#### Ayrık Matematik Önermeler

H. Turgut Uyar Ayşegül Gençata Yayımlı Emre Harmancı

2001-2011

#### Lisans



©2001-2010 T. Uyar, A. Yayımlı, E. Harmancı

- to Share to copy, distribute and transmit the work
- to Remix to adapt the work

Legal code (the full license):

- Under the following conditions:
  - Attribution You must attribute the work in the manner specified by the author or licensor (but not in any way that suggests that they endorse you or your use of the work).
  - Noncommercial You may not use this work for commercial purposes.
  - ► Share Alike If you alter, transform, or build upon this work, you may distribute the resulting work only

http://creativecommons.org/licenses/bv-nc-sa/3.0/

# Konular

#### Önermeler

Giris

İşlemler Sağlıklı Formüller

Üstdil

#### Önerme Hesapları

Giris

Mantik Yasalari

Akıl Yürütme

### Önerme

#### Tanım

önerme: doğru ya da yanlış denebilecek bir bildirim cümlesi

- ▶ ara değeri dıslama kuralı:
  - bir önerme kısmen doğru ya da kısmen yanlış olamaz
- celiski kuralı:

bir önerme hem doğru hem vanlıs olamaz

# Önerme Örnekleri

Örnek (önerme)

Örnek (önerme değil)

Ay dünyanın çevresinde döner.

► Saat kaç?

► Filler uçabilir.

► Ali topu at!

▶ 3 + 8 = 11

▶ x < 43</p>

...

Önerme Değişkeni

Tanım

önerme değişkeni:

önermeyi simgeleyen isim

▶ Doğru (D) ya da Yanlış (Y) değerlerini alabilir

Örnek

▶ p1: Ay dünyanın çevresinde döner. (D)

p<sub>2</sub>: Filler uçabilir. (Y)
 p<sub>3</sub>: 3 + 8 = 11 (D)

### İşlemler

- yeni önermeler elde etmek için:
  - bir önerme değillenebilir
  - bir veya birden fazla önerme mantıksal bağlaçlar ile birleştirilerek birleşik önermeler elde edilebilir
- yalın önermeler daha küçük birimlere bölünemez
- doğruluk tablosu:

içerdiği yalın önermelerin olası bütün değerleri için birleşik önermenin sonucunu veren tablo Değilleme

Tablo: ¬p

100	о р
р	$\neg p$
D	Y
Y	D

Örnek

▶ ¬p₁: Ay dünyanın çevresinde dönmez.

¬D: Yanlış

→ ¬p<sub>2</sub>: Filler uçamaz.

¬Y: Doğru

7/68

0.74

# Ve Bağlacı

#### Tablo: $p \wedge q$

р	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

# Örnek

▶ p<sub>1</sub> ∧ p<sub>2</sub>: Ay dünyanın çevresinde döner ve filler uçabilir. D ∧ Y: Yanlış Veya Bağlacı

#### Tablo: $p \lor q$

р	q	$p \lor q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Υ	Y	Y

#### Örnek

▶ p<sub>1</sub> ∨ p<sub>2</sub>: Ay dünyanın çevresinde döner veya filler uçabilir. D ∨ Y: Doğru

# Dar Veya Bağlacı

#### Tablo: p ⊻ q

р	q	<i>p</i> ⊻ <i>q</i>
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

#### Örnek

▶ p<sub>1</sub> ¥ p<sub>2</sub>: Ya ay dünyanın çevresinde döner ya da filler uçabilir. D ¥ Y: Doğru Koşullu Bağlaç

#### Table: $n \rightarrow a$

р	q	$p \rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

- ▶ p: öncül
- ▶ q: sonuç
- okunuşları:
  - ▶ p ise q
  - p, q için yeterli
  - q, p için gerekli
- ▶  $\neg p \lor q$

11/68

- ---

# Koşullu Bağlaç Örnekleri

#### Örnek

- ▶  $p_4$ : 3 < 8,  $p_5$ : 3 < 14,  $p_6$ : 3 < 2
- ▶ p<sub>7</sub>: Güneş dünyanın çevresinde döner.
- p<sub>4</sub> → p<sub>5</sub>: 3, 8'den küçükse 3, 14'den küçüktür. D → D: Doğru
- P<sub>4</sub> → P<sub>6</sub>: 3, 8'den küçükse 3, 2'den küçüktür. D → Y: Yanlıs
- ▶ p<sub>2</sub> → p<sub>1</sub>: Filler uçabilirse ay dünyanın çevresinde döner. Y → D: Doğru
- P<sub>2</sub> → P<sub>7</sub>: Filler uçabilirse güneş dünyanın çevresinde döner. Y → Y: Doğru

# Koşullu Bağlaç Örnekleri

#### Örnek

- "70 kg'yi geçersem spor yapacağım."
  - p: 70 kg'den ağırım.
     q: Spor yapıyorum.
- ightharpoonup p 
  ightarrow q nasıl yorumlanmalı?

