Конспект лекций по алгебре

Лектор: Игорь Борисович Жуков

Оглавление

Элементы теории чисел

1 Делимость

Определение. $a, b \in \mathbb{Z}, a \mid b \iff \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$

Свойства:

1. $a \mid a$ — рефлексивность
2. $a \mid b, b \mid c \implies \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$ — транзитивность
3. $a \mid b, k \in \mathbb{Z} \implies ka \mid kb$
4. $a \mid b_1, a \mid b_2 \implies a \mid (b_1 \pm b_2)$
5. $\pm 1 \mid a$
6. a и b ассоциированны, если $a \mid b,\ b \mid a \implies a = \pm b$
7. a, a' и b, b' — ассоциированны, тогда $a \mid b \iff a' \mid b'$
8. $k \neq 0, ka \mid kb \iff a \mid b$

2 Отношение эквивалентности и разбиение на классы

Определение. Отношение эквивалентности — бинарное отношение, удовлетворяющее следующим свойствам: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Определение. Разбиение на классы множества M — это представление M в виде $M = \bigcup\limits_{i \in I} M_i$, где M_i — классы, I — индексное множество, $M_i \cap M_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Теорема. *Пусть* $M = \bigcup\limits_{i \in I} M_i$ *— разбиение на классы, тогда* $a \sim b \iff \exists i : a, b \in M_i$.

Доказательство. рефлексивность, симметричность — очевидны

транзитивность: $a \sim b, b \sim c \implies \exists i, j : a, b \in M_i$ и $b, c \in M_j$

$b \in M_i \cap M_j \iff M_i \cap M_j \neq \emptyset \implies i = j \implies a, c \in M_i \implies a \sim c$

Теорема. $\exists \sim$ *— отношение эквивалентности на* M*. Значит* $\exists$ *разбиение на классы* $M = \bigcup\limits_{i \in I} M_i$ *такое, что* $\forall a, b \in M : a \sim b \iff \exists i : a, b \in M_i$.

Доказательство.

$[a] = \{b \in M \mid a \sim b\}$ — класс, $a \in M$

$\forall a_1, a_2 \in M : [a_1] \cap [a_2] = \emptyset$ или $[a_1] = [a_2]$ $\exists [a_1] \cap [a_2] \neq \emptyset \implies \exists x \in [a_1] \cap [a_2]$

$x \in [a_1], x \in [a_2] \implies x \sim a_1, x \sim a_2 \implies a_2 \sim a_1$

$[a_2] \subset [a_1], c \in [a_2] \implies c \sim a_2 \implies c \sim a_1 \implies c \in [a_1]$

$[a_1] \subset [a_2], c \in [a_1] \implies c \sim a_1 \implies c \sim a_2 \implies c \in [a_2]$

Значит $[a_1] = [a_2]$

$I = \{[a] \mid a \in M\}$

$\forall \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in I : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \emptyset$

$a_1, a_2 \in \mathfrak{A} \implies [a_1] = \mathfrak{A} = [a_2] \implies a_2 \in [a_1] \implies a_2 \sim a_1$

$a_1 \in \mathfrak{A}, a_2 \in \mathfrak{B} \implies \neg(a_1 \sim a_2)$, так как иначе $a_1 \in [a_2] \implies \mathfrak{B} \in \mathfrak{A} \implies \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \neq \emptyset$

Определение. Фактор-множество по отношению эквивалентности $\sim$ — множество I, обозначим его как $M/\sim$

Пример: $\mathbb{Z}/\sim = \{[z] \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], [2], \ldots\}$

3 Сравнение по модулю

Определение. $\exists a, b, m \in \mathbb{Z}$. Говорят, что $m \mid (a - b)$.

Свойства:

1. $\underset{m}{\equiv}$ — рефлексивно

2. $\underset{m}{\equiv}$ — симметрично

3. $\underset{m}{\equiv}$ — транзитивно

4. $a \underset{m}{\equiv} b, d \mid m \implies a^d \underset{m}{\equiv} b$

5. $a \underset{m}{\equiv} b, k \in \mathbb{Z} \implies ka \underset{km}{\equiv} kb$

6. $a \underset{m}{\equiv} b, k \in \mathbb{Z} \implies ka \underset{m}{\equiv} kb$

7. $a_1 \underset{m}{\equiv} b_1, a_2 \underset{m}{\equiv} b_2 \implies a_1 \pm a_2 \underset{m}{\equiv} b_1 \pm b_2$

8. $a_1 \underset{m}{\equiv} b_1, a_2 \underset{m}{\equiv} b_2 \implies a_1 a_2 \underset{m}{\equiv} b_1 b_2$

4 Кольцо классов вычетов

Определение. Множество классов вычетов по модулю m — это множество всех вычетов по модулю m.
Обозначается как $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \iff \mathbb{Z}/m \iff \mathbb{Z}/\underset{m}{\equiv}$

Теорема. $\exists m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$

2. $|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = m$

Доказательство.

