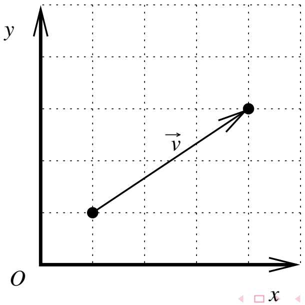
Hogeschool Rotterdam

W.M.Bergmann.Tiest@hr.nl

Vector graphics

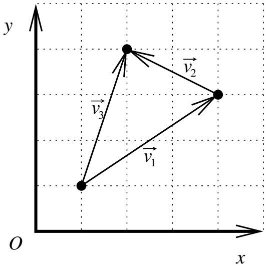
Coördinaten & vectoren

- Coördinaten
  - Punt in de ruimte: $(3, 6)$ of $(-7, 2.5, 3)$.
  - Ten opzichte van een *oorsprong* O.
- Vector
  - Verbinding tussen twee punten: $\vec{v} = \binom{3}{2}$.
  - Heeft grootte (lengte) en richting.



Coördinaten & vectoren

- Vermenigvuldigen met een scalar (getal): de lengte van de vector verandert maar niet de richting: $a \cdot \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot b \\ a \cdot c \end{pmatrix}$.
- Vectoren optellen: tel afzonderlijk coördinaten op.



$$\vec{v_3} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vector graphics

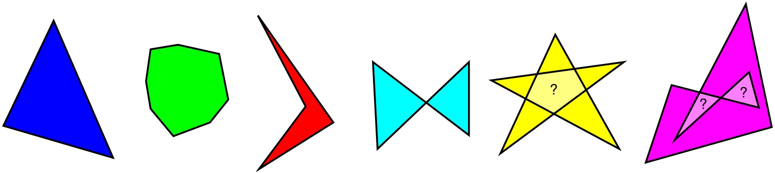
Coördinaten & vectoren

- Te schrijven als *lineaire combinatie van basisvectoren*.
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\hat{x} + b\hat{y}$.
- Basisvectoren: $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Basisvectoren kunnen roteren en schalen.

Vector graphics

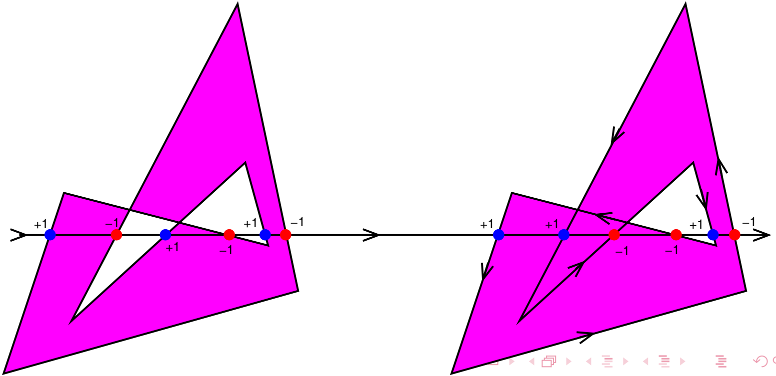
Polygonen

- Letterlijk “veelhoek”.
- Set van coördinaten, verbonden door lijnen.
- Basis van veel computergrafiek.
- 3D-modellen bestaan vaak uit grote aantallen polygonen.
- Probleem: hoe bepaal je of een punt binnen of buiten ligt?



Polygonen

- Volg een horizontale *scanline* en tel hoe vaak je een lijn passeert; oneven $\rightarrow$ binnen.
- Alternatief: $+1$ als lijn naar beneden, -1 als lijn naar boven; groter dan 0 $\rightarrow$ binnen.



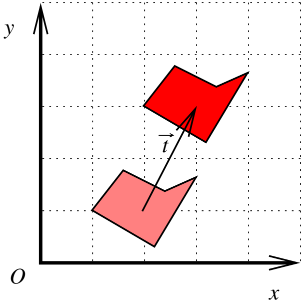
Transformaties

- Affiene transformaties:
  - Translatie
  - Schaling
  - Rotatie
  - (Schering (*shear*))
  - en combinaties daarvan.
- Niet-affiene transformaties, bijv. perspectiefprojectie.

