Ayrık Matematik

Çizgeler

H. Turgut Uyar   Ayşegül Gençata Yayımlı   Emre Harmancı

2001-2011

Lisans

Konular

Çizgeler

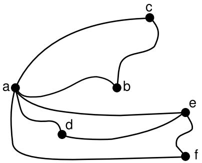
Tanım

çizge: $G = (V, E)$

- V: düğüm kümesi
- $E \subseteq V \times V$: ayrıt kümesi
- $e = (v_1, v_2) \in E$ ise:
  - v_1 ve v_2 düğümleri e ayrıtının *uçdüğümleri*
  - e ayrıtı v_1 ve v_2 düğümlerine *çakışık*
  - v_1 ve v_2 düğümleri *bitişik*
- hiçbir ayrıtın çakışmadığı düğüm: *yalıtılmış düğüm*

Çizge Örneği

Örnek



$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d, e, f\} \\ E &= \{(a, b), (a, c), \\ &\quad (a, d), (a, e), \\ &\quad (a, f), (b, c), \\ &\quad (d, e), (e, f)\} \end{aligned}$$

Yönlü Çizgeler

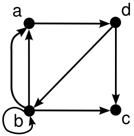
Tanım

yönlü çizge: ayrıtlar yönlü

- yönlü ayrıt: yay
- başlangıç ve bitiş düğümleri

Yönlü Çizge Örneği

Örnek



Çoklu Çizgeler

Tanım

koşut bağlı ayrıtlar:
aynı iki düğüm arasındaki ayrıtlar

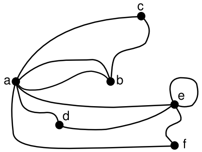
tek-çevre:
iki ucu aynı düğüm olan ayrıt

yalın çizge:
koşut bağlı ayrıtlar ya da tek-çevre içermeyen çizge

çoklu çizge:
yalın olmayan çizge

Çoklu Çizge Örneği

Örnek



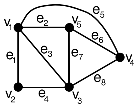
- koşut bağlı ayrıtlar: (a, b)
- tek-çevre: (e, e)

Gösterilim

- *çakışıklık matrisi*:
  - satırlara düğümler, sütunlara ayrıtlar
  - ayrıt düğüme çakışıksa 1, değilse 0
- *bitişiklik matrisi*:
  - satırlara ve sütunlara düğümler
  - hücrelere düğümler arasındaki ayrıt sayısı

Çakışıklık Matrisi Örneği

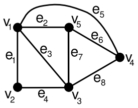
Örnek



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
v_1	1	1	1	0	1	0	0	0
v_2	1	0	0	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	0	1	1
v_4	0	0	0	0	1	1	0	1
v_5	0	1	0	0	0	1	1	0

Bitişiklik Matrisi Örneği

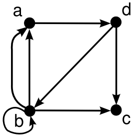
Örnek



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	1	1
v_2	1	0	1	0	0
v_3	1	1	0	1	1
v_4	1	0	1	0	1
v_5	1	0	1	1	0

Bitişiklik Matrisi Örneği

Örnek



	a	b	c	d
a	0	0	0	1
b	2	1	1	0
c	0	0	0	0
d	0	1	1	0

Kerte

Tanım

kerte: düğüme çakışan ayrıtların sayısı

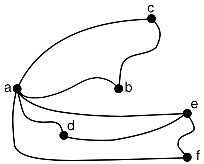
Teorem

v_i düğümünün kertesi d_i ise:

$$|E| = \frac{\sum_i d_i}{2}$$

Kerte Örneği

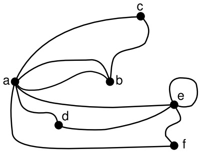
Örnek (yalın)



$$\begin{aligned} d_a &= 5 \\ d_b &= 2 \\ d_c &= 2 \\ d_d &= 2 \\ d_e &= 3 \\ d_f &= 2 \\ Toplam &= 16 \\ |E| &= 8 \end{aligned}$$

Kerte Örneği

Örnek (çoklu)



$$\begin{aligned} d_a &= 6 \\ d_b &= 3 \\ d_c &= 2 \\ d_d &= 2 \\ d_e &= 5 \\ d_f &= 2 \\ Toplam &= 20 \\ |E| &= 10 \end{aligned}$$

Yönlü Çizgelerde Kerte

- kerte ikiye ayrılıyor
  - *giriş kertesi*: $d_v{}^i$
  - *çıkış kertesi*: $d_v{}^o$
- giriş kertesi 0 olan düğüm: *kaynak*
- çıkış kertesi 0 olan düğüm: *kuyu*
- $\sum_{v \in V} d_v{}^i = \sum_{v \in V} d_v{}^o = |A|$

Kerte

Teorem
Yönsüz bir çizgede kertesi tek olan düğümlerin sayısı çifttir.

Tanıt.

- t_i: kertesi i olan düğümlerin sayısı
  $2|E| = \sum_i d_i = 1t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 + \dots$
  $2|E| - 2t_2 - 4t_4 - \dots = t_1 + t_3 + \dots + 2t_3 + 4t_5 + \dots$
  $2|E| - 2t_2 - 4t_4 - \dots - 2t_3 - 4t_5 - \dots = t_1 + t_3 + t_5 + \dots$
- sol yan çift olduğuna göre sağ yan da çifttir

$\square$

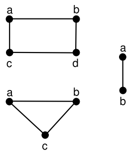
Düzenli Çizgeler

Tanım
düzenli çizge:
bütün düğümlerin kertelerinin aynı olduğu çizge

- n-düzenli: bütün düğümlerin kerteleri n

Düzenli Çizge Örnekleri

Örnek



Tam Bağlı Çizgeler

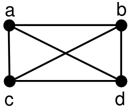
Tanım

tam bağlı çizge:
$\forall v_1, v_2 \in V \; (v_1, v_2) \in E$

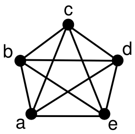
- K_n: n düğümlü tam bağlı çizge

Tam Bağlı Çizge Örnekleri

Örnek (K_4)



Örnek (K_5)