1. $a \in \mathbb{Z}$ $(!)\overline{a} = \overline{r},\ 0 \leqslant r < m$

   a) $a \geqslant 0$, $\exists r$ — наименьшее число, такое что $r \geqslant 0, a \underset{m}{\equiv} r$
   $r \geqslant m \implies r - m \underset{m}{\equiv} a, r - m \geqslant 0, r - m < r$. Противоречие с выбором r.
   Значит $r < m$, тоесть r — искомое.

b) $a < 0,\ a' = a \pm (-a)m = a(1-m) \geqslant 0$

$\overline{a} = \overline{a'} = \overline{r},\ 0 \leqslant r < m$

2. предположим $\overline{r} = \overline{r'},\ 0 \leqslant r, r' < m$.

   $|r' - r| < m \implies m \mid (r - r') \implies r' - r = 0$

Следствие: Теорема о делениии с остатком — $\exists a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \implies \exists! q, r \in \mathbb{Z}$

1. $a = bq + r,\ 0 \leqslant r < b$
2. $0 \leqslant r < b$

Доказательство.

Существование:

В $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ рассмотрим $\overline{a} \in \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{b-1}\}$, тогда если $\overline{a} = \overline{r},\ 0 \leqslant r < b$

$a \underset{b}{\equiv} r \iff a = bq + r,\ q \in \mathbb{Z}$

Единственность:

$\exists a = bq + r = bq' + r',\ 0 \leqslant r, r' < b \iff \overline{bq + r} = \overline{bq' + r'} \iff \overline{r} = \overline{r'} \iff r = r' \implies bq = bq' \implies q = q'$

Определение. q — неполное частное при делении a на b, r — остаток при делении a на b

Определение. Операция на множестве M — бинарная операция $M \times M \to M$

На $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ определим операцию сложения и умножения по модулю m:

- $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$
- $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$

(!) $\overline{a} = \overline{a'},\ \overline{b} = \overline{b'} \implies \overline{a + b} = \overline{a' + b'},\ \overline{a \cdot b} = \overline{a' \cdot b'}$

$\overline{a} = \overline{a'},\ \overline{b} = \overline{b'} \implies a \underset{m}{\equiv} a', \implies b \underset{m}{\equiv} b' \implies a + b \underset{m}{\equiv} a' + b',\ a \cdot b \underset{m}{\equiv} a' \cdot b' \implies$

$\overline{a+b} = \overline{a'+b'},\ \overline{a\cdot b} = \overline{a'\cdot b'}$

<u>Пример:</u>

$m = 4, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Определение. $e \in M$ — нейтральный элемент относительно операции(*) на M, если $\forall a \in M$ справедливо $a * e = e * a = a$

Предложение. *Операции сложения и умножения на $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ обладают следующими свойствами:*

1. $A + B = B + A$ — коммутативность сложения
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ — ассоциативность сложения
3. $A + \overline{0} = A$— существование нейтрального элемента относительно сложения
4. $A + A' = \overline{0}$ — существование обратного элемента относительно сложения
5. $AB = BA$ — коммутативность умножения
6. $(AB)C = A(BC)$ — ассоциативность умножения
7. $A \cdot \overline{1} = A$ — существование нейтрального элемента относительно умножения
8. $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ — дистрибутивность умножения относительно сложения.
9. $(B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$ — дистрибутивность сложения относительно умножения.

Определение. Кольцом называется множество M с операциями сложения и умножения, для которых выполнены аналоги свойств 1-4 и 8-9.

Определение. Кольцо коммутативное, если выполнены свойство 5.

Определение. Колько ассоциативное, если выполнено свойство 6.

Определение. Кольцо с единицей, если выполнено свойство 7.

Определение. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = n \implies n$ — нейтральный элемент относительно сложения.

<u>*Замечание:*</u> Если (*) — операция на M, то существует единственный нейтральный элемент относительно (*).
Доказательство. e, e' — нейтральные элементы относительно (*), тогда $e = e * e' = e'$.

Предложение. ***В нашем курсе все кольца будут ассоциативные с единицей.***

Лемма. *В любом кольце* $0 \cdot a = 0$.

Доказательство. $0 + 0 = 0 \implies (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a \implies 0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a$
$\exists 0 \cdot A \neq 0 \implies \exists b : b + 0 \cdot A = 0$
$0 = b + 0 \cdot a = b + (0 \cdot a + 0 \cdot a) = (b + 0 \cdot a) + (0 \cdot a) = 0 + (0 \cdot a) = (0 \cdot a)$

Определение. A^* — множество обратимых элементов A.

<u>Примеры:</u>

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$
- $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* = \{\overline{1}, \overline{3}\}$
- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

Определение. Полем называется коммутативное кольцо F, такое что $F^* = F \setminus \{0\}$.

5 Наибольший общий делитель

Определение. R — коммутативное кольцо, $a, b \in R$.

Элемент d называется наибольшим общим делителем, если:

1. $d \mid a, d \mid b$
2. $d' \mid a, d' \mid b \implies d' \mid d$

Предложение.

1. *d_1, d_2 — наибольшие общие делители, тогда d_1, d_2 — ассоциированны.*
2. *$\exists d_1$ — наибольший общий делитель, d_2 ассоциированн с d_1, тогда d_2 — тоже наибольший общий делитель.*

Доказательство.

