Sayısal Analiz Ders Notları

Arzu Erdem

Kaynaklar

- An Introduction to Numerical Analysis for Electrical and Computer Engineers, Christopher J. Zarowski, A JOHN WILEY & SONS, INC. PUBLICATION, 2004.
- An Introduction to Numerical Analysis, Endre Süli and David F. Mayers, Cambridge University Press, 2003.
- Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach, McGraw-Hill, 1980.
- Numerical Analysis Using MATLAB and Spreadsheets, Steven T. Karris, Orchard Publications, 2004.
- Numerical Methods and Analaysis, James I. Buchanan, Peter R. Turner, McGraw-Hill, 1992.
- Numerical Methods for Mathematics, Science & Engineering, John H. Mathews, Prentice Hall, 1992.
- Applied Numerical Analysis Using Matlab, Laurene V. Fausett, Prentice Hall, 1999.
- Sayısal analiz, Galip Oturanç, 2008.
- Sayısal analiz ve mühendislik uygulmaları, İrfan Karagöz, 2001.

[1]email : erdem.arzu @ gmail.com , web page: http://umm.kocaeli.edu.tr/dosyalar/dif.htm; May 12, 2013

Contents

[1] Isaac Newton, 4 ocak 1643 yılında Woolsthorpe-Ingiltere doğumlu 31 mart 1727, Londra-Ingiltere de öldü. 27 yaşında Cambridge de Lucasian başkanlığını yaptı.

Bibliography 97

List of Figures

List of Tables

Chapter 0

Giriş

1.1 Neden Sayısal Yöntemler?

Matematikte değişik tipte denklem türleri ile kaşılaşmak mümkündür. Bunlardan bazıları önceki matematik derslerinde ele alınmıştır. Örneğin lineer denklemler $ax + b = 0, a, b \in IR, a \neq 0$ denkleminin çözümünü $x = -b/a$ olarak elde etmiştik. Bunun yanısıra lıneer olmayan pek çoğu için ki bunlardan en kolayı $ax^2+bx+c = 0, a, b, c \in IR, a \neq 0$ tipinde 2.dereceden polinomlar(parabol) dır. Bu denklemin iki çözmünü x_1, x_2 olarak adalandırırsak çözümleri $x_i = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, i = 1, 2$ ile gösterilir. 16. yüzyılda Italyan matematikçiler Niccolo Fontana Tartaglia (1499–1557), Lodovico Ferrari (1522–1565) ve Girolamo Cardano (1501–1576) "Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus" adlı makalelerinde 3.ve 4. dereceden polinomlar için bu formüle çok da benzer olmayan bir formül ortaya koydular. Tabi bulunan bu formüllerin genellemesi, şu ana kadar, derecesi 5 ve 5 ten büyük hehangi bir polinomun köklerini bulmak için genelleştirilemedi. Örneğin $x^5 - 4x - 2 = 0$ denklemi gibi. Polinom denklemlerini çözümleri için genel anlamada bir formül olmadığı için bu türlü ve hatta daha genel anlamda $f(x) = 0$ formunda tüm denklemlerin çözümleri için yaklaşımlar verilicektir. Burada *bir denklemin çözümü var mıdır?* ve eğer çözüm varsa *bu çözümü nasıl buluruz?* sorularının cevabını arayacağız. Bu derste görüceğimiz başka bir konu ise $f(x)$ fonksiyonunun $x_0, x_1, ..., x_n$ gibi belli noktalarda değerleri verildiğinde bu $f(x)$ *fonksiyonunu nasıl oluşturabilirizdir.* Diğer bir konu ise integralle ilgilidir. $\int_0^1 \exp(x)\,dx$ veya $\int_0^\pi \cos(x)\,dx$ integrallerini hesaplayabilirken $\int_0^1 \exp\left(x^2\right) dx$ veya $\int_0^\pi \cos\left(x^2\right) dx$ gibi integralleri nasıl hesaplayabilir hakkında konuşucağız. Ele alınacak olan tüm nümerik tenkniklerin belli oranda hata payı olduğu gibi bu hata paylarındaki analizler verilcektir. Sayısal yöntemlerde, yinelemeli hesaplar için bilgisayar çözümlerine ihtiyaç duyacağız.

1.2 Sayısal Analizin Geçmişi

Nümerik algoritmaların geçmişi çok eski zamanlara dayanmaktadır. Eski Mısırda "The Rhind Papyrus (1650 M.Ö)" basit bir denklemin kökleri nasıl bulunuru açıklamıştır. Archimedes of Syracuse (287-212 M.Ö.) ise geometrik eşkillerinin hacimlerin, alanların veya uzunlukların nasıl hesaplandığını bulmuştur. Yaklaşımını bulma yöntemi kullanılmı sayısal integrallemenin ruhunu oluşturmuştur ki bu ise saac Newton and Gottfried Leibnitz in öcülüğünde matematiksel hesaplamanın gelişimine katkıda bulunmuştur. Nümerik hesaplamanın gelişiminin büyük bir kısmı, matematiksel modellemenin fiziksel gerçekliğe(fiziksel olaylar,mühendislik, tıp, ticaret vb.gibi) uygulamalarıyla Newton and Leibnitz tarafından hesaplamanın keşfi ile başlamıştır. Bu matematik modeller zaman zaman açık bir şekilde çözülemediğinden sayısal yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur. Sayısal analizdeki en önemli gelişmelerden bir diğeri de Napier (1614) tarafından logaritmanın keşfidir. Newton çeşitli problemlerin sayısal çözümleri için bazı yöntemler bulmuştur. Onlardan bir kaçı kök bulma ve polinomların interpolasyonudur. Newtonu takip eden 18. ve 19. yüzyıldaki matematikçilerin çok büyük bir kısmı, matematiksel problemlerin sayısal çözümlerinde büyük katkılar sağlamışlardır. Bunlardan bazıları Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), and Karl Friedrich Gauss (1777-1855) tır. 1800 li yıllarin sonlarında matematikçilerin büyük bir kısmı ilgi alanları çerçevesinde sayısal analizi kullanmış olup gelişimlerde bulunulmaya devam etmektedir.

1.3 Sayısal Analize Genel Bir Bakış Açısı

Sayısal analiz, problemlerin sayısal çözümlerinin teorik gelişmeleri ve bunların bilgisayar programlarına etkisi ve güvenilirliği ile ilgilenmektedir. Pek çok sayısal analizci küçük alt alanlarda çalışmalarını sürdürmekte olmasına rağmen genel bir perspektif ve ilgiyi paylaşmaktadırlar. Bunlardan bazıları şunlardır:

(1) Genel anlmada bir problem direkt olarak çözülemiyorsa problemi, probleme çok yakın olan ve problemden daha kolay başka bir problem ile değiştirmek. Örneğin nümerik integralleme ve kök bulma yöntemleri

(2) Lineer cebir, reel analiz ve fonksiyonel analiz alanlarında oldukça geniş bir kullanım alanına sahiptir.

(3) Hata ile ilgili temel bir merak söz konusudur. Hatanın büyüklüğü ve onun analitik formu bunlarda bazılarıdır. 1. şıkta bahsedildiği üzere problemin kendisi değilde yaklaşık problem ele alındığında hesaplamalrdan doğüacak bir hata kaçınılmazdır. Dahası hatanın formunu anlamak sayısal metodun yakınsaklık davranışını iyileştirecek şekilde tahmin etme yöntemini oluşturur.

(4) Kararlılık, problemlerdeki parameterelerin veya verilerdeki küçük değişimlere karşı problemin göstermiş olduğu hassasiyet olarak adalandırılır ve sayısal analzide oldukça öenmli bir konudur. Örneğin

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) \\ &= x^7 - 28x^6 + 322x^5 - 1960x^4 + 6769x^3 - 13\,132x^2 + 13\,068x - 5040 \end{aligned}$$

polinomunun köklerinden biri 5 ve 6 dır. x^6 teriminin önündeki katsayıyı -28.002 ile değiştirdiğimizde $5.459 \pm 0.540i$, olarak buluyoruz ki değerde oldukça büyük bir değişim vardır. Bu türlü polinomlara, kök bulma problemlerine göre kararlı olmayan veya iyi tanımlı olmayan polinomlarda denir. Bu anlamda problemlerin çözümleri için geliştirilen sayısal yöntemler, orjinal problemin çözülmesinden daha fazla hassasiyet taşırlar. Dahası, orjinal problemin kararlı ve iyi tanımlı olduğuda incelenmelidir.. Bu türlü konuları özelliklede sayısal lineer cebirde görebilirsiniz.

(5) Numerik analizciler, bilgisayar aritmetiğini kullanan sonlu ifadelerin etkileri ile oldukça ilgilidirler. Bu türlü problemleri yine sayısal lineer cebirde görüceğiz. (Örneğin yuvarlama hatasını içeren büyük problemler gibi)

(6) Nümerik analizciler, algoritmaların etkisinin ölçümü ile oldukça ilgilidirler. Belirli algoritmanın maaleiyeti nedir sorusu onlar için çok önemlidir. Örneğin, n denklem içeren $Ax = b$ lineer denklemini çözerken n^3 miktarında aritmeatik işlem kullanılmaktadır. Bunu diğer problemlerin çözümleri için sayısal yöntemlerle nasıl kaşılaştırabiliriz?

1.4 Sayısal Yöntemlerin Sınıflandırılması

(1) Sayı sistemleri ve hatalar (Number Systems and Errors)
(2) Denklemlerin köklerinin bulunması (The Solution of Equations)
(3) Lineer denklem sistemlerinin çözümlerinin bulunması (Matrices and Systems of Linear Equations)
(4) Optimizasyon (Optimization)
(5) İnterpolasyon (Interpolation)
(6) Eğri uydurma (Regression)
(7) Sayısal integral (Integration by numerical methods)
(8) Sayısal türev (Numerical differentiation)
(9) Adi Diferansiyel denklemlerin çözümleri(The Solution of Ordinary Differential Equations)
(10) Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri (Numerical Solution of Partial Differential Equations)

Chapter 2

Sayı sistemleri ve hatalar (Number Systems and Errors)

2.1 Tam Sayıların Gösterimleri (The Representation of Integers)

Hayatımızda sayıları ondalıklı sistemlerde kullanırız. Buna göre 257 sayısının ondalık gösterimini

$$\begin{aligned} 257 &= 200 + 50 + 7 \\ &= 2.10^2 + 5.10 + 7.10^0 \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Buna göre herhangi bir tam sayıyı, katsayıları 0 ile 9 arasında değişicek şekilde polinom olarak ifade edebiliriz. Bunun için kullanmış olduğumuz gösterim aşağıdaki gibidir: $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ için

$$\begin{aligned} N &= (a_n a_{n-1} ... a_0)_{10} \\ &= a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_0.10^0, \end{aligned}$$

Neden 10 luk sistem kullanıldığına dair temel bir gerçek de bulunmamaktadır. Bununla birlikte elektriksel tepkilerde *açık(on)-kapalı(off)* ifadeleri kullanılmaktadır ve bunların bilgisayarlarda gösterimleri *ikili sistemlerle (binary system)* ifade edilir. Bu ifadelerde ise 2 taban olup olup, polinomun katsayıları 0 ile 1 dir. Negatif olmayan bir tamsayıyı $2lik$ sistemde aşağıdaki gibi gösteririz. $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \{0, 1\}$ için

$$\begin{aligned} N &= (a_n a_{n-1} ... a_0)_2 \\ &= a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \cdots + a_0.2^0, \end{aligned}$$

Bilimsel çalışmalarda kullanılan pek çok çalışma $2lik$ sistemde işlem yapsada bilgisayar kullanıcıların çoğunluğu $10luk$ sistemde çalışmayı tercih ederler. Bu sebepten ötürü iki sistemin birbirine çevirilmesi gerekmektedir. $2lik$ sistemden $10luk$ sistme çeviriyi $2lik$ sitemin tanımından direk olarak verebiliriz. Örneğin

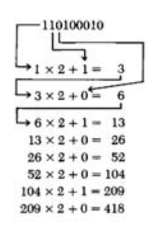


FIGURE 2.1. Algoritma 2.1

$$\begin{aligned} (11)_2 &= 1.2 + 1.2^0 = 3 \\ (1101)_2 &= 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 13 \end{aligned}$$

Bunu genel olarak aşağıdaki algoritma ile verebiliriz.

ALGORITMA 2.1. *$N = (a_n a_{n-1} ... a_0)_x, 0 < x < 10$ doğal sayısının 10 tabanında $N = b_0$ olarak gösteririz ki burda b_0 aşağıdaki yinelemeli işlemler sonucunda elde edilir:*

$$\begin{aligned}
b_n &= a_n \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + b_n x \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + b_{n-1} x \\
b_{n-3} &= a_{n-3} + b_{n-2} x \\
& \dots \\
b_1 &= a_1 + b_2 x \\
b_0 &= a_0 + b_1 x
\end{aligned}$$

Örnek 2.2. $(1101)_2$ *ifadesini yukarıdaki 2.1 algoritmasını kullanarak* 10*luk sisteme dönüştürünüz.*

Çözüm

$$\begin{aligned}
1101 &= a_3 a_2 a_1 a_0 \\
b_3 &= a_3 = 1 \\
b_2 &= a_2 + 2 * b_3 = 1 + 2 * 1 = 3 \\
b_1 &= a_1 + 2 * b_2 = 0 + 2 * 3 = 6 \\
b_0 &= a_0 + 2 * b_1 = 1 + 2 * 6 = 13 \\
(1101)_2 &= b_0 = 13
\end{aligned}$$

□

Örnek 2.3. $(10000)_2$ *ifadesini yukarıdaki 2.1 algoritmasını kullanarak* 10*luk sisteme dönüştürünüz.*

Çözüm

$$\begin{aligned}
10000 &= a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 \\
b_4 &= a_4 = 1 \\
b_3 &= a_3 + 2 * b_4 = 0 + 2 * 1 = 2 \\
b_2 &= a_2 + 2 * b_3 = 0 + 2 * 2 = 4 \\
b_1 &= a_1 + 2 * b_2 = 0 + 2 * 4 = 8 \\
b_0 &= a_0 + 2 * b_1 = 0 + 2 * 8 = 16 \\
(10000)_2 &= b_0 = 16
\end{aligned}$$

□

Örnek 2.4. 187 *ifadesini* 2*lik sisteme dönüştürünüz.*

Çözüm

$$\begin{array}{rcccccl}
187 & = & 2 & * & 93 & + & \boxed{1} \Rightarrow b_0 = 1 \\
93 & = & 2 & * & 46 & + & \boxed{1} \Rightarrow b_1 = 1 \\
46 & = & 2 & * & 23 & + & \boxed{0} \Rightarrow b_2 = 0 \\
23 & = & 2 & * & 11 & + & \boxed{1} \Rightarrow b_3 = 1 \\
11 & = & 2 & * & 5 & + & \boxed{1} \Rightarrow b_4 = 1 \\
5 & = & 2 & * & 2 & + & \boxed{1} \Rightarrow b_5 = 1 \\
2 & = & 2 & * & \boxed{1} & + & \boxed{0} \Rightarrow b_6 = 0 \\
 & & & & & & \Rightarrow b_7 = 1
\end{array}$$

$$187 = (10111011)_2$$

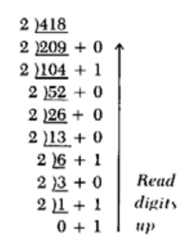


Figure 2.2. 10*luk* sistemden 2*lik* sisteme dönüşüm

□

Uyarı 2.5. 2*lik sistemden* 8*lik sisteme dönüşüm yaparken veya* 8*lik sistemden* 2*lik sisteme dönüşüm yaparken aşağıdaki tablıyou kullanırız ve sayıları 3 hane olarak birler basamağından başlayarak ayırırız.*

TABLE 1. 2lik sistem ve 10luk sistem dnşm tablosu

10*luk sistem*	2*lik sistem*
0	$(0)_2$
1	$(1)_2$
2	$(10)_2$
3	$(11)_2$
4	$(100)_2$
5	$(101)_2$
6	$(110)_2$
7	$(111)_2$
8	$(1000)_2$
9	$(1001)_2$
10	$(1010)_2$

ÖRNEK 2.6. $(347)_8$ *ifadesini* 2*lik sisteme dönüştürünüz.*

Çözüm

$$(347)_8 = \left((10)_2 \quad (100)_2 \quad (111)_2 \right) = (10100111)_2$$

□

ÖRNEK 2.7. $(10111011)_2$ *ifadesini* 8*lik sisteme dönüştürünüz.*

Çözüm

$$(10111011)_2 = \left((10)_2 \quad (111)_2 \quad (011)_2 \right) = (273)_8$$

□

2.2 Kesirli Sayıların Gösterimleri (The Representation of Fractions)

TANIM 2.8. *x bir pozitif tam sayı ve x_I bu sayıdan küçük en büyük tam sayı olmak üzere*

$$x_F = x - x_I$$

ifadesine x reel sayısının kesirli kısmı denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$x_F = \sum_{k=0}^{\infty} b_k 10^{-k}, 0 \leq b_k < 10.$$

Eğer b_k sayısı herhangi bir sayıda sıfır oluyorsa kesirli ifade durdurulmuştur denir. Örneğin

$$\frac{1}{4} = 0.25 = 2 * 10^{-1} + 5 * 10^{-2}$$

kesirli ifadesi durdurulmuştur ancak

$$\frac{1}{3} = 0.3333... = 3 * 10^{-1} + 3 * 10^{-2} + ...$$

NOTASYON. *$x = a_n a_{n-1} \cdots a_0.b_1 b_2 \cdots$ reel sayısını 10luk sistemde $(a_n a_{n-1} \cdots a_0.b_1 b_2 \cdots)_{10}$ veya 2lik sistemde $(a_n a_{n-1} \cdots a_0.b_1 b_2 \cdots)_2$ olarak göstericeğiz.*

ALGORITMA 2.9. *$N = (0.b_1b_2....)_{10}$, reel sayısının x tabanında aşağıdaki işlemlerle elde ederiz:*

$$\begin{aligned} f_0 &= 0.b_1b_2.... \\ d_1 &= (x * f_0)_I \, , f_1 = (x * f_0)_F \\ d_2 &= (x * f_1)_I \, , f_2 = (x * f_1)_F \\ d_3 &= (x * f_2)_I \, , f_3 = (x * f_2)_F \\ & \quad \dots \\ N &= (0.d_1d_2...)_x \end{aligned}$$

ÖRNEK 2.10. *$(0.7)_{10}$ ifadesini $2lik$ sisteme dönüştürünüz.*

Çözüm

$$\begin{gathered} 2 * 0.7 = 1.4 \Rightarrow d_1 = (1.4)_I = \boxed{1}, f_1 = (1.4)_F = 0.4 \\ 2 * 0.4 = 0.8 \Rightarrow d_2 = (0.8)_I = \boxed{0}, f_2 = (0.8)_F = 0.8 \\ 2 * 0.8 = 1.6 \Rightarrow d_3 = (1.6)_I = \boxed{1}, f_3 = (1.6)_F = 0.6 \\ 2 * 0.6 = 1.2 \Rightarrow d_4 = (1.2)_I = \boxed{1}, f_4 = (1.2)_F = 0.2 \\ 2 * 0.2 = 0.4 \Rightarrow d_1 = (0.4)_I = \boxed{0}, f_5 = (0.4)_F = 0.4 \\ \dots \\ (0.7)_{10} = \left(0.1011\overline{0011}\right)_2 \end{gathered}$$

□

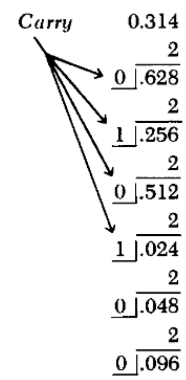


FIGURE 2.3. $10luk$ sistemdeki ondalık sayıların $2lik$ sisteme dönüşümü

ÖRNEK 2.11. *$(0.625)_{10}$ ifadesini $2lik$ sisteme dönüştürünüz.*

Çözüm

$$\begin{gathered} 2 * 0.625 = 1.25 \Rightarrow d_1 = (1.25)_I = \boxed{1}, f_1 = (1.25)_F = 0.25 \\ 2 * 0.25 = 0.5 \Rightarrow d_2 = (0.5)_I = \boxed{0}, f_2 = (0.5)_F = 0.5 \\ 2 * 0.5 = 1 \Rightarrow d_3 = (1)_I = \boxed{1}, f_3 = (1)_F = 0 \\ 2 * 0 = 0 \Rightarrow d_4 = (0)_I = \boxed{0}, f_4 = (0)_F = 0 \\ \dots \\ (0.625)_{10} = (0.101)_2 \end{gathered}$$

□

ÖRNEK 2.12. *$(0.101)_2$ ifadesini $10luk$ sisteme dönüştürünüz.*

Çözüm Algoritma 2.9 yi kullanabiliriz:

$$\begin{gathered} 10 * (0.101)_2 = (1010)_2 * (0.101)_2 = (110.01)_2 \Rightarrow d_1 = ((110.01)_2)_I = \boxed{(110)_2 = (6)_{10}}, f_1 = ((110.01)_2)_F = (0.01)_2 \\ 10 * (0.01)_2 = (1010)_2 * (0.01)_2 = (10.1)_2 \Rightarrow d_2 = ((10.1)_2)_I = \boxed{(10)_2 = (2)_{10}}, f_2 = ((10.1)_2)_F = (0.1)_2 \\ 10 * (0.1)_2 = (1010)_2 * (0.1)_2 = (101)_2 \Rightarrow d_3 = ((101)_2)_I = \boxed{(101)_2}, f_3 = ((101)_2)_F = (0)_2 \\ \dots \\ (0.625)_{10} = (101)_2 \end{gathered}$$

:

$$1010 * 0.101 = 101 * 101 * 10^{-2} = 110.01$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 0 & 1 \\ & & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

□

2.3 Kayan Noktalı İşlemler (Floating Point Arithmetic)

Bilgisayar (computing) camiasında reel sayılara reel sayı değil de kayan noktalı sayı denmesinin nedeni noktanın yerinin değiştirilebilir olmasından kaynaklanıyor olmasıymış. misal reel sayıları göstermek için 8 basamak kullanalım dersek 1.2345678, 1234567.8, 0.000012345678, 12345678000000000, vs. şeklinde sayıları gösterebiliyoruz. eğer sabit noktalı kullanım olsaydı, her sistemin "ben noktadan sonra en fazla şu kadar basamak gösteririm" şeklinde tasarlanması gerekirdi. Öyle olunca noktadan sonra üç basamak göstereceğim denilirse 9.123 gösterilebilir ama 9.1234 gösterilemezdi.

Tanım 2.13. *n basamaklı β tabanındaki kayan noktalı x sayısının en genel halde gösterimi aşağıdaki gibidir:*

$$x = \pm \left(0.d_1 d_2 ...\right)_\beta * \beta^e$$

burada $0.d_1d_2...$ sayısına mantis (mantissa-ondalık kısım), e sayısına da kuvvet (exponent) denir. $d_1 \neq 0$ ise kayan noktalı x sayısına normalleştirilmiştir denir.

Tanım 2.14. *k, bir bilgisayarın kayan noktalı hesaplamalarındaki kullanımlarındaki maksimum basamak olmak üzere $x = \pm \left(0.d_1 d_2 ... d_k ...\right)_\beta * \beta^e$ kayan noktalı sayısını 2 türlü gösterimi vardır. Bunlardan 1.si kesilmiş kayan nokta gösterimidir(chopped floating number representation) ve aşağıdaki şekilde verilir:*

$$fl_c\left(x\right) = \pm \left(0.d_1 d_2 ... d_k\right)_\beta * \beta^e$$

diğer gösterim ise yuvarlanmış kayan nokta gösterimidir(rounded floating number representation) ve aşağıdaki şekilde verilir:

$$fl_r\left(x\right) = \pm \left(0.d_1 d_2 ... d_{k-1} r_k\right)_\beta * \beta^e$$

Burada r_k sayısı $d_k.d_{k+1}d_{k+2}...$ ondalıklı sayısının en yakın tamsayıya yuvarlaması ile oluşur

Örnek 2.15. $fl_c\left(\frac{2}{3}\right)$ $=?, fl_f\left(\frac{2}{3}\right)$ $=?, fl_c\left(-838\right)$ $=?, fl_f\left(-838\right)$ $=?$*(2 ondalık basamaklı kayan nokta gösterimleri nelerdir?)*

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= 0.\overline{6} \Rightarrow fl_c\left(\frac{2}{3}\right) = 0.66 * 10^0, fl_f\left(\frac{2}{3}\right) = 0.67 * 10^0 \\ -838 &= -0.838 * 10^3 \Rightarrow fl_c\left(-838\right) = -0.83 * 10^3, fl_f\left(-838\right) = -0.84 * 10^3 \end{aligned}$$

□

Tanım 2.16. *$x = \pm \left(0.d_1 d_2 ... d_k ...\right)_\beta * \beta^e$ kayan noktalı sayısı ile $fl_c\left(x\right)$ veya $fl_r\left(x\right)$ arasındaki farka yuvarlama hatası denir. Yuvarlama hatası x sayısına bağlı olup aşağıdaki bağıntı geçerlidir.*

$$\begin{aligned} fl_c\left(x\right) &= x + x\delta_c, -\beta^{1-k} < \delta_c < 0 \\ fl_r\left(x\right) &= x + x\delta_r, \left|\delta_r\right| < \frac{1}{2}\beta^{1-k} \end{aligned}$$

Örnek 2.17. *$x = 0.2 * 10^1, y = 0.77 * 10^{-6}$ olmak üzere $x + y$ ve $x * y$ ifadelerini 2 ondalık basamaklı kayan nokta gösterimleriyle bulup yuvarlama hatalarını elde ediniz.*

Çözüm

$$x = 2000000 * 10^{-6}, y = 0.77 * 10^{-6} \Rightarrow x + y = 2000000.77 * 10^{-6} \Rightarrow x + y = 0.200000077 * 10^1$$
$$\Rightarrow fl_c(x + y) = 0.20 * 10^1 \Rightarrow \delta_c = 0.200000077 * 10^1 - 0.20 * 10^1 = 0.000000077 * 10^1 = 0.77 * 10^{-6}$$
$$\Rightarrow fl_r(x + y) = 0.20 * 10^1 \Rightarrow \delta_r = 0.200000077 * 10^1 - 0.20 * 10^1 = 0.000000077 * 10^1 = 0.77 * 10^{-6}$$
$$x * y = 0.2 * 10^1 * 0.77 * 10^{-6} = 1.54 * 10^{-6} = 0.154 * 10^{-5}$$
$$\Rightarrow fl_c(x * y) = 0.15 * 10^{-5} \Rightarrow \delta_c = 0.154 * 10^{-5} - 0.15 * 10^{-5} = 0.004 * 10^{-5} = 0.4 * 10^{-7}$$

□

2.4 Hata Analizi ve Hatanın Yayılması (Error Analysis & Propagation of Error)

Sayısal yöntemlerde pek çok problemin çözümü için hesapladığımız değerler gerçek değerler olmayabilir Bu anlamda özelliklede sayısal algortimaların gelişmesinde bize rehberlik edicek olan bazı tanımlamaları vermemiz gerekmektedir.

Tanım 2.18. *x gerçek değerine yaklaşık değeri $\widetilde{x}$ ile gösterelim. Buna göre*
$$E_x = x - \widetilde{x}$$
ifadesine hata (error)
$$R_x = \frac{x - \widetilde{x}}{x}, x \neq 0$$
ifadesine de bağıl hata (relative error) denir.

Örnek 2.19.
$$\begin{aligned} (a)\ x &= 3.141592 - \widetilde{x} = 3.14 \\ (b)\ y &= 1000000 - \widetilde{y} = 999996 \\ (c)\ z &= 0.000012 - \widetilde{z} = 0.000009 \end{aligned}$$
değerleri için hata ve bağıl hatayı bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} E_x &= x - \widetilde{x} = 3.141592 - 3.14 = 1.592 \times 10^{-3} \\ R_x &= \frac{x - \widetilde{x}}{x} = \frac{1.592 \times 10^{-3}}{3.141592} = 5.067\,5 \times 10^{-4} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} E_y &= y - \widetilde{y} = 1000000 - 999996 = 4 \\ R_y &= \frac{y - \widetilde{y}}{y} = \frac{4}{1000000} = 4 \times 10^{-6} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} E_z &= z - \widetilde{z} = 0.000012 - 0.000009 = 3.0 \times 10^{-6} \\ R_z &= \frac{z - \widetilde{z}}{z} = \frac{3.0 \times 10^{-6}}{0.000012} = 0.25 \end{aligned}$$

□

Tanım 2.20. *Çok kompleks bir matematiksel ifade daha elementer işlemler içeren bir formül ile yer değiştirdiğinde kesme hatası (truncation error) kavramı meydana gelmektedir. Genel anlamda sayısal yöntemlerin kesilmesinden elde edilen hatadır.*

Örnek 2.21.

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + ... + \frac{x^{2n}}{n!} + ...$$

ifadesinde ilk 4 toplamı:

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$$

aldığımızda kesme hatası meydana gelecektir.

Tanım 2.22. *Yuvarlama hatası (round-off error) özelliklede bilgisayardaki kısıtlı depolamadan kaynaklamktadır. Örneğin*

$$\frac{1}{10} = \left(0.0\overline{0011}\right)_2$$

olmasına rağmen bilgisayarda bu değer son hanesine kadar alınamayacağından belli bir ondalıktan sonra kesilip yuvarlanmaktadır.

Tanım 2.23. *Örneğin $x = 3.1415926536$ ve $y = 3.1415957341$ sayılarını ele alalım.*

$$x - y = 3.1415926536 - 3.1415957341 = -3.0805 \times 10^{-6}$$

farkı bize x ve y sayılarının ilk 6 hanesi aynı olduğunu söylemektedir ki virgülden sonra 5 sayının aynı olması demektir. Bu gibi ifadelere basamakların anlamını yitirmesi (loss od significance digits) de denir.

Örnek 2.24. *$f(x) = x\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right), g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ fonksiyonları için $f(500)$ ve $g(500)$ değerlerini bulunuz.*

Çözüm

$$\begin{aligned} f(500) &= 500 * \left(\sqrt{501} - \sqrt{500}\right) = 500 * (22.3830 - 22.3607) = 500 * 0.022\,3 = 11.1500 \\ g(500) &= \frac{500}{\sqrt{501} + \sqrt{500}} = \frac{500}{22.3830 + 22.3607} = \frac{500}{44.7437} = 11.1748 \end{aligned}$$

gerçekte $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları cebirsel olarak birbirine denk olmasına rağmen elde edilen sayısal sonuçlar aynı olmamaktadır ve gerçekte $g(500) = 11.1748$ değeri gerçek değer olan 11.174755300747198 ifadesinin 4 basamağa yuvarlanmış halidir. □

Not. *Hatanın artmasını (propogation of error) toplama, çarpmada şu şekilde verebilir. x gerçek değerine yaklaşık değeri $\widetilde{x}$, y gerçek değerine yaklaşık değeri $\widetilde{y}$ ile gösterelim. Buna göre*

$$\begin{aligned} x &= \widetilde{x} + E_x \\ y &= \widetilde{y} + E_y \end{aligned}$$

(1) *Toplamada hata artışını "Toplamdaki hata, hataların toplamıdır" şeklinde ifade edebiliriz.*

$$x + y = (\widetilde{x} + E_x) + (\widetilde{y} + E_y) = (\widetilde{x} + \widetilde{y}) + (E_x + E_y)$$

(2) *Çarpmada hata artışını biraz daha karmaşıktır:*

$$xy = (\widetilde{x} + E_x)(\widetilde{y} + E_y) = \widetilde{x}\widetilde{y} + \widetilde{x}E_y + \widetilde{y}E_x + E_xE_y$$

olarak elde ederiz ki $\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y}$ burda 1 den büyük bir değerde ise $\widetilde{x}E_y, \widetilde{y}E_x$ terimleri yeterince büyük olabilir.