İki Parçalı Çizgeler

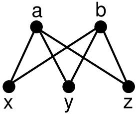
Tanım

iki parçalı çizge:
$V = V_1 \cup V_2 \wedge V_1 \cap V_2 = \emptyset$
$\forall (v_1, v_2) \in E \; v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2$

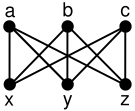
- *tam bağlı iki parçalı çizge*:
  $\forall v_1 \in V_1 \forall v_2 \in V_2 \; (v_1, v_2) \in E$
  - $K_{m,n}$: $|V_1| = m$, $|V_2| = n$

İki Parçalı Çizge Örnekleri

Örnek ($K_{2,3}$)



Örnek ($K_{3,3}$)



Altçizge

Tanım

altçizge:
$G' = (V', E')$ çizgesi $G = (V, E)$ çizgesinin altçizgesi ise

- $V' \subseteq V$
- $E' \subseteq E$
- $\forall (v_1, v_2) \in E' \; v_1 \in V' \wedge v_2 \in V'$

İzomorfizm

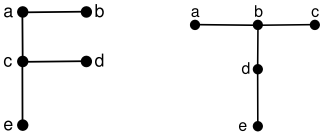
Tanım

izomorfik çizgeler:
$G = (V, E)$ ile $G^\star = (V^\star, E^\star)$ çizgeleri izomorfik ise
$\exists f : V \to V^\star \; (u, v) \in E \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E^\star$

- f birebir ve örten
- aynı şekilde çizilebilir

İzomorfizm Örneği

Örnek



- $f = \{(a, d), (b, e), (c, b), (d, c), (e, a)\}$

İzomorfizm Örneği

Örnek (Petersen çizgesi)

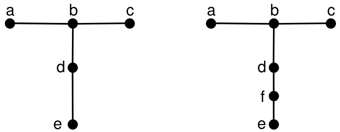
- $f = \{(a, q), (b, v), (c, u), (d, y), (e, r),$
  $(f, w), (g, x), (h, t), (i, z), (j, s)\}$

Homeomorfizm

Tanım
homeomorfik çizge:
izomorfik bir çizgedeki bir ayrıtı bölen düğümler ekleyerek elde edilen çizge

Homeomorfizm Örneği

Örnek



Dolaşı

Tanım
dolaşı:
bir başlangıç düğümünden (v_0) bir varış düğümüne (v_n)

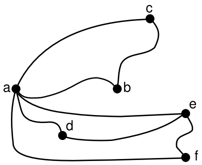
$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$$

$e_i = (v_{i-1}, v_i)$ olacak şekilde düğüm-ayrıt dizisi

- ayrıtları yazmaya gerek yok
- uzunluk: ayrıt sayısı
- $v_0 \neq v_n$ ise açık, $v_0 = v_n$ ise kapalı

Dolaşı Örneği

Örnek



$(c, b), (b, a), (a, d), (d, e),$
$(e, f), (f, a), (a, b)$

c, b, a, d, e, f, a, b

uzunluk: 7

Gezi

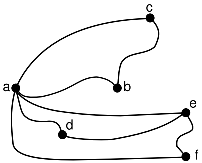
Tanım

gezi: ayrıtların yinelenmediği dolaşı

- kapalı gezi: devre
- kapsayan gezi: çizgedeki bütün ayrıtlardan geçilen gezi

Gezi Örneği

Örnek



$(c, b), (b, a), (a, e), (e, d),$
$(d, a), (a, f)$

c, b, a, e, d, a, f

Yol

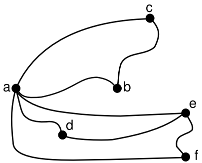
Tanım

yol: düğümlerin yinelenmediği dolaşı

- kapalı yol: çevre
- kapsayan yol: çizgedeki bütün düğümlere uğranan yol

Yol Örneği

Örnek



$(c, b), (b, a), (a, d), (d, e),$
(e, f)

c, b, a, d, e, f

Bağlılık

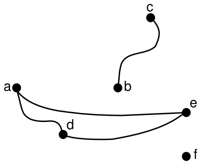
Tanım

bağlı çizge:
seçilebilecek her düğüm çifti arasında bir yol var

- bağlı olmayan bir çizge bağlı bileşenlere ayrılabilir

Bağlı Bileşen Örneği

Örnek



- çizge bağlı değil:
  a ile c arasında yol yok
- bağlı bileşenler:
  a, d, e
  b, c
  f

Uzaklık

Tanım

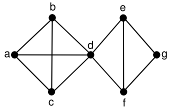
uzaklık: iki düğüm arasındaki en kısa yolun uzunluğu

Tanım

çap: çizgedeki en büyük uzaklık

Uzaklık Örneği

Örnek



- a ile e düğümlerinin uzaklığı: 2
- çap: 3

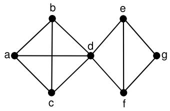
Kesitleme Noktası

Tanım
$G - v$:
G çizgesinden v düğümü ve ona çakışık bütün ayrıtların çıkarılmasıyla elde edilen çizge

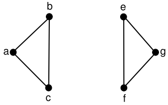
Tanım
kesitleme noktası:
G bağlı ama $G - v$ bağlı değilse v bir kesitleme noktasıdır

Kesitleme Noktası Örneği

G



$G - d$



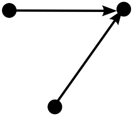
Yönlü Dolaşılar

- yönsüz çizgelere benzer şekilde
- yaylar yönsüz varsayarak tanımlanırsa:
  yarı-dolaşı, *yarı-gezi*, *yarı-yol*