Vector graphics

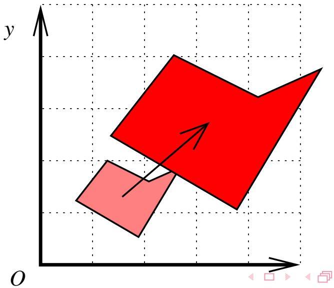
Translatie

- Verplaatsing volgens een vector.
- Tel de translatievector $\vec{t}$ bij alle coördinaten op.
- $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $p = (2,3) \rightarrow p' = (3,5)$



Schaling

- Vergroting of verkleining vanuit de oorsprong.
- Uniforme schaling: vermenigvuldig alle coördinaten met de schaalfactor s.
- Niet-uniforme schaling: vermenigvuldig de x-coördinaat met s_x, y—coördinaat met s_y.
- $s = 2 : p = (2,3) \rightarrow p' = (4,6)$

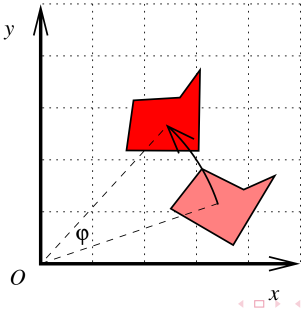


Schaling

- Schaling rond eigen middelpunt: eerst transleren naar de oorsprong, dan schalen, dan weer terug transleren.
- Spiegeling in de verticale as: schaling met $s_x = -1, s_y = 1$.
- Spiegeling in de horizontale as: schaling met $s_x = 1, s_y = -1$.
- Spiegeling in de oorsprong: schaling met $s_x = -1, s_y = -1$.

Rotatie

- Draaiing om de oorsprong.
- Tel de rotatiehoek φ bij de hoeken van alle punten op.
- $p = (2, 3) \to p' = (2\cos\varphi - 3\sin\varphi, 2\sin\varphi + 3\cos\varphi)$
- Rotatie rond eigen middelpunt: eerst transleren naar de oorsprong, dan roteren, dan weer terug transleren.



Vector graphics

Transformaties in 3D

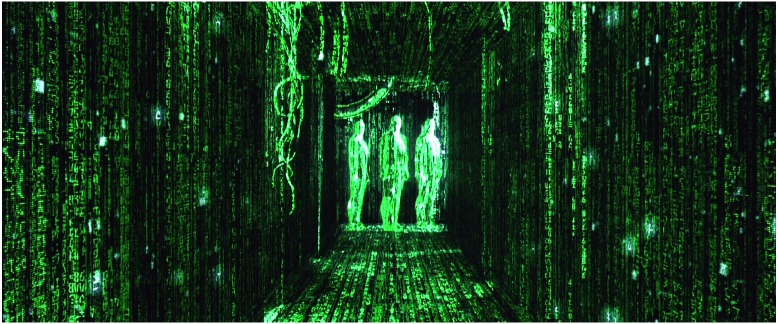
- Translatie en schaling: gewoon een coördinaat erbij.
- Rotatie: rond rotatieas, rotatievector $\vec{r}$.
- Richting geeft rotatieas, lengte geeft rotatiehoek.
- Nogal complex. Tip: gebruik afzonderlijke rotaties rond de coördinaatassen (rechterhandregel).
- Let op: bij rotaties rond verschillende assen maakt de volgorde uit!

Bijv. rotatie rond y-as met hoek φ ($\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$):

$$p = (2, 3, 4) \rightarrow p' = (2\cos\varphi + 4\sin\varphi, 3, -2\sin\varphi + 4\cos\varphi)$$

Transformaties als matrixoperaties

- Affiene transformaties zijn te schrijven als matrixoperaties.
- Computers zijn daar erg snel in.
- Verschillende transformaties makkelijk te "stapelen".
- Superhandig! Maar hoe zat het ook alweer?