Tanım 2.25. *Bir sayısal yöntemde başlangıçta verilen değerlerdeki küçük hatalar sonuca da küçük hata olarak yansıyorsa bu yöteme kararlıdır (stable) aksi durumda ise kararlı değildir (unstable) denir.*

Örnek 2.26.

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) \\ &= x^7 - 28x^6 + 322x^5 - 1960x^4 + 6769x^3 - 13\,132x^2 + 13\,068x - 5040 \end{aligned}$$

polinomunun köklerinden biri 5 ve 6 dır. x^6 *teriminin önündeki katsayıyı* -28.002 *ile değiştirdiğimizde* $5.459 \pm 0.540i$*, olarak buluyoruz ki değerde oldukça büyük bir değişim vardır. Bu türlü polinomlara, kök bulma problemlerine göre kararlı olmayan veya iyi tanımlı olmayan polinomlar da denir.*

Chapter 3

$f(x) = 0$ Formundaki Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri (The Solution of Nonlinear Equations $f(x) = 0$)

$$ax + b = 0, a \neq 0$$

türündeki denklemleri çözmek oldukça kolaydır ve hatta lineer olmayan

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in IR, a \neq 0$$

denklemlerinin çözümünü de kolayca bulabiliriz. Ancak 3. mertebden ve daha yüksek polinomlar için çözüm bulmak her zaman çok kolay olmamaktadır. Şimdi ise özgül ağırlığı 0.6 ve yarıçapı 5.5cm olan bir topun suda ne kadar battığını bulucak bir problemi ele alalım.

Newton'un 3. hareket kuralına göre topun ağırlığı suyun kaldırma kuvvetine eşit olacaktır.

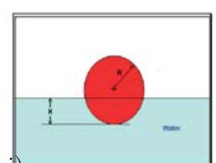


FIGURE 3.1. Topun su yüzeyindeki durumu

$$\begin{aligned}
Topun\ ağırlığı &= (Topun\ Hacmi) * (Topun\ yoğunluğu) * (Yercekimi\ ivmesi) \\
&= \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) * (\rho_b) * (g) \\
R &:= \text{Topun yarıçapı } (m - metre) \\
\rho_b &:= \text{Topun yoğunluğu } \left(kg/m^3\right) \\
g &:= \text{Yercekimi ivmesi } \left(m/s^2\right) \\
\text{Kaldırma kuvveti} &= \text{Yer değiştiren suyun ağırlığı} \\
&= \text{(suyun altında kalan topun hacmi) (suyun yoğunluğu) (Yercekimi ivmesi)} \\
&= \pi x^2 \left(R - \frac{x}{3}\right) * (\rho_w) * (g) \\
x &:= \text{topun batan kısmının yüksekliği} \\
\rho_w &:= \text{suyun yoğunluğu } \left(kg/m^3\right)
\end{aligned}$$

Newton'un 3. hareket kuralına göre

$$\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) * (\rho_b) * (g) = \pi x^2 \left(R - \frac{x}{3}\right) * (\rho_w) * (g)$$
$$4R^3 * \rho_b = 3x^2 \left(R - \frac{x}{3}\right) * \rho_w$$
$$\Rightarrow 4R^3\rho_b - 3x^2 R\rho_w + x^3\rho_w = 0$$
$$\Rightarrow 4R^3\frac{\rho_b}{\rho_w} - 3x^2 R + x^3 = 0$$
$$\gamma_b := \frac{\rho_b}{\rho_w} = 0.6 \,(\text{topun özgül ağırlığı})$$
$$R = 5.5cm = 0.055m$$
$$\Rightarrow 3.993 \times 10^{-4} - 0.165x^2 + x^3 = 0$$

Bu ise lineer olmayan bir denklem olup topun batan kısmının yüksekliğini gösteren $x'i$ bulmak bundan sonraki ilgileniceğimiz konu olucaktır. Ki bu denklemin kökleri , $0.146\,36, 6.237\,8 \times 10^{-2}, -4.3737 \times 10^{-2}$ olup grafiğini aşağıdaki gibi verebiliriz.

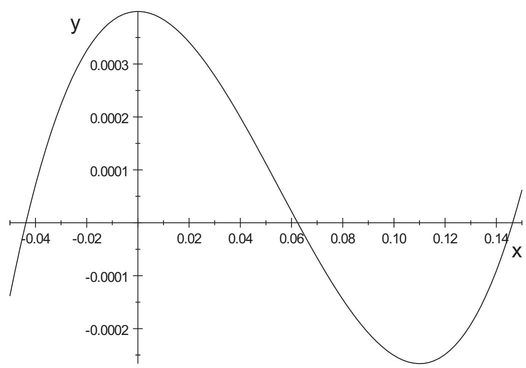


FIGURE 3.2. Denklemin grafiği

PROBLEM. *Buna göre bu konu altında $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $f(r)=0$ koşulunu sağlayacak şekilde $r \in [a,b]$ çözümünü bulabilirmiyiz sorusunun cevabını bulmaya çalışacağız ki bu durumda 3 soru aklımıza gelmektedir.*

(1) *Bir fonksiyonun çözümünün var olup olmadığını nasıl bulabiliriz?*
(2) *Çözüm varsa çözümü nasıl bulabiliriz?*
(3) *Bulduğumuz çözüm, gerçek çözüme ne kadar yakınsaktır?*

3. sorunun cevabı için yakınsaklık tanımını verelim:

TANIM 3.1.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \widetilde{x}$$

olsun. Eğer

$$|x_{n+1} - \widetilde{x}| \le c|x_n - \widetilde{x}|^p$$

koşulu sağlanıyorsa $\{x_n\}$ dizisine p. mertebeden yakınsaktır denir ve p ye de yakınsaklık derecesi denir.

1. sorunun cevabını aşağıda verelim. Diğer soruların cevabını ise bu konudaki altbaşlıklarla vermeye çalışacağız.

TEOREM 3.2. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $f(a)f(b) \le 0$ koşulunu sağlasın. O halde $f(r)=0$ koşulunu sağlayan $\exists r \in [a,b]$ vardır.*

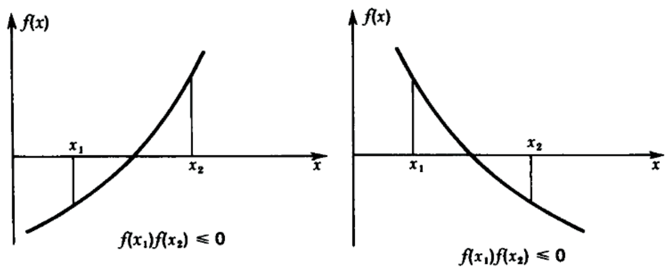


FIGURE 3.3. Ara değer teoreminin uygulaması

UYARI 3.3. *Burda dikkat edilmesi gereken en önemli noktalardan birisi ise fonksiyonun sürekli ve sınırlı olmasıdır. Eğere bu koşullardan biri sağlanmıyorsa yukaridaki teoremi uygulamamız mümkün değildir.*

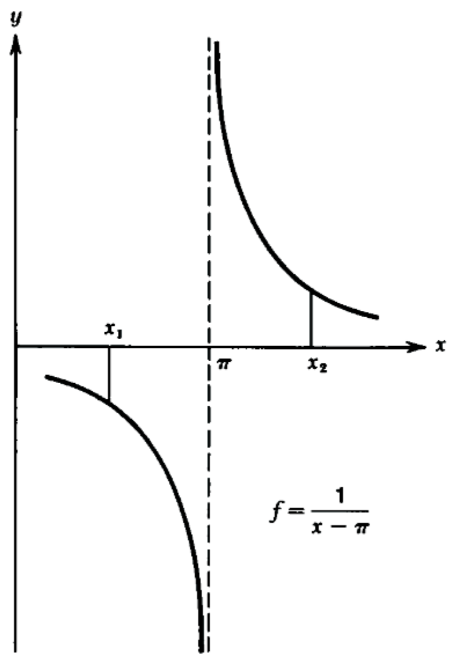


FIGURE 3.4. Ara değer teoremi için ters örnek!

ÖRNEK 3.4. *Aşağıdaki fonksiyonların verilen aralıklarda çözümünün olup olmadığını belirtiniz.*

(1) $f(x) = e^x - 2 - x, [-5, -3]$ ve $[-3, -1]$
(2) $f(x) = \cos(x) + 1 - x, x$ radyan olarak alınacak, $[-1, 1]$ ve $[1, 3]$
(3) $f(x) = \ln(x) - 5 + x, [1, 3]$ ve $[3, 5]$

Çözüm □

(1)

$$f(x) = e^x - 2 - x \Rightarrow f(-5) * f(-3) = 3.1564 > 0 \text{ olduğundan } [-5, -3] \text{ aralığında kök yoktur.}$$
$$f(-3) * f(-1) = -0.66359 < 0 \text{ olduğundan } [-5, -3] \text{ aralığında kök vardır.}$$

(2)

$$f(x) = \cos(x) + 1 - x \Rightarrow f(-1) * f(1) = 1.3725 > 0 \text{ olduğundan } [-1, 1] \text{ aralığında kök yoktur.}$$
$$f(1) * f(3) = -1.6155 < 0 \text{ olduğundan } [1, 3] \text{ aralığında kök vardır.}$$

(3)

$$f(x)=\ln(x)-5+x \Rightarrow f(1)*f(3)=3.6056>0 \text{ olduğundan } [1,3] \text{ aralığında kök yoktur.}$$
$$f(3)*f(5)=-1.4507<0 \text{ olduğundan } [3,5] \text{ aralığında kök vardır.}$$

3.1 Sabit Nokta İterasyonu (Fixed Point Iteration)

Sabit nokta iterasyonunun ana fikri

$$f(x)=0$$

denklemini

$$x=g(x)$$

formuna getirmektir.

Örnek 3.5. *$e^x-1-2x=0$ denklemini $x\in[1,2]$ aralığında $x=g(x)$ şekline getiriniz.*

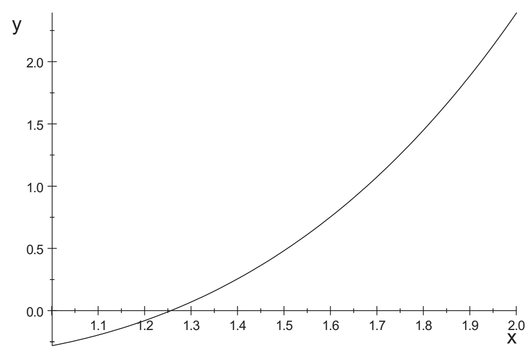


Figure 3.5. e^x-1-2x fonksiyonu

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x-1-2x=0,\ x\in[1,2] \\ x &= \frac{e^x-1}{2}=g(x)\Rightarrow g(1)=\frac{e^1-1}{2}=0.85914\notin[1,2] \text{ olduğundan bu şekilde dönüştüremeyiz.} \end{aligned}$$

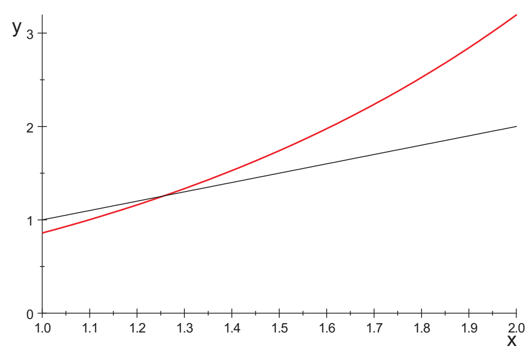


Figure 3.6. $g(x)=\frac{e^x-1}{2}$ ve $y=x$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} e^x &= 2x+1\Rightarrow x=\ln(2x+1)=g(x)\Rightarrow g(1)=\ln(2*1+1)=1.0986\in[1,2], \\ g(2) &= \ln(2*2+1)=1.6094\in[1,2] \text{ olduğundan bu formu kullanmalıyız.} \end{aligned}$$

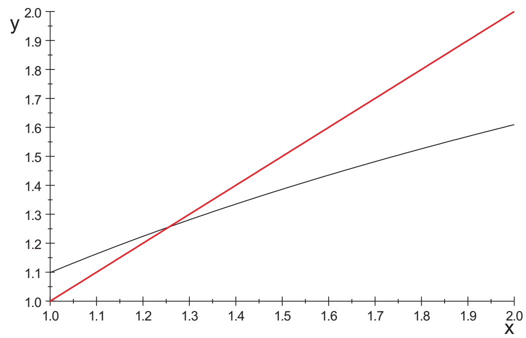


FIGURE 3.7. $g(x) = \ln(2x+1)$ ve $y = x$ fonksiyonları

□

TANIM 3.6. *$g(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli,sınırlı ve $g(x) \in [a,b]$ olsun.*

$$x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{3.1}$$

ile verilen yineleme formülüne sabit nokta veya basit iterasyon (fixed point iteration or simple iteration).denir. $x_n, n \geq 0$ sayılarına iterasyon $n = 0$ durumunda x_0 sayısına başlangıç iterasyonu denir. Eğer (3.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi $\widetilde{x}$ noktasına yakınsak ise $\widetilde{x}$ sayısı $g(x)$ fonksiyonunun sabit noktasıdır:

$$\widetilde{x} = g(\widetilde{x})$$

Gerçekten

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \widetilde{x}$$

ise

$$\widetilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g(\widetilde{x})$$

Yöntemi aşağıdaki şekilde verebiliriz:

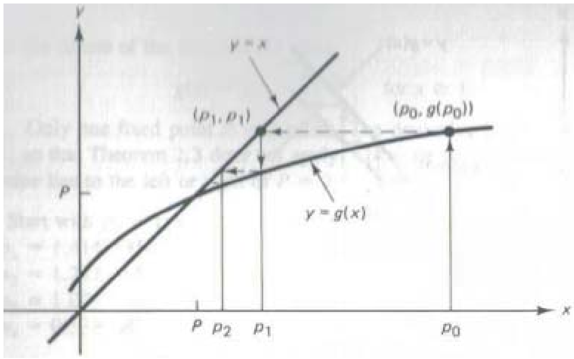
ALGORITMA 3.7. **Adım 1:** *x_0 başlangıç iterasyonunu ve $\varepsilon > 0$ hata payını verin ve $n = 0$ alın*
Adım 2:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

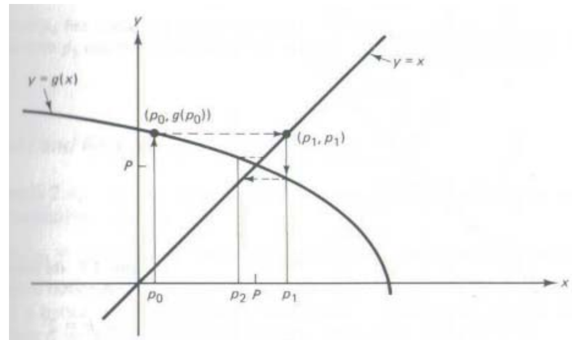
formülü ile bir sonraki iterasyonu elde ediniz.
Adım 3: *$|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$ ise n yi 1 arttırın. $(n = n+1)$ ve 2.adıma gidiniz.*
Adım 4: *Bulunan x_{n+1} sayısını $x = g(x)$ denkleminin çözümü olarak belirtiniz.*

PROBLEM. *(3.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi ne zaman yakınsaktır?*

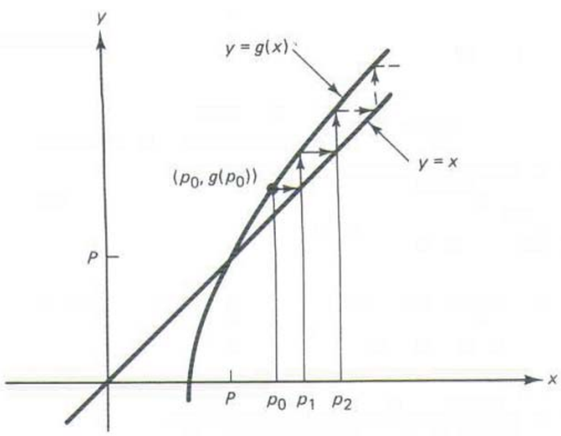
TEOREM 3.8. *$g(x)$ ve $g'(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli ve $\widetilde{x} \in (a,b)$ sabit noktayı göstersin.*
(i) Eğer $\forall x \in [a,b]$ için $|g'(x)| \leq K < 1$ koşulu sağlanıyorsa $x_0 \in (a,b)$ için (3.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi $\widetilde{x}$ sabit noktasına yakınsar
(ii) Eğer $\forall x \in [a,b]$ için $|g'(x)| > 1$ koşulu sağlanıyorsa (3.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi $\widetilde{x}$ sabit noktasına yakınsamaz. $\widetilde{x}$ noktasına ıraksak sabit nokta (repulsive fixed point) denir ve iterasyon da lokal olarak ıraksaklık gösterir.



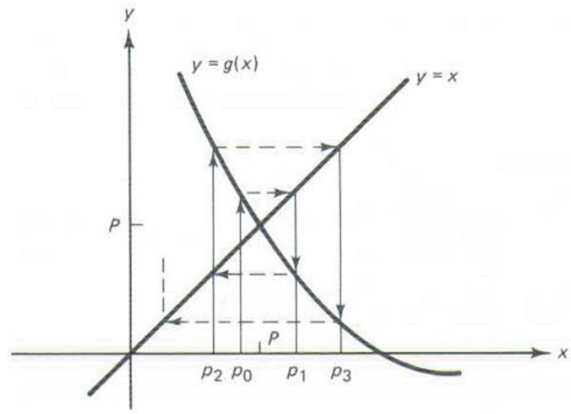
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 3.8. (a) $0 < g'(x) < 1$ oldugu durum - monoton yakınsaklık
(b) $-1 < g'(x) < 0$ oldugu durum - salınımlı yakınsaklık
(c) $g'(x) > 1$ oldugu durum - monoton ıraksaklık
(d) $g'(x) > 1$ oldugu durum - salınımlı ıraksaklık

PROOF. (*i*) Öncelikle (3.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin $[a, b]$ aralığında olduğunu gösterelim: Ara değer teoremini kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$|\widetilde{x} - x_1| = |g(\widetilde{x}) - g(x_0)| = |g'(c_0)(\widetilde{x} - x_0)| = |g'(c_0)||\widetilde{x} - x_0| \le K|\widetilde{x} - x_0| < |\widetilde{x} - x_0| < \delta \Rightarrow x_1 \in (a, b)$$

Şimdi tümevarım yöntemi ile $x_n \in (a, b)$ olsun. $x_{n+1} \in (a, b)$ olduğunu gösterelim:

$$|\widetilde{x} - x_{n+1}| = |g(\widetilde{x}) - g(x_n)| = |g'(c_n)(\widetilde{x} - x_n)| = |g'(c_n)||\widetilde{x} - x_n| \le K|\widetilde{x} - x_n| < |\widetilde{x} - x_n| < \delta \Rightarrow x_{n+1} \in (a, b)$$

Şimdi ise

$$|\widetilde{x} - x_{n+1}| \le K^n|\widetilde{x} - x_0|$$

olduğunu gösterelim. Yukarıda

$$|\widetilde{x} - x_1| \le K|\widetilde{x} - x_0|$$

olduğunu göstermiştik. Tümevarım yönteminden faydalanarak

$$|\widetilde{x} - x_n| \le K^{n-1}|\widetilde{x} - x_0|$$

olduğunu kabul edelim. Buna göre

$$|\widetilde{x} - x_{n+1}| \le |g(\widetilde{x}) - g(x_n)| = |g'(c_n)(\widetilde{x} - x_n)| = |g'(c_n)||\widetilde{x} - x_n| \le K|\widetilde{x} - x_n| \le KK^{n-1}|\widetilde{x} - x_0| = K^n|\widetilde{x} - x_0|$$

Buna göre $|\widetilde{x} - x_{n+1}| \le K^n|\widetilde{x} - x_0|$ olduğunu göstermiş oluruz. Burada limit aldığımızda, $0 < K < 1$ olduğundan:

$$\lim_{n\to\infty} |\widetilde{x} - x_{n+1}| \le \lim_{n\to\infty} K^n|\widetilde{x} - x_0| = 0$$

$\square$

Sonuç 3.9. *$g(x)$ ve $g'(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli ve $\widetilde{x}\in(a,b)$ sabit noktayı göstersin. Eğer $\forall x\in[a,b]$ için $|g'(x)|\le K<1$ koşulu sağlanıyorsa $x_0\in(a,b)$ için (3.1) ile tanımlanan iterasyonun yakınsaklık derecesi 1 dir. Ve dahası*

$$\begin{aligned} |\widetilde{x}-x_n| &\le K^{n-1}|\widetilde{x}-x_0|,\forall n\ge 1\\ |\widetilde{x}-x_n| &\le \frac{K^{n-1}|x_1-x_0|}{1-K}\end{aligned}$$

hata değerlendirmeleri geçerlidir.

Proof. Teorem 3.8'in ispatında görüldüğü üzere

$$|\widetilde{x}-x_{n+1}||\le K|\widetilde{x}-x_n|$$

elde ederiz. Buna göre tanım 3.1'den yakınsaklık derecesini 1 olarak elde ederiz. Ve yine Teorem 3.8'den

$$|\widetilde{x}-x_n|\le K^{n-1}|\widetilde{x}-x_0|,\forall n\ge 1$$

değerlendirmesini elde ederiz.

$$\begin{aligned} |\widetilde{x}-x_n| &= |g(\widetilde{x})-g(x_{n-1})|=|g'(c_{n-1})(\widetilde{x}-x_{n-1})|\le K|\widetilde{x}-x_{n-1}|=K|\widetilde{x}-x_{n-1}+x_n-x_n|\\ &\le K|\widetilde{x}-x_n|+K|-x_{n-1}+x_n|\Rightarrow|\widetilde{x}-x_n|\le\frac{K}{1-K}|-x_{n-1}+x_n|\\ |x_2-x_1| &= |g(x_1)-g(x_0)|=|g'(c_0)(x_1-x_0)|\le K|x_1-x_0|\\ |x_3-x_2| &= |g(x_2)-g(x_1)|=|g'(c_1)(x_2-x_1)|\le K|x_2-x_1|\le K^2|x_1-x_0|\\ &\ldots\\ |x_n-x_{n-1}| &= |g(x_{n-1})-g(x_{n-2})|=|g'(c_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})|\le K|x_{n-1}-x_{n-2}|\le\ldots\le K^{n-1}|x_1-x_0|\end{aligned}$$

ifadesini yerine yazdığımızda sonucu elde ederiz. $\square$

Örnek 3.10. *$x^3-3x-20=0$, $x\in[1,4]$ fonksiyonun çözümünü sabit nokta iterasyonu ile bulunuz. Başlangıç iterasyonu $x_0=1.5$, hata payı $\varepsilon=10^{-4}$ ve virgülden sonra 4 basamak alınız.*

Çözüm

$$\begin{aligned} x^3-3x-20 &= 0\Rightarrow x=\frac{x^3-20}{3}\text{ ifadesini alamayız çünkü }x=1\text{ için }\frac{x^3-20}{3}=\frac{1^3-20}{3}=-6.3333\notin[1,4]\\ x^3-3x-20 &= 0\Rightarrow x^3=3x+20\Rightarrow x=\sqrt[3]{3x+20}\Rightarrow x=1\text{için }\sqrt[3]{3*1+20}=2.8439\in[1,4]\\ x &= 4\text{ için }\sqrt[3]{3*4+20}=3.1748\in[1,4]\\ x &= \sqrt[3]{3x+20}=g(x)\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(3x+20)^2}}.3=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+20)^2}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{20^2}}=0.13572<1\end{aligned}$$

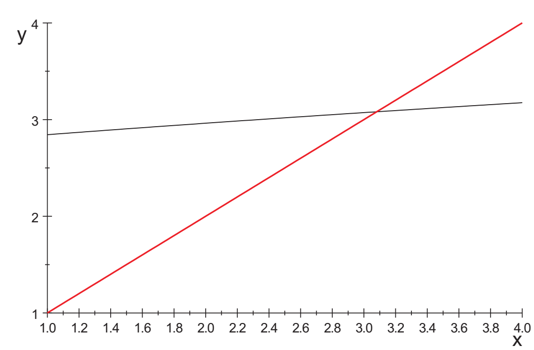


Figure 3.9. $x=\sqrt[3]{3x+20}$ grafiği

TABLE 1. Cozum

İterasyon	x	g(x)	Eps	hata	Devam/	Çözüm	y=x
0	1,5000	2,9044	0,0001				1,5
1	2,9044	3,0622	0,0001	1,4044	Devam	0	1,7
2	3,0622	3,0789	0,0001	0,1578	Devam	0	1,9
3	3,0789	3,0807	0,0001	0,0167	Devam	0	2,1
4	3,0807	3,0808	0,0001	0,0018	Devam	0	2,3
5	3,0808	3,0809	0,0001	1E-04	Dur	çözüm=3,0808	2,5

□

ÖRNEK 3.11. *$x=\frac{1}{2}e^{0.5x}$, $x\in[0,1]$ fonksiyonun çözümünü sabit nokta iterasyonu ile bulunuz. Başlangıç iterasyonu $x_0=0$, ve 3. iterasyona kadar hesaplayıp virgülden sonra 4 basamak alınız.*

Çözüm

$$
\begin{aligned}
x &= g(x)=\frac{1}{2}e^{0.5x}\Rightarrow g(0)=0.5, g(1)=0.824\,36\\
g'(x) &= \frac{1}{4}e^{0.5x}\leq\frac{1}{4}*0.82436=0.20609
\end{aligned}
$$

olduğundan sabit nokta iterasyonunu kullanabiliriz.

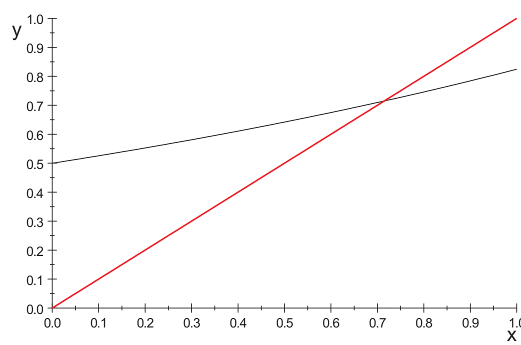


FIGURE 3.10. $x=\frac{1}{2}e^{0.5x}$ grafiği

TABLE 2. Cozum

İterasyon	x	g(x)	Eps	Devam/Dur	Devam/	Çözüm	y=x
0	0,0000	0,5000	0,0001				0,5
1	0,5000	0,6420	0,0001	0,5	Devam	0	0,52
2	0,6420	0,6893	0,0001	0,142	Devam	0	0,54
3	0,6893	0,7057	0,0001	0,0473	Devam	0	0,56

□

3.2 İkiye Bölme Yöntemi (Bisection Method)

$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $f(r) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde $r \in [a,b]$ çözümünü bulmak için İkiye Bölme Yöntemi için aşağıdaki algoritmayı uygularız:

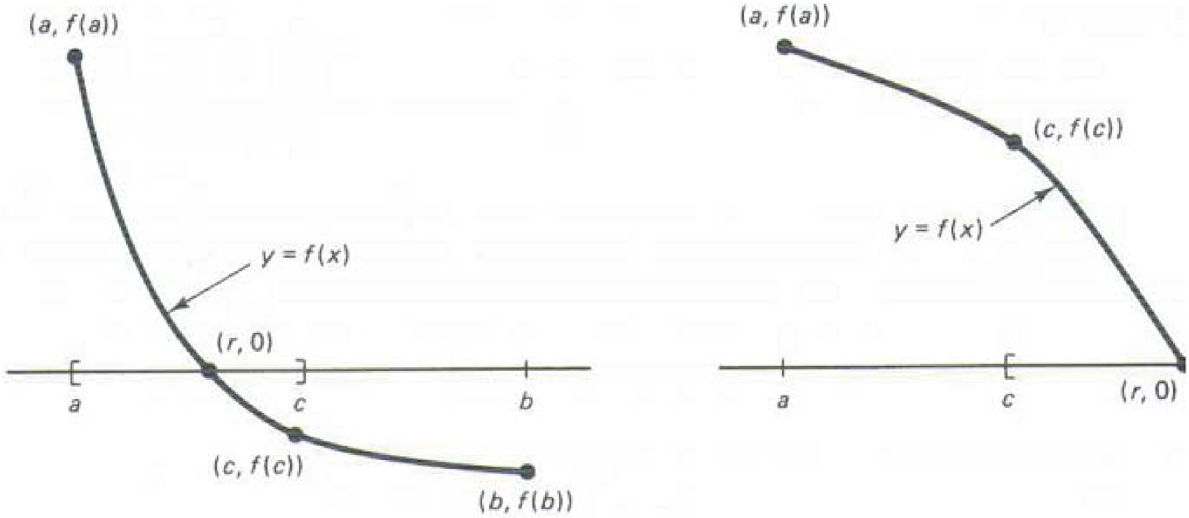


Figure 3.11. İkiye Bölme Yöntemi

Algoritma 3.12. **Adım 1:** *$\varepsilon > 0$ hata payını verin ve $n = 0$ alınız ve başlangıç aralığı $a_0 = a, b_0 = b$ seçerek $[a_0, b_0]$ şeklinde belirleyiniz*

Adım 2:

$$r_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

şeklinde aralığın orta noktasını alınız.