Zayıf Bağlı Çizge

Tanım
zayıf bağlı:
her düğüm çifti arasında
bir yarı-yol var

Örnek

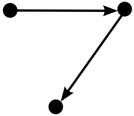


Tek-Yönlü Bağlı Çizge

Tanım

tek-yönlü bağlı:
her düğüm çifti arasında
birinden diğerine yol var

Örnek

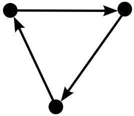


Güçlü Bağlı Çizge

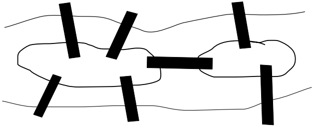
Tanım

güçlü bağlı:
her düğüm çifti arasında
bir yol var

Örnek



Königsberg Köprüleri



- bütün köprülerden bir kere geçilerek
  başlangıç noktasına dönülecek

Geçit Veren Çizge

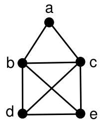
Tanım

geçit veren çizge:
üzerinde kapsayan bir gezi düzenlenebilen çizge

- kertesi tek olan bir düğüm varsa gezinin
  ya başlangıç ya da varış düğümü olmalı
- başlangıç ve varış dışındaki bütün düğümlerin kerteleri çift
  olmalı

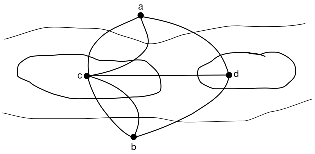
Geçit Veren Çizge Örneği

Örnek



- a, b ve c düğümlerinin kerteleri çift
- d ve e düğümlerinin kerteleri tek
- d düğümünden başlayıp e düğümünde biten (ya da tersi) bir kapsayan gezi oluşturulabilir: $d, b, a, c, e, d, c, b, e$

Königsberg Köprüleri



- bütün düğümlerin kerteleri tek: geçit vermez

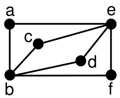
Euler Çizgeleri

Tanım
Euler çizgesi:
üzerinde kapalı bir kapsayan gezi düzenlenebilen çizge

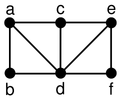
- Euler çizgesi $\Leftrightarrow$ bütün düğümlerin kerteleri çift

Euler Çizgesi Örnekleri

Örnek (Euler çizgesi)



Örnek (Euler çizgesi değil)

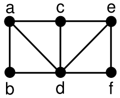


Hamilton Çizgeleri

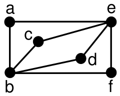
Tanım
Hamilton çizgesi:
üzerinde kapalı bir kapsayan yol düzenlenebilen çizge

Hamilton Çizgesi Örnekleri

Örnek (Hamilton çizgesi)



Örnek (Hamilton çizgesi değil)



Bağlantı Matrisi

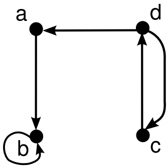
- çizgenin bitişiklik matrisi A ise
  A^k matrisinin (i,j) elemanı i. düğüm ile j. düğüm arasındaki k uzunluklu dolaşıların sayısını gösterir
- n düğümlü yönsüz bir çizgede iki düğüm arasındaki uzaklık en fazla $n-1$ olabilir
- bağlantı matrisi:
  $C = A^1 + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1}$
  - bütün elemanlar sıfırdan farklı ise çizge bağlıdır

Warshall Algoritması

- düğümler arasındaki dolaşıların sayısı yerine dolaşı olup olmadığını belirlemek daha kolay
- sırayla her düğüm için:
  - o düğüme gelinebilen düğümlerden (matriste o sütunda 1 olan satırlardan)
  - o düğümden gidilebilen düğümlere (matriste o satırda 1 olan sütunlara)

Warshall Algoritması Örneği

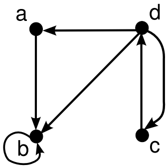
Örnek



	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	0	1
d	1	0	1	0

Warshall Algoritması Örneği

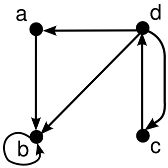
Örnek



	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	0	1
d	1	1	1	0

Warshall Algoritması Örneği

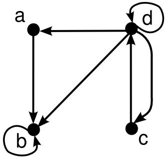
Örnek



	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	0	1
d	1	1	1	0

Warshall Algoritması Örneği

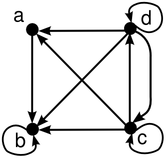
Örnek



	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	0	1
d	1	1	1	1

Warshall Algoritması Örneği

Örnek



	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	1	0	0
c	1	1	1	1
d	1	1	1	1

Düzlemsel Çizgeler

Tanım

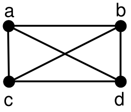
düzlemsel çizge:

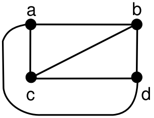
ayrıtları kesişmeden bir düzleme çizilebilen çizge

- harita: çizgenin düzlemsel bir çizimi

Düzlemsel Çizge Örneği

Örnek (K_4)





Bölgeler

- bir harita düzlemi *bölgelere* ayırır
- *bölge kertesi*:
  bölgenin sınırı oluşturan dolaşının uzunluğu

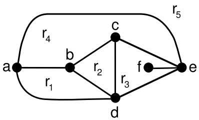
Teorem

r_i bölgesinin kertesi d_{r_i} ise:

$$|E| = \frac{\sum_i d_{r_i}}{2}$$

Bölge Örneği

Örnek



$d_{r_1} = 3$ (abda)
$d_{r_2} = 3$ (bcdb)
$d_{r_3} = 5$ (cdefec)
$d_{r_4} = 4$ (abcea)
$d_{r_5} = 3$ (adea)

$\sum_r d_r = 18$
$|E| = 9$

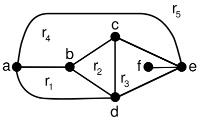
Euler Formülü

Teorem (Euler Formülü)

Bağlı, düzlemsel çizgelerde $|V| - |E| + |R| = 2$.

Euler Formülü Örneği

Örnek



- $|V| = 6$, $|E| = 9$, $|R| = 5$

Euler Formülünün Tanıtı

Tanıt

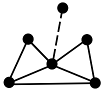
yöntem: $|E|$ üzerinden tümevarım

- taban adımı: tek düğüm, ayrıt yok
  $|V| = 1$, $|E| = 0$, $|R| = 1$
- k düğümlü, bağlı ve düzlemsel bir çizge için doğru varsayalım

Euler Formülünün Tanıtı

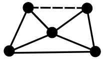
Tümevarım Adımı.