Matrixvermenigvuldiging

- Matrix met vector:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot -2 & + & 0 \cdot 2 & + & 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot -2 & + & -1 \cdot 2 & + & 7 \cdot 4 \\ -3 \cdot -2 & + & 3 \cdot 2 & + & 2 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & + & 0 & + & 12 \\ -2 & + & -2 & + & 28 \\ 6 & + & 6 & + & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 24 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Vector graphics

Matrixvermenigvuldiging

- Matrix met matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 25 \\ 24 & 6 & 55 \\ 20 & -18 & -4 \end{pmatrix}$$

Matrixvermenigvuldiging

- Matrix met matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 25 \\ 24 & 6 & 55 \\ 20 & -18 & -4 \end{pmatrix}$$

Vector graphics

Matrixvermenigvuldiging

- Matrix met matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 25 \\ 24 & 6 & 55 \\ 20 & -18 & -4 \end{pmatrix}$$

Matrixvermenigvuldiging

- Let op: rijen en kolommen moeten kloppen.
- $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ OK.
- $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ OK.
- $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ NIET OK.

Matrixvermenigvuldiging

- Een matrix wordt toegepast op een vector; dat levert weer een vector op, waar een andere matrix op toegepast kan worden.
- Let op: $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\vec{v} \neq \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\vec{v}$ (niet commutatief).
- De volgorde maakt dus uit.
- Bij meerdere operaties: van rechts naar links afwerken.
- Wel geldt: $\mathbf{M}_1(\mathbf{M}_2\vec{v}) = (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)\vec{v}$ (associatief).
- Je kunt dus eerst de samengestelde transformatie uitrekenen, en die vervolgens herhaaldelijk toepassen: $\mathbf{M}_1(\mathbf{M}_2(\mathbf{M}_3\vec{v})) = \mathbf{M}_{\text{tot}}\vec{v}$ met $\mathbf{M}_{\text{tot}} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3$

Schaling als matrixoperatie

- Uniforme schaling vanuit de oorsprong met factor s:

  schaalmatrix $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$

- Niet-uniforme schaling:

  schaalmatrix $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}$

Voorbeeld: uniforme schaling in 2D met $s = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2D-rotatie als matrixoperatie

- Rotatie rond de oorsprong met hoek φ:

rotatiematrix $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Voorbeeld: 2D-rotatie met hoek $\varphi = \frac{1}{6}\pi$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1\frac{1}{2} \\ 1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

3D-rotatie als matrixoperatie

- Rotatie rond x-as: $\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
- Rotatie rond y-as: $\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$
- Rotatie rond z-as: $\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Translatie als matrixoperatie

- Translatie is een optelling; kan niet als matrixvermenigvuldiging geschreven worden.
- Truuk: homogene coördinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Translatiematrix: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrixtransformaties combineren

- Schrijf ook schaling en rotatie als homogene coördinaten met een extra rij en kolom (1 rechtsonder, de rest 0).
- Combineer transformaties door de matrices te vermenigvuldigen.

Voorbeeld: 2D-rotatie om punt (1, 2) met hoek $\frac{1}{2}\pi$:

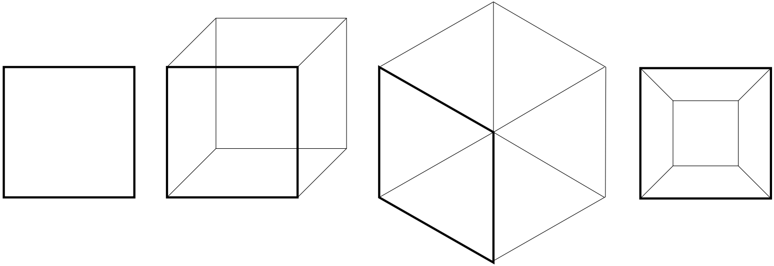
$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{T} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vector graphics