1. По свойству 2. $d_1 \mid d_2,\ d_2 \mid d_1 \implies d_1,\ d_2$ — ассоциированны.
2. $d_2 \mid d_1,\ d_1 \mid a,\ d_1 \mid b \implies d_2 \mid a,\ d_2 \mid b$
   Пусть d_2 не наибольший, тогда $\exists d' > d_2$.
   $d' \mid a,\ d' \mid b \implies d' \mid d_1$
   $d' \mid d_1,\ d_1 \mid d_2 \implies d' \mid d_2$
   Противоречие

Предложение. $\exists a, b \in \mathbb{Z} \implies$

1. *$\exists d \in \mathbb{Z} :\ a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$*
2. *при этом d — наибольший общий делитель a, b.*

Доказательство.

1. $I = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, заметим что $0 \in I$, так как $0a + 0b = 0$.
   $I = \{0\} \implies I = 0\mathbb{Z}$
   $I \neq \{0\} \implies c \in I \implies -c \in I$, так как $-(ax + by) = a \cdot -x + b \cdot -y$

То есть в I есть положительные числа.

$d = \min\{c \mid c \in I, c > 0\}$, докажем что $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$

"$\subset$":

$d \in I \implies d = ax_0 + by_0, x_0, y_0 \in \mathbb{Z} \implies$

$\forall z \in \mathbb{Z} : dz = a(x_0z) + b(y_0z) \in I$

"$\supset$":

$\exists c \in I, d \in \mathbb{N} \implies \exists q, r \in \mathbb{Z} : c = dq + r, 0 \leqslant r < d$

$c = ax_1 + by_1, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$

$d = ax_0 + by_0, x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$

$r = c - dq = a(x_1 - x_0q) + b(y_1 - y_0q) \in I$

Но $r < d \overset{defn(d)}{\implies} r = 0 \implies c \in d\mathbb{Z}$

2. $a = a1 + b0 \in I = d\mathbb{Z} \implies d \mid a$

   $b = a0 + b1 \in I = d\mathbb{Z} \implies d \mid b$

   $\exists d' \mid a,\ d' \mid b,\ d = ax_0 + by_0$

   $d' \mid ax_0,\ d' \mid by_0 \implies d' \mid d$

Следствие:

1. $a, b \in \mathbb{Z}$: Тогда наибольший общий делитель a, b существует.

2. Если d — наибольший общий делитель a, b, то $\exists x, y \in \mathbb{Z} :\ d = ax + by$(Линейное представление наибольшего общего делителя).

Доказательство.

1. Доказали в двух частях предложения.

2. $\exists d_0$ — наибольший общий делитель a, b, то есть $d_0 = ax_0 + by_0$

   d ассоциирован с $d_0 \implies d = d_0\mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z} \implies d = a(x_0z) + b(y_0z)$

Определение. НОД$(a, b) = \gcd(a, b)$ — неотрицательный наибольший общий делитель a, b.

Предложение. $\exists a_1, a_2, b \in \mathbb{Z} : a_1 \underset{b}{\equiv} a_2$
Тогда $\gcd(a_1, b) = \gcd(a_2, b)$.

Доказательство. (!) $\{c : c \mid a_1, c \mid b\} = \{c : c \mid a_2, c \mid b\}$

"$\subset$":

$a_2 - a_1 = bm \implies a_2 = a_1 + bm$

$c \mid a_1, c \mid b \implies c \mid a_2$

"$\supset$":

$a_1 - a_2 = bm \implies a_1 = a_2 + bm$

$c \mid a_2, c \mid b \implies c \mid a_1$

$\forall x \in \{c : c \mid a_1, c \mid b\} : x \mid \gcd(a_1, b)$

$\forall x \in \{c : c \mid a_2, c \mid b\} : x \mid \gcd(a_2, b)$

$\gcd(a_1, b) = \gcd(a_2, b)$

Определение. Алгоритм Евклида

$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \mod b)$, если $b \neq 0$

6 Взаимно простые числа

Определение. Числа a и b называются взаимно простыми, если $\gcd(a, b) = 1$.

Предложение.

1. $\exists a, b \in \mathbb{Z}$, *тогда* $a \perp b \iff \exists m, n \in \mathbb{Z} : am + bn = 1$.

2. $a_1 \perp b, a_2 \perp b \implies a_1 a_2 \perp b$.

3. $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ *и* $\forall i, j : a_i \perp b_j \implies a_1 \dots a_m \perp b_1 \dots b_n$.

4. $a \mid bc,\ a \perp b \implies a \mid c$.

5. $ax \underset{m}{\equiv} ay,\ a \perp m \implies x \underset{m}{\equiv} y$.

6. $\gcd(a, b) = d \implies a = da',\ b = db', a' \perp b'$.

Доказательство.

1. m и n существуют согласно линейному представлению НОД.