Tablo:  $p \rightarrow q$ 

р	q	$p \rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Υ	D	D
Y	Y	D

14 / 68

# Karşılıklı Koşullu Bağlaç

#### Tablo: $p \leftrightarrow q$

р	q	$p \leftrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

okunusları:

- p valnız ve ancak a ise
- p, q için yeterli ve gerekli
- p, q için yeterli ve gerek  $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$
- ( ) ( )
- $ightharpoonup \neg (p \lor q)$

#### Günlük Dilden Örnek

#### Örnek

- ▶ s: Cocuk ödevini yapar.
- t: Cocuk bilgisavar ovunu ovnar.
- $rac{1}{2}$   $s \rightarrow t$

"Ödevini yaparsan bilgisayar oyunu oynayabilirsin."

- ightharpoonup t 
  ightarrow s
  - "Bilgisayar oyunu oynaman için ödevini yapman gerek."
  - ▶ söylenmek istenen: s ↔ t

. . . . .

# Sağlıklı Formül

#### Yazım

- birleşik önermeler hangi kurallara göre oluşturulacak?
- ▶ kurallara uyan formüller: sağlıklı formül (SF)

#### Anlam

- yorum: yalın önermelere değer vererek birleşik önermenin değerini hesaplama
- ▶ doğruluk tablosu: önermenin bütün yorumları

168

# Sağlıklı Formül Örnekleri

Örnek (sağlıklı formül değil)

- ▶ ∨ p▶ p ∧ ¬
- ▶ p ∧ ¬
  ▶ p¬ ∧ q

10 / 60

# Öncelik Sırası

- 1. ¬
- 2. ^
- **3**. ∨
- 4. →
- 5. ↔
  - ▶ önceliği değiştirmek için parantez kullanılır

# Örnek

- ▶ s: Filiz gezmeye çıkar.
- ▶ t: Mehtap var.

Öncelik Sırası Örnekleri

▶ u: Kar yağıyor.

aşağıdaki SF'ler ne anlama gelir?

- ▶  $t \land \neg u \rightarrow s$ 
  - $\blacktriangleright \ t \to (\neg u \to s)$
- $\blacktriangleright \neg (s \leftrightarrow (u \lor t))$
- $\blacktriangleright \neg s \leftrightarrow u \lor t$

# Formül Nitelikleri

- 1. geçerli: bütün yorumlar için doğru (totoloji)
- 2. çelişkili: bütün yorumlar için yanlış (çelişki)
- 3. tutarlı: bazı yorumlar için doğru

# Totoloji Örneği

Örnek

Tablo:  $p \land (p \rightarrow q) \rightarrow q$ 

р	q	$p \rightarrow q$	$p \land (p \rightarrow q)$	$p \land (p \rightarrow q) \rightarrow q$
D	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D
Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	Y	D

22 / 68

# Çelişki Örneği

#### Örnek

#### Tablo: $p \wedge (\neg p \wedge q)$

р	q	$\neg p$	$\neg p \land q$	$p \wedge (\neg p \wedge q)$
D	D	Y	Y	Y
D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	Y
Y	Y	D	Y	Y

Üstdil

# Tanım

hedef dil: üzerinde çalışılan dil

#### Tanım

üstdil: hedef dilin özelliklerinden söz ederken kullanılan dil

▶ geçerlilik, çelişkililik ve tutarlılık üstdile ait tanımlar

# Üstdil Örnekleri

#### Örnek (İngilizce öğrenen biri için)

- ► hedef dil: İngilizce
- ▶ üstdil: Türkce

### Örnek (Intro. to Sci. and Eng. Comp.)

- ► hedef dil: C
- ▶ üstdil: İngilizce

#### Üstmantık

- $\triangleright P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ 
  - $P_1, P_2, \dots, P_n$  varsayıldığında Q'nun doğruluğu tanıtlanabilir
- $\triangleright P_1, P_2, \dots, P_n \models Q$  $P_1, P_2, \dots, P_n$  doğruysa Q doğrudur

#### Bicimsel Sistemler

#### Tanım

tutarlı; bütün P ve Q sağlıklı formülleri için  $P \vdash Q \text{ ise } P \models Q$ 

▶ tanıtlanabilen bütün önermeler doğrudur

#### Tanım

eksiksiz: bütün P ve Q sağlıklı formülleri için  $P \models Q \text{ ise } P \vdash Q$ 

doğru olan bütün önermeler tanıtlanabilir

#### Gödel Kuramı

- Önermeler mantığı tutarlı ve eksiksizdir.
- Yüklemler mantığı tutarlı ve eksiksizdir.