Adım 3: *Eğer $f(r_n) = 0$ ise $r = r_n$ şeklinde çözümü elde ederiz.*

Adım 4: *Eğer $f(a_n) * f(r_n) < 0$ ise $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = r_n$ seçerek yeni aralığı $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, r_n]$ şeklinde belirleyiniz.*

Adım 5: *Eğer $f(r_n) * f(b_n) < 0$ ise $a_{n+1} = r_n, b_{n+1} = b_n$ seçerek yeni aralığı $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [r_n, b_n]$ şeklinde belirleyiniz.*

Adım 6: *Eğer $|a_n - b_n| > \varepsilon$ ise n yi 1 arttırın. $(n = n+1)$ ve 2.adıma gidiniz aksi durumda işleme son ver.*

Problem. *Algoritma 3.12 ile verilen ikiye bölme yönteminin yakınsaklığı nedir? İterasyon ne zaman durur?*

Teorem 3.13. *(İkiye bölme teoremi-Bisection theorem) $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $f(r) = 0$ koşulunu sağlayan $\exists r \in [a,b]$ olsun. Eğer $f(a) f(b) \leq 0$ koşulunu sağlanıyorsa Algoritma 3.12 de tanımlanan $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $x = r$ çözümüne yakınsaktır ve*

$$|r - r_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, n = 0, 1, 2, ...$$

eşitsizliği sağlanır. $\varepsilon > 0$ hata payını göstermek üzere maksimum iterasyon sayısı $(n_{\max})$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$n_{\max} = \left\lceil \frac{\ln(b-a) - \ln(2\varepsilon)}{\ln(2)} \right\rceil$$

Proof. r ve r_n $[a,b]$ aralığında olduğundan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz

$$|r - r_n| \leq \frac{|b_n - a_n|}{2}$$

$(1-a)$ Eğer $a_1 = a_0, b_1 = r_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ ise $|b_1 - a_1| = \frac{|b_0-a_0|}{2^1}$
$(1-b)$ Eğer $a_1 = r_0 = \frac{a_0+b_0}{2}, b_1 = b_0$ ise $|b_1 - a_1| = \frac{|b_0-a_0|}{2^1}$
$(2-a)$ Eğer $a_2 = a_1, b_2 = r_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ ise $|b_2 - a_2| = \frac{|b_1-a_1|}{2^1} = \frac{|b_0-a_0|}{2^2}$
$(2-b)$ Eğer $a_2 = r_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 = b_1$ ise $|b_2 - a_2| = \frac{|b_1-a_1|}{2^1} = \frac{|b_0-a_0|}{2^2}$
Tümervarım yöntemi ile $|b_{n-1} - a_{n-1}| = \frac{|b_0-a_0|}{2^{n-1}}$ olduğunu kabul edelim.
$(n-a)$ Eğer $a_n = a_{n-1}, b_n = r_{n-1} = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ ise $|b_n - a_n| = \frac{|b_{n-1}-a_{n-1}|}{2^1} = \frac{|b_0-a_0|}{2^n}$
$(n-b)$ Eğer $a_n = r_{n-1} = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_n = b_{n-1}$ ise $|b_n - a_n| = \frac{|b_{n-1}-a_{n-1}|}{2^1} = \frac{|b_0-a_0|}{2^n}$
Böylece

$$|r - r_n| \leq \frac{|b_n - a_n|}{2} = \frac{|b_0 - a_0|}{2^{n+1}}$$

sonucunu elde ederiz.

$$\frac{|b_0 - a_0|}{2^{n+1}} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{b-a}{2\varepsilon} \leq 2^n \Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \Rightarrow n_{\max} = \left\lceil \frac{\ln(b-a) - \ln(2\varepsilon)}{\ln(2)} \right\rceil$$

□

NOT. *İkiye bölme yöntemi, en yavaş yakınsaklığa sahip bir yöntem olmasına rağmen hatalı sonuçlanmayan bir yöntemdir.*

ÖRNEK 3.14. $x^3 + 4x^2 - 10 = 0,\ x \in [1, 2]$ *denkleminin çözümünü ikiye bölme yöntemi ile bulunuz. Hata payı* $\varepsilon = 10^{-6}$ *ve virgülden sonra 6 basamak alınız.*

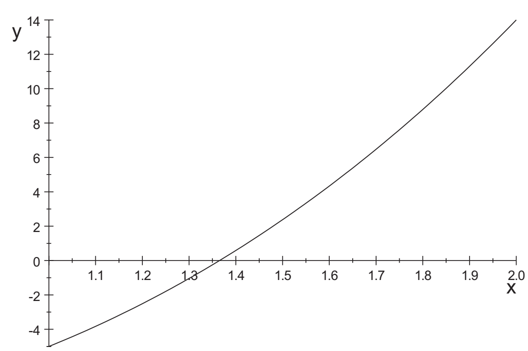


FIGURE 3.12. $x^3 + 4x^2 - 10$ fonksiyonu

Çözüm

TABLE 3. $x^3+4x^2-10=0,\ x\in[1,2]$ denkleminin çözümünü ikiye bölme yöntemi ile bulunması.

İterasyon	a	f(a)	b	f(b)	f(a)*f(b)<0 mı?	r=(a+b)/2	f(r)	eps	devam	Kök
0	1,000000	-5,000000	2,000000	14,000000	Kök Var	1,5	2,375	0,000001	Devam	
1	1,000000	-5,000000	1,500000	2,375000	Kök Var	1,25	-1,79688	0,000001	Devam	
2	1,250000	-1,796875	1,500000	2,375000	Kök Var	1,375	0,162109	0,000001	Devam	
3	1,250000	-1,796875	1,375000	0,162109	Kök Var	1,3125	-0,84839	0,000001	Devam	
4	1,312500	-0,848389	1,375000	0,162109	Kök Var	1,34375	-0,35098	0,000001	Devam	
5	1,343750	-0,350983	1,375000	0,162109	Kök Var	1,359375	-0,09641	0,000001	Devam	
6	1,359375	-0,096409	1,375000	0,162109	Kök Var	1,367188	0,032364	0,000001	Devam	
7	1,359375	-0,096409	1,367188	0,032364	Kök Var	1,363282	-0,03214	0,000001	Devam	
8	1,363282	-0,032138	1,367188	0,032364	Kök Var	1,365235	0,000082	0,000001	Devam	
9	1,363282	-0,032138	1,365235	0,000082	Kök Var	1,364259	-0,01603	0,000001	Devam	
10	1,364259	-0,016027	1,365235	0,000082	Kök Var	1,364747	-0,00797	0,000001	Devam	
11	1,364747	-0,007974	1,365235	0,000082	Kök Var	1,364991	-0,00395	0,000001	Devam	
12	1,364991	-0,003946	1,365235	0,000082	Kök Var	1,365113	-0,00193	0,000001	Devam	
13	1,365113	-0,001932	1,365235	0,000082	Kök Var	1,365174	-0,00093	0,000001	Devam	
14	1,365174	-0,000925	1,365235	0,000082	Kök Var	1,365205	-0,00041	0,000001	Devam	
15	1,365205	-0,000413	1,365235	0,000082	Kök Var	1,36522	-0,00017	0,000001	Devam	
16	1,365220	-0,000165	1,365235	0,000082	Kök Var	1,365228	-3,3E-05	0,000001	Devam	
17	1,365228	-0,000033	1,365235	0,000082	Kök Var	1,365232	0,000033	0,000001	Devam	
18	1,365228	-0,000033	1,365232	0,000033	Kök Var	1,36523	0	0,000001	Devam	
19	1,365230	0,000000	1,365230	0,000000	Kök Yok	1,36523	0	0,000001	Dur	Çözüm=1,36523

□

ÖRNEK 3.15. *$x=\tan x,\ x\in[4,4.5]$ denkleminin çözümünü ikiye bölme yöntemi ile bulunuz. Hata payı $\varepsilon=10^{-3}$ ve virgülden sonra 3 basamak alınız.*

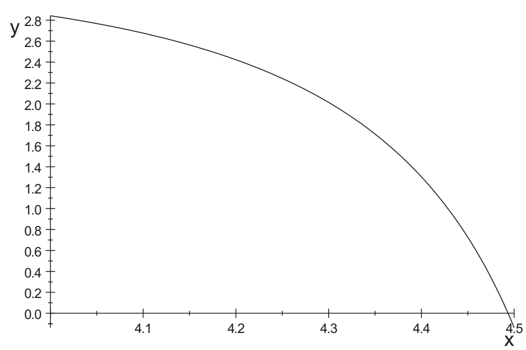


FIGURE 3.13. $x=\tan x,\ x\in[4,4.5]$ denklemi

Çözüm

TABLE 4. $x = \tan x,\ x \in [4, 4.5]$ denkleminin çözümünü ikiye bölme yöntemi ile bulunması.

İterasyon	a	f(a)	b	f(b)	f(a)*f(b)<0 mı?	r=(a+b)/2	f(r)	eps	devam	Kök
0	4,000	2,842	4,500	-0,137	Kök Var	4,250	2,244	0,001	Devam	
1	4,250	2,244	4,500	-0,137	Kök Var	4,375	1,524	0,001	Devam	
2	4,375	1,524	4,500	-0,137	Kök Var	4,438	0,885	0,001	Devam	
3	4,438	0,885	4,500	-0,137	Kök Var	4,469	0,442	0,001	Devam	
4	4,469	0,442	4,500	-0,137	Kök Var	4,485	0,163	0,001	Devam	
5	4,485	0,163	4,500	-0,137	Kök Var	4,493	0,008	0,001	Devam	
6	4,493	0,008	4,500	-0,137	Kök Var	4,497	-0,074	0,001	Devam	
7	4,493	0,008	4,497	-0,074	Kök Var	4,495	-0,032	0,001	Devam	
8	4,493	0,008	4,495	-0,032	Kök Var	4,494	-0,012	0,001	Devam	
9	4,493	0,008	4,494	-0,012	Kök Var	4,494	-0,012	0,001	Dur	Çözüm =4,494

□

3.3 Regula Falsi Yöntemi (Regula Falsi Method)

İkiye bölme yönteminin yakınsaklık hızı oldukça yavaş olduğundan bu yöntem geliştirilmiştir. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $f(r) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde $r \in [a, b]$ çözümünü bulmak için Regula Falsi Yöntemi için öncelikle $(a, f(a))$ noktası ile $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru praçasının x eksenini kestiği noktanın eğim yardımıyla bulunması hedef alınmıştır:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - f(b)}{c - b} \Rightarrow c = \frac{f(b)\, a - f(a)\, b}{f(b) - f(a)}$$

ve bunun için aşağıdaki algoritmayı uygularız:

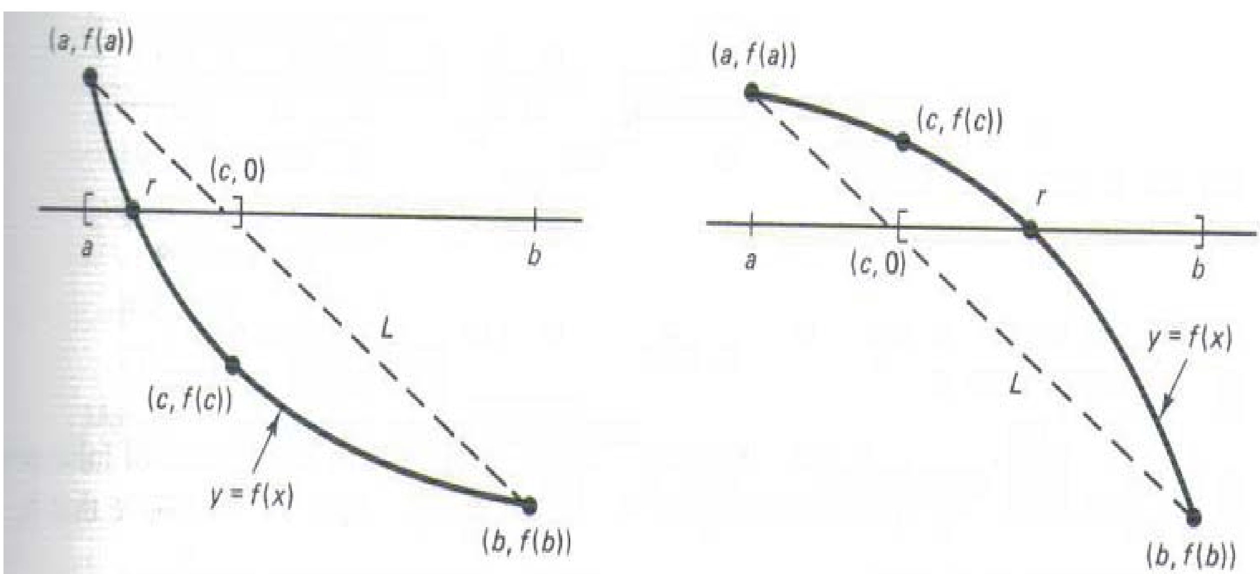


FIGURE 3.14. Regula Falsi Yöntemi

ALGORITMA 3.16. **Adım 1:** *$\varepsilon > 0$ hata payını verin ve $n = 0$ alınız ve başlangıç aralığı $a_0 = a, b_0 = b$ seçerek $[a_0, b_0]$ şeklinde belirleyiniz*

Adım 2:

$$r_n = \frac{f(b_n)\, a_n - f(a_n)\, b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

şeklinde noktayı bulunuz..

Adım 3: *Eğer $f(r_n) = 0$ ise $r = r_n$ şeklinde çözümü elde ederiz.*

Adım 4: *Eğer $f(a_n) * f(r_n) < 0$ ise $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = r_n$ seçerek yeni aralığı $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, r_n]$ şeklinde belirleyiniz.*
Adım 5: *Eğer $f(r_n) * f(b_n) < 0$ ise $a_{n+1} = r_n, b_{n+1} = b_n$ seçerek yeni aralığı $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [r_n, b_n]$ şeklinde belirleyiniz.*
Adım 6: *Eğer $|a_n - b_n| > \varepsilon$ ise n yi 1 arttırın. $(n = n+1)$ ve 2.adıma gidiniz aksi durumda işleme son ver.*

PROBLEM. *Algoritma 3.16 ile verilen Regula Falsi yönteminin yakınsaklığı nedir?*

TEOREM 3.17. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında 2.mertebeye kadar türevi var ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere eğer $f(a) < 0 < f(b)$ ve $f''(x) \geq 0\,(f''(x) \leq 0)$ koşulunu sağlanıyorsa Algoritma 3.16 de tanımlanan $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $x = r$ çözümüne yakınsaktır.*

PROOF. $f''(x) \geq 0$, $x \in [a,b] = [a_0, b_0]$ koşulu ile f fonksiyonunun konveksliği sonucunu elde ederiz. Böylece $p_0(x) = c_0 x + d_0$ şeklinde bir doğru için

$$f(x) \leq p_0(x)$$

koşulu sağlanır. $p_0(r_0) = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliklten $f(r_0) \leq 0$. Bu durumda yeni aralığımız $[a_1, b_1] = [r_0, b_0]$. Eğer $f(r_0) = 0$ ise yöntem yakınsaktır aksi durumda yine $f''(x) \geq 0$, $x \in [a_1, b_1] = [r_0, b_0] \subset [a_0, b_0]$ koşulu ile $p_1(x) = c_1 x + d_1$ şeklinde bir doğru için

$$f(x) \leq p_1(x)$$

ifadesi geçerlidir. $p_1(r_1) = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliklten $f(r_1) \leq 0$. Bu durumda yeni aralığımız $[a_2, b_2] = [r_1, b_1]$. Ve bu yöntemi bu şekilde devam ettirdiğimizde

$$r_k \geq a_k = r_{k-1}$$

olucak şekilde monoton artan bir dizi elde ederiz. Diğer yandan sağ sınır hiçbir zaman değişmemektedir:

$$b_k = b_{k-1} = ... = b_0$$

ve

$$b_k \geq r_k \geq a_k = r_{k-1}$$

sağlandığından monoton artan $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi üstten sınırlı olduğundan yakınsaktır. Buna göre

$$r_n = \frac{f(b_n)\, a_n - f(a_n)\, b_n}{f(b_n) - f(a_n)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)\, r_{n-1} - f(r_{n-1})\, b_n}{f(b_n) - f(r_{n-1})} \Rightarrow r = \frac{f(b_0)\, r - f(r)\, b_0}{f(b_0) - f(r)} \Rightarrow$$
$$(r - b_0)\, f(r) = 0 \Rightarrow f(r) = 0, r \neq b_0$$

□

NOT. *$f'(x) \simeq 0$ olduğu durumda yakınsaklık iyi tanımlı olmayıp çözümün bulunması zorlaşır. Aşağıdaki şekilde ikiye bölme yöntemi ile regula falsi yönteminin yakınsaklıklarını gösterebiliriz. Buna göre genel anlamda regula falsi yönteminin yakınsaklığı daha iyidir denilebilir.*

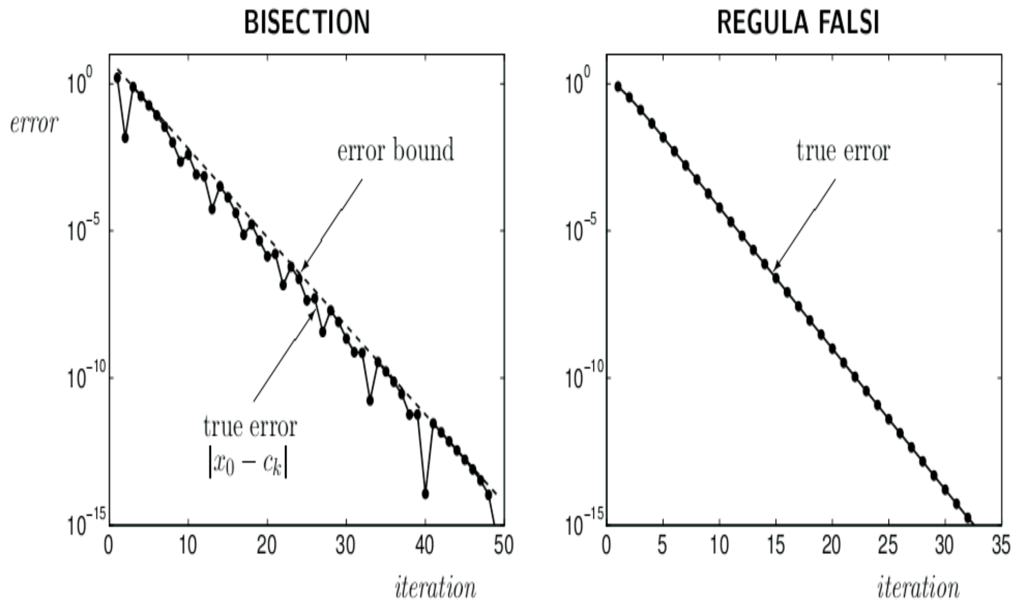


FIGURE 3.15. İkiye Bölme ve Regula Falsi Yöntemlerinin yakınsaklıklarının karşılaştırılması

Tabii ki her fonksiyon için bu genellemeyi yapmak yanlıştır. Bu sorunun cevabını evet olarak vermek her zaman doğru olmayabilir. Örneğin eğer başlangıç aralığını hileli olarak oldukça yakın değerlerde belirlersek ikiye bölme yönteminin yakınsaklığının daha iyi olduğunu belirtebiliriz. Aşağıdaki şekilde verilen $f(x) = sign(\arctan(x)) \sqrt[20]{\frac{2\arctan(x)}{\pi}} + \frac{19}{20}$ *fonksiyonu buna bir örnektir:*

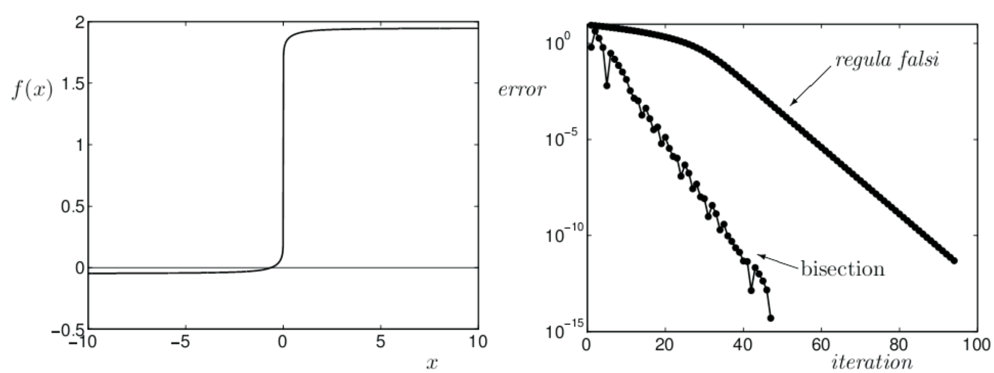


FIGURE 3.16. İkiye bölme yönteminin Regula Falsi yönteminden daha iyi yakınsadığı durum

ÖRNEK 3.18. $x - 2^{-x} = 0,\ x \in [0,1]$ *denkleminin çözümünü regula falsi yöntemi ile bulunuz. Hata payı* $\varepsilon = 10^{-5}$ *ve virgülden sonra 5 basamak alınız.*

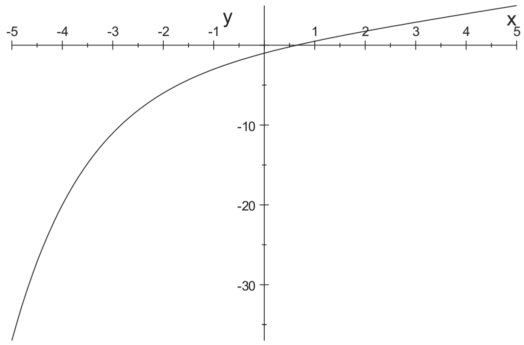


FIGURE 3.17. $f(x) = x - 2^{-x}$ fonksiyonu

Çözüm

TABLE 5. $x - 2^{-x} = 0,\ x \in [0, 1]$ denkleminin regula falsi yöntemi ile çözümü.

İterasyo	a	f(a)	b	f(b)	f(a)*f(b)<0 m	r=(f(b)a-f(a)b)/(f(b)-f(	f(r)	eps	devam	Kök
0	0,00000	-1,00000	1,00000	0,50000	Kök Var	0,66667	0,03671	0,00001	Devam	
1	0,00000	-1,00000	0,66667	0,03671	Kök Var	0,64306	0,00271	0,00001	Devam	
2	0,00000	-1,00000	0,64306	0,00271	Kök Var	0,64132	0,00019	0,00001	Devam	
3	0,00000	-1,00000	0,64132	0,00019	Kök Var	0,64120	0,00002	0,00001	Devam	
4	0,00000	-1,00000	0,64120	0,00002	Kök Var	0,64119	0,00001	0,00001	Devam	
5	0,00000	-1,00000	0,64119	0,00001	Kök Var	0,64118	-0,00001	0,00001	Dur	Çözüm =0,64118

□

ÖRNEK 3.19. $2 + \cos(e^x - 2) - e^x = 0,\ x \in [0.5, 1.5]$ *denkleminin çözümünü regula falsi yöntemi ile bulunuz. Hata payı* $\varepsilon = 10^{-3}$ *ve virgülden sonra 3 basamak alınız.(cos fonksiyonu için radyan alınız)*

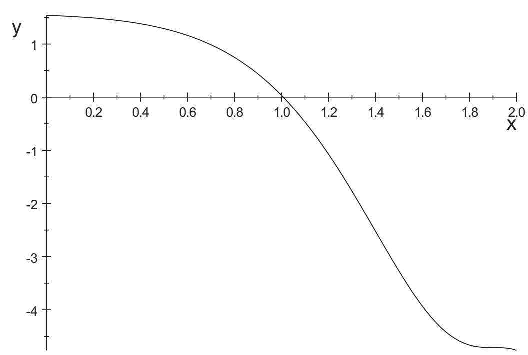


FIGURE 3.18. $2 + \cos(e^x - 2) - e^x = 0,\ x \in [0, 2]$

Çözüm

TABLE 6. $2 + \cos(e^x - 2) - e^x = 0,\ x \in [0.5, 1.5]$ denkleminin regula falsi yöntemi ile çözümü.

İterasyo	a	f(a)	b	f(b)	f(a)*f(b)<0 m	r=(f(b)a-f(a)b)/(f(b)-f(	f(r)	eps	devam	Kök
0	0,500	1,290	1,500	-3,272	Kök Var	0,783	0,794	0,010	Devam	
1	0,783	0,794	1,500	-3,272	Kök Var	0,923	0,353	0,010	Devam	
2	0,923	0,353	1,500	-3,272	Kök Var	0,979	0,127	0,010	Devam	
3	0,979	0,127	1,500	-3,272	Kök Var	0,998	0,044	0,010	Devam	
4	0,998	0,044	1,500	-3,272	Kök Var	1,005	0,012	0,010	Devam	
5	1,005	0,012	1,500	-3,272	Kök Var	1,007	0,003	0,010	Dur	Çözüm =1,007

$\square$

3.4 Newton[1] Raphson Yöntemi (Newton Raphson Method)

Eğer $f(x), f'(x), f''(x)$ fonksiyonları $x = r$ çözümü civarında sürekli fonksiyon ise Newton-Raphson yöntemini kullanabiliriz. Newton-Raphson Yöntemi için öncelikle r_0 gibi bir başlangıç noktası verilir.Şekile göre r_0 noktasından geçen eğimi aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$m = \frac{f(r_1) - f(r_0)}{r_1 - r_0} = f'(r_0) \Rightarrow f(r_1) = 0 \Rightarrow \frac{0 - f(r_0)}{r_1 - r_0} = f'(r_0) \Rightarrow r_1 = r_0 - \frac{f(r_0)}{f'(r_0)}$$

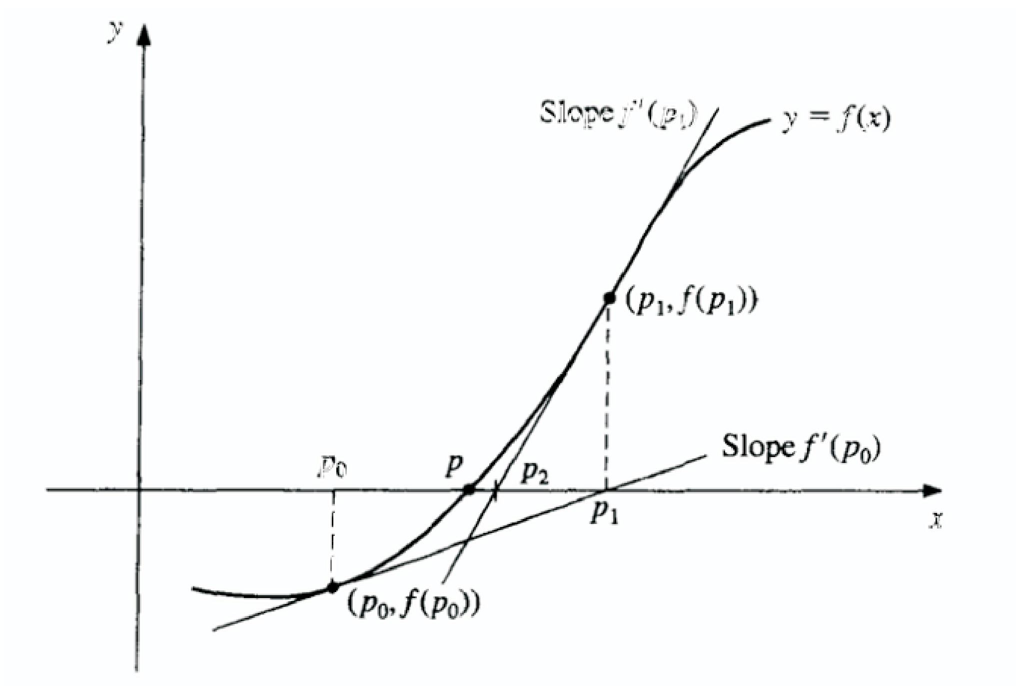


FIGURE 3.19. Newton Raphson Yöntemi

ve bunun için aşağıdaki algoritmayı uygularız:

ALGORITMA 3.20. **Adım 1:** *$\varepsilon > 0$ hata payını verin ve $n = 0$ alınız ve başlangıç aralığı r_0 başlangıç noktasını belirleyiniz. Eğer $f'(r_0) = 0$ ise başka bir r_0 noktası seçiniz.*

Adım 2:

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)}, n = 0, 1, 2, ...$$

şeklinde noktayı bulunuz..

Adım 3: *Eğer $|r_{n+1} - r_n| > \varepsilon$ ise n yi 1 arttırın. $(n = n+1)$ ve 2.adıma gidiniz aksi durumda $f'(r_n) = 0$ ise işleme son veriniz değil ise $r \simeq r_n$ olarak çözümü elde ediniz.*

TEOREM 3.21. *$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında 2.mertebeye kadar türevi var ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere eğer $f(r) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde çözüm mevcut ise ve $f'(r) \neq 0$ koşulunu sağlanıyorsa $r_0 \in [r - \delta, r + \delta]$ olucak şekilde $\exists \delta > 0$ için Algoritma 3.20 de tanımlanan $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $x = r$ çözümüne yakınsaktır.*

UYARI 3.22.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ile tanımlanan fonksiyona Newton-Raphson iterasyon fonksiyonu denir.

---

[1] Isaac Newton, 4 ocak 1643 yılında Woolsthorpe-Ingiltere doğumlu 31 mart 1727, Londra-Ingiltere de öldü. 27 yaşında Cambridge de Lucasian başkanlığını yaptı.

PROOF. Şekilde neden r_0 başlangıç iterasyonunu çözüme oldukça yakın seçmeliyiz veya neden 2. mertebeye kadar türevlenebilir ve türevi sürekli bir fonksiyon seçiyoruz sorularının çok net bir cevabını alamıyoruz ancak ispatta neden bu varsayımlarda bulunuyoruz açıklmaya çalışacağız. $f(x)$ fonksiyonunun $x=r_0$ noktasındaki Taylor seri açılımını verirsek

$$f(x)=f(r_0)+f'(r_0)(x-r_0)+f''(c)\frac{(x-r_0)^2}{2!},$$

c, r_0 ile x arasında bir değer. $x=r$ değerini yazdığımızda

$$0=f(r)=f(r_0)+f'(r_0)(r-r_0)+f''(c)\frac{(r-r_0)^2}{2!}$$

bu ifade ile eğer r_0 başlangıç noktası r noktasına oldukça yakın olduğunda $\frac{(r-r_0)^2}{2!}$ terimi yeterince küçük bir değer alıcaktır. Böylece

$$0\simeq f(r_0)+f'(r_0)(r-r_0)\Rightarrow r\simeq r_0-\frac{f(r_0)}{f'(r_0)}$$

olarak elde ederiz. Buna göre yukarıdaki yaklaşımı sonraki noktayı bulmak için kullanabiliriz.

$$r_1\simeq r_0-\frac{f(r_0)}{f'(r_0)}$$

ve daha sonra r_0 noktasının sırasıyla r_{k-1} ile değiştirdiğimizde Newton-Raphson iterasyonunu kurmuş oluruz. Yakınsaklığı değerlendirmek için sabit nokta iterasyonundaki koşulun sağlanması gerekmektedir:

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\Rightarrow g'(x)=1-\frac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Eğer $f(r)=0$ koşulunu sağlayacak şekilde bir çözüm var ise yukarıdaki tanımlamadan $g'(r)=0$ dır ve g sürekli fonksiyon olduğundan $|g'(x)|<1, x\in[r-\delta, r+\delta]$ koşulunu sağlayacak şekilde $\exists\delta>0$ bulmak mümkündür. Böylece

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right|<1, x\in[r-\delta, r+\delta]$$

koşulu sağlanır. □

ÖRNEK 3.23. $\exp(x)-5\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0$, *denkleminin çözümünü* $r_0=0.5$ *başlangıç noktası ve Newton-Raphson yöntemi ile bulunuz. Hata payı* $\varepsilon=10^{-5}$ *ve virgülden sonra 5 basamak alınız.(cos fonksiyonu için radyan alınız)*

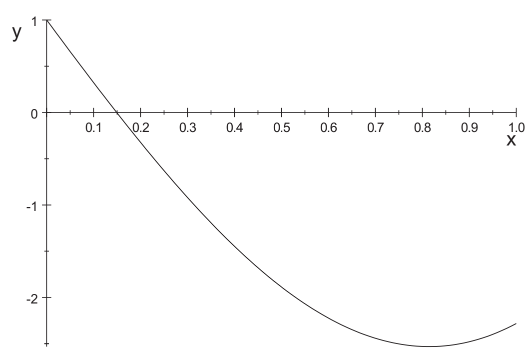


FIGURE 3.20. $\exp(x)-5\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Çözüm $f(x)=\exp(x)-5\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Rightarrow f'(x)=e^x-\frac{5}{2}\pi\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$

TABLE 7. $\exp(x) - 5\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$, denkleminin çözümünü $r_0 = 0.5$ başlangıç noktası ve Newton-Raphson yöntemi ile bulunması

İterasyon	r	f(r)	f'(r)	eps	devam	Kök
0	0,50000	-1,88681	-3,90488	0,00001		
1	0,01681	0,88494	-6,83429	0,00001	Devam	
2	0,14630	0,01859	-6,48996	0,00001	Devam	
3	0,14916	0,00005	-6,47853	0,00001	Devam	
4	0,14917	-0,00002	-6,47849	0,00001	Devam	
5	0,14917	-0,00002	-6,47849	0,00001	Dur	Çözüm =0,14917

□

ÖRNEK 3.24. *$x^2 - \sin(x) - 1 = 0$ denkleminin çözümünü $r_0 = 1.$ başlangıç noktası ve Newton-Raphson yöntemi ile bulunuz. Hata payı $\varepsilon = 10^{-6}$ ve virgülden sonra 5 basamak alınız.(sin fonksiyonu için radyan alınız)*

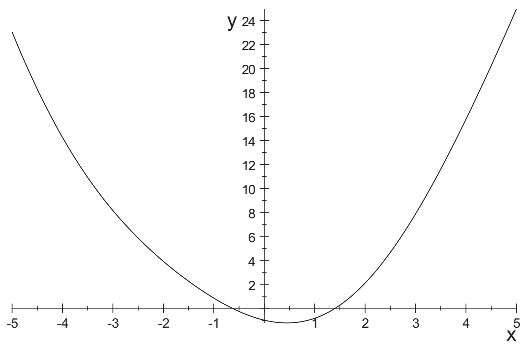


FIGURE 3.21. $f(x) = x^2 - \sin(x) - 1$ fonksiyonu

Çözüm $f(x) = x^2 - \sin(x) - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - \cos x$

TABLE 8. $x^2 - \sin(x) - 1 = 0$ denkleminin çözümünü $r_0 = 1.$ başlangıç noktası ve Newton-Raphson yöntemi ile bulunması

İterasyon	r	f(r)	f'(r)	eps	devam	Kök
0	1,00000	-0,84147	1,45970	0,000001		
1	1,57647	0,48527	3,15861	0,000001	Devam	
2	1,42284	0,03539	2,69825	0,000001	Devam	
3	1,40972	0,00026	2,65906	0,000001	Devam	
4	1,40962	0,00000	2,65877	0,000001	Dur	Çözüm =1,40962227740211

□

PROBLEM. *Algoritma 3.20 ile verilen Newton-Raphson yönteminin yakınsaklığı nedir?*

TANIM 3.25. *$f(x)$ fonksiyonu M. mertebeye kadar türevlenebilir ve türevleri sürekli bir fonksiyon olmak üzere*

$$f(r) = f'(r) = \dots = f^{(M-1)}(r) = 0, f^{(M)}(r) \neq 0$$

koşulu sağlanıyorsa $x = r$ noktasına M. dereceden kök denir. Eğer $M = 1$ ise basit kök, $M = 2$ ise katlı kök de denebilir.