   $d = \gcd(a, b), d \mid a, d \mid b \implies d \mid (am + bn) = 1 \implies d \mid 1 \implies d = 1.$

2. $1 = a_1m_1+bn_1, 1 = a_2m_2+bn_2 \implies 1 = a_1a_2(m_1m_2)+b(a_1m_1n_2+a_2m_2n_1+bn_1n_2) \implies a_1a_2 \perp b.$

3. $a_1 \perp b, \ldots,\ a_n \perp b \implies a_1 \ldots a_n \perp b$

   $a_1 \ldots a_n \perp b_1, \ldots,\ a_1 \ldots a_n \perp b_n \implies a_1 \ldots a_n \perp b_1 \ldots b_n$

4. $1 = am + bn, c = acm + bcn$

   $a \mid acm,\ a \mid bcn \implies a \mid c.$

5. $m \mid (ax - ay), a \perp m \implies m \mid (x - y) \implies x \underset{m}{\equiv} y.$

6. $d \mid a, d \mid b \implies a = da',\ b = db' : a', b' \in \mathbb{Z}$

   $d = am + bn,\ m, n \in \mathbb{Z}$

   $d = 0 \implies a' = b' = 1 = da'm + db'm$

   $d \neq 0 \implies 1 = a'm + b'n \implies a' \perp b'.$

7 Линейные диофантовы уравнения

Определение. Линейным диофантовым уравнением с двумя неизвестными называется уравнение вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Для решения нужно найти пару $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : ax + by = c.$

Пример: $12x + 21y = 5$ — уравнение не имеет решений.

Если $\gcd(a, b) \mid c$, то решение существует, иначе — нет.

нужно доделать параграф

8 Простые числа

Определение. Число $p \in \mathbb{Z}$ называется простым, если $p \notin \{-1, 0, 1\}$ и все делители p — это ± 1 и p.

Свойства:

1. p — простое $\iff$ $-p$ — простое.
2. p — простое, $a \in \mathbb{Z} \implies p|a$ или $p \perp a$.
3. p, q — простые $\implies p, q$ — ассоциированны или $p \perp q$.
4. $p \mid ab \implies p \mid a$ или $p \mid b$.

Предложение. $\exists a \neq \pm 1$, *тогда существует простое число* $p : p \mid a$.

Доказательство. $a = 0 \implies p = 239$

$a = 1 \implies a > 0$

Индукция по a:

a — простое $\implies p = a, p \mid a$

a — не простое, $\exists d : 1 < d < a, d \mid a$

$a = dd'$, тогда по индукционному переходу существует простое число $p : p \mid d$

$p \mid d, d \mid a \implies p \mid a$

Определение. Составное число — это число отличное от 0, и не являющееся простым.

Решето Эратосфена

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., 100

- 2 — простое, вычеркиваем все числа кратные 2
- 3 — простое, вычеркиваем все числа кратные 3
- 4 — составное, пропускаем

- и.т.д.

Теорема. *(Теорема Евклида) Существует бесконечно много простых чисел*

Доказательство. $\exists p_1, p_2, \dots p_n$ — все простые числа
$N = p_1 p_2 \dots p_n + 1 \implies$
$\exists$ простое число $p : p \mid N, p > 0 \implies \exists j : p = p_j \implies p \mid (N-1) \implies p \mid 1 \implies p = \pm 1$
Противоречие

9 Основная теорема арифметики

Теорема. $\exists n \geqslant 2$. *Тогда n можно представить в виде произведения простых чисел, и такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей.*

Доказательство.
Существование:
$\exists n_0$ — наименьшее число ($\geqslant 2$), для которого такого представления нету.
n_0 — составное число $\implies n_0 = ab, 2 \leqslant a, b < n_0$
По минимальности $\implies a = p_1 \dots p_k, b = q_1 \dots q_l$, все p_i, q_j — простые.
$\implies n_0 = p_1 \dots p_k q_1 \dots q_l$ — Противоречие
Единственность:
$n = p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_l$, p_i, q_j — простые.
Нудно доказать: $k = l$, $q_1, \dots, q_k$ совпадают с $p_1, \dots, p_k$ с точностью до порядка.
Не умаляя общности иожно считать: $k \leqslant l$.
Индукция по k:
$k = 1$: $p_1 = q_1 \dots q_l$, p_1 — простое $\implies l = 1, p_1 = q_1$
k > 1: $p_k \mid n \implies p_k \mid (q_1 \dots q_l) \implies \exists j : p_k \mid q_j \implies p_k \sim q_j \implies p_k = q_j \implies$
$p_1 \dots p_{k-1} = q_1 \dots \hat{q}_j \dots q_l,\ k-1 \leqslant l-1$
$k-1 < k \implies$ применим индукционный переход:
$k-1 = l-1$ и $q_1, \dots, \hat{q}_j, \dots, q_k$ — это $p_1, \dots, p_{k-1}$ с точностью до порядка. $\implies$
$q_1, \dots, (q_j = p_k), \dots, q_k$ — это $p_1, \dots, p_k$ с точностью до порядка.

Определение. Каноническое разложение(факторизация) числа n — это представление n в виде $p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$, где p_i — разложение n на простые множители, $r_i \in \mathbb{N}$

Примеры:

- $n = 112 = 2^4 \cdot 7$
- $n = 6006 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1$

Предложение. $\rceil a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}, b = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}$
Тогда $a \mid b \iff r_i \leqslant t_i \ \forall i \in \{1, \dots, s\}$