#### Gödel Kuramı

► Sıradan aritmetiği ifade edecek kadar güclü hicbir mantıksal sistem hem tutarlı hem eksiksiz olamazl

# Önerme Hesabı Yaklaşımları

- 1. anlamsal yaklaşım: doğruluk tabloları
  - değişken sayısı artınca yönetimi zorlaşıyor
- 2. yazımsal yaklaşım: akıl yürütme kuralları
  - önermelerden mantiksal gerektirmeler yoluyla yeni önermeler üretme
- 3. aksiyomatik yaklaşım: Boole cebri
  - eşdeğerli formülleri denklemlerde birbirlerinin yerine koyma

Doğruluk Tablosu Örneği

Örnek  $(p \rightarrow q)$ 

	р	q	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$
	D	D	D	D	D	D
	D	Y	Y	Y	D	D
	Y	D	D	D	Y	Y
İ	Y	Y	D	D	D	D

- kontrapozitif: ¬q → ¬p
- konvers: q → p
- invers: ¬p → ¬q

29/68

# Mantıksal Eşdeğerlilik

Tanım

 $P \leftrightarrow Q$  totoloji ise P ve Q mantıksal eşdeğerli:

 $P \Leftrightarrow Q$ 

Mantıksal Eşdeğerlilik Örneği

Örnek

 $ightharpoonup \neg p \Leftrightarrow p \rightarrow Y$ 

Tablo:  $\neg p \leftrightarrow p \rightarrow Y$ 

р	$\neg p$	$p \rightarrow Y$	$\neg p \leftrightarrow p \rightarrow Y$
D	Y	Y	D
Y	D	D	D

# Mantıksal Eşdeğerlilik Örneği

#### Örnek

 $\triangleright p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \lor q$ 

Tablo:	$(p \rightarrow q)$	) ↔ (	$(\neg p \lor q)$	١
--------	---------------------	-------	-------------------	---

_	-		¬p	- ) ( -	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)$
P	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \lor q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)$
D	D	D	Y	D	D
D	Y	Y	Y	Y	D
Y	D	D	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D

Mantik Yasalari

Cifte Değilleme Yasası (DN)  $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ 

Değişme Yasaları (Co)  $p \land q \Leftrightarrow q \land p$ 

 $p \lor q \Leftrightarrow q \lor p$ 

Birleşme Yasaları (As)  $(p \land q) \land r \Leftrightarrow p \land (q \land r)$ 

 $(p \lor q) \lor r \Leftrightarrow p \lor (q \lor r)$ 

Sabit Kuvvetlilik Yasaları (Ip)

 $D \land D \Leftrightarrow D$  $p \lor p \Leftrightarrow p$ 

Terslik Yasaları (In)  $p \land \neg p \Leftrightarrow Y$ 

 $p \lor \neg p \Leftrightarrow D$ 

# Eşdeğerlilikler

Etkisizlik Yasaları (Id)  $p \wedge D \Leftrightarrow p$ 

 $D \vee Y \Leftrightarrow D$ 

Baskınlık Yasaları (Do)  $p \wedge Y \Leftrightarrow Y$ 

 $p \lor D \Leftrightarrow D$ 

Dağılma Yasaları (Di)

 $p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r) \quad p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$ 

Yutma Yasaları (Ab)

 $p \land (p \lor q) \Leftrightarrow p$  $p \lor (p \land q) \Leftrightarrow p$ 

DeMorgan Yasaları (DM)

 $\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$  $\neg (p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$ 

# Dualite

Tanım

∧ ve ∨ dışında bir bağlaç içermeyen bir s önermesinin

dual önermesi  $s^d$ ,  $\wedge$  yerine  $\vee$ ,  $\vee$  yerine  $\wedge$ , D verine Y. Y verine D konarak elde edilir.