LEMMA 3.26. *Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = r$ noktasında M. dereceden köke sahip ise*

$$f(x) = (x-r)^M h(x), h(r) \neq 0$$

olacak şekilde sürekli $h(x)$ fonksiyonu mevcuttur.

ÖRNEK 3.27.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

fonksiyonunun $x = -2$ basit köküdür ve $x = 1$ ise çift katlı köküdür.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 0 \\ f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ f'(-2) &\neq 0 \\ f(1) &= 0 \\ f'(1) &= 0 \\ f''(x) &= 6x \Rightarrow f''(1) \neq 0 \\ f(x) &= (x-1)^2 (x+2) \end{aligned}$$

TEOREM 3.28. *Algoritma 3.20 ile verilen Newton-Raphson yönteminde tanımlanan $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $x = r$ çözümüne yakınsaktır. Eğer $x = r$ basit kök ise yakınsaklık derecesi 2 dir ve*

$$|r - r_{n+1}| \approx \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|} |r - r_n|^2$$

eğer $x = r$ M. mertebeden bir kök ise yakınsaklık derecesi 1 dir ve

$$|r - r_{n+1}| \approx \frac{M-1}{M} |r - r_n|.$$

PROOF.

$$\begin{aligned} 0 &\simeq f(r_n) + f'(r_n)(r - r_n) + f''(c) \frac{(r - r_n)^2}{2!} \\ 0 &\simeq f(r_n) + f'(r_n)(r_{n+1} - r_n) \end{aligned}$$

ifadelerini taraf tarafa çıkardığımızda

$$0 \simeq f'(r_n)(r - r_{n+1}) + f''(c) \frac{(r - r_n)^2}{2!}$$

elde ederiz ki buradan

$$|r - r_{n+1}| \approx \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|} |r - r_n|^2$$

sonucunu çıkartırız. □

UYARI 3.29. *(Newton-Raphson yönteminin yakınsaklığının arttırılması) Eğer $x = r$ fonksiyonun M. mertebeden bir kökü ise yukarıdaki teoremden yakınsaklık mertebesinin 1. olduğunu belirtmiştik. Eğer yakınsaklık mertebesini arttırmak istiyorsak*

$$r_{n+1} = r_n - M \frac{f(r_n)}{f'(r_n)}, n = 0, 1, 2, ...$$

iterasyonunu kullanabiliriz.

ÖRNEK 3.30. *$\sqrt{2}$ değerini Newton Raphson yöntemi ile ve $r_0 = 1, \varepsilon = 10^{-4}$ seçerek 4 basamak kesinliğe göre hesaplayınız.*

Çözüm $f(x)=x^2-2=0 \Rightarrow f'(x)=2x$

TABLE 9. $\sqrt{2}$ değerini Newton Raphson yöntemi ile ve $r_0=1, \varepsilon=10^{-4}$ seçerek 4 basamak kesinliğe göre hesaplanması

İterasyon	r	f(r)	f'(r)	eps	devam	Kök
0	1,00000	-1,00000	2,00000	0,0001	#DEĞER!	#DEĞER!
1	1,50000	0,25000	3,00000	0,0001	Devam	
2	1,41667	0,00694	2,83333	0,0001	Devam	
3	1,41422	0,00001	2,82843	0,0001	Dur	Çözüm =1,41421568627451
4	1,41421	0,00000	2,82843	0,0001	Dur	Çözüm =1,41421356237469
5	1,41421	0,00000	2,82843	0,0001	Dur	Çözüm =1,4142135623731
6	1,41421	0,00000	2,82843	0,0001	Dur	Çözüm =1,4142135623731
7	1,41421	0,00000	2,82843	0,0001	Dur	Çözüm =1,4142135623731
8	1,41421	0,00000	2,82843	0,0001	Dur	Çözüm =1,4142135623731
9	1,41421	0,00000	2,82843	0,0001	Dur	Çözüm =1,4142135623731

□

3.5 Kirişler Yöntemi (Secant Method)

Newton Raphson yönteminde herbir iterasyonda $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonlarının değerlerini hesaplamak zorundayız. Genel anlmada bu hesaplama açısından daha fazla zahmetli olmakla birlikte elementer işlemleri içermeyen fonksiyonlar için (içinde integral veya toplam bulunduran fonksiyonlar için) değerlerin hatalı hesaplanmasına da yol açabilmektedir. Bu anlamda türevi hesaplamadan diğer iterasyonu bulabileceğimiz kirişler yöntemi geliştirilmiştir.Kirişler yöntemi için öncelikle r_0 ve r_1 gibi bir başlangıç noktaları verilir.Şekile göre r_0 noktasından geçen eğimi aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$m=\frac{f(r_1)-f(r_0)}{r_1-r_0}=\frac{f(r_2)-f(r_1)}{r_2-r_1}=\frac{0-f(r_1)}{r_2-r_1}\,(f(r_2)=0)\Rightarrow r_2=r_1-f(r_1)\frac{r_1-r_0}{f(r_1)-f(r_0)}$$

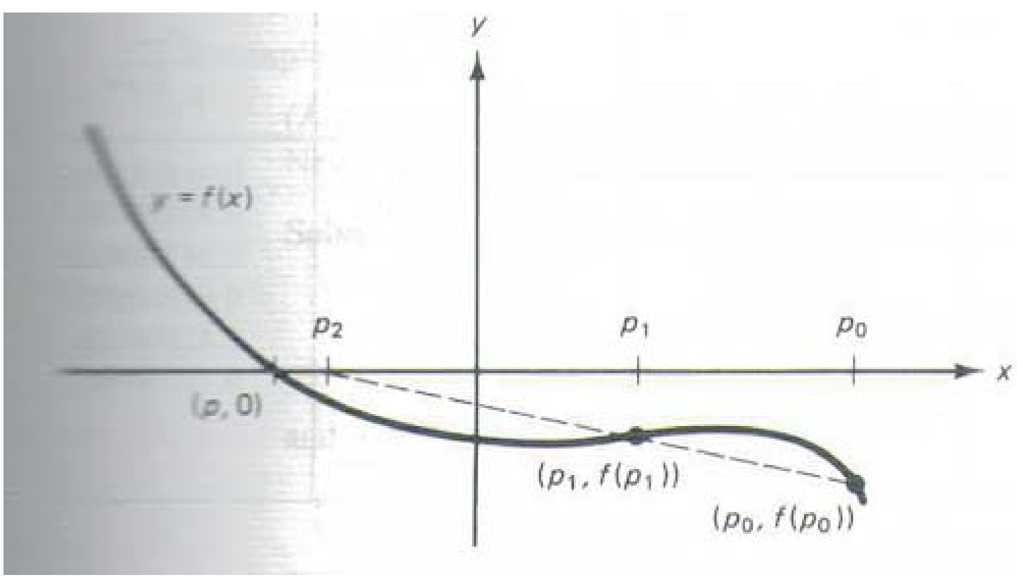


FIGURE 3.22. Kirişler Yöntemi

ve bunun için aşağıdaki algoritmayı uygularız:

ALGORITMA 3.31. **Adım 1:** *$\varepsilon > 0$ hata payını verin ve $n = 0$ alınız ve r_0, r_1 başlangıç noktalarını belirleyiniz.*

Adım 2:

$$r_{n+2} = r_{n+1} - f(r_{n+1}) \frac{r_{n+1} - r_n}{f(r_{n+1}) - f(r_n)}, n = 0, 1, 2, ...$$

şeklinde noktayı bulunuz..

Adım 3: *Eğer $|r_{n+1} - r_n| > \varepsilon$ ise n yi 1 arttırın. $(n = n + 1)$ ve 2.adıma gidiniz aksi durumda $r \simeq r_n$ olarak çözümü elde ediniz.*

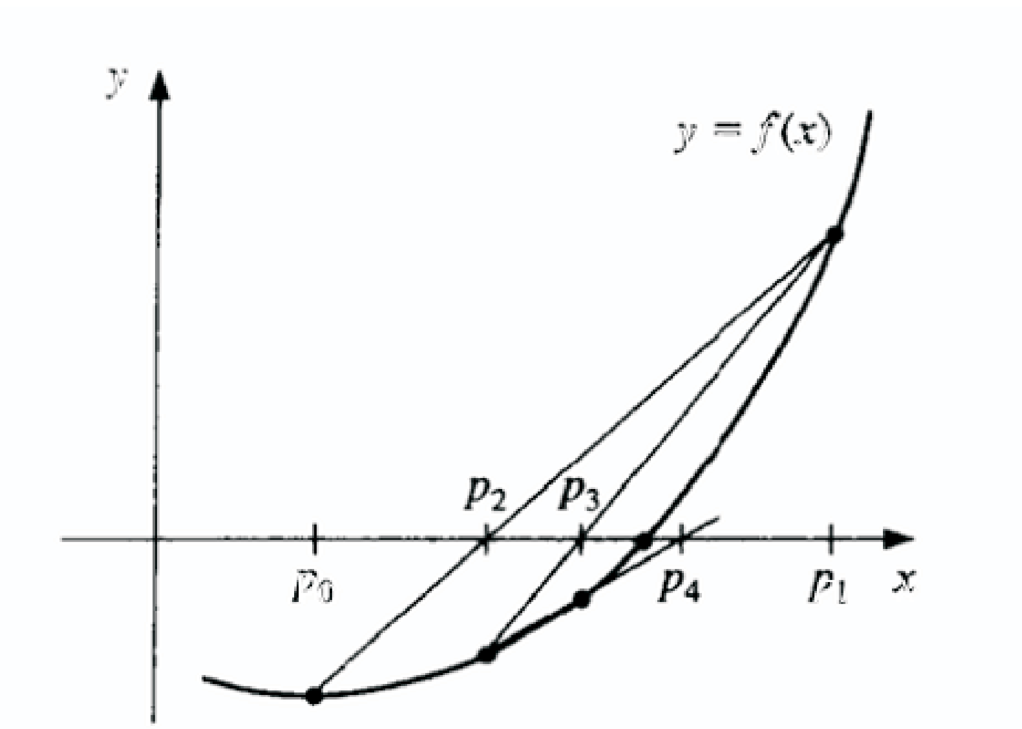


FIGURE 3.23. Kirişler Yönteminin yakınsaklığı

Gerçekte kirişler yönteminin formülü ile Regula-Falsi yönteminin iterasyon formülü aynıdır ancak Regula-Falsi yöntemi aralık üzerinde çalışılarak verilirken kirişler yönteminde başlangıç noktaları verilir.

ÖRNEK 3.32. $x^3 + \cos(x) = 0$, $r_0 = -1, r_1 = 0$ *balangıç iterasyonları verilerek kirişler yöntemi ile çözümü bulunuz. Hata payı $\varepsilon = 10^{-5}$ ve virgülden sonra 5 basamak alınız.(cos fonksiyonu için radyan alınız)*

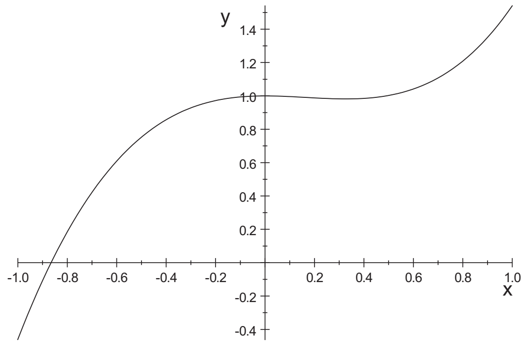


FIGURE 3.24. $x^3 + \cos(x)$ fonksiyonu

Çözüm

TABLE 10. $x^3 + \cos(x) = 0,\ r_0 = -1, r_1 = 0$ balangıç iterasyonları verilerek kirişler yöntemi ile çözümü.

İterasy	r(0)	f(r(0))	r(1)	f(r(0))2	r2=(f(r(	r(0)-f(r(	eps)/(f(	)2-f(1(0)	devam	Kök
0	-1,000	-0,460	0,000	1,000	-0,685	0,453	0,001	0,685	Devam	
1	0,000	1,000	-0,685	0,453	-1,252	-1,649	0,001	0,567	Devam	
2	-0,685	0,453	-1,252	-1,649	-0,807	0,166	0,001	0,445	Devam	
3	-1,252	-1,649	-0,807	0,166	-0,848	0,052	0,001	0,041	Devam	
4	-0,807	0,166	-0,848	0,052	-0,867	-0,005	0,001	0,019	Devam	
5	-0,848	0,052	-0,867	-0,005	-0,865	0,001	0,001	0,002	Devam	
6	-0,867	-0,005	-0,865	0,001	-0,865	0,001	0,001	0,000	Dur	Çözüm =-0,865

□

ÖRNEK 3.33. $\cos(x) + 2\sin(x) + x^2 = 0,\ r_0 = 0, r_1 = -0.1$ *başlangıç iterasyonları verilerek kirişler yöntemi ile çözümü bulunuz. Hata payı* $\varepsilon = 10^{-3}$ *ve virgülden sonra 3 basamak alınız.*

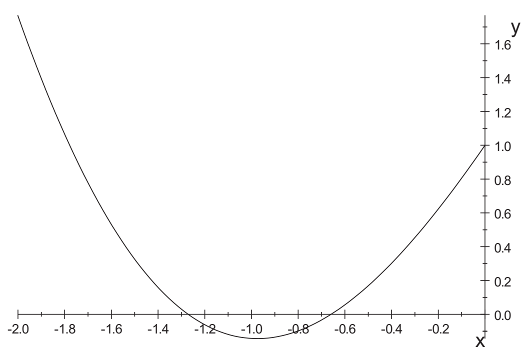


FIGURE 3.25. $\cos(x) + 2\sin(x) + x^2$ fonksiyonu

Çözüm

TABLE 11. $\cos(x)+2\sin(x)+x^2=0$, $r_0=0, r_1=-0.1$ başlangıç iterasyonları verilerek kirişler yöntemi ile çözümü

İterasy	r0	fr0	r1	fr1	r2	fr2	eps	devam	Kök
0	0,000	1,000	-0,100	0,805	-0,513	0,153	0,001	Devam	
1	-0,100	0,805	-0,513	0,153	-0,610	0,046	0,001	Devam	
2	-0,513	0,153	-0,610	0,046	-0,652	0,006	0,001	Devam	
3	-0,610	0,046	-0,652	0,006	-0,658	0,001	0,001	Devam	
4	-0,652	0,006	-0,658	0,001	-0,659	0,000	0,001	Dur	Çözüm =-0,659

□

PROBLEM. *Algoritma 3.31 ile verilen Kirişler yönteminin yakınsaklığı nedir?*

TEOREM 3.34. *Algoritma 3.31 ile verilen Kirişler yönteminde tanımlanan $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $x=r$ çözümüne yakınsaktır. Eğer $x=r$ basit kök ise yakınsaklık derecesi $\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$ denkleminin yaklaşık çözümü olan 1.6180 dir ve*

$$|r-r_{n+1}|\approx\frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|}|r-r_n|^{\alpha},\alpha=1.6180$$

PROOF.

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= r_{n+1}-f(r_{n+1})\frac{r_{n+1}-r_n}{f(r_{n+1})-f(r_n)}=\frac{f(r_{n+1})r_n-f(r_n)r_{n+1}}{f(r_{n+1})-f(r_n)}\Rightarrow \\ r_{n+2}-r &= \frac{f(r_{n+1})r_n-f(r_n)r_{n+1}}{f(r_{n+1})-f(r_n)}-r=\frac{f(r_{n+1})(r_n-r)-f(r_n)(r_{n+1}-r)}{f(r_{n+1})-f(r_n)} \end{aligned}$$

ayrıca

$$\begin{aligned} f(r_{n+1}) &= f(r_{n+1})-f(r)=f'(c_{n+1})(r_{n+1}-r) \\ f(r_n) &= f(r_n)-f(r)=f'(c_n)(r_n-r) \end{aligned}$$

ifadelerini yukarıda yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} r_{n+2}-r &= \frac{f'(c_{n+1})(r_{n+1}-r)(r_n-r)-f'(c_n)(r_n-r)(r_{n+1}-r)}{f(r_{n+1})-f(r_n)}=(r_{n+1}-r)(r_n-r)\frac{f'(c_{n+1})-f'(c_n)}{f(r_{n+1})-f(r_n)}\Rightarrow \\ |r_{n+2}-r| &= M|r_{n+1}-r||r_n-r|,M\simeq\frac{f'(c_{n+1})-f'(c_n)}{f(r_{n+1})-f(r_n)} \end{aligned}$$

Şimdi

$$|r_{n+2}-r|=M|r_{n+1}-r|^{\alpha}$$

olduğunu kabul edelim. Buna göre

$$|r_{n+1}-r|=M|r_n-r|^{\alpha}\Rightarrow M^{-1/\alpha}|r_{n+1}-r|^{1/\alpha}=|r_n-r|$$

ifadesini yukarıda yerine yazarsak

$$M|r_{n+1}-r|^{\alpha}=|r_{n+2}-r|=M|r_{n+1}-r||r_n-r|=M|r_{n+1}-r|M^{-1/\alpha}|r_{n+1}-r|^{1/\alpha}\Rightarrow|r_{n+1}-r|^{\alpha}\simeq|r_{n+1}-r|^{1/\alpha+1}$$

ifadesinin denkliği için

$$\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$$

denkleminin sağlanması gerekir ve denklemin çözümü

$$\alpha\approx1.6180$$

olarak elde edilir. □

3.6 Başlangıç Yaklaşımı ve Yakınsaklık Kriterleri (Initial Approximation and Convergence Criteria)

İkiye bölme ve Regula-Falsi gibi yöntemlerde aralık verilmektedir. Aralığın ne kadar büyük olduğu önemli olmamakla birlikte $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon için $f(a) f(b) < 0$ koşulu aranmaktadır. Bu nedenle bu türlü yöntemlere global yakınsaklık (global convergence) da denir. Fakat $f(x) = 0$ denkleminin $[a, b]$ aralığında birden fazla kökü bulunabilir ki bu durumlarda farklı aralıklar seçilerek herbir kökün bulunması hedeflenir. Elbette $f(x)$ fonksiyonunun işaret değiştridiği bu aralıkları bulmak çok da kolay değildir. Newton-Raphson veya kirişler yöntemi ise çözüme (köke) yakın bir başlangıç noktası vererek yakınsaklığı garantilemektedir. Bu yöntemlere de lokal yakınsaklık (local convergence) adı verilmektedir. Bazı karışık algoritmalar global yakınsaklık yöntemleri ile başlayıp lokal yakınsaklık yöntemlerine geçiş yapmaktadırlar.

Eğer bir projenin bir kısmında köklerin bulunması istenirse ilk yapılması gereken işlem $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizmektir. Grafiği inceledikten sonra karar vermek daha isabetli olacaktır. Bu durumda da oldukça dikkatli davranma gerekmektedir. Örneğin $x^3 - x^2 - x + 1$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir ancak bu grafiği çizerken 0.9 ve 1.1 noktalarını seçersek kökü görmezden gelebiliriz. Bu yüzden grafik çizimlerinde uyulması gereken kuralları göz önüne alarak grafiği çizmemiz gerekmektedir.

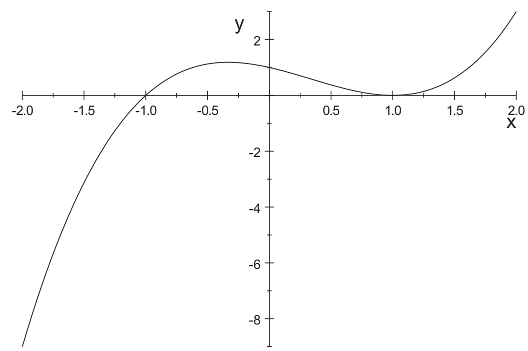


FIGURE 3.26. $x^3 - x^2 - x + 1$ fonksiyonun grafiği

İterasyon yöntemlerinde belli bir algoritma ile $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi oluşturulup $x = r$ çözümüne yakınsaklığı incelenmelidir. İterasyonu durdurma stratejisi ise şöyledir: r nin kök olması sebebiyle $f(r) = 0$ koşulu sağlandığından dolayı $|f(r_n)| < \varepsilon$ koşulu sağlandığında iterasyonun son bulması talep edilmelidir. Bu ise aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere son r_n noktasının $y = -\varepsilon$ ile $y = \varepsilon$ bandının arasında kalması demektir.

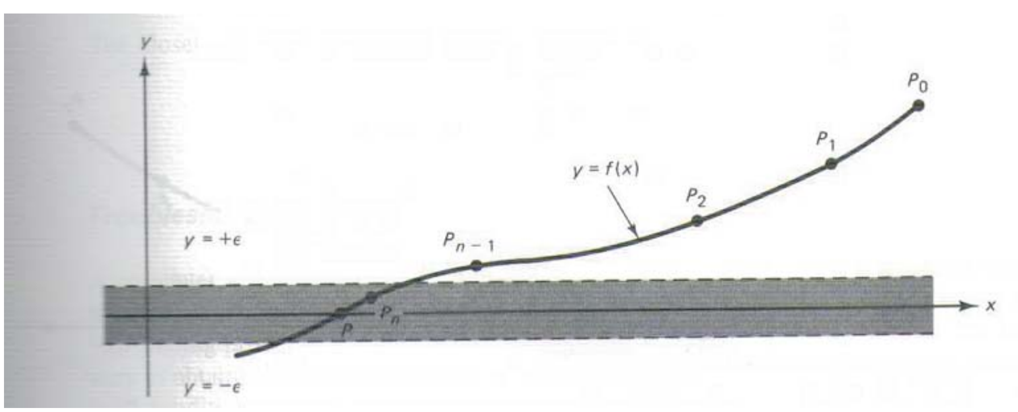


FIGURE 3.27. $|f(r_n)| < \varepsilon$ koşulu

Diğer bir durdurma kriteri ise $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $x = r$ çözümüne yakınsaklığını baz almaktadır. Buna göre r_n noktası $r - \delta$ ve $r + \delta$ aralığının içinde kalıyorsa yakınsaklık gerçekleşir şeklinde düşünülmektedir.

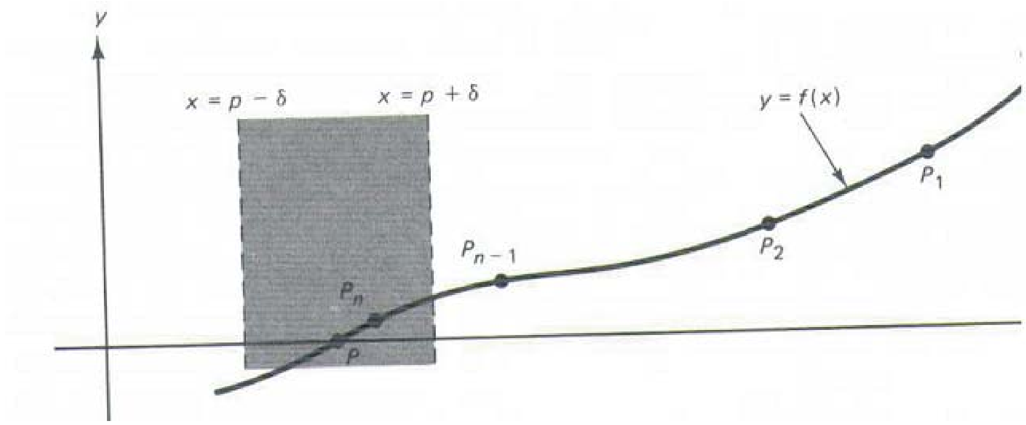


FIGURE 3.28. r_n noktası $r - \delta$ ve $r + \delta$ aralığının içinde kalması durumu

Diğer bir durdurma kriteri ise $x = r$ noktasının genelde bilinmediği düşünülerek yukarıdaki fikri iki iterasyon için uygulamaktır. Diğer bir deyişle r_{n-1} ve r_n iterasyonları arasındaki değerler yeterince küçük olduğunda yakınsaklığın sağladığı kabul edilir.

Bazen algoritmalarda yukarıdaki koşullardan her ikisi de kabul edilmektedir. Eğer $|r_n - r| < \delta$ ve $|f(r_n)| < \varepsilon$ koşullarını talep edersek aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi iterasyonu dikdörtgen bölge içine sınırlamış oluruz.

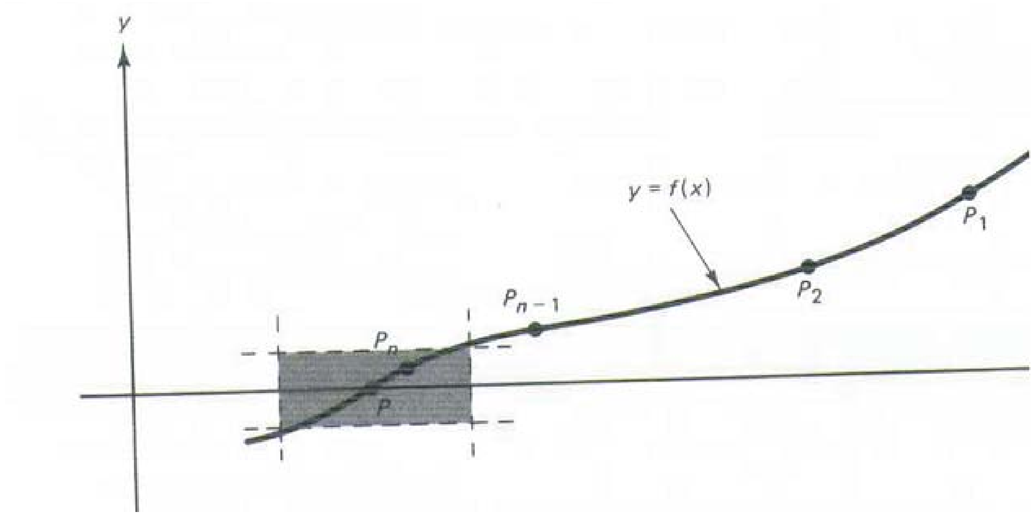


FIGURE 3.29. $|r_n - r| < \delta$ ve $|f(r_n)| < \varepsilon$ koşulları

Bu koşullardan birini ihmal ettiğimizde ise aşağıdaki gibi iterasyonları sınırlı olmayan bir bölgede arama durumuna girebiliriz.

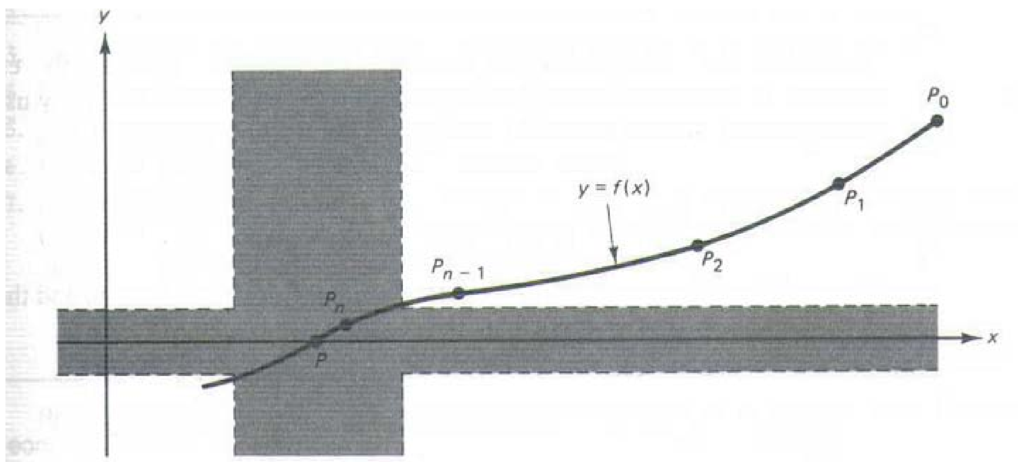


FIGURE 3.30. $|r_n - r| < \delta$ veya $|f(r_n)| < \varepsilon$ koşullarından birinin olmadığı durum

Burada δ v e ε toleranslarının seçimi oldukça önemlidir. Eğer bu sayıları yeterince küçük belirlersek iterasyon sonsuza kadar gidebilir. İterasyonlar arasındaki yakınsaklıklar için aşağıda verilen mutlak yakınsaklık

$$|r_n - r_{n-1}| < \delta$$

koşulu veya

$$\frac{2|r_n - r_{n-1}|}{|r_n| + |r_{n-1}|} < \delta$$

bağıl hata yaklaşımı da verilebilir. Kök bulmada karşılaşabiliceğimiz diğer bir sorun ise eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = r$ noktası civarında düzleşiyorsa kök bulma problemi iyi tanımlı bir problem olmayabilir. Ki bu durumlar $x = r$ nin çift kat kök olması durumlarıdır.