Доказательство. "$\Rightarrow$":
$b = a \cdot p_1^{t_1 - r_1} \dots p_s^{t_s - r_s}$
"$\Leftarrow$":
$b = ac \ c = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s} p_{s+1}^{m_{s+1}} \dots p_n^{m_n}$
$p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s} = p_1^{r_1 + m_1} \dots p_s^{r_s + m_s} p_{s+1}^{m_{s+1}} \dots p_n^{m_n} \implies$
$t_i = r_i + m_i \ \forall i \in \{1, \dots, s\}, m_{s+1} = \dots = m_n = 0 \implies t_i \geqslant r_i \ \forall i \in \{1, \dots, s\}$
Следствие: $\rceil a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$
Тогда $\{d > 0 : d \mid a\} = \{p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s} \mid 0 \leqslant t_i \leqslant r_i, \ \forall i \in \{1, \dots, s\}\}$
Следствие: $\rceil a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}, \ b = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}$
Тогда $\gcd(a, b) = p_1^{min(r_1, t_1)} \dots p_s^{min(r_s, t_s)}$

Определение. $\rceil a, b \in \mathbb{Z}$. Число $c \in \mathbb{Z}$ называется наименьшим общим кратным чисел a и b, если

1. $a \mid c, b \mid c$
2. Если $a \mid c', b \mid c'$, то $c \mid c'$

Предложение. $\rceil a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}, b = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}$
Тогда $c = p_1^{max(r_1, t_1)} \dots p_s^{max(r_s, t_s)}$ *— наименьшее общее кратное чисел* a *и* b

Доказательство. $a \mid c, b \mid c$ — очевидно
$\rceil a \mid c', b \mid c', c' = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s} p_{s+1}^{m_{s+1}} \dots p_n^{m_n}$
$a \mid c', \ b \mid c' \implies r_i \leqslant m_i, \ t_i \leqslant m_i, \ \forall i \in \{1, \dots, s\} \implies$
$max(r_i, t_i) \leqslant m_i, \ \forall i \in \{1, \dots, s\} \implies c \mid c'$

Определение. НОК$(a,b) = lcm(a,b)$ — положительное значение наименьшего общего кратного чисел a и b.

Следствие: $\exists a, b \in \mathbb{N}$

Тогда $lcm(a,b) \cdot \gcd(a,b) = ab$

Доказательство. $min(r_i, t_i) + max(r_i, t_i) = r_i + t_i$

10 Китайская теорема об остатках

Теорема. *Пусть* $(m_1, m_2) = 1$*;* $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$*.*

1. $\exists x \in \mathbb{Z}$*:* $\begin{cases} x_0 \underset{m_1}{\equiv} a_1 \\ x_0 \underset{m_2}{\equiv} a_2 \end{cases}$
2. $\exists x_0$ *удовлетворяет системе выше*

   Тогда для $x \in \mathbb{Z}$*:* x *удовлетворяет системе выше* $\iff x \underset{m_1 m_2}{\equiv} x_0$

Доказательство.

1. $x_0 = a_1 + km_1 = a_2 + lm_2 \implies km_1 - lm_2 = a_2 - a_1$ — линейное диофантово уравнение с дыумя неизвестными k, l

   $(m_1, m_2) = 1 \implies$ у него есть решение (k_0, l_0)

   $x_0 = a_1 + k_0 m_1$ — искомое

2. "$\Rightarrow$"

   $x \underset{m_1 m_2}{\equiv} x_0 \implies \begin{cases} x \underset{m_1}{\equiv} x_0 \\ x \underset{m_2}{\equiv} x_0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \underset{m_1}{\equiv} a_1 \\ x \underset{m_2}{\equiv} a_2 \end{cases}$

   "$\Leftarrow$"

   x удовлетворяет системе из теоремы $\implies \begin{cases} x \underset{m_1}{\equiv} x_0 \\ x \underset{m_2}{\equiv} x_0 \end{cases} \implies \begin{cases} m_1 \mid (x - x_0) \\ m_2 \mid (x - x_0) \end{cases} \implies$
   $m_1 m_2 \mid (x - x_0)$

Определение. $\exists R, S$ — кольца с единицей. Отображение $\varphi : R \to S$ называется изоморфизмом колец, если: φ биекция.

1. $\forall r_1, r_2 : \varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$
2. $\forall r_1, r_2 : \varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_1)\varphi(r_2)$

Предложение. $\exists (m_1, m_2) = 1$

Тогда существует изоморфизм

$\mathbb{Z}/m_1 m_2 \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z}$

$[a]_{m_1 m_2} \mapsto ([a]_{m_1}, [a]_{m_2})$

Доказательство. Проверим корректность: $\exists [a]_{m_1 m_2} = [a']_{m_1 m_2} \implies$

$a \underset{m_1 m_2}{\equiv} a' \implies$

$\begin{cases} a \underset{m_1}{\equiv} a' \\ a \underset{m_2}{\equiv} a' \end{cases} \implies ([a]_{m_1}, [a]_{m_2}) = ([a']_{m_1}, [a']_{m_2})$

$\varphi([a]_{m_1 m_2} + [b]_{m_1 m_2}) = \varphi([a + b]_{m_1 m_2}) = \varphi([a + b]_{m_1}, [a + b]_{m_2}) =$

$\varphi([a]_{m_1} + [a]_{m_2}) + \varphi([b]_{m_1} + [b]_{m_2}) = \varphi([a]_{m_1 m_2}) + \varphi([b]_{m_1 m_2})$

Для умножения аналогично.