Projecties

- Afbeelden van 3D-object op 2D-vlak.
- Verschillende methoden:
  - Orthografische projectie
  - Parallelprojectie
  - Isometrische projectie
  - Perspectiefprojectie



Vector graphics

Orthografische projectie

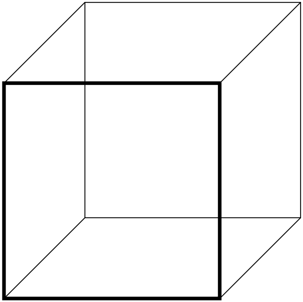
- Weglaten z-coördinaat. That's it.
- Veel gebruikt in bouwtekeningen.
- Projectiematrix: $\mathbf{P}_{\text{ortho}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(live demo)

Parallelprojectie

- Lijnen in z-richting worden schuin, verkort en parallel in het $x - y$-vlak weergegeven.
- Projectiematrix: $\mathbf{P}_{\text{para}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(live demo)

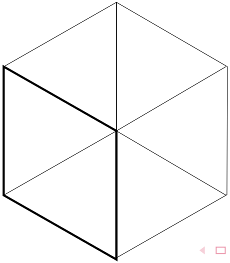


Vector graphics

Isometrische projectie

- Orthografische projectie vanuit gezichtspunt op de diagonaal, schuin van boven.
- Draaiing van 45° rond de y-as en $\arctan \frac{1}{\sqrt{2}} = 35{,}264°$ rond de x-as, gevolgd door orthografische projectie.
- Projectiematrix: $\mathbf{P}_{\text{iso}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$.

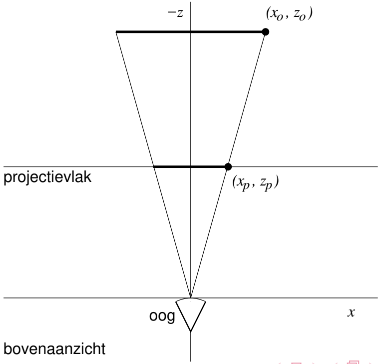
(live demo)



Vector graphics

Perspectiefprojectie

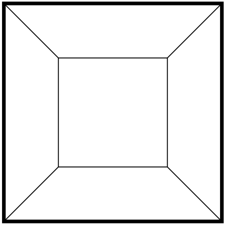
- Geen affiene transformatie: niet te schrijven als matrixoperatie.
- $x_p = \dfrac{z_p}{z_o} x_o \qquad y_p = \dfrac{z_p}{z_o} y_o$



Perspectiefprojectie

- Gebruik projectiematrix om deelfactor uit te rekenen.
- Projectiematrix: $\mathbf{P}_{\mathrm{per}} = \begin{pmatrix} z_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (z_p < 0).$
- Deel vervolgens de x-, y- en z-component door de 4e component van de resulterende vector.

(live demo)