3.7 Aitken Yöntemi (Aitken's Process)

Aitken yöntemi lineer yakınsaklıktan daha iyi bir yakınsaklık elde etmek için kullanılmaktadır.

TANIM 3.35. $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ *dizisinin ileri farkı (forward difference)* Δr_n *aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$\Delta r_n = r_{n+1} - r_n, n = 0, 1, 2, ...$$

Buna göre yüksek mertebeden ileri farkı ise şağıdaki gibi verebiliriz:

$$\begin{aligned} \Delta^2 r_n &= \Delta(\Delta r_n) = \Delta r_{n+1} - \Delta r_n = (r_{n+2} - r_{n+1}) - (r_{n+1} - r_n) = r_{n+2} - 2r_{n+1} + r_n \\ &... \\ \Delta^k r_n &= \Delta\left(\Delta^{k-1} r_n\right) = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} (-1)^k r_{n+k-i} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

TEOREM 3.36. *(Aitken hızlandırıcısı)* $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ *dizisi* $x = r$ *noktasına lineer olarak yakınsasın ve* $r - r_n \neq 0$ *olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r - r_{n+1}}{r - r_n} = A$$

olucak şekilde $|A| < 1$ *sayısı mevcut ise*

$$s_n = r_n - \frac{(\Delta r_n)^2}{\Delta^2 r_n} = r_n - \frac{(r_{n+1} - r_n)^2}{(r_{n+2} - 2r_{n+1} + r_n)} = \frac{r_n r_{n+2} - r_{n+1}^2}{r_n - 2r_{n+1} + r_{n+2}}$$

şeklinde tanımlanan $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *dizisi* $x = r$ *noktasına* $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ *dizisinin yakınsaklığından daha hızlı yakınsar ve*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{r - s_n}{r - r_n}\right| = 0$$

değerlendirmesi doğrudur.

Aitken yönteminin sabit nokta iterasyonuna uygulanması durumuna ise Steffenn yöntemi denir. Bu durumda $f(x)=0$ denklemini sabit nokta iterasyonunda olduğu gibi $x=g(x)$ durumuna getirilmesi gerekmektedir. Buna göre Steffenn yönteminin algoritmasını aşağıdaki gibi verebiliriz.

ALGORITMA 3.37. **Adım 1:** *$\varepsilon>0$ hata payını verin ve $n=0$ alınız ve r_0 başlangıç noktalarını belirleyiniz.*

Adım 2:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= g(r_n) \\ r_{n+2} &= g(r_{n+1}) \end{aligned}$$

noktaları ile

$$s_n=\frac{r_n r_{n+2}-r_{n+1}^2}{r_n-2r_{n+1}+r_{n+2}}, n=0,1,2,...$$

şeklinde yeni noktayı bulunuz..

Adım 3: *Eğer $|s_{n+1}-s_n|>\varepsilon$ ise n yi 1 arttırın. $(n=n+1)$ ve 2.adıma gidiniz aksi durumda $r\simeq s_n$ olarak çözümü elde ediniz.*

3.8 Muller Yöntemi (Muller Yöntemi)

Muller yöntemi ise kirişler yönteminin geliştirilmiş durumudur. Buna göre $(r_0, f(r_0)), (r_1, f(r_1)), (r_2, f(r_2))$ şeklinde 3 noktalı bir yaklaşımdır. Genelliği kaybetmeksizin aşağıdaki şekilde de görüldüğü üzere r_2 noktasının köke en iyi yaklaşım olduğu kabul edilir.

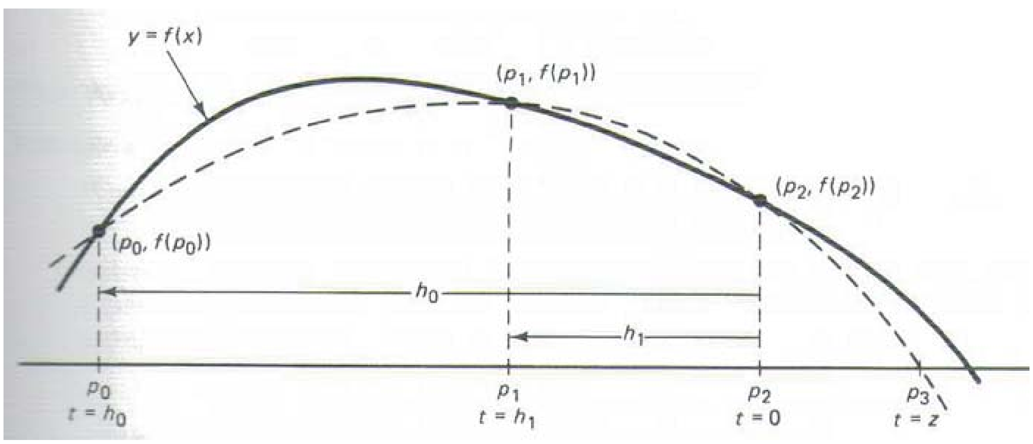


FIGURE 3.31. Muller Yöntemi

Bu yöntemde

$$t=x-r_2$$

değişken dönüşümü ve

$$\begin{aligned} h_0 &= r_0-r_2 \\ h_1 &= r_1-r_2 \end{aligned}$$

farkları kullanılır.

$$y=at^2+bt+c$$

polinomu ele alındığında polinomdaki a,b,c katasyılarını bulmak için $t=h_0, t=h_1, t=0$ noktaları düşünülür:

$$\begin{aligned} t &= h_0 \Rightarrow ah_0^2+bh_0+c=f_0 \\ t &= h_1 \Rightarrow ah_1^2+bh_1+c=f_1 \\ t &= 0 \Rightarrow a0^2+b0+c=f_2 \Rightarrow c=f_2 \end{aligned}$$

Buna göre

$$\begin{aligned} ah_0^2 + bh_0 &= f_0 - f_2 \\ ah_1^2 + bh_1 &= f_1 - f_2 \end{aligned}$$

katasyılarını

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{h_0h_1^2 - h_0^2h_1}\left(f_0h_1 - f_1h_0 + f_2h_0 - f_2h_1\right) \\ b &= \frac{1}{h_0h_1^2 - h_0^2h_1}\left(f_0h_1^2 - f_1h_0^2 + f_2h_0^2 - f_2h_1^2\right) \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Buna göre 2.dereceden bir polinomun köklerinin bulunması ise aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$t_{1,2} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Eğer $b > 0$ ise karekökün öünüdeki işaret pozitif alınırken $b < 0$ ise karekökün önündeki işaret negatif alınır. Ve son olarak bir sonraki iterasyon noktası

$$r_3 = r_2 + t_{1,2}$$

olarak elde edilir.

Chapter 4

$Ax = b$ formundaki lineer sistemlerin Çözümleri (The solution of Linear Systems $Ax = b$)

$$\begin{aligned} 5x + y + z - 5 &= 0 \\ x + 4y + z - 4 &= 0 \\ x + y + 3z - 3 &= 0 \end{aligned}$$

düzlemlerini düşünelim. 3 düzleim de kesim noktası : $\left[x = \frac{19}{25}, y = \frac{17}{25}, z = \frac{13}{25}\right]$ olarak elde edilir. Bu bölümde matrisleri tanıyarak onların çözülmesi ile ilgili direk ve iteratif yöntemleri vermeye çalışacağız.

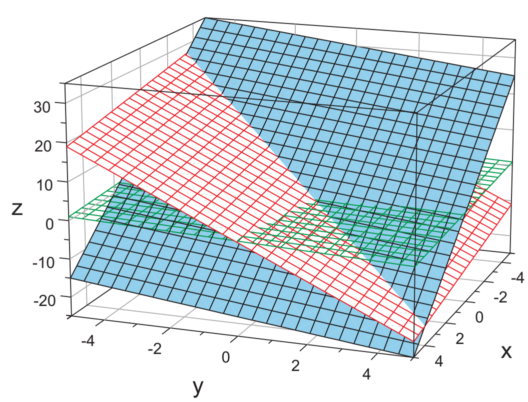


FIGURE 4.1. $5x + y + z - 5 = 0$, $x + 4y + z - 4 = 0$, $x + y + 3z - 3 = 0$ düzlemleri

4.1 Matris ve Vektörlerin Özellikleri (Properties of Vectors and Matrices)

TANIM 4.1. *$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ifadesine n bileşenli bir vektör(vector) denir. $x_1, x_2, ..., x_n$ sayılarına da x vektörünün bileşeni denir. n bileşenli vektörlerin olduğu kümeye n boyutlu uzay (n dimesional space) denir. Bir vektör bir nokta olarak kullanılıyorsa ona durum vektörü (position vector) denir. Bir vektör iki nokta arasındaki hareketi veriyorsa buna yer değiştirme vektörü (displacement vector) denir.*

NOT. *$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektörleri c, d reel sayıları için aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

(1) $x = y \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i = 1, 2, 3, ..., n$ (Vektörlerin eşitiliği- equivalance of vectors)
(2) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ (Vektörlerin toplamı - the sum of vectors)
(3) $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ (Vektörün negatifi- the negative of vector x)

(4) $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$ (Vektörlerin farkı - the difference of vectors)
(5) $cx = (cx_1, cx_2, ..., cx_n)$ (Skaler ile çarpma - scalar multiplication)
(6) $cx + dy = (cx_1 + dy_1, cx_2 + dy_2, ..., cx_n + dy_n)$ (Lineer kombinasyon- linear combination)
(7) $x.y = x_1.y_1 + x_2.y_2 + ... + x_n.y_n$ (Nokta çarpımı - dot product)
(8) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ (Euclid normu - Euclidean norm or length)
(9) $\|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$ (İki nokta arasındaki uzaklık -the distance between two points)

Örnek 4.2. *$x = (2, -3, 5, -1), y = (6, 1, 2, -4)$ vektörleri için*

(1) $x + y = (8, -2, 7, -5)$
(2) $x - y = (-4, -4, 3, 3)$
(3) $3x = (6, -9, 15, -3)$
(4) $\|x\| = \sqrt{4 + 9 + 25 + 1} = \sqrt{39}$
(5) $x.y = 12 - 3 + 10 + 4 = 23$
(6) $\|x - y\| = \sqrt{16 + 16 + 9 + 9} = \sqrt{50}$

Notasyon. *Bazen vektörler sütun olarak da gösterilir:*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$$

T harfi ile transpozesi(transpose) ifade edilmiştir. 0 vektörü ise $0 = (0, 0, ..., 0)$ olarak tanımlanır.

Teorem 4.3. *(Vektör cebiri- vector algebra) $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n), z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ vektörleri, a, b, c reel sayılar olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

(1) $x + y = y + x$ # değişme özelliği (commutative property)
(2) $0 + x = x + 0$ # sıfır vektör (zero vector)
(3) $x - x = x + (-x) = 0$ # ters işaretli vektör (the opposite vector)
(4) $(x + y) + z = x + (y + z)$ # birleşme özelliği (associative property)
(5) $(a + b)x = ax + bx$ # skaler için dağılma özelliği (distributive property for scalars)
(6) $a(x + y) = ax + ay$ # vektörler için dağılma özelliği (distributive property for vectors)
(7) $a(bx) = (ab)x$ # scaler için birleşme özelliği (associative property for scalars)

Tanım 4.4.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \leftarrow \textit{i.satır} \\ \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & \uparrow & & \phantom{a_{1n}} \\ & & & \textit{j.sütun} & & \end{array} & \end{array}$$

ifadesine A matrisi (matrix A) denir. m satır (row) ve n sütundan (column) oluşmaktadır. Kısa formda

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \ , \ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

şeklinde gösterilir. i. satır, j. sütundaki elemanı a_{ij} ile ifade edeceğiz. A matrisini satırları n bileşenli bir vektör olup

$$R_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{in}), \ 1 \leq i \leq m$$

olarak yazılırı ve

$$A = (R_1, R_2, ..., R_m)^T$$

ile de ifade edilebilir. Benzer şekilde A matrisinin sütun vektörleri m bileşenli sütun vektörüdür ve

$$C_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})^T, 1 \leq j \leq n$$

ve

$$A = (C_1, C_2, ..., C_n)$$

şeklinde yazarız.

Örnek 4.5.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \\ 5 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \\ -4 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

matrisi 4×3 lük bir matristir. Satırları sırasıyla

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \\ R_2 &= \begin{pmatrix} 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} \\ R_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} \\ R_4 &= \begin{pmatrix} -4 & 6 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve sütunları ise

$$C_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

olarak belirtiriz.

Not. *$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ matrisleri p, q reel sayıları için aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

(1) $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ #(Matrislerin eşitiliği- equivalance of two matrices)
(2) $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ #(Matrislerin toplamı - the sum of two matrices)
(3) $-A = (-a_{ij})_{m\times n}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ #(A matrisinin negatifi- the negative of matrix A)
(4) $A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ # (Matrislerin farkı - the difference of matrices)
(5) $pA = (pa_{ij})_{m\times n}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ # (Skaler ile çarpma - scalar multiplication)
(6) $pA + qB = (pa_{ij} + qb_{ij})_{m\times n}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ # (Lineer kombinasyon- linear combination)
(7) $0 = (0)_{m\times n}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ #(sıfır matris - zero matrix)

Örnek 4.6. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ *matrisleri için*

(1) $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 8 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$
(2) $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 9 \\ 12 & -11 \end{pmatrix}$
(3) $3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 21 & 15 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$
(4) $2A - 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 11 & 22 \\ 33 & -29 \end{pmatrix}$

Teorem 4.7. *(Matris cebiri- matrix algebra) $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $C = (c_{ij})_{m\times n}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ matrisleri, p, q reel sayılar olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

(1) $A + B = B + A$ # değişme özelliği (commutative property)
(2) $0 + A = A + 0$ # sıfır matris (zero matrix)
(3) $A - A = A + (-A) = 0$ # ters işaretli matrix (the opposite matrix)
(4) $(A + B) + C = A + (B + C)$ # birleşme özelliği (associative property)
(5) $(p + q)A = pA + qB$ # skaler için dağılma özelliği (distributive property for scalars)
(6) $p(A + B) = pA + pB$ # vektörler için dağılma özelliği (distributive property for vectors)
(7) $p(qA) = (pq)A$ # scaler için birleşme özelliği (associative property for scalars)

Tanım 4.8. *(Matris çarpımı - Matrix multiplication)* $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times l}$, , $1 \le i \le m, 1 \le j \le n, 1 \le k \le l$ *matrisleri için A matrisinin sütun sayısı ile B nin satır sayıları eşit ise A ve B matrislerinin çarpımını aşağıdaki gibi tanımlarız:*

$$AB = C = (c_{ik})_{m\times l}, 1 \le i \le m, 1 \le k \le l$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}, 1 \le i \le m, 1 \le k \le l$$

Örnek 4.9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ *matrislerinin çarpımını bulunuz.*

Çözüm

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RA_1 \\ RA_2 \end{pmatrix}, RA_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, RA_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix} \\
B &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CB_1 & CB_2 & CB_3 \end{pmatrix}, CB_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, CB_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}, CB_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \\
AB &= \begin{pmatrix} RA_1^T.CB_1 & RA_1^T.CB_2 & RA_1^T.CB_3 \\ RA_2^T.CB_1 & RA_2^T.CB_2 & RA_2^T.CB_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*5+3*3 & 2*(-2)+3*8 & 2*1+3*(-6) \\ (-1)*5+4*3 & (-1)*(-2)+4*8 & (-1)*1+4*(-6) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 19 & 20 & -16 \\ 7 & 34 & -25 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Tanım 4.10. *$x_1, x_2, ..., x_n$ bilinmeyenler olmak üzere m denklemden oluşan lineer denklemler sistemini aşağıdaki gibi gösteririz:*

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
... \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \\
... \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}$$

veya matris formunda

$$Ax = b,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

olarak da verilir.

Örnek 4.11.

$$\begin{aligned} 0.3x_1 + 0.52x_2 + x_3 &= 0.01 \\ 0.5x_1 + x_2 + 1.9x_3 &= 0.67 \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 &= -0.44 \end{aligned}$$

denklem sistemini matris formunda gösteriniz.

Çözüm

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.52 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.67 \\ -0.44 \end{pmatrix}$$

matris ve vektörleri için sistemi

$$Ax = b$$

formunda gösteririz. □

Tanım 4.12. *Aşağıdaki bazı özel matrislerin tanımını verelim.*

(1) $0 = (0)_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ #bütün elemanları sıfır olan matrise sıfır matris (zero matrix) denir.

(2) $I = (\delta_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ # köşegen üzerindeki elemanları 1 diğerleri 0 olan kare matrise birim matris (identity matrix) denir.

(3) Eğer $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $1 \le i, j \le n$ matrisi için $i > j$ olduğunda $a_{ij} = 0$ koşulu sağlanıyorsa bu matrise üst üçgensel matris (upper triangular matrix) denir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(4) Eğer $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $1 \le i, j \le n$ matrisi için $i < j$ olduğunda $a_{ij} = 0$ koşulu sağlanıyorsa bu matrise alt üçgensel matris (lower triangular matrix) denir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(5) Eğer $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $1 \le i, j \le n$, matrisi için $i \ne j$ olduğunda $a_{ij} = 0$ koşulu sağlanıyorsa bu matrise köşegen matris (diagonal matrix) denir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(6) Köşegen matrisinde $a_{ii} = c$ gibi aynı sabit oluyorsa bu matrise skaler matris (scalar matrix) denir ve aşağıdaki şekilde yazılır:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k \end{pmatrix} = kI$$

(7) $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ matirisi için $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ matrisine A nın transpozesi (transpose of a matrix A) denir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

(8) $A^T = A$ özelliğini sağlayan matrise simetrik matris (symmetric matrix) denir. Örneğin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

matrisi simektir bir matristir.

(9) Eğer A matrisi kompleks sayılar içeriyorsa $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{m\times n}$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ matrisine A nın eşlenik matrisi denir. Örneğin

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & i & 3 \\ 2-i & 4i & 5-2i \\ 3 & 7+9i & 6i \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 1-2i & -i & 3 \\ 2+i & -4i & 5+2i \\ 3 & 7-9i & -6i \end{pmatrix}$$

(10) Eğer A kare matrisi için $A^T = -A$ koşulu sağlanaıyorsa A matrisine simetrik olmayan matris (skew matrix) denir. Örneğin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

(11) Eğer A kare matrisi için $\overline{A}^T = A$ koşulu sağlanaıyorsa A matrisine Hermitian matris (Hermitian matrix) denir. Örneğin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -i \\ 2 & i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix} = A$$

(12) Eğer A kare matrisi için $\overline{A}^T = -A$ koşulu sağlanaıyorsa A matrisine simetrik olmayan Hermitian matris (skew Hermitian matrix) denir. Örneğin

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} i & -1-i & -2 \\ 1-i & 3i & i \\ 2 & i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A}^T = \begin{pmatrix} -i & -1+i & -2 \\ 1+i & -3i & -i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix} = -A$$

Teorem 4.13. *(Matris çarpımı- matrix multiplication)* $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$, $C = (c_{ij})_{n\times n}$, $1 \leq i, j \leq n$, *matrisleri, p reel sayılar olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

(1) $(AB)C = A(BC)$ # birleşme özelliği (associative property)
(2) $IA = AI = A$ # birim matris (identity matrix)
(3) $(A+B)C = AC + BC$ # sağ dağılma özelliği (right distributive property)
(4) $A(B+C) = AB + AC$ # sol dağılma özelliği (left distributive property)
(5) $p(AB) = (pA)B = A(pB)$ # scaler birleşme özelliği (scalar associative property)

Tanım 4.14. *Eğer $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $1 \leq i, j \leq n$, matrisi için $AB = BA = I$ koşulunu sağlayan B matrisi varsa A matrisine tersinir(invertible)-tekil olmayan(nonsingular) matris denir. Aksi durumda tekil (singular) matris denir. Eğer A tersinir ise $B = A^{-1}$ olarak yazılır.*

Teorem 4.15. *(i) $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$, $1 \leq i, j \leq n$, tersinir matrisi için $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ eşitiliği doğrudur.*
(ii) $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $1 \leq i, j \leq n$, tersinir matrisi için $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ eşitiliği doğrudur.

Proof. (*i*)

$$\begin{aligned} (AB)(AB)^{-1} &= I \\ (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \Rightarrow \left(B^{-1}A^{-1}\right) = (AB)^{-1} \end{aligned}$$

(*ii*)

$$(A)(A)^{-1} = I \Rightarrow \left((A)^{-1}\right)^{-1} = A$$

□

Lemma 4.16. *$Ax = b$ denklem sisteminin çözümü x_1 ve $Ax = 0$ denklem sisteminin çözümü ise x_2 olmak üzere $x_1 + x_2$, $Ax = b$ denklem sisteminin çözümüdür.*

Teorem 4.17. *$Ax = b$ denklem sisteminin bir tek çözümü olması için gerek ve yeter koşul $Ax = 0$ denklem sisteminin 0 çözümünün olmasıdır.*

Teorem 4.18. *$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ matirisi için $Ax = b$ denklem sisteminde $m < n$ ise sıfır olmayan çözümlere sahiptir.*
Örneğin

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan ve sıfır olmayan sonsu çözüm vardır.

Lemma 4.19. *$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ matirisi için $Ax = b$ denklem sisteminin $\forall b$ vektörü için bir tek çözümü varsa $AC = I$ koşulunu sağlayacak şekilde $C = (c_{ij})_{n\times m}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ matrisi vardır.*

Lemma 4.20. *Eğer B ve C matrsileri için $BC = I$ koşulu sağlanıyorsa $Cx = 0$ denklem sisteminin $x = 0$ şeklinde aşikar çözümü (trivial solution) vardır.*

Teorem 4.21. *$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ matirisi için $Ax = b$ denklem sisteminin $\forall b$ vektörü için bir tek çözümü varsa $m \leq n$ dir.*

Teorem 4.22. *$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ matirisi için aşağıdaki ifadeler denktir.*
(i) $Ax = 0$ homojen denklem sisteminin çözümü $x = 0$ aşikar çözümdür.
(ii) $Ax = b$ denklem sisteminin $\forall b$ vektörü için bir tek çözümü vardır.
(iii) A tersinir matristir.
(iv) $\det(A) \neq 0$.

Tanım 4.23. *Eğer* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times n}$ *, kare matrisi için determinantı aşağıdaki gibi tanımlanır ve* $\det(A)$ *ile gösterilir:*

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33}...a_{nn} + a_{12}a_{23}a_{34}...a_{n1} + a_{13}a_{24}a_{35}...a_{n-1,1} + a_{n2} + \cdots \\ &\quad - a_{n1}a_{n-1,2}...a_{2,n-1}a_{1n} - a_{n2}a_{n-1,3}...a_{2,n}a_{11} - a_{n2}a_{n-1,4}...a_{2,1}a_{12} - \cdots \end{aligned}$$

Örnek 4.24. *Aşağıdaki matrislerin determinantlarını hesaplayınız:*
(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ *(ii)* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Çözüm *(i)*

$$\det(A) = 1 * 4 - 2 * 3 = -2$$

(ii)

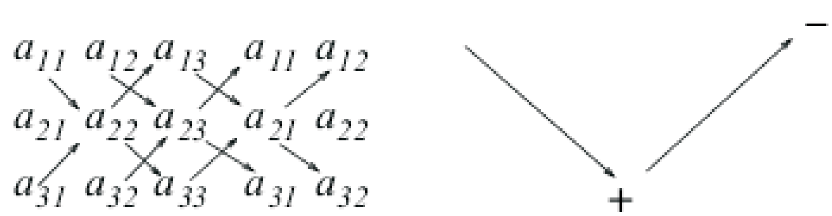


Figure 4.2. Determinant

$$\det(A) = 2 * 0 * 0 + 3 * 1 * 2 + 5 * 1 * 1 - 2 * 0 * 5 - 1 * 1 * 2 - 0 * 1 * 3 = 9$$

□

Tanım 4.25. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times n}$ *,n kare matrisi için i. satır ve j.sütun elemanlarının silinmesi ile elde edilen $(n-1)$ kare matrisinini determinantına A matrisinin minörü denir ve $[M_{ij}]$ ile gösterilir. $(-1)^{i+j}[M_{ij}]$ ifadesine de a_{ij} elemanının kofaktörü denir.*

Örnek 4.26. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$ *matrisi için $[M_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq 3$ minörleri ile a_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$ elemanlarının kofaktörlerini gösteriniz.*

Çözüm

$$[M_{11}] = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \Rightarrow \alpha_{11} = (-1)^{1+1}[M_{11}] = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$
$$[M_{12}] = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} \Rightarrow \alpha_{12} = (-1)^{1+2}[M_{12}] = -a_{21}a_{33} + a_{31}a_{23}$$
$$[M_{13}] = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \Rightarrow \alpha_{13} = (-1)^{1+3}[M_{13}] = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$
$$[M_{21}] = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} \Rightarrow \alpha_{21} = (-1)^{2+1}[M_{21}] = -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32}$$
$$[M_{22}] = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \Rightarrow \alpha_{22} = (-1)^{2+2}[M_{22}] = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$$
$$[M_{23}] = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} \Rightarrow \alpha_{23} = (-1)^{2+3}[M_{23}] = -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}$$
$$[M_{31}] = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \Rightarrow \alpha_{31} = (-1)^{3+1}[M_{31}] = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$$
$$[M_{32}] = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} \Rightarrow \alpha_{32} = (-1)^{3+2}[M_{32}] = -a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13}$$
$$[M_{33}] = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \Rightarrow \alpha_{33} = (-1)^{3+3}[M_{33}] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

□

Tanım 4.27. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times n}$ *, n kare matrisi için determinantı kofaktörler yadımı ile aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}[M_{1j}]$$

Örnek 4.28. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *matrisi için* $[M_{ij}]$, $1 \le i,j \le 4$ *minörleri ile* a_{ij}, $1 \le i,j \le 4$ *elemanlarının kofaktörlerini bulunuz ve determinantı kofaktörler yardımı ile hesaplayınız.*

Çözüm

$$[M_{11}] = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \alpha_{11} = (-1)^{1+1}[M_{11}] = 3$$

$$[M_{12}] = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -12 \Rightarrow \alpha_{12} = (-1)^{1+2}[M_{12}] = 12$$

$$[M_{13}] = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \alpha_{13} = (-1)^{1+3}[M_{13}] = 2$$

$$[M_{14}] = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -9 \Rightarrow \alpha_{14} = (-1)^{1+4}[M_{14}] = 9$$

$$[M_{21}] = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 \Rightarrow \alpha_{21} = (-1)^{2+1}[M_{21}] = 3$$

$$[M_{22}] = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -12 \Rightarrow \alpha_{22} = (-1)^{2+2}[M_{22}] = -12$$

$$[M_{23}] = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow \alpha_{23} = (-1)^{2+3}[M_{23}] = 2$$

$$[M_{24}] = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 9 \Rightarrow \alpha_{24} = (-1)^{2+4}[M_{24}] = 9$$

$$[M_{31}] = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_{31} = (-1)^{3+1}[M_{31}] = 0$$

$$[M_{32}] = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_{32} = (-1)^{3+2}[M_{32}] = 0$$

$$[M_{33}] = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_{33} = (-1)^{3+3}[M_{33}] = 0$$

$$[M_{34}] = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_{34} = (-1)^{3+4}[M_{34}] = 0$$

$$[M_{41}] = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = -12 \Rightarrow \alpha_{31} = (-1)^{4+1}[M_{41}] = 12$$

$$[M_{42}] = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 15 \Rightarrow \alpha_{42} = (-1)^{4+2}[M_{42}] = 15$$

$$[M_{43}] = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 14 \Rightarrow \alpha_{43} = (-1)^{4+3}[M_{43}] = 14$$

$$[M_{44}] = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \alpha_{44} = (-1)^{4+4}[M_{44}] = 3$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 * [M_{11}] - [M_{12}] + 0 * [M_{13}] - 3 * [M_{14}] \\ &= 2 * 3 - 12 + 0 * 2 - 3 * 9 = -33 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

□

4.2 Lineer Denklem Sistmelerinin Çözümleri için Direkt Yöntemler (Direct Methods for Linear Systems of Equations)

4.2.1 Üçgensel Sistemler(Triangular Systems)

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & & & & & & & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & & & & & & & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & & & & & & & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 & + & a_{n-1,2}x_2 & + & a_{n-1,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & & & = & b_{n-1} \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n-1}x_{n-1} & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{4.1}$$

lineer denklem siteminin çözümü için

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}} \\ x_3 &= \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \\ & \dots \\ x_n &= \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{aligned}$$

ileri eleme yöntemi ile çözülür.

TEOREM 4.29. *(İleri eleme yöntemi)(4.1) lineer denklem sistemi için $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1,2,...,n$ koşulu sağlanıyorsa sistemin bir tek çözümü vardır ve çözümü*

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, i = 1,2,...,n \tag{4.2}$$

formülü ile verilir.

PROOF. (4.1) lineer denklem sistemini aşağıdaki matris denklemi olarak da yazabiliriz:

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \dots & a_{m-1,n-1} & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$a_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1,2,...,n$ koşulundan $\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn} \neq 0$ dır ki Teorem 4.22'den sistemin bir tek çözümü vardır. □

ALGORITMA 4.30.

Adım 1: *$A = (a_{ij})_{n\times n}$, $1 \leq i,j \leq n$ matrisinin elemanlarını giriniz.*
Adım 2: *$i = 1$ olarak seçiniz*
Adım 3: *$T = 0$ olarak seçiniz*
Adım 4: *Eğer $i = 1$ ise $x_i = b_i/a_{ii}$ olarak hesaplayıp i yi 1 arttırınız. $(i = i + 1)$ ve Adım 3 e gidiniz*
Adım 5: *$j = 1$ olarak seçiniz*

Adım 6: $T = T + a_{ij}x_j$
Adım 7: *Eğer $j < i - 1$ ise j yi 1 arttırınız. $(j = j + 1)$ ve Adım 6 ya gidiniz.*
Adım 8: $x_i = (b_i - T)/a_{ii}$ *olarak hesaplayınız*
Adım 9: *Eğer $i < n$ ise i yi 1 arttırınız. $(i = i + 1)$ ve Adım 3 e gidiniz.*

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1,n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2,n-1}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n-1}x_{n-1} & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{4.3}$$

lineer denklem siteminin çözümü için

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\ &\cdots \\ x_3 &= \frac{b_3 - a_{34}x_4 - \cdots - a_{3,n-1}x_{n-1} - a_{3n}x_n}{a_{33}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n}{a_{11}} \end{aligned}$$

geri eleme yöntemi ile çözülür.

TEOREM 4.31. *(Geri eleme yöntemi)(4.3) lineer denklem sistemi için $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n$ koşulu sağlanıyorsa sistemin bir tek çözümü vardır ve çözümü*

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, i = n, n-1, n-2, ..., 3, 2, 1 \tag{4.4}$$

formülü ile verilir.

PROOF. (4.1) lineer denklem sistemini aşağıdaki matris denklemi olarak da yazabiliriz:

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$a_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n$ koşulundan $\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn} \neq 0$ dır ki Teorem 4.22'den sistemin bir tek çözümü vardır. □

ALGORITMA 4.32.