- yeni bir düğümü var olanlardan birine bağla:



- $|V|$ 1 artar, $|E|$ 1 artar, $|R|$ aynı kalır

- var olan iki düğüm arasına bir ayrıt ekle:



- $|V|$ aynı kalır, $|E|$ 1 artar, $|R|$ 1 artar

□

Düzlemsel Çizge Teoremleri

Teorem

yalın, düzlemsel bir çizgede:
$|V| \geq 3 \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6$

Tanıt.

- bölge kertelerinin toplamı: $2|E|$
- bir bölgenin kertesi en az 3
  $\Rightarrow 2|E| \geq 3|R| \Rightarrow |R| \leq \frac{2}{3}|E|$
- $|V| - |E| + |R| = 2$
  $\Rightarrow |V| - |E| + \frac{2}{3}|E| \geq 2 \Rightarrow |V| - \frac{1}{3}|E| \geq 2$
  $\Rightarrow 3|V| - |E| \geq 6 \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6$

□

Düzlemsel Çizge Teoremleri

Teorem

Bağlı, yalın, düzlemsel bir çizgede
$|V| \geq 3 \Rightarrow \exists v \in V \ d_v \leq 5$

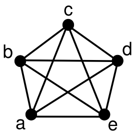
Tanıt.

- $\forall v \in V \ d_v \geq 6$ olsun
  $\Rightarrow 2|E| \geq 6|V|$
  $\Rightarrow |E| \geq 3|V|$
  $\Rightarrow |E| > 3|V| - 6$: çelişki

□

Düzlemsel Olmayan Çizgeler

Teorem



K_5 çizgesi düzlemsel değildir.

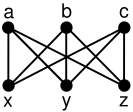
Tanıt.

- $|V| = 5$
- $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$
- $|E| \leq 9$ olmalı
- ama $|E| = 10$: çelişki

□

Düzlemsel Olmayan Çizgeler

Teorem



$K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel değildir.

Tanıt.

- $|V| = 6, |E| = 9$
- düzlemsel ise $|R| = 5$ olmalı
- bir bölgenin kertesi en az 4
  $\Rightarrow \sum_{r \in R} d_r \geq 20$
- $|E| \geq 10$ olmalı
- ama $|E| = 9$: çelişki

$\square$

Kuratowski Teoremi

Teorem

çizgenin K_5 ya da $K_{3,3}$ çizgelerine homeomorfik bir altçizgesi var
$\Leftrightarrow$ çizge düzlemsel değil

Platon Cisimleri

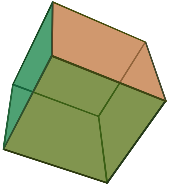
Tanım

düzgün çokyüzlü:
yüzleri birbirinin eşi düzgün çokgenlerden oluşan üç boyutlu cisim

- bir düzgün çokyüzlünün iki boyutlu düzleme izdüşümü düzlemsel bir çizgedir
  - her köşe bir düğüm
  - her kenar bir ayrıt

Platon Cisimleri

Örnek (küp: düzgün 6-yüzlü)



Platon Cisimleri

- v: düğüm (köşe) sayısı
- e: ayrıt (kenar) sayısı
- r: bölge (yüzey) sayısı
- n: bir köşede birleşen yüzey sayısı = düğüm kertesi
- m: bir yüzeyi çevreleyen ayrıt sayısı = bölge kertesi

- $m, n \geq 3$
- $2e = m \cdot r$
- $2e = n \cdot v$

Platon Cisimleri

- Euler formülünden:

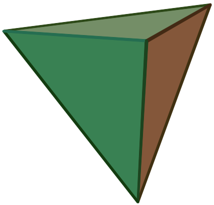
$$0 < 2 = v - e + r = \frac{2e}{n} - e + \frac{2e}{m} = e\left(\frac{2m - mn + 2n}{mn}\right)$$

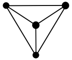
- $e, m, n > 0$ olduğuna göre:

$$2m - mn + 2n > 0 \Rightarrow mn - 2m - 2n < 0$$
$$\Rightarrow mn - 2m - 2n + 4 < 4 \Rightarrow (m-2)(n-2) < 4$$

- bu eşitsizliği sağlayan değerler:
  1. $m = 3, n = 3$
  2. $m = 4, n = 3$
  3. $m = 3, n = 4$
  4. $m = 5, n = 3$
  5. $m = 3, n = 5$

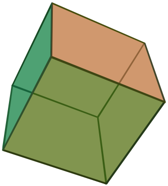
Tetrahedron - Düzgün 4 Yüzlü

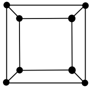




$m = 3, n = 3$

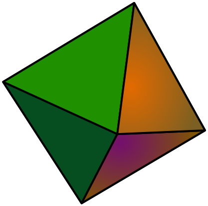
Hexahedron - Küp

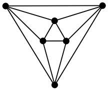




$m = 4, n = 3$

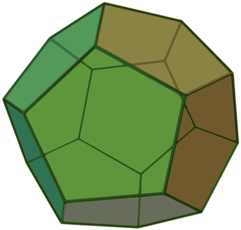
Octahedron - Düzgün 8 Yüzlü

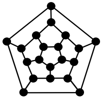




$m = 3, n = 4$

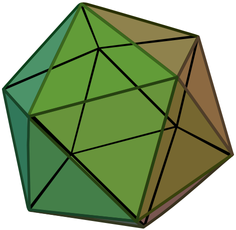
Dodecahedron - Düzgün 12 Yüzlü





$m = 5, n = 3$

Icosahedron - Düzgün 20 Yüzlü



$m = 3, n = 5$

Çizge Boyama

Tanım

düzgün boyama:
$G = (V, E)$ çizgesinde her $(a, b) \in E$ için a ve b düğümlerinin renkleri farklı olacak şekilde bütün düğümlere renk atama

- en az sayıda renk kullanarak

Çizge Boyama Örneği

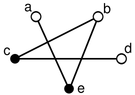
Örnek

- kimyasal maddeler üreten bir firma
- bazı maddeler birlikte tutulamıyor
- birbiriyle tutulamayan maddeler farklı alanlara depolanmalı
- en az sayıda depo alanı kullanılacak şekilde maddeler depolanacak