Örnek (dual önerme)

 $s: (p \land \neg q) \lor (r \land D)$ 

 $s^d: (p \vee \neg q) \wedge (r \vee Y)$ 

# Dualite İlkesi

#### Dualite İlkesi

s ve  $t, \wedge$  ve  $\vee$  dışında bir bağlaç içermeyen önermeler olsun.  $s \Leftrightarrow t$  ise  $s^d \Leftrightarrow t^d.$ 

Eşdeğerlilik Hesabı Örneği

Örnek

$$\begin{array}{ccc} & p \rightarrow q \\ \Leftrightarrow & \neg p \vee q \\ \Leftrightarrow & q \vee \neg p & Co \\ \Leftrightarrow & \neg \neg q \vee \neg p & DN \\ \Leftrightarrow & \neg q \rightarrow \neg p \end{array}$$

8 / 68

# Eşdeğerlilik Hesabı Örneği

Örnek

$$\neg (\neg ((p \lor q) \land r) \lor \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg ((p \lor q) \land r) \land \neg \neg q \quad DM$$

$$\Leftrightarrow \quad ((p \lor q) \land r) \land q \quad DN$$

$$\Leftrightarrow \quad (p \lor q) \land (r \land q) \quad As$$

$$\Leftrightarrow \quad (p \lor q) \land (q \land r) \quad Cs$$

$$\Leftrightarrow \quad ((p \lor q) \land q \land r \quad As$$

$$\Leftrightarrow \quad q \land r \quad Ab$$

#### Mantiksal Gerektirme

Tonin

37 / 68

 $P \rightarrow Q$  bir totoloji ise P formülü Q formülünü mantıksal gerektirir:

$$P \Rightarrow Q$$

# Mantıksal Gerektirme Örneği

#### Örnek

▶  $p \land (p \rightarrow q) \Rightarrow q$ 

Tablo:  $p \land (p \rightarrow q) \rightarrow q$ 

р	q	$p \rightarrow q$	$p \land (p \rightarrow q)$	$p \land (p \rightarrow q) \rightarrow q$
D	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D
Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	Y	D

Akıl Yürütme

b doğruluğu varsayılan ya da tanıtlanmış önermeler içeren bir kümeden yola çıkarak bu küme dışındaki bir önermenin doğruluğuna varma

# gösterilim

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow q$$

#### Temel Kurallar

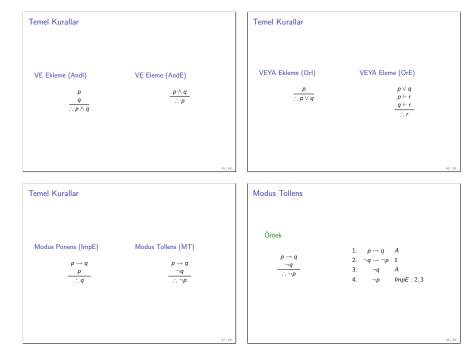
Özdeşlik (ID)

Çelişki (CTR)

# Temel Kurallar

Koşul Ekleme (Impl)

$$p o q$$
 doğrudur



# Modus Ponens Örneği

#### Örnek

- ► Ali piyangoyu kazanırsa araba alacak.
- ► Ali piyangoyu kazandı.
- ▶ O halde, Ali araba alacak.

Modus Tollens Örneği

#### Örnek

- ► Ali piyangoyu kazanırsa araba alacak.
- ► Ali araba almadı.
- ▶ o halde, Ali piyangoyu kazanmadı.

50

#### Yanılgılar

sonucu onaylama yanılgısı

$$p \rightarrow q$$
 $q$ 

 $\begin{array}{l} \blacktriangleright \ \, \left( p \to q \right) \wedge q \to p \ \, \mbox{bir totoloji değil:} \\ p = Y, q = D \ \, \mbox{ise:} \ \, \left( Y \to D \right) \wedge D \to Y \end{array}$ 

# Örnek

- ► Madonna A.B.D. başkanıysa 35 yaşının üstündedir.
- ► Madonna 35 yaşının üstündedir.

Sonucu Onaylama Yanılgısı Örneği

▶ O halde, Madonna A.B.D. başkanıdır.