Adım 1: $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $1 \leq i, j \leq n$ *matrisinin elemanlarını giriniz.*
Adım 2: $i = n$ *olarak seçiniz*
Adım 3: $T = 0$ *olarak seçiniz*
Adım 4: *Eğer $i = n$ ise $x_i = b_i/a_{ii}$ olarak hesaplayıp i yi 1 azaltınız. $(i = i - 1)$ ve Adım 3 e gidiniz*
Adım 5: $j = i + 1$ *olarak seçiniz*

Adım 6: $T = T + a_{ij}x_j$
Adım 7: *Eğer* $j < n$ *ise* j *yi* 1 *arttırınız.* $(j = j + 1)$ *ve Adım 6 ya gidiniz.*
Adım 8: $x_i = (b_i - T)/a_{ii}$ *olarak hesaplayınız*
Adım 9: *Eğer* $i < 0$ *ise* i *yi* 1 *azaltınız.* $(i = i - 1)$ *ve Adım 3 e gidiniz.*

ÖRNEK 4.33. *Aşağıdaki sistemlerin çözümlerini bulunuz.*

(i)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & & & & & & & = & 6 \\ -x_1 & + & 4x_2 & & & & & = & 5 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 4 \\ & & -x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 3 \\ & & & & & & -2x_4 & - & x_5 & = & 10 \\ & & & & & & & & 3x_5 & = & 6 \end{array}$$

Çözüm (i)

$$2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$$
$$-x_1 + 4x_2 = 5 \Rightarrow -3 + 4x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 2$$
$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = -1$$

(ii)

$$3_5 = 6 \Rightarrow x_5 = 2$$
$$-2x_4 - x_5 = 10 \Rightarrow x_4 = -6$$
$$x_3 - x_4 - 2x_5 = 3 \Rightarrow x_3 = 1$$
$$-x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = 8$$
$$4x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \Rightarrow x_1 = 6$$

□

4.2.2 Cramer Kuralı(Cramer's Rule)

$$Ax = b,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matris denklemini çözmek için Cramer kuralını aşağıdaki şekilde veririz:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, i = 1, 2, ..., n$$

Burda A_i matrisi, A matrisinin i. sütununun b vektörü ile yerdeğiştirmesi ile elde edilen matristir.

ÖRNEK 4.34.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 16 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -3 \end{aligned}$$

, Solution is: $[x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3]$ *denklem sisteminin çözümünü Cramer kuralı ile bulunuz.*

Çözüm

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -6$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = -6$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = -12$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 16 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = -18$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 2, x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 3$$

□

4.2.3 Gauss Eliminasyonu ve Merkezi Nokta(Gauss Elimination and Pivoting)

TEOREM 4.35. *(Temel dönüşümler-Elementary transformation) Bir lineer denklem sistemine aşağıdaki işlemler uygulandığında elde edilen sistem bu sisteme denktir*
(i) Değiştirme (Interchanges): İki denklemin yerini değiştirme. Örneğin

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sistemi ile

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_i \\ \vdots \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_i \\ \vdots \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sistemi denktir.
(ii) Ölçeklendirme (Scaling): Bir denklemi sıfırdan farklı bir sabit ile çarpma. Örneğin

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sistemi ile $k \neq 0$ için

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{ij} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ kb_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sistemi denktir
(iii) Yer değiştirme (Replacement): Bir denklem, kendisinin sıfırdan bir sayı ile çarpılıp başka bir denklem ile toplanması ile yer değiştirilebilir. Örneğin

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sistemi ile $k \neq 0$ için

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{21} & ka_{i2}+a_{22} & \dots & ka_{ij}+a_{2j} & \dots & ka_{in}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ kb_i+b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sistemi denktir.

Tanım 4.36. *(Genişletilmiş matris-augmented matrix)*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,i} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sisteminde

$$\left[\, A \mid b \,\right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

matrisine genişletilmiş matris (augmented matrix) denir.

Örnek 4.37.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 28 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

denklem sistemi için genişletilmiş matris

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

olarak verilir.

Tanım 4.38. *(Merkezi nokta- pivot)*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,i} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sisteminde $a_{ji}, j = i+1, ..., n$ elemanlarını elemek için kullanılan a_{ii} elemanına merkezi nokta (pivot) denir.

Teorem 4.39. *(Temel satır işlemleri-Elementary Row operation) Bir lineer denklem sistemine aşağıdaki işlemler uygulandığında elde edilen sistem bu sisteme denktir*
(i) Değiştirme (Interchanges): İki satırın yerini değiştirme. Örneğin bir sitemdeki eleme işlemlerinde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi ile

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi denktir.
(ii) Ölçeklendirme (Scaling): Bir satırı sıfırdan farklı bir sabit ile çarpma. Örneğin bir sitemdeki eleme işlemlerinde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi ile $k \neq 0$ *için*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{ij} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi denktir
(iii) Yer değiştirme (Replacement): Bir satırın, kendisinin sıfırdan bir sayı ile çarpılıp başka bir satır ile toplanması ile yer değiştirilebilir. Örneğin bir sitemdeki eleme işlemlerinde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi ile $k \neq 0$ *için*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{21} & ka_{i2}+a_{22} & \dots & ka_{ij}+a_{2j} & \dots & ka_{in}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi denktir.

Algoritma 4.40.

$$\begin{array}{l} R_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ R_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ R_i : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \\ ... \\ R_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

sisteminde 2.*satırdaki* a_{21} *elemanının yok etmek için* 2.*satırı* $\frac{a_{11}}{a_{21}}$ *ile çarpıp 1.satırdan çıkardığımızda ki bu işlemi* $R_2 \to R_1 - \frac{a_{11}}{a_{21}} R_2$ *ile ifade edilir. Benzer şekilde* $3., 4., ..., n.$ *satırdaki* $a_{31}, a_{41}, ..., a_{n1}$ *elemanının yok etmek için* $3., 4., ..., n.$.*satırları* $\frac{a_{11}}{a_{31}}, \frac{a_{11}}{a_{41}}, ..., \frac{a_{11}}{a_{n1}}$ *ile çarpıp 1.satırdan çıkardığımızda elde ettiğimiz sistem*

$$\begin{array}{c} R_2 \to R_1 - \frac{a_{11}}{a_{21}} R_2 \\ \vdots \\ R_i \to R_1 - \frac{a_{11}}{a_{i1}} R_i \\ \vdots \\ R_n \to R_1 - \frac{a_{11}}{a_{n1}} R_n \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} A^{(1)} & b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2j}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2}^{(1)} & \dots & a_{ij}^{(1)} & \dots & a_{in}^{(1)} & b_i^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nj}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

olarak ede ederiz. Burada $a_{22}^{(1)}$ *pivot elemandır. Benzer şekilde* $3., 4., ..., n.$ *satırdaki* $a_{32}^{(1)}, a_{42}^{(1)}, ..., a_{n2}^{(1)}$ *elemanının yok etmek için* $3., 4., ..., n..$*satırları* $\frac{a_{22}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}, \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{42}^{(1)}}, ..., \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{n2}^{(1)}}$ *ile çarpıp 2.satırdan çıkardığımızda elde ettiğimiz sistem*

$$\begin{array}{l} R_3 \to R_2 - \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} R_3 \\ \vdots \\ R_i \to R_2 - \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{i2}^{(1)}} R_i \\ \vdots \\ R_n \to R_2 - \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{n2}^{(1)}} R_n \end{array} \Rightarrow \left[\ A^{(2)} \mid b\ \right] = \left[\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2j}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & & b_2^{(1)} \\ & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3j}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & a_{ij}^{(2)} & \dots & a_{in}^{(2)} & & b_i^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & a_{nj}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

bu şekilde işlemlere devam ettiğimizde sistemi aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\left[\ A^{(n-1)} \mid b\ \right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1}^{(n-2)} & a_{n-1n}^{(n-2)} & b_{n-1}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

veya

$$\begin{array}{l} R_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ R_2 : 0x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ ... \\ R_n : 0x_1 + 0x_2 + ... + a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array}$$

olarak elde ederiz. Buna göre teorem 4.31'de (4.4) *geri eleme denklemi ile yukarıdaki sistemi çözeriz.*

Adım 1: $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $1 \leq i, j \leq n$ *verilerini giriniz.*
Adım 2: $i = 1$ *seçiniz.*
Adım 3: $a_{pi} \neq 0, \forall i \leq p \leq n$ *sayısını belirleyiniz eğer böyle bir sayı yoksa çözüm yoktur ve işlemleri durdurunuz.*
Adım 4: $j = i + 1$ *olarak belirleyiniz.*
Adım 5: $k = i$ *olarak belirleyiniz*
Adım 6: $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$ *sayısını belirleyiniz.*
Adım 7: $a_{jk} = a_{jk} - m_{ji}a_{ik}$ *işlemini uygulayınız ve* k *yı bir arttırınız* $(k = k + 1)$
Adım 8: *Eğer* $k \leq n$ *ise Adım 7'ye gidiniz.*
Adım 9: j *yi 1 arttırınız* $(j = j + 1)$
Adım 10: *Eğer* $j \leq n$ *ise Adım 5'e gidiniz.*
Adım 11: i *yi 1 arttırınız* $(i = i + 1)$
Adım 13: *Eğer* $a_{nn} = 0$ *ise çözüm yoktur ve işlemleri durdurunuz.*

Not. *(İşlem kompleksliği - Computational complexity)Yukarıdaki algoritmadaki herbir* $R_i \to R_j - \frac{a_{11}}{a_{i1}} R_i$ *işlemlerinin herbirinde* $(n - i + 1), i = 1, 2, 3, ..., n - 1$ *adet çarpma ve bölme işlemi içermektedir ve işlemlerin de toplamı* $(n - i)$ *adettir. Buna göre toplamda* $(n - i)(n - i + 1)$ *adet çarpma ve bölme işlemi gerçekleşir. Ve* $(n - i)$ *adette toplam işlemi gerçekleşmektedir. Buna göre işlem sayısı*

$$(n - i) + (n - i)(n - i + 1) = (n - i)(n - i + 2)$$

Buna göre toplam çarpım-bölme işlem adeti

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n - i)(n - i + 2) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$

Benzer şekilde satırarın birbirinden çıkarılması içinde $(n-i)(n-i+1)$ *adet işlem gerçekleşir ki toplamda çıkarma işlemlerinin Gauss eliminasyonundaki işlem adeti*

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1)=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$$

kadardır. Geri eleme iterasyonunda ise $(n-i)$ *adet çarpım* $(n-i-1)$ *adet toplama işlemi gerçekleşir, buna göre*

$$\begin{aligned}1+\sum_{i=1}^{n-1}((n-i)+1) &= \frac{1}{2}n(n+3)-n\\ \sum_{i=1}^{n-1}((n-i-1)+1) &= \frac{1}{2}n(n+1)-n\end{aligned}$$

O halde toplam çarpma-bölme işlemi

$$\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n+\frac{1}{2}n(n+3)-n=\frac{1}{3}n\left(n^2+3n-1\right)$$

ve toplama-çıkarma işlemi ise

$$\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n+\frac{1}{2}n(n+1)-n=\frac{1}{6}n\left(2n^2+3n-5\right)$$

adettir. Buna göre aşağıdki tabloda n nin durumlarına göre çarpma/bölme ve toplama/çıkarma işlemlerinin işlem sayısını görebiliriz. Buna göre bilinmeyen sayısı arttıkça hesaplamaların sayısı hızlı bir artış göstermektedir.

n	*çarpma/bölme*	*toplama/çıkarma*
3	17	11
10	430	375
20	3060	2850
30	9890	9425
50	44 150	42 875
100	343 300	338 250

Örnek 4.41.

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3+4x_4&=13\\2x_1+0x_2+4x_3+3x_4&=28\\4x_1+2x_2+2x_3+x_4&=20\\-3x_1+x_2+3x_3+2x_4&=6\end{aligned}$$

sistemini Gauss eleme yöntemi ile çözünüz.

Çözüm

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1 \\ R_4 \to R_4 + 3R_1}}{=} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & -15 & -32 \\ 0 & 7 & 6 & 14 & 45 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R_3 \to 2R_3 - 3R_2 \\ R_4 \to 4R_4 + 7R_2}}{=} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -15 & -70 \\ 0 & 0 & 38 & 21 & 194 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_4 \to 5R_4 + 19R_3}{=} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -15 & -70 \\ 0 & 0 & 0 & -180 & -360 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow 180x_4 = -360 \Rightarrow x_4 = 2$$

$$-10x_3 - 15x_4 = -70 \Rightarrow x_3 = 4$$

$$-4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13 \Rightarrow x_1 = 3$$

□

Örnek 4.42.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 0x_4 &= 12 \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 8 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 8 \end{aligned}$$

sistemini Gauss eleme yöntemi ile çözünüz.

Çözüm

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -4 & 0 & 12 \\ 1 & 5 & -5 & -3 & 18 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & -2 & 2 & 8 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 \to 2R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to 2R_4 - R_1}}{=} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 24 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R_3 \to 6R_3 + R_2 \\ R_4 \to 3R_4 - 2R_2}}{=} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 24 & -36 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_4 \to 2R_4 - R_3}{=} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & -72 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow 36x_4 = -72 \Rightarrow x_4 = -2$$

$$24x_3 + 12x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$6x_2 - 6x_3 - 6x_4 = 24 \Rightarrow x_2 = 3$$

$$2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 0x_4 = 12 \Rightarrow x_1 = 2$$

□

Not. *i. satırdaki a_{ii} pivot elemanı sıfır veya sıfıra yakın bir değer ise sıfıra bölme işleminden kaçınmak için i.satırı bundan sonra gelen satırlardan merkezi elemanı sıfırdan farklı olacak şekildeki satır alınır.*

Örnek 4.43.

$$\begin{aligned} 0.003x + 59.14y = 59.17 \\ 5.291x - 6.13y = 46.78 \end{aligned}$$

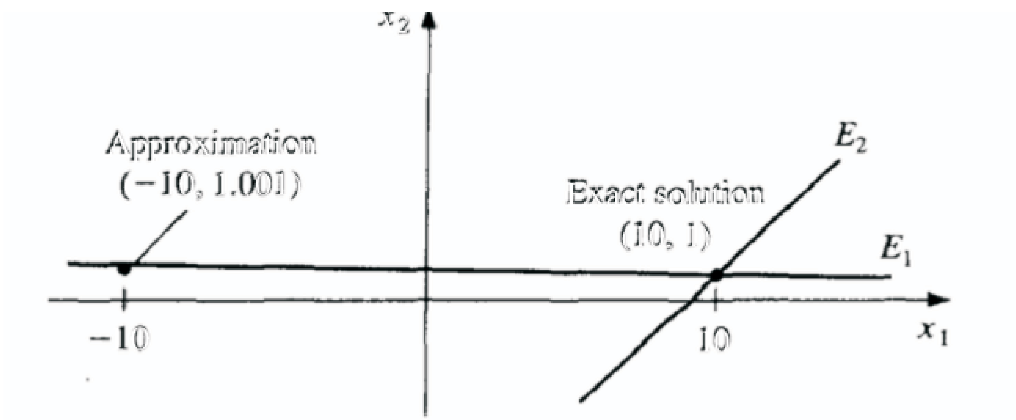
lineer denkleminin çözümü $x = 10.0, y = 1.0$ *olarak elde edilir. Sistemi Gauss eliminasyonu ile çözdüğümüzde 1. satırı* $\frac{5.291}{0.003} = 1763.\overline{66}$ *ile çarpıp 2. satırdan çıkarırsak:*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right] \underset{R_2 \to R_2 - 1763.66 R_1}{=} \left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ & -104300 & -104400 \end{array}\right]$$

$$-104300y = -104400 \Rightarrow y = 1.001$$

$$\Rightarrow 0.003x + 59.14y = 59.17 \Rightarrow x = -9.713$$

elde ederiz ki gerçek çözümden oldukça farklıdır.



4.2.4 LU Çarpanlarına Ayırma Yöntemi (LU Factorization Method)

Tanım 4.44. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *matrisi*

$$\begin{aligned} A &= LU \\ L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \dots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \\ U &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-1n-1} & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak yazılabiliyorsa A matrisinin LU çarpanı mevcuttur denir. Burada L alt üçgensel matris (lower triangular matrix) ve U ise üst üçgensel matristir (upper triangular matrix).

Algoritma 4.45.

Adım 1: *Verilen* $A = (a_{ij})_{n\times n}, 1 \le i, j \le n$ *matrisi için*

$$l_{ii} = 1, i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.5}$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\right), i = 2, \ldots, n, j = 1, \ldots, i-1 \tag{4.6}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}, i = 1, 2, ..., n, j = i, ..., n \tag{4.7}$$

formülleri ile L alt üçgensel ve U üst üçgensel matrislerini hesaplayınız.

Adım 2:

$$Ly = b$$

denkleminde Teorem 4.29'deki (4.2) ileri eleme formülünü kullanarak y çözümünü elde ediniz.

Adım 3: *Adım 2 de bulunan y yi kullanarak*

$$Ux = y$$

denkleminde Teorem 4.31'deki (4.4) ileri eleme formülünü kullanarak x çözümünü elde ediniz.

Teorem 4.46. *$Ax = b$ lineer denklemler sistemi Gauss eliminasyomu yardımı ile çözülebiliyorsa A matrisi $A = LU$ şeklinde çarpanlarına ayrılır. Dahası L alt üçgensel matrisinin köşegen elemanları 1 ve U üst köşegen elemanlarının köşegenleri sıfırdan farklıdır. Buna göre $Ax = b$ denklemi yerine $LUx = b$ denklemi 2 adım ile ele alınır. Öncelikle $Ux = y$ denilerek $Ly = b$ denklemi çözülür sonrasında ise bulunan y değeri ile $Ux = y$ denklemi çözülür.*

Örnek 4.47.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisini LU çarpanlarına ayırınız.

Çözüm

$$\overset{(4.5)}{\Rightarrow} l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1 \overset{(4.7)}{\Rightarrow} u_{11} = a_{11} = 2 \overset{(4.6)}{\Rightarrow} l_{21} = \frac{1}{a_{11}}(a_{21}) = \frac{1}{2} \overset{(4.7)}{\Rightarrow} u_{12} = a_{12} = 4$$

$$\overset{(4.7)}{\Rightarrow} u_{13} = a_{13} = -6 \overset{(4.7)}{\Rightarrow} u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 5 - \frac{1}{2} * 4 = 3 \overset{(4.7)}{\Rightarrow} u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 3 - \frac{1}{2} * (-6) = 6$$

$$\overset{(4.6)}{\Rightarrow} l_{31} = \frac{1}{u_{11}}(a_{31}) = \frac{1}{2} \overset{(4.6)}{\Rightarrow} l_{32} = \frac{1}{u_{22}}(a_{32} - l_{31}u_{12}) = \frac{1}{3} * \left(3 - \frac{1}{2} * 4\right) = \frac{1}{3}$$

$$\overset{(4.7)}{\Rightarrow} u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) = 2 - \left(\frac{1}{2} * (-6) + \frac{1}{3} * 6\right) = 3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

Örnek 4.48.

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2 \\ &2x_3 + 5x_4 = 3 \\ &-2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{aligned}$$

sistemini LU çarpanları yöntemi ile çözünüz.

Çözüm Sistemin matris olarak gösterimi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\stackrel{(4.5)}{\Rightarrow} l_{11} = l_{22} = l_{33} = l_{44} = 1 \stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} u_{11} = a_{11} = 1 \stackrel{(4.6)}{\Rightarrow} l_{21} = \frac{1}{a_{11}}(a_{21}) = 2$$

$$\stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} u_{12} = a_{12} = 3 \stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} u_{13} = a_{13} = 5 \stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} u_{14} = a_{14} = 7$$

$$\stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -1 - 2 * 3 = -7 \stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 3 - 2 * 5 = -7$$

$$\stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} u_{24} = a_{24} - l_{21}u_{14} = 5 - 2 * 7 = -9 \stackrel{(4.6)}{\Rightarrow} l_{31} = \frac{1}{u_{11}}(a_{31}) = 0$$

$$\stackrel{(4.6)}{\Rightarrow} l_{32} = \frac{1}{u_{22}}(a_{32} - l_{31}u_{12}) = \frac{1}{(-7)} * (0 - 0 * 3) = 0$$

$$\stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) = -2 - (0 * 5 + 0 * (-7)) = -2$$

$$\stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} u_{34} = a_{34} - (l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24}) = 5 - (0 * 7 + 0 * (-9)) = 5$$

$$\stackrel{(4.6)}{\Rightarrow} l_{41} = \frac{1}{u_{11}}(a_{41}) = -2 \stackrel{(4.6)}{\Rightarrow} l_{42} = \frac{1}{u_{22}}(a_{42} - l_{41}u_{12}) = \frac{1}{(-7)}((-6) - (-2) * 3) = 0$$

$$\stackrel{(4.6)}{\Rightarrow} l_{43} = \frac{1}{u_{33}}(a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}) = \frac{1}{(-2)}(3 - (-2) * 5 - 0 * (-7)) = -6.5$$

$$\stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} u_{44} = a_{44} - (l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34}) = 1 - ((-2) * 7 + 0 * (-9) + (-6.5) * 5) = 47.5$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ -2 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -6.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 47.5 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -6.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 47.5 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -6.5 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 25.5 \end{pmatrix}$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 47.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 25.5 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -0.37143 \\ -0.53233 \\ -0.15789 \\ 0.53684 \end{pmatrix}$$

□

4.2.5 Hata Analizi (Error Analysis)

Tanım 4.49.

$$Ax = b,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

lineer denklem sisteminde b vektörüne verilen küçük değişimler sonucunda x çözümündeki değişimler büyük oluyorsa A matrisine iyi tanımlı olmayan (ill conditioned) matris denir.

Örnek 4.50.

$$Ax = b,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denklem sisteminin çözümü

$$x = \begin{pmatrix} 16 \\ -120 \\ 240 \\ -140 \end{pmatrix}$$

iken

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.02 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

verdiğimizde çözümü

$$x = \begin{pmatrix} 13.6 \\ -96.0 \\ 186.0 \\ -106.4 \end{pmatrix}$$

olarak elde ederiz.

Şimdi ise verilen yöntemler için hata analizini yapalım.

$$Ax = b,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

lineer denklem sisteminin gerçek bir çözümü x ve $\widehat{x}$ ise yaklaşık çözümü olmak üzere

$$\widehat{r} = b - A\widehat{x}$$

ile kalan vektörü tanımlayalım. Buna göre gerçek çözüm x ve yaklaşık çözüm $\widehat{x}$ olmak üzere bunlar arasındaki hatayı aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$\begin{aligned} \|x - \widehat{x}\| &= \left\|A^{-1}b - A^{-1}(b - \widehat{r})\right\| = \left\|A^{-1}\widehat{r}\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\widehat{r}\| \Rightarrow \\ \frac{\|x - \widehat{x}\|}{\|x\|} &\leq \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\widehat{r}\|}{\|x\|} \end{aligned}$$

ayrıca

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

ifadesini yukarıda yerine yazdığımızda

$$\frac{\|x - \widehat{x}\|}{\|x\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \|A\| \frac{\|\widehat{r}\|}{\|b\|} \tag{4.8}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

TANIM 4.51. (4.8) *eşitsizliğindeki* $\kappa(A) = \left\|A^{-1}\right\| \|A\|$ *sayısına A matrisinin durum sayısı (condition number) adı verilir.*

NOT. $\kappa(A)$, *A nın durum sayısının küçük olması durumunda hata oranı küçülür.*

4.3 Lineer Denklem Sistmelerinin Çözümleri için İteratif Yöntemler (Iterative Methods for Linear Systems of Equations)

Küçük boyutlu (Az bilinmeyenli) lineer denklem sistemleri için iteratif yöntemler çok nadir kullanılır. Bu iteratif yöntemlerin yerine Gauss eliminasyonu gibi direk yöntemler tercih edilir. Ancak boyutu büyük olan denklem sistemleri için durum çok farklıdır. Gauss eliminasyonu hem çok veri depolaması hemde çok işlem yapması yönünden tercih edilmez. Bu tür sistemler özellikle de devre analizinde (circuit analysis), sınır değer problemlerinin (baoundary value problem) ve kısmi diferansiyel denklemlerin (partial differential equations) sayısal çözümlerinde kaşımıza gelmektedir. Bu türlü yöntemlerin amacı

$$Ax = b$$

lineer denklem sistemlerinin çözümleri için $x^{(0)}$ başlangıç iterasyonu ile başlanıp $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi oluşturulur. Ve bu dizilerin oluşturulmasında denklem sistemi

$$x = Tx + c$$

olarak yazılır.

Örnek 4.52.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\ -x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15 \end{array}$$

sistemini

$$x = Tx + c$$

formunda yazınız.

Çözüm Denklem sistemininin matris gösterimini

$$Ax = b,$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

ile yaparız. Buna göre herbir değişkeni herbir satırda yanlız bırakara yazdığımızda:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{10} - \frac{x_3}{5} + \frac{3}{5} \\ x_2 = \frac{x_1}{11} + \frac{x_3}{11} - \frac{3x_4}{11} + \frac{25}{11} \\ x_3 = -\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{10} + \frac{x_4}{10} - \frac{11}{10} \\ x_4 = -\frac{3x_2}{8} + \frac{x_3}{8} + \frac{15}{8} \end{cases}$$

denklem sistemin elde ederiz ki bu ifadeyi matris olarak gösterdiğimizde

$$x = Tx + c,$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{25}{11} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix}$$

olarak da yazarız. □

4.3.1 Richard Yöntemi (Richard's Method)

Tanım 4.53.

$$Ax = b$$

lineer denklem sitemlerinde $A = I - (I - A)$ *olarak yazılarak*

$$(I - (I - A))\, x = b \Rightarrow x = (I - A)\, x + b \Rightarrow x^{(k+1)} = (I - A)\, x^{(k)} + b, k = 0, 1, 2, ...$$

iterasyonuna Richard Yöntemi denir. Buna göre

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

lineer denklem sisteminin Jacobi iterasyonu ile çözümünü, verilen $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ *başlangıç noktası için*

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (1-a_{11})\,x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - ... - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1, k = 0,1,2,... \\ x_2^{(k+1)} &= -a_{21}x_1^{(k)} + (1-a_{22})\,x_2^{(k)} - ... - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2, k = 0,1,2,... \\ &... \\ x_n^{(k+1)} &= -a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - ... - (1-a_{nn})\,x_n^{(k)} + b_n, k = 0,1,2,... \end{aligned}$$

iteratif yöntemler ile hesaplanmaktadır.

ALGORITMA 4.54.

Adım 1: *$A = (a_{ij})_{n\times n}, 1 \le i,j \le n$ matrisini, $b = (b_i)$ vektörünü, $K_{\max}$ maksimum iterasyon sayısını, $\varepsilon > 0$ hata payını giriniz.*

Adım 2: *Başlangıç iterasyonu olarak $k = 0$ seçiniz ve $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ başlangıç noktasını veriniz.*

Adım 3: *$i = 1$ olarak seçiniz.*

Adım 4:

$$x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_i^{(k)} + (1-a_{ii})\,x_i^{(k)}$$

sonraki adımı hesaplayınız.

Adım 5: *Eğer $i < n$ ise i yi $+1$ arttırınız $(i = i+1)$ ve Adım 4'de gidiniz.*

Adım 6: *Eğer $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| < \varepsilon$ ise $\mathbf{x}^{(k+1)}$ çözümdür ve işlemleri sonlandırınız.*

Adım 7: *Eğer $k < K_{\max}$ ise k yi $+1$ arttırınız $(k = k+1)$ ve Adım 3'e gidiniz aksi durumda maksimum iterasyon sayısını yeniden belirlemek üzere Adım 1 e gidiniz.*

PROBLEM. *Richard yöntemi ne zaman yakınsaktır?*

TEOREM 4.55. *$\|I - A\| < 1$ koşulu sağlanması durumunda Richard yöntemi yakınsaktır.*

PROOF. Denklem sistemlerini

$$x^{(k+1)} = (I-A)\,x^{(k)} + b = g\left(x^{(k)}\right)$$

olarak yazabildiğimizden Teorem 3.8'den $\|g'(x)\| = \|I - A\| < 1$ koşulu sağlanması durumunda sabit nokta vardır ve çözüm yakınsaktır. Örneğin

$$\|I - A\| = \max_i \left\{ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| + |1 - a_{ii}| \right\}$$

olarak da hesaplanır. □

ÖRNEK 4.56.

$$\begin{cases} 0.8x_1 - 0.1x_2 + 0.1x_3 = 1 \\ 0.7x_2 - 0.2x_3 = -1 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.9x_3 = 2 \end{cases}$$

denklem sistemini başlangıç iterasyonunu $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)\,, \varepsilon = 0.0001$ seçerek Jacobi iterasyonu ile çözünüz.

Çözüm

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.2x_1 + 0.1x_2 - 0.1x_3 + 1 \\ x_2 &= 0.3x_2 + 0.2x_3 - 1 \\ x_3 &= -0.2x_1 - 0.2x_2 + 0.1x_3 + 2 \end{aligned}$$

iterasy	x1	x2	x3	epsilon	dur/de
0	0	0	0	0,0001	
1	1	-1	2	0,0001	devam
2	0,5	-0,9	2,2	0,0001	devam
3	0,59	-0,83	2,3	0,0001	devam
4	0,569	-0,789	2,278	0,0001	devam
5	0,5795	-0,7811	2,2718	0,0001	devam
6	0,57881	-0,77997	2,2675	0,0001	devam
7	0,579491	-0,78049	2,266982	0,0001	devam
8	0,579355	-0,78075	2,266898	0,0001	devam
9	0,579364	-0,78085	2,266969	0,0001	dur
10	0,579346	-0,78086	2,266993	0,0001	dur
11	0,579346	-0,78086	2,267002	0,0001	dur
12	0,579345	-0,78086	2,267003	0,0001	dur
13	0,579345	-0,78086	2,267003	0,0001	dur
14	0,579345	-0,78086	2,267003	0,0001	dur
15	0,579345	-0,78086	2,267003	0,0001	dur
16	0,579345	-0,78086	2,267003	0,0001	dur
17	0,579345	-0,78086	2,267003	0,0001	dur

□

4.3.2 Jacobi İterasyonu(Jacobi Iteration)

Not. *Genel olarak verilen bir* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *matrisini aşağıdaki gibi üçgensel matrislerle ifade edebiliriz. Burada L köşegen elemanları sıfır olan alt üçgensel matris (lower triangular), D*

köşegen matris (diagonal), U ise köşegen elemanları sıfır olan üst üçgensel matristir (upper diagonal):

$$A = L + D + U$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & 0 & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ÖRNEK 4.57. $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ *matrisini $L + D + U$, şeklinde yazınız.*

Çözüm

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

□

TANIM 4.58.

$$Ax = b$$

lineer denklem sitemlerinde

$$(L + D + U)\,x = b \Rightarrow Dx = b - (L + U)\,x \Rightarrow x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)\,x^{(k)} + D^{-1}b, k = 0, 1, 2, ...$$

iterasyonuna Jacobi iterasyonu denir. Buna göre

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

lineer denklem sisteminin Jacobi iterasyonu ile çözümünü, verilen $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ *başlangıç noktası için*

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + ... + a_{1n}x_n^{(k)}\right)}{a_{11}}, k = 0, 1, 2, ... \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} ... + a_{2n}x_n^{(k)}\right)}{a_{22}}, k = 0, 1, 2, ... \\
&... \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + ... + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)}{a_{nn}}, k = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}
$$

iteratif yöntemler ile hesaplanmaktadır.