Çizge Boyama Örneği

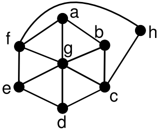
Örnek

- her madde bir düğüm
- birlikte tutulamayan maddeler bitişik



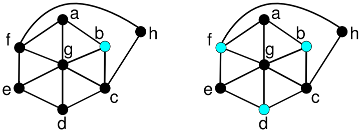
Çizge Boyama Örneği

Örnek



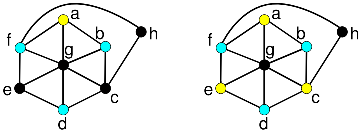
Çizge Boyama Örneği

Örnek



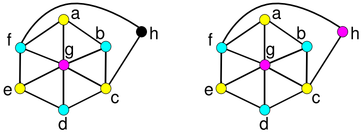
Çizge Boyama Örneği

Örnek



Çizge Boyama Örneği

Örnek



Kromatik Sayı

Tanım

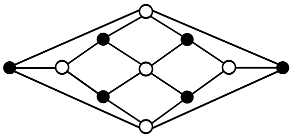
kromatik sayı:

G çizgesini düzgün boyamak için gerekli en az renk sayısı: $\chi(G)$

- $\chi(G)$'yi hesaplamak çok zor bir problem
- $n \geq 1$ için $\chi(K_n) = n$

Kromatik Sayı Örneği

Örnek (Herschel çizgesi)



- kromatik sayı: 2

Çizge Boyama Örneği

Örnek (Sudoku)

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

- her hücre bir düğüm
- aynı satırdaki hücreler bitişik
- aynı sütundaki hücreler bitişik
- aynı 3×3 bloktaki hücreler bitişik
- her rakam bir renk
- problem: kısmen boyalı bir çizgeyi tamamen boyamak

Bölge Boyama

- bir haritayı bitişik bölgelere farklı renkler atayacak şekilde boyama

Teorem (4 Renk Teoremi)

Düzlemsel bir haritadaki bölgeleri boyamak için 4 renk yeterlidir.

Kaynaklar

Okunacak: Grimaldi

- Chapter 11: An Introduction to Graph Theory
- Chapter 7: Relations: The Second Time Around
  - 7.2. Computer Recognition: Zero-One Matrices and Directed Graphs

Ağaç

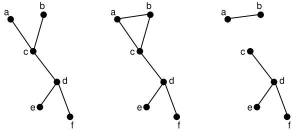
Tanım

ağaç: $T = (V, E)$
çevre içermeyen bağlı çizge

- bağlı bileşenleri ağaçlar olan çizge: *orman*

Ağaç Örnekleri

Örnek

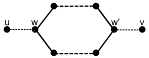


Ağaç Teoremleri

Teorem

Bir ağaçta herhangi iki ayrık düğüm arasında bir ve yalnız bir yol vardır.

- bağlı olduğu için bir yol var
- birden fazla yol olsaydı çevre olurdu:



Ağaç Teoremleri

Teorem

$T = (V, E)$ *ağacında:* $|V| = |E| + 1$

- tanıt yöntemi: ayrıt sayısı üzerinden tümevarım

Ağaç Teoremleri

Tanıt: Taban adımı.

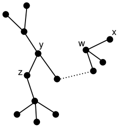
- $|E| = 0 \Rightarrow |V| = 1$
- $|E| = 1 \Rightarrow |V| = 2$
- $|E| = 2 \Rightarrow |V| = 3$

- $|E| \leq k$ için doğru olduğu varsayılsın

Ağaç Teoremleri

Tanıt: Tümevarım adımı.

- $|E| = k + 1$



- (y, z) çıkarılsın:
  $T_1 = (V_1, E_1),\ T_2 = (V_2, E_2)$

$$\begin{aligned} |V| &= |V_1| + |V_2| \\ &= |E_1| + 1 + |E_2| + 1 \\ &= (|E_1| + |E_2| + 1) + 1 \\ &= |E| + 1 \end{aligned}$$

□

Ağaç Teoremleri

Teorem
Bir ağaçta kertesi 1 olan en az iki düğüm vardır.

Tanıt.

- $2|E| = \sum_{v \in V} d_v$
- kertesi 1 olan tek bir düğüm olduğunu varsayalım:
  $\Rightarrow 2|E| \geq 2(|V| - 1) + 1$
  $\Rightarrow 2|E| \geq 2|V| - 1$
  $\Rightarrow |E| \geq |V| - \frac{1}{2} > |V| - 1$ çelişki

□

Ağaç Teoremleri

Teorem
Aşağıdaki bildirimler eşdeğerlidir:

1. *T bir ağaçtır (bağlıdır ve çevre içermez).*
2. *T'de her düğüm çifti arasında bir ve yalnız bir yol vardır.*
3. *T bağlıdır ama herhangi bir ayrıt çıkarılırsa artık bağlı olmaz.*
4. *T çevre içermez ama herhangi iki düğüm arasına bir ayrıt eklenirse bir ve yalnız bir çevre oluşur.*

Ağaç Teoremleri

Teorem
Aşağıdaki bildirimler eşdeğerlidir:

1. *T bir ağaçtır (T bağlıdır ve çevre içermez.)*
2. *T bağlıdır ve $|E| = |V| - 1$.*
3. *T çevre içermez ve $|E| = |V| - 1$.*

Köklü Ağaç

- düğümler arasında hiyerarşi var
- ayrıtlarda doğal yön $\Rightarrow$ giriş ve çıkış kerteleri
  - giriş kertesi 0 olan düğüm: kök
  - çıkış kertesi 0 olan düğümler: yaprak
  - yaprak olmayan düğümler: içdüğüm

Düğüm Düzeyleri

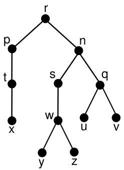
Tanım

düzey: köke olan uzaklık

- anne: kökle arasındaki yolda en yakın düğüm
- çocuk: bir sonraki düzeydeki komşu düğümler
- kardeş: aynı annenin çocuğu olan düğümler