Проверим сюръективность φ

$X = ([a_1]_{m_1}, [a_2]_{m_2})$

По китайской теореме об остатках $\exists a \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a \underset{m_1}{\equiv} a_1 \\ a \underset{m_2}{\equiv} a_2 \end{cases}$

про сюръективность $\implies$ биекция:

$|Y| = |Z| < \infty$

$\varphi : Y \to Z$

Тогда φ инъективна $\iff$ φ сюръективна

что-то про принцип дирихле и готово)

11 Функция Эйлера

Предложение. $\exists m \in \mathbb{N};\ a \in \mathbb{Z}$

$[a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \iff (a, m) = 1$

Доказательство. $[a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \iff \exists [b]_m :\ [a]_m \cdot [b]_m = [1]_m \iff$

$\exists b \in \mathbb{Z} :\ ab \underset{m}{\equiv} 1 \iff$

$\exists b, c \in \mathbb{Z} :\ ab = 1 + mc \iff$

$\exists b, c \in \mathbb{Z} :\ ab - mc = 1 \iff (a, m) = 1$

Следствие: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ - поле $\iff$ m — простое число.

Доказательство. считаем $m \geqslant 1$

$m = 1$: $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{\overline{0}\}$

m — простое: $(a, m) = 1$ для $\forall a \in \{1, 2, \ldots, m-1\} \implies$

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$

m — составное: $m = ab,\ 2 \leqslant a \leqslant m - 1$

$(a, m) \neq 1 \implies \overline{a} \notin (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$

Определение. $\mathbb{F}_{p^r}$ — поле из n элементов $\iff n = p^r,\ p \in \mathbb{P},\ r \in \mathbb{N}$

(хз что это)

Определение. $\exists m \in \mathbb{N} : \varphi(n) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*|$

Функция $\varphi \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — функция Эйлера.

Предложение. $\exists p \in \mathbb{P},\ r \in \mathbb{N}.$

Тогда $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$.

Доказательство. $\varphi(p^r) = |\{a \mid 0 \leqslant a \leqslant p^r - 1,\ (a, p^r) = 1\}| =$

$p^r - |\{a \mid 0 \leqslant a \leqslant p^r - 1,\ (a, p) \neq 1\}| =$

$p^r - |\{a \mid 0 \leqslant a \leqslant p^r - 1,\ p \mid a\}| = p^r - p^{r-1}$

Предложение. $\exists m, n \in \mathbb{N},\ (m,n)=1.$

Тогда $\varphi(mn) = \varphi(m)\cdot\varphi(n)$*.(Мультипликативность)*

Доказательство. Построим отображение $\lambda : (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$:

$[a]_{mn} = A \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \mapsto ([a]_m, [a]_n)$

$$[a]_{mn} \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \implies (a, mn) = 1 \implies \begin{cases}(a,m)=1\\(a,n)=1\end{cases} \begin{cases}[a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*\\ [a]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\end{cases}$$

Проверка корректности:

$[a]_{mn} = [a']_{mn} \implies ([a]_m, [a]_n) = ([a']_m, [a']_n)?$

$$[a]_{mn} = [a']_{mn} \implies a \underset{mn}{\equiv} a' \implies \begin{cases}a \underset{m}{\equiv} a'\\ a \underset{n}{\equiv} a'\end{cases} \begin{cases}[a]_m = [a']_m\\ [a]_n = [a']_n\end{cases}$$

Проверим что λ — биекция:

Инъективность:

$$\lambda([a]_{mn}) = \lambda([b]_{mn}) \implies \begin{cases}[a]_m = [b]_m\\ [a]_n = [b]_n\end{cases} \overset{chineese\ theorem}{\implies} a \underset{mn}{\equiv} b \implies [a]_{mn} = [b]_{mn}$$

Сюръективность:

Рассмотрим $([b]_m, [c]_n) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

$$(m,n) = 1 \overset{chineese\ theorem}{\implies} \exists a : \begin{cases}a \underset{m}{\equiv} b\\ a \underset{n}{\equiv} c\end{cases}$$

$$\begin{cases}(b,m)=1 \implies (a,m)=1\\ (c,m)=1 \implies (a,n)=1\end{cases} \implies (a,mn)=1 \implies [a]_{mn} \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^*$$

$\lambda([a]_{mn}) = ([a]_m, [a]_n) = ([b]_m, [c]_n) \implies \lambda$ — биекция.

λ — биекция $\implies |(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^*| = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| \implies \varphi(mn) = \varphi(m)\cdot\varphi(n)$

Следствие: $\exists m_1, \ldots, m_k$ — попарно взаимно простые числа.

Тогда $\varphi(\prod\limits_{i=1}^{k} m_i) = \prod\limits_{i=1}^{k} \varphi(m_i)$.

Доказательство. Индукция по k.

База: $k = 1 \implies \varphi(m_1) = \varphi(m_1)$

Переход: $n-1 \to n$

$(m_n, m_1) = \ldots = (m_n, m_{n-1}) = 1 \implies (m_1, \ldots, m_n) = 1 \implies$

$\varphi(m_1 \ldots m_n) = \varphi(m_1 \ldots m_{n-1})\varphi(m_n) = \varphi(m_1)\ldots\varphi(m_{n-1})\varphi(m_n)$

Следствие: $\exists n = p_1^{r_1}, \ldots, p_s^{r_s}$ — разложение числа n на простые множители.
$\implies \varphi(n) = \prod\limits_{i=1}^{s}(p_i^{r_i} - p_i^{r_i-1})$

Доказательство. По следствию: $\varphi(n) = \varphi(\prod\limits_{i=1}^{s} p_i^{r_i}) = \prod\limits_{i=1}^{s} \varphi(p_i^{r_i}) = \prod\limits_{i=1}^{s}(p_i^{r_i} - p_i^{r_i-1})$

Теорема. $\exists m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, (a, m) = 1 \implies a^{\varphi(m)} \underset{m}{\equiv} 1$ — *теорема Эйлера.*

Лемма. *Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей.*

1. $a, b \in R^* \implies ab \in R^*$

2. $a \in R^*,\ x, y \in R \implies ax = ay \implies x = y,\ xa = ya \implies x = y$

Доказательство.