51/68

FO 15

# Yanılgılar

öncülü yadsıma yanılgısı

$$\begin{array}{c}
p \to q \\
\neg p \\
\hline
\vdots \neg q
\end{array}$$

▶ 
$$(p \rightarrow q) \land \neg p \rightarrow \neg q$$
 bir totoloji değil:  
 $p = Y, q = D$  ise:  $(Y \rightarrow D) \land D \rightarrow Y$ 

Öncülü Yadsıma Yanılgısı Örneği

Örnek

- ightharpoonup 2+3=8 ise 2+4=6
- ▶  $2 + 3 \neq 8$ ▶ o halde,  $2 + 4 \neq 6$

Ayırıcı Kıyas Örneği

54 / 68

# Ayırıcı Kıyas

1. 
$$p \lor q$$
 A  $2$ .  $\neg p$  A Ayırıcı Kıyas (DS) 3.  $p \to Y$  2

Örnek

- ► Ali'nin cüzdanı cebinde veva masasında.
- Ali'nin cüzdanı cebinde değil.
  - ► O halde, Ali'nin cüzdanı masasında.

-- --

# Varsayımlı Kıyas

# Varsayımlı Kıyas (HS)

$$6. \quad p \rightarrow r \quad \textit{Impl} : 1,5$$

b. 
$$p \rightarrow r$$
  $Impl: 1, 5$ 

# Varsayımlı Kıyas Örneği

Örnek (Uzay Yolu)

Spock - Yarbay Decker:

Şu anda düşman gemisine saldırmak intihar olur. İntihara teşebbüs eden biri Atılgan'ın komutanlığını yapmaya psikolojik olarak yetkin degildir. O halde, sizi görevden almak zorundavım.

# Varsayımlı Kıyas Örneği

# Örnek (Uzay Yolu)

▶ p: Decker düşman gemisine saldırır.

▶ q: Decker intihara teşebbüs eder.

r: Decker Atılgan'ın komutanlığını yapmaya psikolojik olarak yetkin değildir.

▶ s: Spock Decker'ı görevden alır.

Varsayımlı Kıyas Örneği

1. 
$$p \rightarrow q$$
 A

2.  $q \rightarrow r$  A

2.  $q \rightarrow r$  A

59 / 68

# İkilemler

Yapıcı İkilem

Yıkıcı İkilem

$$\begin{array}{ccc} p \rightarrow q & p \rightarrow q \\ r \rightarrow s & r \rightarrow s \\ \hline p \lor r & \neg q \lor \neg s \\ \hline \therefore q \lor s & \hline \therefore \neg p \lor \neg i \end{array}$$

Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

¬x DS: 1.2  $u \lor \neg x$ 

9. ¬p MT:8,7 ¬s DS: 4.3

64 / 68

# Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

$$(\neg p \lor \neg q) \to (r \land s)$$

$$r \to x$$

$$\neg x$$

$$\therefore p$$

- 6.  $(\neg p \lor \neg q) \rightarrow (r \land s)$  A
- ¬(¬p ∨ ¬q) MT: 6.5
- DM:7 ¬r MT:1,2 p ∧ q
- 4. ¬r∨¬s Orl:3 D AndE:8
- 5.  $\neg (r \land s)$  DM: 4

# Akıl Yürütme Örnekleri

Örnek

1. 
$$q \rightarrow \neg p$$
 A  
2.  $p$  A  
 $p \rightarrow (q \lor r)$  3.  $\neg q$   $MT: 1, 2$ 

- 5  $s \rightarrow \neg r$ ImpE: 5.4  $\neg r$ 
  - 7.  $p \rightarrow (q \lor r)$  A ∴ q ∧ ¬q
    - $a \vee r$ ImpE: 7.2 DS: 8.6
    - 10.  $q \wedge \neg q$  And I: 9, 3

#### Akıl Yürütme Örnekleri

#### Örnek

Eğer yağmur yağma olasılığı varsa veya saç bandını bulamazsa, Filiz cimleri biçmez. Hava sıcaklığı 20 derecenin üzerindeyse yağmur yağma olasılığı yoktur. Bugün hava sıcaklığı 22 derece ve Filiz saç bandını takmış. O halde, Filiz çimleri biçecek. Akıl Yürütme Örnekleri

# Örnek

- ▶ p: Yağmur yağabilir.
- q: Filiz'in sac bandı kayıp.
- r: Filiz çimleri biçer.
- ▶ s: Hava sıcaklığı 20 derecenin üzerinde.

# Akıl Yürütme Örnekleri

#### Örnek

Kaynaklar

#### Okunacak: Grimaldi

- ▶ Chapter 2: Fundamentals of Logic
  - ▶ 2.1. Basic Connectives and Truth Tables
    - 2.2. Logical Equivalence: The Laws of Logic
       2.3. Logical Implication: Rules of Inference

Yardımcı Kitap: O'Donnell, Hall, Page

► Chapter 6: Propositional Logic

7.8