Algoritma 4.59.

Adım 1: $A = (a_{ij})_{n \times n}, 1 \leq i, j \leq n$ *matrisini,* $b = (b_i)$ *vektörünü,* $K_{\max}$ *maksimum iterasyon sayısını,* $\varepsilon > 0$ *hata payını giriniz.*

Adım 2: *Başlangıç iterasyonu olarak* $k = 0$ *seçiniz ve* $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ *başlangıç noktasını veriniz.*

Adım 3: $i = 1$ *olarak seçiniz.*

Adım 4:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

sonraki adımı hesaplayınız.

Adım 5: *Eğer* $i < n$ *ise* i *yi* $+1$ *arttırınız* $(i = i + 1)$ *ve Adım 4'de gidiniz.*

Adım 6: *Eğer* $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| < \varepsilon$ *ise* $\mathbf{x}^{(k+1)}$ *çözümdür ve işlemleri sonlandırınız.*

Adım 7: *Eğer* $k < K_{\max}$ *ise* k *yi* $+1$ *arttırınız* $(k = k + 1)$ *ve Adım 3'e gidiniz aksi durumda maksimum iterasyon sayısını yeniden belirlemek üzere Adım 1 e gidiniz.*

Örnek 4.60.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\
-x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\
2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\
 & & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15
\end{array}
$$

denklem sistemini başlangıç iterasyonunu $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0), \varepsilon = 0.001$ *seçerek Jacobi iterasyonu ile çözünüz.*

Çözüm

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{x_2^{(k)}}{10} - \frac{x_3^{(k)}}{5} + \frac{3}{5} \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{x_1^{(k)}}{11} + \frac{x_3^{(k)}}{11} - \frac{3x_4^{(k)}}{11} + \frac{25}{11} \\
x_3^{(k+1)} &= -\frac{x_1^{(k)}}{5} + \frac{x_2^{(k)}}{10} + \frac{x_4^{(k)}}{10} - \frac{11}{10} \\
x_4^{(k+1)} &= -\frac{3x_2^{(k)}}{8} + \frac{x_3^{(k)}}{8} + \frac{15}{8}
\end{aligned}
\right.
$$

iterasyon	x1	x2	x3	x4	epsilon	dur/devam
0	0	0	0	0	0,001	
1	0,6	2,272727	-1,1	1,875	0,001	devam
2	1,102273	1,715909	-0,80523	0,885227	0,001	devam
3	0,972898	2,058306	-1,06034	1,130881	0,001	devam
4	1,070916	1,956356	-0,97566	0,970593	0,001	devam
5	1,039551	2,01668	-1,02149	1,019409	0,001	devam
6	1,05704	1,996349	-1,0043	0,991059	0,001	devam
7	1,05071	2,007233	-1,01267	1,000832	0,001	devam
8	1,05389	2,003232	-1,00934	0,995704	0,001	devam
9	1,052657	2,005222	-1,01088	0,997621	0,001	devam
10	1,053243	2,004446	-1,01025	0,996681	0,001	dur
11	1,053006	2,004814	-1,01054	0,997052	0,001	dur
12	1,053115	2,004665	-1,01041	0,996878	0,001	dur

$\square$

Örnek 4.61.

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15 \end{aligned}$$

denklem sistemini başlangıç iterasyonunu $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)\,, \varepsilon = 0.0001$ *seçerek Jacobi iterasyonu ile çözünüz.*

Çözüm

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{y^{(k)} - z^{(k)} + 7}{4} \\ y^{(k+1)} &= \frac{4x^{(k)} + z^{(k)} + 21}{8} \\ z^{(k+1)} &= \frac{2x^{(k)} - y^{(k)} + 15}{5} \end{aligned}$$

iterasyon	x	y	z	epsilon	dur/dev
0	0	0	0	0,0001	
1	1,75	2,625	3	0,0001	devam
2	1,65625	3,875	3,175	0,0001	devam
3	1,925	3,85	2,8875	0,0001	devam
4	1,990625	3,948438	3	0,0001	devam
5	1,987109	3,995313	3,006563	0,0001	devam
6	1,997188	3,994375	2,995781	0,0001	devam
7	1,999648	3,998066	3	0,0001	devam
8	1,999517	3,999824	3,000246	0,0001	devam
9	1,999895	3,999789	2,999842	0,0001	devam
10	1,999987	3,999927	3	0,0001	devam
11	1,999982	3,999993	3,000009	0,0001	dur
12	1,999996	3,999992	2,999994	0,0001	dur
13	2	3,999997	3	0,0001	dur
14	1,999999	4	3	0,0001	dur
15	2	4	3	0,0001	dur
16	2	4	3	0,0001	dur
17	2	4	3	0,0001	dur

□

PROBLEM. *Jacobi iterasyonu ne zaman yakınsaktır?*

TEOREM 4.62. $\left\|D^{-1}(L+U)\right\| < 1$ *koşulu sağlanması durumunda Jacobi iterasyonu yakınsaktır.*

PROOF. Denklem sistemlerini

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\,x^{(k)} + D^{-1}b = g\left(x^{(k)}\right)$$

olarak yazabildiğimizden Teorem 3.8'den $\|g'(x)\| = \left\|-D^{-1}(L+U)\right\| < 1$ koşulu sağlanması durumunda sabit nokta vardır ve çözüm yakınsaktır. Örneğin

$$\left\|-D^{-1}(L+U)\right\| = \max_i \left\{ \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right\}$$

olarak da hesaplanır. Buna göre $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ koşulu sağlanırsa Jacobi yöntemi yakınsaktır deriz. □

ÖRNEK 4.63.

$$\begin{aligned} -2x + y + 5z &= 15 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ 4x - y + z &= 7 \end{aligned}$$

denklem sistemi için $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)\,, \varepsilon = 0.0001$ *seçerek Jacobi iterasyonu ile çözümünün yakınsamadığını gösteriniz. Neden yakınsamadığı konusunda yorum yapınız.*

Çözüm

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{y^{(k)} + 5z^{(k)} - 15}{2} \\ y^{(k+1)} &= \frac{4x^{(k)} + z^{(k)} + 21}{8} \\ z^{(k+1)} &= -4x^{(k)} + y^{(k)} + 7 \end{aligned}$$

iterasyon	x	y	z	epsilon	dur/devam
0	0	0	0	0,0001	
1	-7,5	2,625	7	0,0001	devam
2	11,3125	-0,25	39,625	0,0001	devam
3	91,4375	13,23438	-38,5	0,0001	devam
4	-97,1328	43,53125	-345,516	0,0001	devam
5	-849,523	-89,1309	439,0625	0,0001	devam
6	1045,591	-367,254	3315,963	0,0001	devam
7	8098,78	939,9158	-4542,62	0,0001	devam
8	-10894,1	3484,188	-31448,2	0,0001	devam
9	-76885,9	-9375,44	47067,53	0,0001	devam
10	112973,6	-32556,9	298175,2	0,0001	devam
11	729152,1	93761,33	-484444	0,0001	devam
12	-1164238	304023,2	-2822840	0,0001	devam
13	-6905096	-934971	4960980	0,0001	devam
14	11934958	-2832423	26685422	0,0001	devam
15	65297335	9303159	-5,1E+07	0,0001	devam
16	-1,2E+08	26327139	-2,5E+08	0,0001	devam
17	-6,2E+08	-9,2E+07	5,13E+08	0,0001	devam
18	-1,4E+08	-2,4E+08	2,37E+09	0,0001	devam
19	-6,2E+08	2,28E+08	3,06E+08	0,0001	devam
20	-5,4E+07	-2,7E+08	2,7E+09	0,0001	devam
21	-7E+08	3,11E+08	-5,6E+07	0,0001	devam
22	44933568	-3,6E+08	3,12E+09	0,0001	devam
23	-8,2E+08	4,12E+08	-5,4E+08	0,0001	devam
24	1,76E+08	-4,7E+08	3,67E+09	0,0001	devam
25	-9,7E+08	5,47E+08	-1,2E+09	0,0001	devam
26	3,49E+08	-6,3E+08	4,41E+09	0,0001	devam

$$\left\| D^{-1}(L+U) \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1/2 & 5/2 \\ 4/8 & 0 & 1/8 \\ -4 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| = 4.154 > 1$$

olduğundan Jacobi yöntemi herhangi bir başlangıç iterasyonu için yakınsak değildir. □

4.3.3 Gauss-Seidel İterasyonu(Gauss-Seidel Iteration)

Tanım 4.64.

$$Ax = b$$

lineer denklem sitemlerinde

$$(L + D + U)\,x = b \Rightarrow Dx = b - (L + U)\,x \Rightarrow x^{(k+1)} = D^{-1}\left(b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)}\right), k = 0, 1, 2, ...$$

iterasyonuna Gauss-Seidel iterasyonu denir. Buna göre

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2\\
&...\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin Gauss-Seidel iterasyonu ile çözümünü, verilen $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ *başlangıç noktası için*

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + ... + a_{1n}x_n^{(k)}\right)}{a_{11}}, k = 0, 1, 2, ...\\
x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} ... + a_{2n}x_n^{(k)}\right)}{a_{22}}, k = 0, 1, 2, ...\\
&...\\
x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + ... + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)}{a_{nn}}, k = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}$$

iteratif yöntemler ile hesaplanmaktadır.

ALGORITMA 4.65.

Adım 1: $A = (a_{ij})_{n\times n}\,, 1 \leq i, j \leq n$ *matrisini,* $b = (b_i)$ *vektörünü,* $K_{\max}$ *maksimum iterasyon sayısını,* $\varepsilon > 0$ *hata payını giriniz.*

Adım 2: *Başlangıç iterasyonu olarak* $k = 0$ *seçiniz ve* $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ *başlangıç noktasını veriniz.*

Adım 3: $i = 1$ *olarak seçiniz.*

Adım 4:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1\\ i<j}}^{n} a_{ij}x_i^{(k)} - \sum_{\substack{j=1\\ i>j}}^{n} a_{ij}x_i^{(k+1)}}{a_{ii}}$$

sonraki adımı hesaplayınız.

Adım 5: *Eğer* $i < n$ *ise* i *yi* $+1$ *arttırınız* $(i = i + 1)$ *ve Adım 4'de gidiniz.*

Adım 6: *Eğer* $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| < \varepsilon$ *ise* $\mathbf{x}^{(k+1)}$ *çözümdür ve işlemleri sonlandırınız.*

Adım 7: *Eğer* $k < K_{\max}$ *ise* k *yi* $+1$ *arttırınız* $(k = k + 1)$ *ve Adım 3'e gidiniz aksi durumda maksimum iterasyon sayısını yeniden belirlemek üzere Adım 1 e gidiniz.*

ÖRNEK 4.66.

$$\begin{aligned}
4x - y + z &= 7\\
4x - 8y + z &= -21\\
-2x + y + 5z &= 15
\end{aligned}$$

denklem sistemini başlangıç iterasyonunu $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)\,, \varepsilon = 0.0001$ *seçerek Gauss-Seidel iterasyonu ile çözünüz.*

Çözüm Gauss-Seidel iterasyonu ile denklem sistemini

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)}\\ y^{(k+1)}\\ z^{(k+1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0\\ 0 & -1/8 & 0\\ 0 & 0 & 1/5\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 7\\ -21\\ 15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(k+1)}\\ y^{(k+1)}\\ z^{(k+1)}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(k)}\\ y^{(k)}\\ z^{(k)}\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= \frac{y^{(k)} - z^{(k)} + 7}{4} \\
y^{(k+1)} &= \frac{4x^{(k+1)} + z^{(k)} + 21}{8} \\
z^{(k+1)} &= \frac{2x^{(k+1)} - y^{(k+1)} + 15}{5}
\end{aligned}$$

iterasyon	x1	x2	x3	epsilon	dur/de
0	0	0	0	0,00001	
1	1,75	3,5	3	0,00001	Devam
2	1,875	3,9375	2,9625	0,00001	Devam
3	1,99375	3,992188	2,999063	0,00001	Devam
4	1,998281	3,999023	2,999508	0,00001	Devam
5	1,999879	3,999878	2,999976	0,00001	Devam
6	1,999975	3,999985	2,999993	0,00001	Devam
7	1,999998	3,999998	3	0,00001	Devam
8	2	4	3	0,00001	Dur
9	2	4	3	0,00001	Dur
10	2	4	3	0,00001	Dur
11	2	4	3	0,00001	Dur
12	2	4	3	0,00001	Dur
13	2	4	3	0,00001	Dur

$\square$

ÖRNEK 4.67.

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 10 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 10 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

denklem sistemini başlangıç iterasyonunu $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0,0,0)\,, \varepsilon = 0.00001$ *seçerek Gauss-Seidel iterasyonu ile çözünüz.*

Çözüm Gauss-Seidel iterasyonu ile denklem sistemini

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \\ x_5^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \\ x_5^{(k+1)} \end{pmatrix} \right)$$

$$- \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \\ x_5^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{5-2x_2^{(k)}+x_3^{(k)}-3x_4^{(k)}-x_5^{(k)}}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{-2-2x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}+x_4^{(k)}-3x_5^{(k)}}{10} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{4+x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}-2x_4^{(k)}+x_5^{(k)}}{10} \\ x_4^{(k+1)} = \frac{-2-3x_1^{(k+1)}+x_2^{(k+1)}-2x_3^{(k+1)}-2x_5^{(k)}}{10} \\ x_5^{(k+1)} = \frac{5-x_1^{(k+1)}-3x_2^{(k+1)}+x_3^{(k+1)}-2x_4^{(k)}}{10} \end{cases}$$

iterasyon	x1	x2	x3	x4	x5	epsilon	dur/devam
0	0	0	0	0	0	0,00001	
1	0,5	-0,3	0,51	-0,38	0,667	0,00001	Devam
2	0,6583	-0,67176	0,742882	-0,66287	0,84256	0,00001	Devam
3	0,823244	-0,83228	0,86561	-0,82193	0,918307	0,00001	Devam
4	0,907766	-0,91236	0,929466	-0,90498	0,956874	0,00001	Devam
5	0,951225	-0,9537	0,962546	-0,94915	0,977072	0,00001	Devam
6	0,974032	-0,97535	0,980011	-0,97276	0,987756	0,00001	Devam
7	0,986124	-0,98683	0,989306	-0,9854	0,993447	0,00001	Devam
8	0,992571	-0,99295	0,994271	-0,99217	0,996488	0,00001	Devam
9	0,996019	-0,99622	0,996929	-0,9958	0,998117	0,00001	Devam
10	0,997865	-0,99797	0,998353	-0,99775	0,99899	0,00001	Devam
11	0,998855	-0,99891	0,999116	-0,99879	0,999458	0,00001	Devam
12	0,999386	-0,99942	0,999526	-0,99935	0,999709	0,00001	Devam
13	0,99967	-0,99969	0,999746	-0,99965	0,999844	0,00001	Devam
14	0,999823	-0,99983	0,999864	-0,99981	0,999916	0,00001	Devam
15	0,999905	-0,99991	0,999927	-0,9999	0,999955	0,00001	Devam
16	0,999949	-0,99995	0,999961	-0,99995	0,999976	0,00001	Devam
17	0,999973	-0,99997	0,999979	-0,99997	0,999987	0,00001	Devam
18	0,999985	-0,99999	0,999989	-0,99998	0,999993	0,00001	Devam
19	0,999992	-0,99999	0,999994	-0,99999	0,999996	0,00001	Dur
20	0,999996	-1	0,999997	-1	0,999998	0,00001	Dur
21	0,999998	-1	0,999998	-1	0,999999	0,00001	Dur
22	0,999999	-1	0,999999	-1	0,999999	0,00001	Dur
23	0,999999	-1	0,999999	-1	1	0,00001	Dur
24	1	-1	1	-1	1	0,00001	Dur
25	1	-1	1	-1	1	0,00001	Dur
26	1	-1	1	-1	1	0,00001	Dur
27	1	-1	1	-1	1	0,00001	Dur
28	1	-1	1	-1	1	0,00001	Dur

FIGURE 4.3. Denklemin grafiği

□

PROBLEM. *Gauss-Seidel iterasyonu ne zaman yakınsaktır?*

TEOREM 4.68. $\left\|(L+D)^{-1}U\right\| < 1$ *koşulu sağlanması durumunda Gauss-Seidel iterasyonu iterasyonu yakınsaktır.*

PROOF. Denklem sistemlerini

$$Dx^{(k+1)} = \left(b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)}\right) \Rightarrow (D+L)\,x^{(k+1)} = \left(b - Ux^{(k)}\right) \Rightarrow x^{(k+1)} = (D+L)^{-1}\left(b - Ux^{(k)}\right) = g\left(x^{(k)}\right)$$

olarak yazabildiğimizden Teorem 3.8'den $\|g'(x)\| = \left\|-(D+L)^{-1}U\right\| < 1$ koşulu sağlanması durumunda sabit nokta vardır ve çözüm yakınsaktır. Örneğin

$$\left\|-D^{-1}(L+U)\right\| = \max_i \left\{ \frac{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right\}$$

olarak da hesaplanır. Buna göre $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ koşulu sağlanırsa Jacobi yöntemi yakınsaktır deriz. □

Chapter 5

İnterpolasyon (Interpolation)

Örneğin bir ülkedeki nüfus 5 yılda bir ölçülür. Nüfus sayımı yılları arasındaki değerleri elde etmek adına interpolasyon yöntemi kullanılır.

5.1 Polinom İnterpolasyonu (Polynomial Interpolation)

Aşağıdaki teorem interpolasyon fonksiyonunun varlığı ve tekliği hakkındadır.

TEOREM 5.1. *(Weierstrass Yaklaşım Teoremi) $f(x), [a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon ise bu aralıkta en az bir $p(x)$ polinomu vardır:*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a,b]$$

TEOREM 5.2.

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_n

verilen değerleri için bir tek

$$p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$$

n. dereceden polinomu vardır ve

$$p_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, ..., n$$

PROOF. Tümevarım yöntemi ile yapıcağız. $n = 0$ olsun. Bu durumda verilen nokta (x_0, y_0) noktası olacağı için $p_0(x) = y_0$ polinomu tek türlüdür. Şimdi n için doğru olsun:

$$p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$$

polinomu tek türlü olsun.

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + c(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

olarak yazalım. Burada

$$c = \frac{y_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1)...(x_{n+1} - x_n)}$$

olarak seçelim. Böylece $p_{n+1}(x)$ polinomu tanımlanmıştır ve $(n+1)$. dereceden bir polinomdur. Dahası

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x_i) &= p_n(x_i), i = 0, 1, 2, ..., n \\ p_{n+1}(x_{n+1}) &= p_n(x_{n+1}) + c(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1)...(x_{n+1} - x_n) \\ &= p_n(x_{n+1}) + (y_{n+1} - p_n(x_{n+1})) = y_{n+1} \end{aligned}$$

Teklik için ise böyle bir polinomun tek olmadığını varsayalım:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n \\ q_n(x) &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_n \end{aligned}$$

polinomları yukarıdaki koşulu sağladığından

$$s_n(x_i) = p_n(x_i) - q_n(x_i) = 0, i = 0, 1, 2, 3, ...$$

bu ise $s_n(x)$ polinomunun $(n+1)$ kökü olması demektir ki $(n+1)$. dereceden bir polinom olduğu sonucunu verir. Halbuki $p_n(x)$ ve $q_n(x)$ fonksiyonları n. dereceden polinom olduklarından bunların farkı olan $s_n(x)$ polinomu da n. dereceden olmalıdır. Bu çelişki, varsayımımızın yanlış olması demektir ki sonuç olarak tek türlü bir polinom vardır. □

5.2 Temel Yaklaşım (Naive Approach)

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$$

polinomu

$$p_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, ..., n$$

koşulunu sağlasın. Buna göre

$$\begin{aligned} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + ...a_{n-1}x_0 + a_n &= y_0 \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + ...a_{n-1}x_1 + a_n &= y_1 \\ &\quad ... \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + ...a_{n-1}x_n + a_n &= y_0 \end{aligned}$$

bu ise

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & ... & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & ... & x_1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & ... & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & ... & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ ... \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ ... \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

sisteminde $a_0, a_1, ..., a_n$ katsayılarını bulmaktır.Burada

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & ... & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & ... & x_1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & ... & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & ... & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

matrisine Vandermonde matrisi denir.Vandermonde matrisi genelde tekil olmayan matristir ancak çoğunlukla condition sayısı büyük olduğundan karaklı bir çözüm vermez.

Örnek 5.3.

$i \rightarrow$	0. $\downarrow$	1. $\downarrow$	2. $\downarrow$	3. $\downarrow$	4. $\downarrow$
x_i	2.3	4.5	6.7	8	10.6
y_i	1.2	4.1	9	12.8	22.5

verilen değerleri için

$$p_4(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

polinomunu oluşturarak $x = 5$ noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{pmatrix} 2.3^4 & 2.3^3 & 2.3^2 & 2.3 & 1 \\ 4.5^4 & 4.5^3 & 4.5^2 & 4.5 & 1 \\ 6.7^4 & 6.7^3 & 6.7^2 & 6.7 & 1 \\ 8^4 & 8^3 & 8^2 & 8 & 1 \\ 10.6^4 & 10.6^3 & 10.6^2 & 10.6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 4.1 \\ 9 \\ 12.8 \\ 22.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2901 \times 10^{-4} \\ -8.4440 \times 10^{-3} \\ 0.27904 \\ -0.33336 \\ 0.58415 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$p_4(x) = 3.2901 \times 10^{-4}x^4 - 8.4440 \times 10^{-3}x^3 + 0.27904x^2 - 0.33336x + 0.58415 \Rightarrow$$

$$p_4(5) = 5.0435$$

□

5.3 Lagrange Polinomları (Lagrange Polynomial)

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_n

verilen değerleri için n. dereceden Lagrange polinomunu aşağıdaki gibi veririz:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x)$$

burada

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)} \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)} \\ &... \\ L_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

fonksiyonlarına temel fonksiyonlar (cardinal function) denir.

Örnek 5.4.

$i \rightarrow$	0. $\downarrow$	1. $\downarrow$	2. $\downarrow$
x_i	0	2	3
y_i	7	11	28

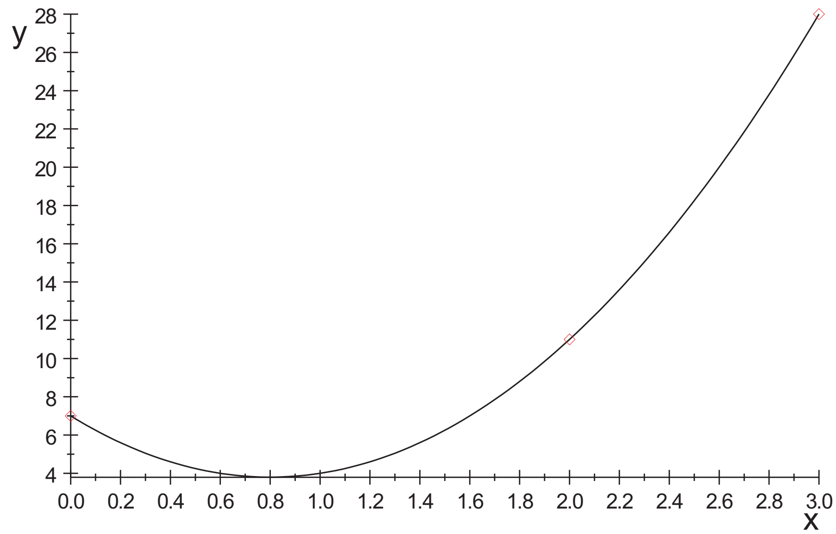
noktaları verildiğine göre Lagrange polinomunu oluşturup $x = 1$ noktasında y değerini hesaplayınız.

Çözüm

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

burada

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{(0-2)(0-3)} \Rightarrow L_0(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 \\ L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-3)}{(2-0)(2-3)} \Rightarrow L_1(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \\ L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-2)}{(3-0)(3-2)} \Rightarrow L_2(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x \\ p_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\ &= 7L_0(x) + 11L_1(x) + 28L_2(x) \\ &= 7\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1\right) + 11\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) + 28\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x\right) \\ &= 5x^2 - 8x + 7 \Rightarrow \\ p_2(1) &= 5 * 1^2 - 8 * 1 + 7 = 4 \end{aligned}$$



□

ÖRNEK 5.5.

$i \rightarrow$	0. $\downarrow$	1. $\downarrow$	2. $\downarrow$	3. $\downarrow$
x_i	0	1	3	5
y_i	1	2	6	7

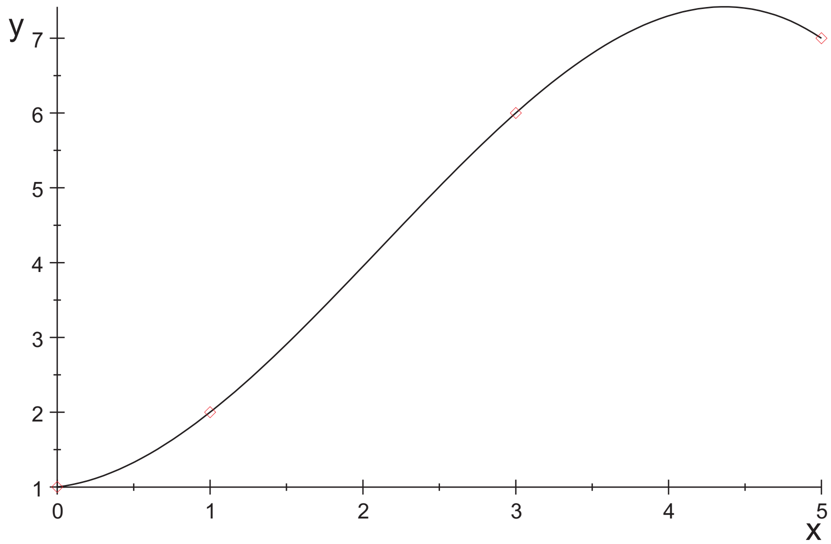
noktaları verildiğine göre Lagrange polinomunu oluşturup $x = 2$ noktasında y değerini hesaplayınız.

Çözüm

$$p_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

burada

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(0-1)(0-3)(0-5)} \Rightarrow L_0(x) = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{23}{15}x + 1 \\
L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(1-0)(1-3)(1-5)} \Rightarrow L_1(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + \frac{15}{8}x \\
L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(3-0)(3-1)(3-5)} \Rightarrow L_2(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{12}x \\
L_3(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(5-0)(5-1)(5-3)} \Rightarrow L_3(x) = \frac{1}{40}x^3 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{40}x \\
p_3(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) \\
&= L_0(x) + 2L_1(x) + 6L_2(x) + 7L_3(x) \\
&= \left(-\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{23}{15}x + 1\right) + 2\left(\frac{1}{8}x^3 - x^2 + \frac{15}{8}x\right) \\
&+6\left(-\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{12}x\right) + 7\left(\frac{1}{40}x^3 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{40}x\right) \\
&= -\frac{17}{120}x^3 + \frac{9}{10}x^2 + \frac{29}{120}x + 1 \Rightarrow \\
p_3(2) &= -\frac{17}{120} * (2)^3 + \frac{9}{10} * (2)^2 + \frac{29}{120} * 2 + 1 \\
&= \frac{79}{20} = 3.95
\end{aligned}$$



□

5.4 Newton Yöntemi (Newton Method)

Lagrange polinomları oldukça basit olmasına rağmen bazen etkili bir logaritma olmadığı görülür. Bunun için Newton tarafından aşağıdaki şekilde bir yaklaşım verilmiştir.

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_n

verilen değerleri için

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1 \\ q_1(x) &= (x-x_0) \\ q_2(x) &= (x-x_0)(x-x_1) \\ q_3(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &\ldots \\ q_n(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

fonksiyonları için n. mertebden polinomu

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} c_i q_i(x) \\ &= c_0 q_0(x) + c_1 q_2(x) + \cdots + c_n q_n(x) \\ &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots \\ &\quad + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

olarak verilir. Burada $c_0, c_1, ..., c_n$ katsayılarını elde etmek için

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= y_0 \Rightarrow c_0 = y_0 \\ p_n(x_1) &= y_1 \Rightarrow c_0 + c_1(x_1-x_0) = y_1 \\ p_n(x_2) &= y_2 \Rightarrow c_0 + c_1(x_2-x_0) + c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = y_2 \\ &\ldots \\ p_n(x_n) &= y_n \Rightarrow c_0 + c_1(x_n-x_0) + \cdots + c_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}) = y_n \end{aligned}$$

ve bunu matris olarak ifade edersek

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & (x_1-x_0) & 0 & ... & 0 \\ 1 & (x_2-x_0) & (x_2-x_0)(x_2-x_1) & ... & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & ... & \cdots \\ 1 & (x_n-x_0) & (x_n-x_0)(x_n-x_1) & ... & (x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

ÖRNEK 5.6.

$i \rightarrow$	0. $\downarrow$	1. $\downarrow$	2. $\downarrow$
x_i	0	2	3
y_i	7	11	28

noktaları verildiğine göre Newton yöntemini kullanarak 2. *dereceden polinomunu oluşturup* $x = 1$ *noktasında* y *değerini hesaplayınız.*

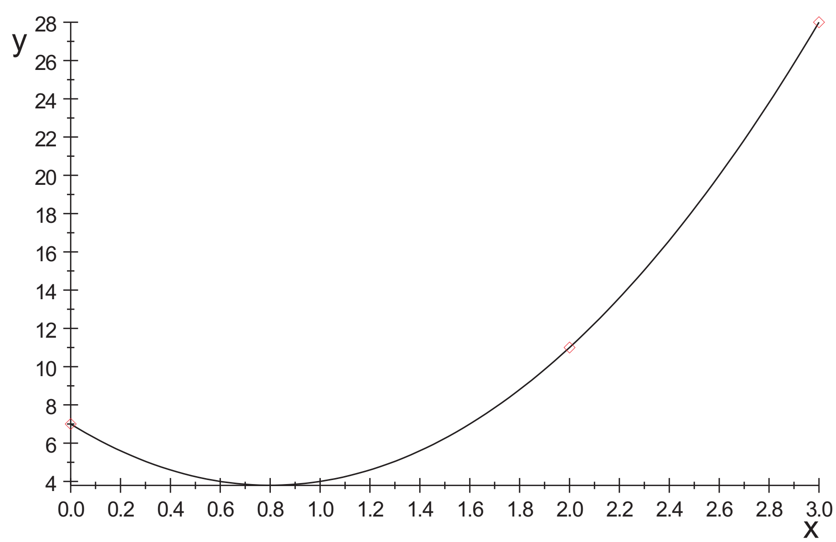
Çözüm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3.1 = 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \Rightarrow$$

$$p_2(x) = 7 + 2x + 5x(x - 2) \Rightarrow p_2(x) = 5x^2 - 8x + 7$$

$$p_2(1) = 4$$



□

ÖRNEK 5.7.