Köklü Ağaç Örneği

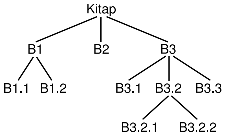
Örnek



- kök: r
- yapraklar: $x\ y\ z\ u\ v$
- içdüğümler: $r\ p\ n\ t\ s\ q\ w$
- y düğümünün annesi: w
  w düğümünün çocukları: y ve z
- y ve z kardeş

Köklü Ağaç Örneği

Örnek (kitap düzeni)



Kitap
- B1
  - B1.1
  - B1.2
- B2
- B3
  - B3.1
  - B3.2
    - B3.2.1
    - B3.2.2
  - B3.3

Sıralı Köklü Ağaç

- kardeş düğümler soldan sağa doğru sıralı
- evrensel adresleme sistemi
  - köke 0 adresini ver
  - 1. düzeydeki düğümlere soldan sağa doğru sırayla $1, 2, 3, \ldots$ adreslerini ver
  - v düğümünün adresi a ise, v düğümünün çocuklarına soldan sağa doğru sırayla $a.1, a.2, a.3, \ldots$ adreslerini ver

Sözlük Sırası

- b ve c iki adres olsun

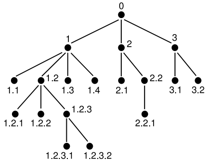
Tanım

$b < c$ olması için:

1. $b = a_1.a_2.\ldots.a_m$
   $c = a_1.a_2.\ldots.a_m.a_{m+1}\ldots a_n$
2. $b = a_1.a_2.\ldots.a_m.x_1\ldots y$
   $c = a_1.a_2.\ldots.a_m.x_2\ldots z$
   $x_1 < x_2$

Sözlük Sırası Örneği

Örnek



- 0 - 1 - 1.1 - 1.2
  - 1.2.1 - 1.2.2 - 1.2.3
  - 1.2.3.1 - 1.2.3.2
  - 1.3 - 1.4 - 2
  - 2.1 - 2.2 - 2.2.1
  - 3 - 3.1 - 3.2

İkili Ağaçlar

Tanım

ikili ağaç:

$\forall v \in V \; d_v{}^o \in \{0, 1, 2\}$

Tanım

tam ikili ağaç:

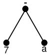
$\forall v \in V \; d_v{}^o \in \{0, 2\}$

İşlem Ağacı

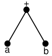
- ikili işlem tam ikili ağaçla temsil edilebilir
  - kökte işleç, çocuklarda işlenenler
- her işlem ikili ağaçla temsil edilebilir
  - içdüğümlerde işleçler, yapraklara değişkenler ve değerler
  - *tam ikili ağaç olmayabilir*

İşlem Ağacı Örnekleri

Örnek $(7 - a)$

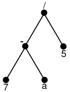


Örnek $(a + b)$

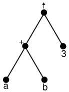


İşlem Ağacı Örnekleri

Örnek $((7 - a)/5)$

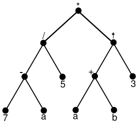


Örnek $((a + b) \uparrow 3)$



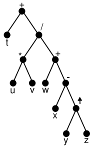
İşlem Ağacı Örnekleri

Örnek $(((7 - a)/5) * ((a + b) \uparrow 3))$



İşlem Ağacı Örnekleri

Örnek $(t + (u * v)/(w + x - y \uparrow z))$

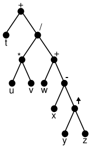


İşlem Ağacında Geçişler

1. içek geçişi: sol altağacı tara, köke uğra, sağ altağacı tara
2. önek geçişi: köke uğra, sol altağacı tara, sağ altağacı tara
3. sonek geçişi: sol altağacı tara, sağ altağacı tara, köke uğra
   - *ters Polonyalı gösterilimi*

Önek Geçişi Örneği

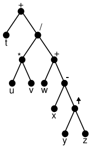
Örnek



$+ \ t \ / \ * \ u \ v \ + \ w \ - \ x \ \uparrow \ y \ z$

İçek Geçişi Örneği

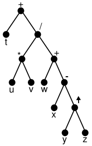
Örnek



$t \ + \ u \ * \ v \ / \ w \ + \ x \ - \ y \ \uparrow \ z$

Sonek Geçişi Örneği

Örnek



$t\ u\ v\ *\ w\ x\ y\ z\ \uparrow\ -\ +\ /\ +$

İşlem Ağacının Değerlendirilmesi

- işlem ağacında öncelikler:
  - içek geçişi parantez gerektirir
  - önek ve sonek parantez gerektirmez

Sonek Değerlendirme Örneği

Örnek ($t\ u\ v\ *\ w\ x\ y\ z\ \uparrow\ -\ +\ /\ +$)

$4\ 2\ 3\ *\ 1\ 9\ 2\ 3\ \uparrow\ -\ +\ /\ +$

4	2	3	$*$			
4	6	1	9	2	3	$\uparrow$
4	6	1	9	8	$-$	
4	6	1	1	$+$		
4	6	2	$/$			
4	3	$+$				
7						

Çizgelerde Arama

- $G = (V, E)$ çizgesinin düğümlerinin v_1 düğümünden başlanarak aranması
  - derinlemesine
  - enlemesine

Derinlemesine Arama

1. $v \leftarrow v_1, T = \emptyset,\ D = \{v_1\}$
2. $2 \leq i \leq |V|$ içinde $(v, v_i) \in E$ ve $v_i \notin D$ olacak şekilde en küçük i'yi bul
   - böyle bir i yoksa: 3. adıma git
   - varsa: $T = T \cup \{(v, v_i)\},\ D = D \cup \{v_i\},\ v \leftarrow v_i$, 2. adıma git
3. $v = v_1$ ise sonuç T
4. $v \neq v_1$ ise $v \leftarrow parent(v)$, 2. adıma git

Enlemesine Arama

1. $T = \emptyset,\ D = \{v_1\},\ Q = (v_1)$
2. Q boş ise: sonuç T
3. Q boş değilse: $v \leftarrow front(Q),\ Q \leftarrow Q - v$
   $2 \leq i \leq |V|$ için $(v, v_i) \in E$ ayrıtlarına bak:
   - $v_i \notin D$ ise: $Q = Q + v_i,\ T = T \cup \{(v, v_i)\},\ D = D \cup \{v_i\}$
   - 3. adıma git

Düzenli Ağaç

Tanım
m'li ağaç:
bütün içdüğümlerin çıkış kertesi m

Düzenli Ağaç Teoremleri

Teorem
bir m'li ağaçta

- n: *düğüm sayısı*
- l: *yaprak sayısı*
- i: *içdüğüm sayısı*

ise

- $n = m \cdot i + 1$
- $l = n - i = m \cdot i + 1 - i = (m - 1) \cdot i + 1$

$$i = \frac{l - 1}{m - 1}$$

Düzenli Ağaç Örnekleri

Örnek

27 oyuncunun katıldığı bir tenis turnuvasında kaç maç oynanır?