1. a' — обратный к a элемент, b' — обратный к b элемент.
   $(ab)(b'a') = a(bb')a' = aa' = 1$
   $(b'a)(ab) = b'(aa')b = bb' = 1$

2. a' — обратный к a элемент.
   $ax = ay \implies a'ax = a'ay \implies x = y$
   $xa = ya \implies xaa' = yaa' \implies x = y$

Доказательство. (теоремы Эйлера)
$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{A_1, A_2, \ldots, A_{\varphi(m)}\}$
$[a]_m, A_j \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \overset{lemma-1}{\implies}$
$[a]_m A_1, \ldots, [a]_m A_{\varphi(m)}$ — различные элементы
$([a]_m A_j = [a]_m A_k \overset{lemma-2}{\implies} A_j = A_k) \implies$
$\{[a]_m A_1, \ldots, [a]_m A_{\varphi(m)}\} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \implies$
$[a]_m A_1 \cdot \ldots \cdot [a]_m A_{\varphi(m)} = A_1 A_2 \ldots A_{\varphi(m)} \implies$
$[a]_m^{\varphi(m)} A_1 A_2 \ldots A_{\varphi(m)} = [1]_m A_1 A_2 \ldots A_{\varphi(m)} \overset{lemma-2}{\implies}$
$[a]_m^{\varphi(m)} = [1]_m \implies [a^{\varphi(m)}]_m = [1]_m \implies a^{\varphi(m)} \underset{m}{\equiv} 1$

Теорема. *(Малая теорема Ферма)*
$\exists p \in \mathbb{P}, a \in \mathbb{Z} \implies a^p \underset{p}{\equiv} a$

Доказательство.

$(a,p)=1 \implies a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1 \implies a^{p-1}a \underset{p}{\equiv} 1a \implies a^p \underset{p}{\equiv} a$

$(a,p)\neq 1 \implies a \underset{p}{\equiv} 0 \implies a^p \underset{p}{\equiv} 0 \implies a^p \underset{p}{\equiv} a$

Теорема. *(Теорема Вильсона)*

$p \in \mathbb{P} \implies (p-1)! \underset{p}{\equiv} -1$

Доказательство. В $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$

$\overline{(p-1)!} = \overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\ldots\cdot\overline{p-1} = \prod\limits_{A\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*} A = \prod\limits_{A^2=\overline{1}} \cdot \prod\limits_{A^2\neq\overline{1}} = \prod\limits_{A^2=\overline{1}} \cdot(A_1\cdot A_1'\cdot\ldots) = \prod\limits_{A^2=\overline{1}} \cdot\overline{1} = \prod\limits_{A^2=\overline{1}}$

$A^2=\overline{1} \iff A^2-\overline{1}^2=\overline{0} \iff (A-\overline{1})(A+\overline{1})=\overline{0} \overset{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-field}{\iff} A-\overline{1}=\overline{0}, A+\overline{1}=\overline{0} = \prod\limits_{A^2=\overline{1}}$

$p\neq 2 \implies \overline{1}\cdot\overline{-1}=\overline{-1}$

$p=2 \implies \overline{1}=\overline{-1}$

Комплексные числа

12 Построение поля комплексных чисел

Определение. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Определение.

- Сложение на $\mathbb{C}$: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- Умножение на $\mathbb{C}$: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Предложение. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ - *поле.*

Доказательство.

- Коммутативность сложения — очевидно.
- Ассоциативность сложения — очевидно.
- $(0, 0)$ — нейтральный элемент сложения.
- $(-a, -b)$ — обратный элемент к (a, b).
- Коммутативность умножения — очевидно.
- Ассоциативность умножения — проверяется.
- Дистрибутивность — проверяется.
- $(1, 0)$ — нейтральный элемент умножения.

- $(a,b)z_1z_2 = (1,0):\ z_1 = (a,-b),\ z_2 = \frac{1}{a^2+b^2}$

Определение. $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Определение. $c \in \mathbb{C}$ — комплексное число.

Предложение. $\mathbb{R}' = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$
R' замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения, содержит единицу, то есть является подкольцом поля $\mathbb{C}$.
$\implies$ *$\mathbb{R}'$ — само является кольцом относительно сложения, умножения, ограниченных на $\mathbb{R}'$.*
$\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}'(a \mapsto (a,0))$, $\varphi(a)$ — изоморфизм колец, т.е. φ — биекция и $\varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)$; $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
Отождествим $(a,0)$ с вещественным числом a.
$(a,0)\cdot(0,1) = (0,a)$
$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) = a + b\cdot(0,1) = a + bi$

Определение. $z = a+bi$ — комплексное число. $a = Re(z)$, $b = Im(z)$ — действительная и мнимая части комплексного числа z. В геометрическом виде это вектор $z = (a,b)$.