Vector graphics

Opdracht 4: Projectie en matrixtransformaties

- Schrijf een programma (in Python, C/C++ of Java) dat een projectie tekent van een kubus die 30° om de y-as geroteerd is.
- In Python: class `Lines` (zie files op Classroom).
- ```
  from lines import *
  l = Lines(640, 480)
  l.addLine((100, 100), (500, 300))
     ⋮
  l.draw()
  ```
  ```

Opdracht 4: Projectie en matrixtransformaties

- Eenheidkubus:
  - Hoekpunten: $v_1 = (-1, -1, -1)$, $v_2 = (1, -1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$, $v_4 = (-1, 1, -1)$, $v_5 = (-1, -1, 1)$, $v_6 = (1, -1, 1)$, $v_7 = (1, 1, 1)$, $v_8 = (-1, 1, 1)$.
  - Ribben: v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_5.
- a) Maak eerst een functie die een matrixvermenigvuldiging uitvoert met een vector.
- b) Noteer de coördinaten van de hoekpunten van de kubus als homogene coördinaten.
- c) Stel vervolgens een projectiematrix op voor de projectie van 3D naar 2D (perspectief (+4 pnt), isometrisch (+3 pnt), parallel (+2 pnt) of orthografisch (+1 pnt)). Gebruik de matrixvermenigvuldiging om de projectie uit te voeren op de coördinaten van de kubus.

Opdracht 4: Projectie en matrixtransformaties

- d) Stel een translatiematrix op die de geprojecteerde (2D) coördinaten verschuift naar positieve waarden (zodat ze in het venster vallen) en teken de kubus.
- e) Stel een rotatiematrix op om de kubus om de verticale as te laten draaien met hoek $\varphi = 30°$. Pas vervolgens de translatiematrix, de rotatiematrix en de projectiematrix in de goede volgorde toe op de coördinaten van de kubus om de geroteerde kubus te tekenen.
- Bonus: maak een functie die een matrix vermenigvuldigt met een matrix, en combineer de translatie, de rotatie en de projectie met elkaar. Pas vervolgens de gecombineerde matrix in één keer toe om de geroteerde kubus te tekenen.
- Broncode voorzien van commentaar binnen één week inleveren via Teams.

Vector graphics

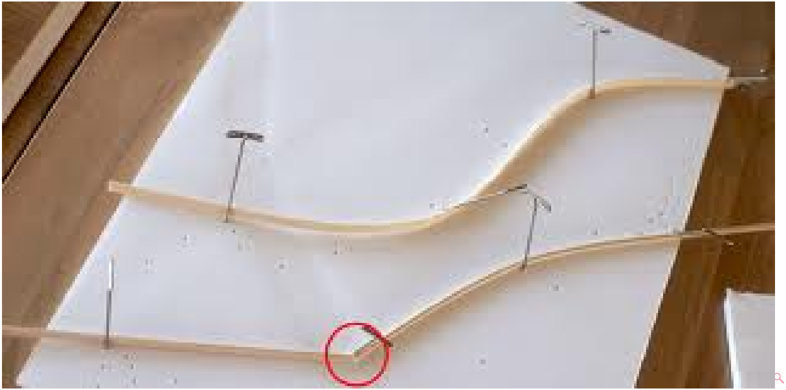
Beoordeling