- her oyuncu bir yaprak: $l = 27$
- her maç bir içdüğüm: $m = 2$
- maç sayısı: $i = \frac{l-1}{m-1} = \frac{27-1}{2-1} = 26$

Düzenli Ağaç Örnekleri

Örnek

25 adet elektrikli aygıtı 4'lü uzatmalarla tek bir prize bağlamak için kaç uzatma gerekir?

- her aygıt bir yaprak: $l = 25$
- her uzatma bir içdüğüm: $m = 4$
- uzatma sayısı: $i = \frac{l-1}{m-1} = \frac{25-1}{4-1} = 8$

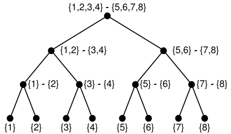
Karar Ağaçları

Örnek (sahte madeni para problemi)

- 8 madeni paranın biri sahte (daha ağır)
- bir teraziyle sahtenin hangisi olduğunu bulunacak

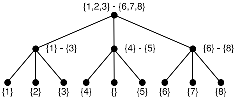
Karar Ağaçları

Örnek (3 tartmada bulma)



Karar Ağaçları

Örnek (2 tartmada bulma)



Kaynaklar

Okunacak: Grimaldi

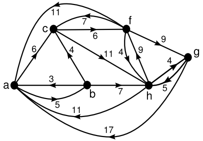
- Chapter 12: Trees
  - 12.1. Definitions and Examples
  - 12.2. Rooted Trees

En Kısa Yol

- Dijkstra algoritması bir düğümden bütün diğer düğümlere en kısa yolları bulur

Dijkstra Algoritması Örneği

Örnek (başlangıç)

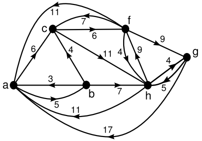


- başlangıç: *c*

a	$(\infty, -)$
b	$(\infty, -)$
c	$(0, -)$
f	$(\infty, -)$
g	$(\infty, -)$
h	$(\infty, -)$

Dijkstra Algoritması Örneği

Örnek (c düğümünden - taban uzaklık=0)



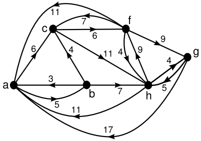
- $c \rightarrow f : 6, 6 < \infty$
- $c \rightarrow h : 11, 11 < \infty$

a	$(\infty, -)$	
b	$(\infty, -)$	
c	$(0, -)$	$\surd$
f	$(6, cf)$	
g	$(\infty, -)$	
h	$(11, ch)$	

- en yakın düğüm: f

Dijkstra Algoritması Örneği

Örnek (f düğümünden - taban uzaklık=6)



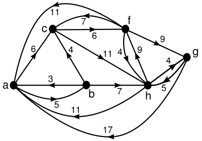
- $f \rightarrow a : 6 + 11, 17 < \infty$
- $f \rightarrow g : 6 + 9, 15 < \infty$
- $f \rightarrow h : 6 + 4, 10 < 11$

a	$(17, cfa)$	
b	$(\infty, -)$	
c	$(0, -)$	$\surd$
f	$(6, cf)$	$\surd$
g	$(15, cfg)$	
h	$(10, cfh)$	

- en yakın düğüm: h

Dijkstra Algoritması Örneği

Örnek (h düğümünden - taban uzaklık=10)



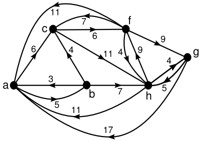
- $h \rightarrow a : 10 + 11, 21 \not< 17$
- $h \rightarrow g : 10 + 4, 14 < 15$

a	$(17, cfa)$	
b	$(\infty, -)$	
c	$(0, -)$	$\surd$
f	$(6, cf)$	$\surd$
g	$(14, cfhg)$	
h	$(10, cfh)$	$\surd$

- en yakın düğüm: g

Dijkstra Algoritması Örneği

Örnek (g düğümünden - taban uzaklık=14)



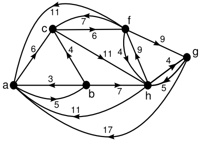
- $g \rightarrow a : 14 + 17, 31 \not< 17$

a	$(17, cfa)$	
b	$(\infty, -)$	
c	$(0, -)$	$\surd$
f	$(6, cf)$	$\surd$
g	$(14, cfhg)$	$\surd$
h	$(10, cfh)$	$\surd$

- en yakın düğüm: a

Dijkstra Algoritması Örneği

Örnek (a düğümünden - taban uzaklık=17)



- $a \rightarrow b : 17 + 5, 22 < \infty$

a	$(17, cfa)$	$\surd$
b	$(22, cfab)$	
c	$(0, -)$	$\surd$
f	$(6, cf)$	$\surd$
g	$(14, cfhg)$	$\surd$
h	$(10, cfh)$	$\surd$

- son düğüm: b

Kapsayan Ağaç

Tanım

kapsayan ağaç:
çizgenin bütün düğümlerini içeren, ağaç özellikleri taşıyan bir altçizgesi

Tanım

en hafif kapsayan ağaç:
ayrıt ağırlıklarının toplamının en az olduğu kapsayan ağaç

