0. Introduction (簡介)

矩陣理論與應用是你們大二時學習線性代數的基礎.

何謂矩陣？你們大多數人在高中時應該都學過. 但何謂線性代數？為什麼要學線性代數？線性代數和矩陣有何關連？

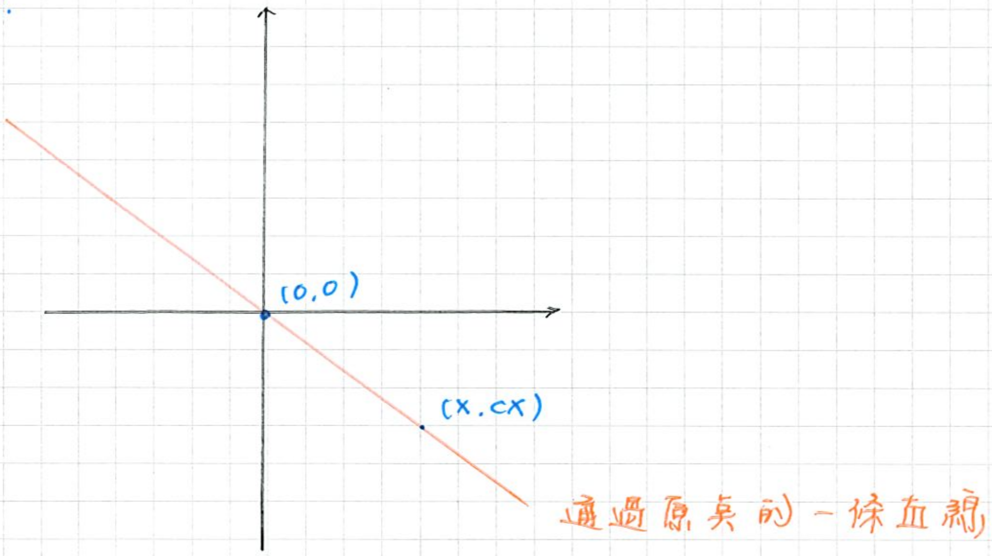
簡單地說. 線性代數主要談的是線性函數 (linear function) 的性質. 最簡單的線性函數即為

$$L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto cx \quad \text{for some } c \in \mathbb{R}$$

i.e., $L(x) = cx$

用圖形來看.

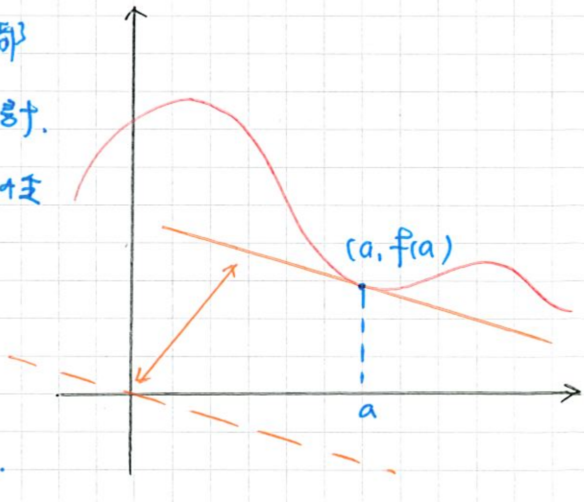


為什麼要討論這种函數？

(1) 這种函數是所有 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的函數中最簡單.

(2) 一般的連續函數在每一點附近都可以用個線性函數的平移來做估計.

(3) 很多數學觀念本身就有線性的性質, e.g., 微分, 積分.



當然, 這裏看的是 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的函數.

但我們要想討論的是更一般的情形.

如 $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. 或 $L: V \longrightarrow W$ (其中 V, W: vector spaces, 向量空間) 的線性函數. (我們稱為 linear transform, 線性轉換).

但為什麼要學線性代數? 什麼時候會用到高維度空間?
舉個例子來看, 以股票價格而言. 假設市場上有100檔股票.

$$\text{昨天的股票價格} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{100} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{今天的股票價格} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{100} \end{bmatrix}$$

不一定是線性的,
但可用線性來估計.

$\Longrightarrow$ 考慮 $\mathbb{R}^{100} \longrightarrow \mathbb{R}^{100}$ 的 linear transformation.

$$\text{今天的股票價格} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{100} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{明天所有可能的股票價格} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1\,1000} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2\,1000} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{100\,1} & c_{100\,2} & \cdots & c_{100\,1000} \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ 考慮 $\mathbb{R}^{100} \longrightarrow \{100 \times 1000$ 的矩陣$\}$ 的 linear transformation.

vector space.

但這種高維度的函數太過於複雜了. 即便是線性函數也是. 討論這麼複雜的函數非常麻煩. 在線性代數中, 我們會提到一個非常重要的定理:

線性函數和矩陣有一對一的對應關係.

每一個線性轉換 (linear transformation) 都會對應到一個矩陣. 所以詳細討論矩陣的性質就可推至 linear transformation 的性質.

另外. 矩陣在其他方面也有很多的應用.

(1) <u>解線性聯立方程組</u>: 如

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 4x - 3y + z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

我們在這節課會介紹幾種方法來解這組線性聯立方程組，如高斯消去法、矩陣法、Cramer's rule 等等。

(2) 解線性微分方程

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

我們可以用線性代數的方法來解這個方程式。

(3) 財務模型。

另外，高等微積分中也會用到線性代數與矩陣。