1.3.2 Matrix multiplication

這一小節談的是矩陣的各種運算.

Definition 23: $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, 則

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}.$$

or explicitly,

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$cA = c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

和高中時學的一模一樣, 只是矩陣變大了.

重點: 只有相同大小的矩陣才能相加.

Example 24: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+2 & 3+3 \\ 3+5 & 1+(-2) & 2+(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

對應的位置相加即可.

$$(-2)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times 2 & -2\times 1 & -2\times 4 \\ -2\times 3 & -2\times(-1) & -2\times(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -2 & -8 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Remark 25: 向量 $u \in \mathbb{R}^n$ 可視為 $n\times 1$ matrix.
所以所有的運算均可視為矩陣運算.

Definition 26: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

We define the product of A and B, denoted by AB, to be the $m\times p$ matrix such that

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \qquad \text{for } 1\le i\le m,\ 1\le j\le p.$$

想法： "$(m\times \underline{n})\times(\underline{n}\times p) = m\times p$"

必須相同才能定義矩陣乘法.

Example 27: (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2+2+0 & -4+0+0 & 1+2+0 & 3+0+0 \\ 8+1+9 & -16+0+3 & 4+1+3 & 12+0-3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 & 3 \\ 18 & -13 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

"$(2\times 3)\times(3\times 4) = (2\times 4)$"

(2) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4+6+0 & -4-6+6 \\ 1+2+0 & -1-2+9 \\ 2+0+0 & -2+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

"$(3\times 3)\times(3\times 2) = 3\times 2$"

Remark 28: (1) matrix multiplication 滿足結合律, i.e.,

$$(AB)C = A(BC)$$

所以可以直接寫 ABC.

(2) matrix multiplication 滿足分配律, i.e.,

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)D = BD + CD.$$

(3) 但 matrix multiplication 不滿足交換律. As usual,

$$AB \ne BA.$$

e.g., for

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix},$$

then

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\-3&10\end{pmatrix}$$

$$\#$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\3&4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow AB\neq BA.$

至於矩陣與向量的乘法，我們在前面講過可以將 $\mathbb{R}^n$ 上的向量視為 $n\times 1$ 的矩陣，所以向量與矩陣的乘法可視為矩陣乘法。

想想我們之前談的線性聯立方程組。

Remark 29:
$$\begin{cases}2x+4y-2z=2\\4x+9y-3z=8\\-2x-3y+7z=10\end{cases}$$

我們可將這個線性聯立方程組寫成矩陣與向量相乘。

$$\begin{bmatrix}2&4&-2\\4&9&-3\\-2&-3&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\8\\10\end{bmatrix}$$

or

$$x\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}4\\9\\-3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-2\\-3\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\8\\10\end{bmatrix}$$

這正是我們在上一節所寫的形式。