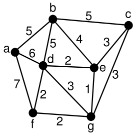
Kruskal Algoritması

Kruskal algoritması

1. $i \leftarrow 1$, $e_1 \in E$, $wt(e_1)$ minimum
2. $1 \leq i \leq n-2$ için:
   şu ana kadar seçilen ayrıtlar $e_1, e_2, \ldots, e_i$ ise
   kalan ayrıtlardan öyle bir e_{i+1} seç ki:
   - $wt(e_{i+1})$ minimum olsun
   - $e_1, e_2, \ldots, e_i, e_{i+1}$ altçizgesi çevre içermesin
3. $i \leftarrow i + 1$
   - $i = n - 1 \Rightarrow e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ ayrıtlarından oluşan G altçizgesi bir en hafif kapsayan ağaçtır
   - $i < n - 1 \Rightarrow$ 2. adıma git

Kruskal Algoritması Örneği

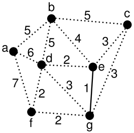
Örnek (başlangıç)



- $i \leftarrow 1$
- en düşük ağırlık: 1 (e, g)
- $T = \{(e, g)\}$

Kruskal Algoritması Örneği

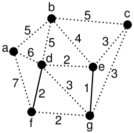
Örnek ($1 < 6$)



- en düşük ağırlık: 2
  $(d,e),(d,f),(f,g)$
- $T = \{(e,g),(d,f)\}$
- $i \leftarrow 2$

Kruskal Algoritması Örneği

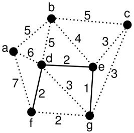
Örnek ($2 < 6$)



- en düşük ağırlık: 2
  $(d,e),(f,g)$
- $T = \{(e,g),(d,f),(d,e)\}$
- $i \leftarrow 3$

Kruskal Algoritması Örneği

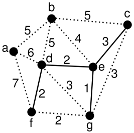
Örnek ($3 < 6$)



- en düşük ağırlık: 2
  (f,g) çevre oluşturuyor
- en düşük ağırlık: 3
  $(c,e),(c,g),(d,g)$
  (d,g) çevre oluşturuyor
- $T = \{(e,g),(d,f),(d,e),(c,e)\}$
- $i \leftarrow 4$

Kruskal Algoritması Örneği

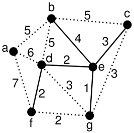
Örnek ($4 < 6$)



- $T = \{$
  $(e,g),(d,f),(d,e),$
  $(c,e),(b,e)$
  $\}$
- $i \leftarrow 5$

Kruskal Algoritması Örneği

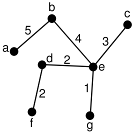
Örnek ($5 < 6$)



- $T = \{$
  $(e, g), (d, f), (d, e),$
  $(c, e), (b, e), (a, b)$
  $\}$
- $i \leftarrow 6$

Kruskal Algoritması Örneği

Örnek ($6 \not< 6$)



- toplam ağırlık: 17

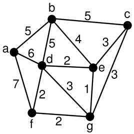
Prim Algoritması

Prim algoritması

1. $i \leftarrow 1$, $v_1 \in V$, $P = \{v_1\}$, $N = V - \{v_1\}$, $T = \emptyset$
2. $1 \leq i \leq n - 1$ için:
   $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, $T = \{e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}\}$, $N = V - P$
   öyle bir $v_{i+1} \in N$ düğümü seç ki, bir $x \in P$ düğümü için
   $e = (x, v_{i+1}) \notin T$, $wt(e)$ minimum olsun
   $P \leftarrow P + \{v_{i+1}\}$, $N \leftarrow N - \{v_{i+1}\}$, $T \leftarrow T + \{e\}$
3. $i \leftarrow i + 1$
   - $i = n \Rightarrow e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ ayrıtlarından oluşan G altçizgesi bir en hafif kapsayan ağaçtır
   - $i < n \Rightarrow$ 2. adıma git

Prim Algoritması Örneği

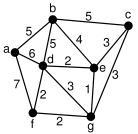
Örnek (başlangıç)



- $i \leftarrow 1$
- $P = \{a\}$
- $N = \{b, c, d, e, f, g\}$
- $T = \emptyset$

Prim Algoritması Örneği

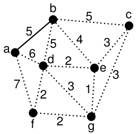
Örnek (1 < 7)



- $T = \{(a, b)\}$
- $P = \{a, b\}$
- $N = \{c, d, e, f, g\}$
- $i \leftarrow 2$

Prim Algoritması Örneği

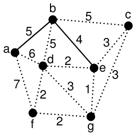
Örnek (2 < 7)



- $T = \{(a, b), (b, e)\}$
- $P = \{a, b, e\}$
- $N = \{c, d, f, g\}$
- $i \leftarrow 3$

Prim Algoritması Örneği

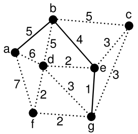
Örnek (3 < 7)



- $T = \{(a, b), (b, e), (e, g)\}$
- $P = \{a, b, e, g\}$
- $N = \{c, d, f\}$
- $i \leftarrow 4$

Prim Algoritması Örneği

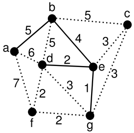
Örnek (4 < 7)



- $T = \{(a, b), (b, e), (e, g), (d, e)\}$
- $P = \{a, b, e, g, d\}$
- $N = \{c, f\}$
- $i \leftarrow 5$

Prim Algoritması Örneği

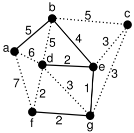
Örnek ($5 < 7$)



- $T = \{$
  $(a, b), (b, e), (e, g),$
  $(d, e), (f, g)$
  $\}$
- $P = \{a, b, e, g, d, f\}$
- $N = \{c\}$
- $i \leftarrow 6$

Prim Algoritması Örneği

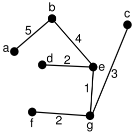
Örnek ($6 < 7$)



- $T = \{$
  $(a, b), (b, e), (e, g),$
  $(d, e), (f, g), (c, g)$
  $\}$
- $P = \{a, b, e, g, d, f, c\}$
- $N = \emptyset$
- $i \leftarrow 7$

Prim Algoritması Örneği

Örnek ($7 \not< 7$)



- toplam ağırlık: 17

Kaynaklar

Okunacak: Grimaldi

- Chapter 13: Optimization and Matching
  - 13.1. Dijkstra's Shortest Path Algorithm
  - 13.2. Minimal Spanning Trees:
    The Algorithms of Kruskal and Prim