- niet in Python, Java, C, of C++: 0 pnt
- (compileert en) draait zonder foutmeldingen: 1 pnt
- orthografische projectie met projectiematrix: +1 pnt
- parallelprojectie met projectiematrix: +2 pnt
- isometrische projectie met projectiematrix: +3 pnt
- perspectiefprojectie met projectiematrix: +4 pnt
- coördinaten verschoven met translatiematrix : +1 pnt
- coördinaten gedraaid met rotatiematrix 30° : +1 pnt
- bonus: rotatie-, translatie- en projectiematrices gecombineerd tot één transformatiematrix: +1 pnt
- voorzien van informatief commentaar: +1 pnt
- programma is naar de mening van de docent zeer elegant of zit technisch zeer slim in elkaar: +1 pnt

Vector graphics

Krommen

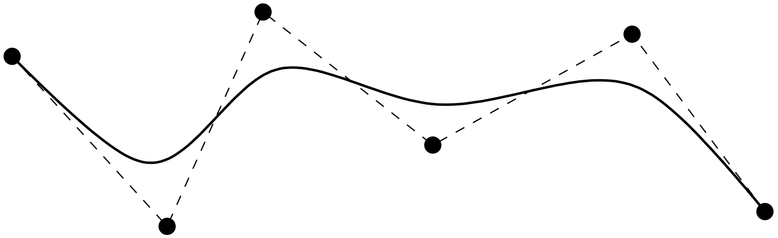
- Gekromde lijnen als vector graphics.
- Maakt gebruik van “aantrekkingspunten”.
- Wordt *spline* genoemd (buigzaam strookje hout).



Vector graphics

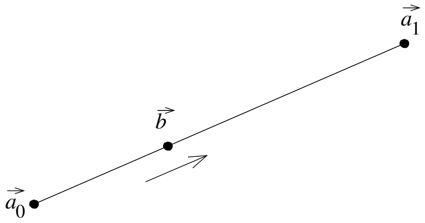
Krommen

- Gekromde lijnen als vector graphics.
- Maakt gebruik van “aantrekkingspunten”.
- Wordt *spline* genoemd (buigzaam strookje hout).



Bézier-kromme

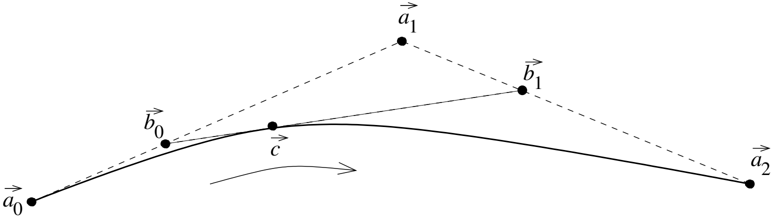
- Bepaald soort spline.
- Geparametriseerde functie: $t = 0 \ldots 1$.
- 1e-orde Bézier-kromme (lineair):
- $\vec{b}(t) = (1 - t)\vec{a_0} + t\vec{a_1}$.



Bézier-kromme

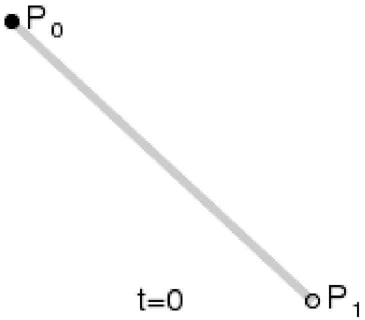
- 2^e^-orde Bézier-kromme (kwadratisch):
- $\vec{b_0}(t) = (1-t)\vec{a_0} + t\vec{a_1} \qquad \vec{b_1}(t) = (1-t)\vec{a_1} + t\vec{a_2}.$

$$\begin{aligned}\vec{c}(t) &= (1-t)\vec{b_0} + t\vec{b_1}\\ &= (1-t)((1-t)\vec{a_0} + t\vec{a_1}) + t((1-t)\vec{a_1} + t\vec{a_2})\\ &= (1-t)^2\vec{a_0} + 2(t-t^2)\vec{a_1} + t^2\vec{a_2}.\end{aligned}$$



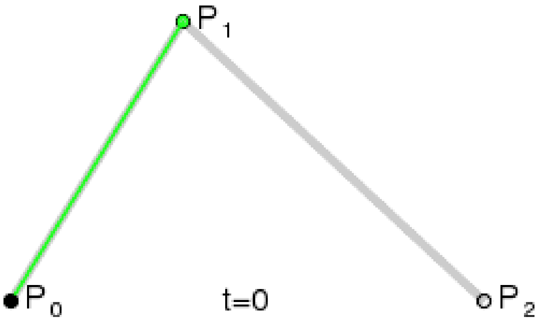
Bézier-kromme

- 1e-orde Bézier-kromme (lineair):



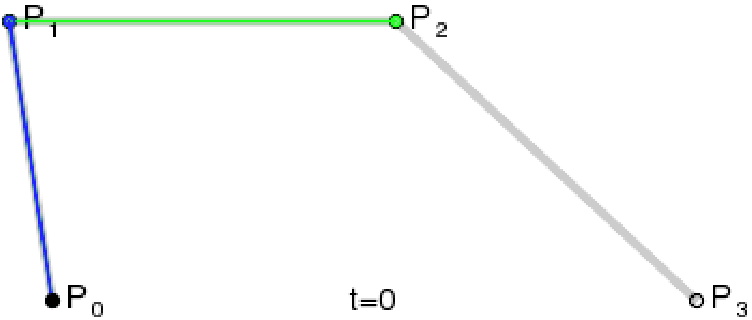
Bézier-kromme

- 2^e^-orde Bézier-kromme (kwadratisch):



Bézier-kromme

- 3e-orde Bézier-kromme (kubisch):



Bézier-kromme

- 4^e-orde Bézier-kromme (vierdegraads):