## 1.2 Length and inner product (長度與內積)

**Definition 6:** $u, v \in \mathbb{R}^n$

The inner product (內積) of $u$ and $v$ is defined by

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

**Example 7:** (1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \times (-1) + 2 \times 2 = -4 + 4 = 0.$

(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times (-3) = 6 - 1 - 3 = 2.$

**Remark 8:** $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

(1) $u \cdot v = v \cdot u$ (可交換)

(2) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

(3) $(cu) \cdot v = c(u \cdot v)$.

(4) If $u \cdot v = 0$, then $u$ and $v$ are perpendicular (垂直).

**Definition 9:** The length (norm, 長度) of a vector $u \in \mathbb{R}^n$ is defined by

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \left( \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \right)^{1/2}$$

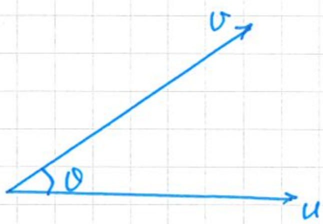
若以向量來看,這個長度的定義十分自然

**Example 10:** (1) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|u\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

(2) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \|u\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{42}.$

**Lemma 11:** $u, v \in \mathbb{R}^n$, 向量夾角 $\theta$, 則

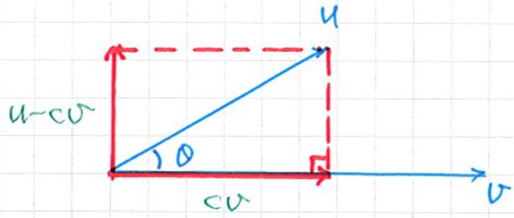
$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos\theta.$$



因為 $\cos(-\theta) = \cos\theta$，所以 $\theta$ 這個角度並無方向性。

**proof:** 若 $u = \underbrace{cv}_{\uparrow} + \underbrace{(u-cv)}_{\uparrow}$ for some $c$

兩者垂直




由

$$\|cv\| = \|u\|\cos\theta$$

$$\Longrightarrow c = \frac{\|u\|}{\|v\|}\cos\theta$$ （這是當 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 時，若 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 時，結果一樣，只是推導過程得修正）

Moreover,

$$cv\cdot(u-cv) = 0$$

$$\Longrightarrow cv\cdot u = c^2 v\cdot v = c^2\|v\|^2$$

$$\Longrightarrow u\cdot v = c\|v\|^2 = \frac{\|u\|}{\|v\|}\cos\theta\cdot\|v\|^2$$

$$= \|u\|\|v\|\cos\theta.$$

**Example 12:** $u = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

則 $u, v$ 的夾角為何？

**Solution:** $\cos\theta = \dfrac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|} = \dfrac{1\cdot2+2\cdot1}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{4}{5}$

$$\Longrightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{4}{5}$$

**Corollary 13** (Schwarz inequality)

$u, v \in \mathbb{R}^n$, then

$$|u\cdot v| \le \|u\|\|v\|.$$

i.e.,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

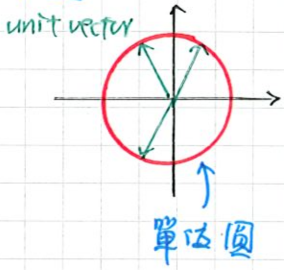
**Definition 14**: A unit vector (單位向量) is a vector whose length = 1.

**Example 15**: (1) $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ are unit vectors.

(2) $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ is a unit vector.

(3) $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ is a unit vector.

如果用圖形來看的話，unit vector 即為單位圓上的向量




**Remark 16**: $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$. then

$v = \dfrac{u}{\|u\|}$ is a unit vector in the same direction as $u$.

**Example 17**: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, then

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ is a unit vector.

**Remark 18**: $u, v \in \mathbb{R}^n$: unit vector at angel $\theta$.

$\Longrightarrow$ $u \cdot v = \cos\theta$ and $|u \cdot v| \leq 1$.

**Proposition 19** (Triangle inequality, 三角不等式)

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$


三角不等式是用途非常廣的一個不等式.
基本想法和你們以前學的三角不等式是一樣的.

**proof**: $\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + 2u\cdot v + v\cdot v$

$$= \|u\|^2 + 2u\cdot v + \|v\|^2 \underset{\text{Cor. 13}}{\leq} \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

在平面或空間上還有一個很直欺的問題：

**Question:** $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. $b \in \mathbb{R}^3$

Does there exist $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ such that

$$b = c_1 u + c_2 v + c_3 w \ ?$$

這裏為了方便起見，我們用 $\mathbb{R}^3$，但同樣的問題可以延伸到 $\mathbb{R}^n$.
這也是線性代數前半段在談的內容，是不是對於任意的 $u, v, w$，$\mathbb{R}^3$ 上的任何向量都可以寫成 $u, v, w$ 的 linear combination？或者 $u, v, w$ 需有什麼條件？給定 $u, v, w$ 後，$b$ 最多可以到那些向量？

**Example 20:** $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

是否存在 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ 使得

$$c_1 u + c_2 v + c_3 w = b \ ?$$

**Solution:** $c_1 u + c_2 v + c_3 w = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 + c_2 \\ -c_2 + c_3 \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ solving

$$\begin{cases} c_1 = b_1 \\ -c_1 + c_2 = b_2 \\ -c_2 + c_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = b_1 \\ c_2 = b_1 + b_2 \\ c_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

但絕大多數的 linear system 並不是那麼好解，尤其是高維度的狀況。

對一般的情況，我們應該怎麼解？或者說應該怎麼"有系統"地計算。基本上，在這一章我們介紹兩種方法：

method 1：利用 Gaussian elimination（高斯消去法）

method 2：利用矩陣.

將 (*) 改寫成

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=(u\ v\ w)\ =A} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{=c} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{=b}$$

i.e.,

$$Ac = b.$$

求 c. 可利用反矩陣來求 c.

這兩種方法各有優缺點：

| | 優點 | 缺點 |
|---|---|---|
| method 1 | 適用於所有情形 | 複雜 |
| method 2 | 看起來比較簡單 | 只限於可逆矩陣 |

當然，這兩種方法在這裏看起來似乎不是很複雜，但如果維度稍微高一點的狀況呢？或者，我們如果想在電腦上寫個如同的程式，有沒有有系統的方法解決這個問題

但無論那個方法，認識"矩陣"是無法避免的.