$i \rightarrow$	0. $\downarrow$	1. $\downarrow$	2. $\downarrow$	3. $\downarrow$
x_i	0	1	3	5
y_i	1	2	6	7

noktaları verildiğine göre Newton yöntemini kullanarak 3. *dereceden polinomunu oluşturup* $x = 2$ *noktasında* y *değerini hesaplayınız.*

Çözüm

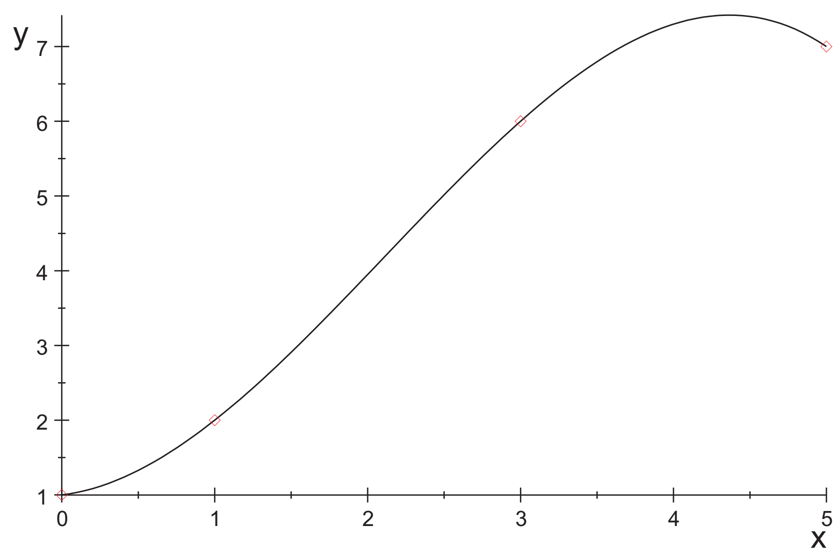
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 5*(5-1) & 5*(5-1)*(5-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{17}{120} \end{pmatrix}$$

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow$$

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{1}{3}x(x-1) - \frac{17}{120}x(x-1)(x-3)$$

$$\Rightarrow p_3(x) = -\frac{17}{120}x^3 + \frac{9}{10}x^2 + \frac{29}{120}x + 1$$

$$p_3(2) = \frac{79}{20} = 3.95$$



□

5.5 Bölünmüş Farklar (Divided Differences)

Bölünmüş farklar yöntemi aşağıdaki şekilde verilir.

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_n

verilen değerleri için aşağıdaki bölünmüş farklar hesaplanır:

x_0	$f(x_0) = f[x_0]$				
		$> f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$			
x_1	$f(x_1) = f[x_1]$		$> f[x_0, x_1, x_2] = \frac{ff[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$		
		$> f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$\cdots$	
x_2	$f(x_2) = f[x_2]$		$> f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	$\cdots$	
		$> f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$\cdots$	$> f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_n]-f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$
x_3	$f(x_3) = f[x_3]$		$> f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	$\cdots$	
		$> f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$\cdots$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$> f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_n,xn-1]-f[x_{n-2},x_{n-1}]}{x_4-x_2}$		
		$> f[x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_n]-f[x_{n-1}]}{x_n-x_{n-1}}$			
x_n	$f(x_n) = f[x_n]$				

$$
\begin{aligned}
q_0(x) &= 1 \\
q_1(x) &= (x - x_0) \\
q_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\
q_3(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&\cdots \\
q_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

polinomları ve

$$
\begin{aligned}
c_0 &= f[x_0] \\
c_1 &= f[x_0, x_1] \\
c_2 &= f[x_0, x_1, x_2] \\
c_3 &= f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
&\cdots \\
c_n &= f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]
\end{aligned}
$$

katsayıları için bölünmüş farklar ile elde edilen n. mertebeden polinomu

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} c_i q_i(x) \\
&= c_0 q_0(x) + c_1 q_2(x) + \cdots + c_n q_n(x) \\
&= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\
&\quad + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

ÖRNEK 5.8.

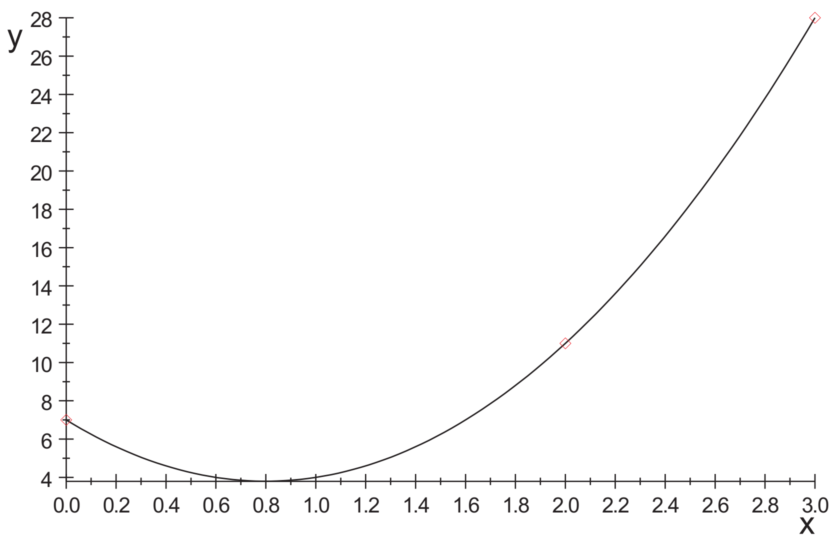
$i \rightarrow$	0. $\downarrow$	1. $\downarrow$	2. $\downarrow$
x_i	0	2	3
y_i	7	11	28

noktaları verildiğine göre bölünmüş farklar yöntemini kullanarak 2. *dereceden polinomunu oluşturup* $x = 1$ *noktasında* y *değerini hesaplayınız.*

Çözüm

$x_0 = 0$	$f(x_0) = f[x_0] = 7$		
		$> f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{11-7}{2-0} = 2$	
$x_1 = 2 = 11$	$f(x_1) = f[x_1]$		$> f[x_0, x_1, x_2] = \frac{ff[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{17-2}{3-0} = 5$
		$> f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{28-11}{3-2} = 17$	
$x_2 = 3$	$f(x_2) = f[x_2] = 28$		

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \Rightarrow$$
$$p_2(x) = 7 + 2x + 5x(x - 2) \Rightarrow p_2(x) = 5x^2 - 8x + 7$$
$$p_2(1) = 4$$



□

ÖRNEK 5.9.

$i \rightarrow$	0. $\downarrow$	1. $\downarrow$	2. $\downarrow$	3. $\downarrow$
x_i	0	1	3	5
y_i	1	2	6	7

noktaları verildiğine göre bölünmüş farklar yöntemini kullanarak 3. *dereceden polinomunu oluşturup* $x = 2$ *noktasında* y *değerini hesaplayınız.*

Çözüm

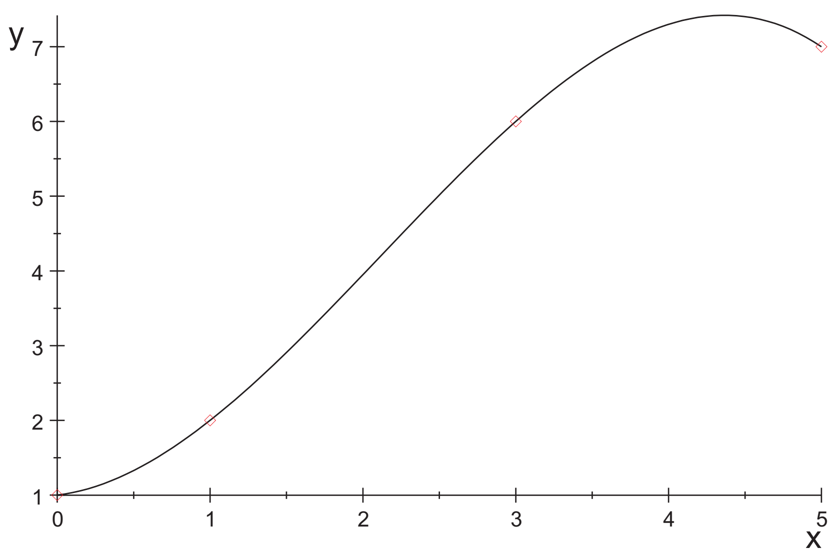
$x_0 = 0$	$f(x_0) = f[x_0] = 1$			
		$> f[x_0, x_1]$ $= \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$ $= \frac{2-1}{1-0} = 1$		
$x_1 = 1$	$f(x_1) = f[x_1] = 2$		$> f[x_0, x_1, x_2]$ $= \frac{ff[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ $= \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$	
		$> f[x_1, x_2]$ $= \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$ $= \frac{6-2}{3-1} = 2$		$> f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ $= \frac{ff[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$ $= \frac{-\frac{3}{8}-\frac{1}{3}}{5-0} = -\frac{17}{120}$
$x_2 = 3$	$f(x_2) = f[x_2] = 6$		$> f[x_1, x_2, x_3]$ $= \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$ $= \frac{\frac{1}{2}-2}{5-1} = -\frac{3}{8}$	
		$> f[x_2, x_3]$ $= \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$ $= \frac{7-6}{5-3} = \frac{1}{2}$		...
$x_3 = 5$	$f(x_3) = f[x_3] = 7$			...

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{1}{3}x(x-1) - \frac{17}{120}x(x-1)(x-3)$$

$$\Rightarrow p_3(x) = -\frac{17}{120}x^3 + \frac{9}{10}x^2 + \frac{29}{120}x + 1$$

$$p_3(2) = \frac{79}{20} = 3.95$$



□

Chapter 6

Sayısal İntegral (Numerical Integration)

Bu bölümde $\int_0^1 \exp\left(x^2\right) dx$ veya $\int_0^\pi \cos\left(x^2\right) dx$ gibi integralleri nasıl hesaplayabiliriz hakkında konuşacağız.

6.1 Dikdörtgenler kuralı (Rectangular rule)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

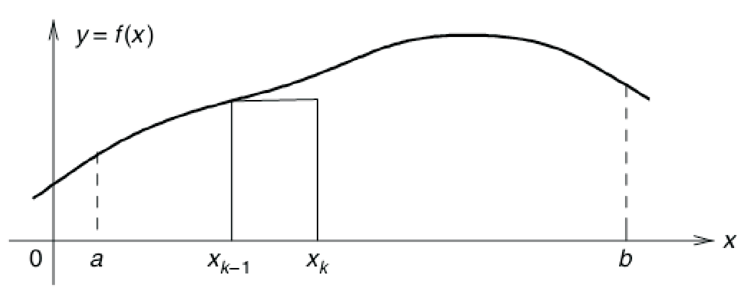
integralini sayısal hesaplamak için $[a, b]$ aralığını aşağıdaki şekilde bölelim:

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \\ h &= \frac{b-a}{n} \\ x_i &= a + ih, i = 0, 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

6.1.1 Sol Nokta kuralı (Left-point rule)

Sol nokta kuralı-dikdörtgenler yöntemi ile integralin sayısal ifadesini aşağıdaki gibi veririz:

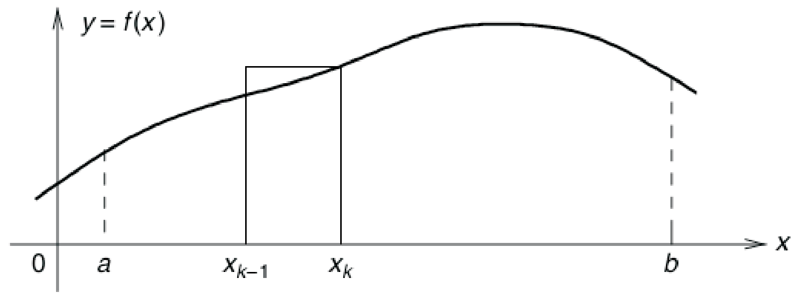
$$\int_a^b f(x)\,dx \cong h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$



6.1.2 Sağ Nokta kuralı (Right-point rule)

Sağ nokta kuralı-dikdörtgenler yöntemi ile integralin sayısal ifadesini aşağıdaki gibi veririz:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong h \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

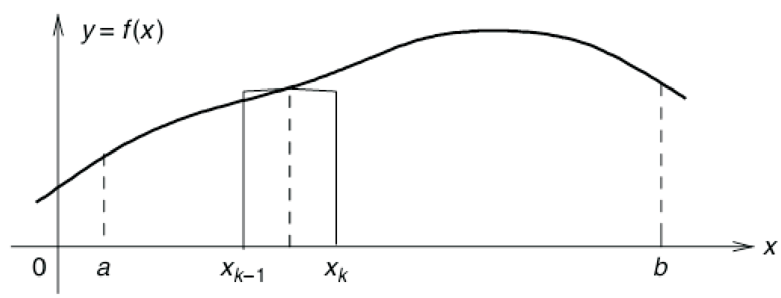


6.1.3 Orta nokta kuralı (Midpoint rule)

$$\overline{x}_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) h, i = 1, 2, ..., n$$

orta noktaları için integrali orta nokta kuralı -dikdörtgenler yöntemi ile integralin sayısal ifadesini aşağıdaki gibi veririz:

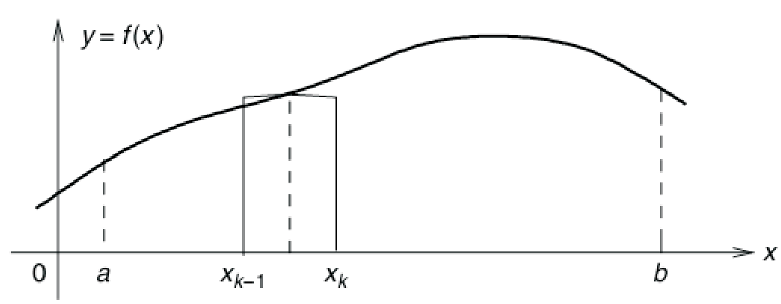
$$\int_a^b f(x)\, dx \cong h \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)$$



ÖRNEK 6.1.

$$\int_1^4 \frac{13\left(x - x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}} dx$$

integralini $n = 6$ seçerek sol, sağ ve orta nokta kurallı dikdörtgenler yöntemi ile çözünüz.



Çözüm (i) & (ii) Sol & Sağ nokta kuralları

$$f(x)=\frac{13\left(x-x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}}$$
$$h=\frac{4-1}{6}=\frac{1}{2}$$

$x_0=1$	$x_1=1.5$	$x_2=2$	$x_3=2.5$	$x_4=3$	$x_5=3.5$	$x_6=4$
$f(1)$ $=0$	$f(1.5)$ $=-1.0276$	$f(2)$ $=-1.2945$	$f(2.5)$ $=-1.1465$	$f(3)$ $=-0.8665$	$f(3.5)$ $=-0.59691$	$f(4)$ $=-0.38669$

$$\text{Sol nokta}\Rightarrow\int_1^4\frac{13\left(x-x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}}dx\cong h\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)$$
$$=\frac{1}{2}(0-1.0276-1.2945-1.1465-0.8665-0.59691)=-2.466$$
$$\text{Sağ nokta}\Rightarrow\int_1^4\frac{13\left(x-x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}}dx\cong h\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$
$$=\frac{1}{2}(-1.0276-1.2945-1.1465-0.8665-0.59691-0.38669)=-2.6594$$

Orta nokta için

$\overline{x}_1=\frac{1+1.5}{2}$ $=1.25$	$\overline{x}_2=\frac{1.5+2}{2}$ $=1.75$	$\overline{x}_3=\frac{2+2.5}{2}$ $=2.25$	$\overline{x}_4=\frac{2.5+3}{2}$ $=2.75$	$\overline{x}_5=\frac{3+3.5}{2}$ $=3.25$	$\overline{x}_6=\frac{3.5+4}{2}$ $=3.75$
$f(1.25)=$ -0.623	$f(1.75)=$ -1.236	$f(2.25)=$ -1.2511	$f(2.75)=$ -1.0112	$f(3.25)=$ -0.72581	$f(3.75)=$ -0.4835

$$\int_1^4\frac{13\left(x-x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}}dx\cong h\sum_{i=1}^{n}f(\overline{x}_i)=$$
$$\frac{1}{2}(-0.623-1.236-1.2511-1.0112-0.72581-0.4835)=-2.6653$$

□

6.2 Newton - Cotes Formülü (Newton–Cotes Formulas)

Bu yöntemde $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki $x_i=a+ih, i=0,1,2,...,n,\ \ h=\frac{b-a}{n}$ değerlerinden geçen Lagrange polinomu ele alınır:

x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

verilen değerleri için n. dereceden Lagrange polinomunu aşağıdaki gibi veririz:

$$p_n(x)=f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+...+f(x_n)L_n(x)$$

burada

$$\begin{aligned}
L_0(x)&=\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)}\\
L_1(x)&=\frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)}\\
&...\\
L_n(x)&=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}$$

Buna göre fonksiyonun bu aralıktaki integrali polinomun integraline denktir:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\cong \int_a^b p_n(x)\,dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,L_i(x)\,dx \\ \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx &\cong f(x_i)\sum_{i=0}^{n}\int_a^b L_i(x)\,dx\end{aligned}$$

formülüne Newton-Cotes formülü denir.

Örnek 6.2.

$$\int_1^4 \frac{13\left(x-x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}}dx$$

integralini $n=3$ seçerek Newton-Cotes yöntemi ile çözünüz.

Çözüm

$$f(x) = \frac{13\left(x-x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}}$$

$$h = \frac{4-1}{3} = 1$$

$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$
$f(1)$ $=0$	$f(2)$ $=-1.2945$	$f(3)$ $=-0.8665$	$f(4)$ $=-0.38669$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{13}{3}x + 4$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{19}{2}x - 6$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} = \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - 7x + 4$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{11}{6}x - 1$$

$$p_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$= 0 * \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{13}{3}x + 4\right) - 1.2945 * \left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{19}{2}x - 6\right)$$

$$-0.8665 * \left(\frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - 7x + 4\right) - 0.38669 * \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{11}{6}x - 1\right)$$

$$= -0.27845x^3 + 2.5319x^2 - 6.9412x + 4.6877$$

$$\int_1^4 \frac{13\left(x-x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}}dx \cong \int_1^4 \left(-0.27845x^3 + 2.5319x^2 - 6.9412x + 4.6877\right)dx$$

$$= -6.9613\times 10^{-2}x^4 + 0.84397x^3 - 3.4706x^2 + 4.6877x : -2.5772\Big|_{x=0}^{x=4} - 2.5772$$

□

6.3 Yamuk Yöntemi (Trapezoidal Rule)

Yamuk yöntemi Newton Codes formülünün 2 noktalı halidir: Yani $[a, b]$ aralığındaki $x_0 = a, x_1 = b,\ h = (b - a)$ değerlerinden geçen Lagrange polinomu ele alınır:

$x_0 = a$	$x_1 = b$
$f(x_0)$	$f(x_1)$

$$p_1(x) = f(x_0) L_0(x) + f(x_1) L_1(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)\,dx$$

$$= f(x_0) \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} dx + f(x_1) \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} dx$$

$$= f(x_0) \left. \frac{x^2 - 2xx_1}{2x_0 - 2x_1} \right|_{x=x_0}^{x=x_1} + f(x_1) \left. -\frac{1}{2} \frac{x}{x_0 - x_1} (x - 2x_0) \right|_{x=x_0}^{x=x_1}$$

$$= f(x_0) \left(\frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_0 \right) + f(x_1) \left(\frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_0 \right)$$

$$= \frac{(f(x_1) + f(x_0))(x_1 - x_0)}{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{(f(a) + f(b)) * h}{2}$$

6.4 Genelleştirilmiş yamuk Formülü (Composite Trapezoidal Rule)

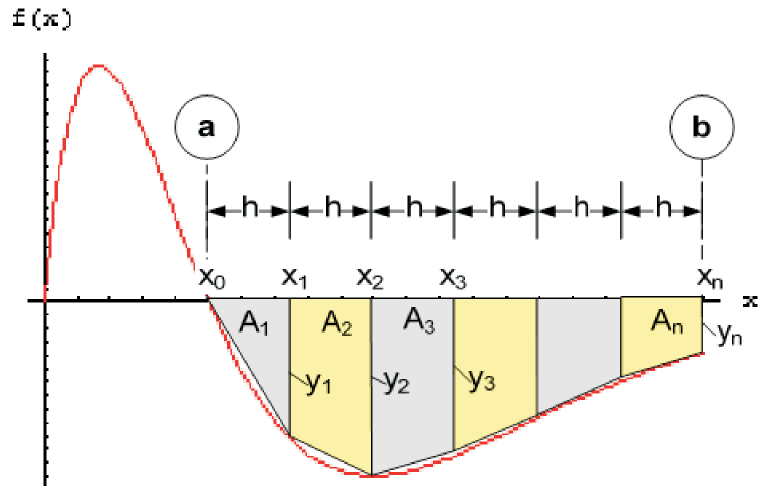
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integralini sayısal hesaplamak için $[a, b]$ aralığını aşağıdaki şekilde bölelim:

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \\ h &= \frac{b - a}{n} \\ x_i &= a + ih, i = 0, 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

Buna göre Genelleştirilmiş yamuk Formülü ile integralin sayısal ifadesini aşağıdaki gibi veririz:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \\ &\cong \frac{(f(x_0) + f(x_1))\,h}{2} + \frac{(f(x_1) + f(x_2))\,h}{2} + \frac{(f(x_2) + f(x_3))\,h}{2} + \cdots + \frac{(f(x_{n-1}) + f(x_n))\,h}{2} \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})) + f(x_n)] \\ \int_a^b f(x)\,dx &\cong \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \end{aligned}$$

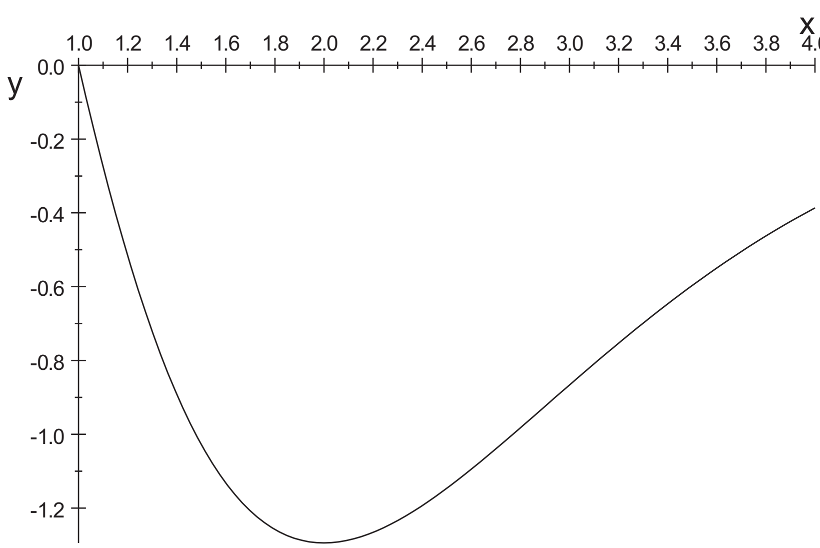


v

Örnek 6.3.

$$\int_1^4 \frac{13\left(x-x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}}dx$$

integralini $n=6$ seçerek sol genelleştirilmiş yamuk yöntemi ile çözünüz.



Çözüm

$$f(x) = \frac{13\left(x - x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}}$$

$$h = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}$$

$x_0 = 1$	$x_1 = 1.5$	$x_2 = 2$	$x_3 = 2.5$	$x_4 = 3$	$x_5 = 3.5$	$x_6 = 4$
$f(1) = 0$	$f(1.5) = -1.0276$	$f(2) = -1.2945$	$f(2.5) = -1.1465$	$f(3) = -0.8665$	$f(3.5) = -0.59691$	$f(4) = -0.38669$

$$\int_1^4 \frac{13\left(x - x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}} dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{1}{2} * (0 + 2 * (-1.0276 - 1.2945 - 1.1465 - 0.8665 - 0.59691) - 0.38669) = -5.1254$$

□

6.5 Simpson Yöntemi (Simpson's Rule)

Simpson yöntemi, Newton Codes formülünün 3 noktalı halidir: Yani $[a,b]$ aralığındaki $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b,\ h = \frac{(b-a)}{2}$ değerlerinden geçen Lagrange polinomu ele alınır:

$x_0 = a$	$x_1 = \frac{a+b}{2}$	$x_2 = b$
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

$$p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_0(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)\,dx$$

$$= f(x_0)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx$$

$$+f(x_1)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx$$

$$+f(x_2)\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx$$

$$= f(x_0) * \left(-\frac{1}{6(x_0-x_1)}(x_0-x_2)(2x_0-3x_1+x_2)\right)$$

$$+f(x_1) * \left(-\frac{1}{6(x_0-x_1)}\frac{(x_0-x_2)^3}{x_1-x_2}\right)$$

$$+f(x_2) * \left(\frac{1}{6}\frac{x_0-x_2}{x_1-x_2}(x_0-3x_1+2x_2)\right)$$

$$= f(x_0) * \left(-\frac{1}{6h}(-2h)(2x_0-3x_1+x_2)\right) +$$

$$f(x_1) * \left(-\frac{1}{6(-h)}\frac{(2h)^3}{(-h)}\right)$$

$$+f(x_2) * \left(\frac{1}{6}\frac{-2h}{-h}(x_0-3x_1+2x_2)\right)$$

$$= f(x_0) * \left(\frac{2}{3}x_0 - x_1 + \frac{1}{3}x_2\right) + f(x_1) * \left(-\frac{4}{3}h\right) + f(x_2) * \left(\frac{1}{3}x_0 - x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)$$

$$= f(x_0) * \left(\frac{2}{3}x_0 - (x_0+h) + \frac{1}{3}(x_0+2h)\right) + f(x_1) * \left(-\frac{4}{3}h\right)$$

$$+f(x_2) * \left(\frac{1}{3}x_0 - (x_0+h) + \frac{2}{3}(x_0+2h)\right)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{1}{3}h\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

6.6 Genelleştirilmiş Simpson Yöntemi (Composite Simpson's Rule)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integralini sayısal hesaplamak için $[a, b]$ aralığını aşağıdaki şekilde bölelim:

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \\ h &= \frac{b-a}{n} \\ x_i &= a + ih, i = 0, 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

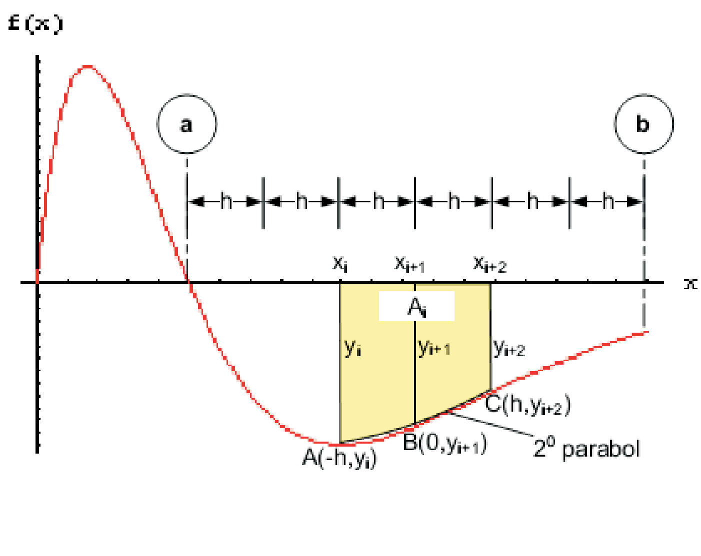
ve orta noktaları $\overline{x}_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) h, i = 1, 2, ..., n$ ile verelim. Buna göre Genelleştirilmiş yamuk Formülü ile integralin sayısal ifadesini aşağıdaki gibi veririz:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$\cong \frac{1}{3}h\left[f(x_0) + 4f(\overline{x}_1) + f(x_1)\right] + \frac{1}{3}h\left[f(x_1) + 4f(\overline{x}_2) + f(x_2)\right] + \cdots + \frac{1}{3}h\left[f(x_{n-1}) + 4f(\overline{x}_n) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{1}{3}h\left[f(x_0) + 2\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right] + 4\left[f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) + \cdots + f(\overline{x}_n)\right] + f(x_n)\right]$$

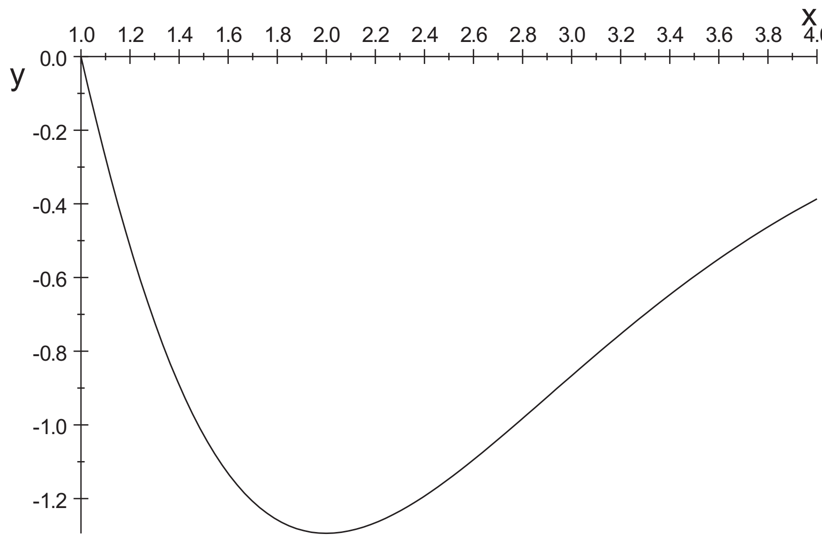
$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{1}{3}h\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) + f(x_n)\right]$$



Örnek 6.4.

$$\int_1^4 \frac{13\left(x - x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}}dx$$

integralini $n = 6$ seçerek sol genelleştirilmiş Simpson yöntemi ile çözünüz.



Çözüm

$$f(x) = \frac{13\left(x - x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}}$$

$$h = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}$$

$x_0 = 1$	$x_1 = 1.5$	$x_2 = 2$	$x_3 = 2.5$	$x_4 = 3$	$x_5 = 3.5$	$x_6 = 4$
$f(1) = 0$	$f(1.5) = -1.0276$	$f(2) = -1.2945$	$f(2.5) = -1.1465$	$f(3) = -0.8665$	$f(3.5) = -0.59691$	$f(4) = -0.38669$

Orta nokta için

$\overline{x}_1 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$	$\overline{x}_2 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$	$\overline{x}_3 = \frac{2+2.5}{2} = 2.25$	$\overline{x}_4 = \frac{2.5+3}{2} = 2.75$	$\overline{x}_5 = \frac{3+3.5}{2} = 3.25$	$\overline{x}_6 = \frac{3.5+4}{2} = 3.75$
$f(1.25) = -0.623$	$f(1.75) = -1.236$	$f(2.25) = -1.2511$	$f(2.75) = -1.0112$	$f(3.25) = -0.72581$	$f(3.75) = -0.4835$

$$\int_1^4 \frac{13\left(x - x^2\right)}{\sqrt{e^{3x}}} dx \cong \frac{1}{3} h \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) + f(x_n) \right)$$

$$= \frac{1}{6} * \left(\begin{array}{c} 0 + 2 * (-1.0276 - 1.2945 - 1.1465 - 0.8665 - 0.59691) \\ +4 * (-0.623 - 1.236 - 1.2511 - 1.0112 - 0.72581 - 0.4835) - 0.38669 \end{array} \right) = -5.2622$$

$\square$

Bibliography

[1] L. Lamport. **LaTeX A Document Preparation System** Addison-Wesley, California 1986.