Определение. $z = a+bi$ — комплексное число. $\overline{z} = a - bi$ — сопряженное к z.

Определение. Автоморфизм — изоморфизм на себя.

Отступление про отображения

Определение. $id_M : M \to M,\ x \mapsto x$ — тождественное отображение на M.

Определение. $\exists \alpha : M \to N,\ \beta : N \to P$ — отображения
Тогда $\alpha \circ \beta : M \to P,\ x \mapsto \alpha(\beta(x))$ — композиция отображений.

Определение. $\exists \alpha : M \to N$ — отображение
Отображение $\beta : N \to M$ — обратное к α, если $\beta \circ \alpha = id_M$.

Предложение. *У отображения $\alpha : M \to N$ есть обратное отображение, если и только если α — биекция.*

Доказательство. "$\Rightarrow$":

Инъективность:

$\beta \circ \alpha = id_M,\ \alpha(x) = \alpha(y) \implies \beta(\alpha(x)) = \beta(\alpha(y)) \implies x = y$

Сюръективность:

$y \in N,\ y = \alpha(\beta(y)) \in Im(\alpha)$(Im это прообраз)

"$\Leftarrow$":

Пусть α — биекция, назовем $\beta : N \to M$ — обратныи, если $\forall y \in N \alpha^{-1}(y) = \{x\},\ x \in M$

Положим $\beta(y) = x,\ \alpha \circ \beta = id_N,\ \beta \circ \alpha = id_M$

Продолжение

Предложение. $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$ — *автоморфизм.*

Доказательство. σ — биекция, т.к. $\sigma \circ \sigma = id_{\mathbb{C}}$

$\sigma(z_1 + z_2) = \sigma(z_1) + \sigma(z_2)$ — очевидно

$\sigma(z_1 z_2) = \sigma(z_1)\sigma(z_2)$

$\sigma(1) = 1$ — очевидно

$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$

$\sigma(z_1 z_2) = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$\sigma(z_1)\sigma(z_2) = \overline{(a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2)} = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

13 Тригонометрическая форма комплексного числа

Определение. $a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$a = r\cos\varphi$

$b = r\sin\varphi$

Определение. Модулем комплексного числа $z = a + bi \in \mathbb{C}$ назовем:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Предложение.

1. $|z| \geqslant 0,\ |z| = 0 \iff z = 0$

2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

3. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

4. $|\overline{z}| = |z|$

5. $z\overline{z} = |z|^2$

Доказательство.

1. очевидно

2. $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$
   $|z_1 z_2|^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 =$
   $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = |z_1|^2 |z_2|^2$

3. $\iff |z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$
   $\iff (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leqslant a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2|z_1||z_2|$
   $\iff a_1 a_2 + b_1 b_2 \leqslant \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$
   $\Leftarrow |a_1 a_2 + b_1 b_2| \leqslant \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$
   $\iff a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 \leqslant (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$
   $\iff 2a_1 a_2 b_1 b_2 \leqslant b_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2$
   $\iff (b_1 a_2 - b_2 a_1)^2 \geqslant 0$

4. очевидно

5. $z = a + bi \implies \overline{z} = a - bi$
   $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

Замечание: $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Определение. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Аргументом z назовем такое $\varphi \in \mathbb{R}$, что $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Предложение.

1. *Если* $z = 0$, *то любой* $\varphi \in \mathbb{R}$ *- аргумент* z
2. *Если* $z \neq 0$, *то:*
   (a) *аргумент существует*
   (b) *если* φ_0 *- аргумент* z, *то* φ *- аргумент* $z \iff \varphi = \varphi_0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

1. тривиально
2. $z_0 = \frac{1}{|z|} \cdot z$
   $|z_0| = \left|\frac{1}{|z|}\right| \cdot |z| = \frac{1}{|z|} \cdot |z| = 1$
   $z_0 = a_0 + ib_0,\ |z_0| = a_0^2 + b_0^2 = 1 \implies \exists \varphi_0 : \begin{cases} a_0 = \cos\varphi_0 \\ b_0 = \sin\varphi_0 \end{cases}$
   $z = |z| \cdot z_0 = |z|(\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0)$
   $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k \implies \begin{cases} \cos\varphi = \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi = \sin\varphi_0 \end{cases} \implies \varphi$ - аргумент
   φ - аргумент $\implies z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \implies \begin{cases} \cos\varphi = \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi = \sin\varphi_0 \end{cases} \implies \varphi - \varphi_0 = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Определение. $arg(z) = \varphi$ означает φ - один из аргументов z

<u>*Замечание:*</u> Предположим оказалось, что $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ для некоторых $r \geqslant 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$.
Тогда $r = |z|,\ \varphi = \arg z$
Доказательство. $|z| = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = \sqrt{r^2} = r \implies \varphi$ - аргумент по определению

Предложение.

1. $\arg \overline{z} = -\arg z$
2. $z \in \mathbb{R} \iff \arg z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
3. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
4. $\exists z_2 \neq 0 \implies \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

Доказательство.

1. $\arg z = \varphi$

   $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

   $\overline{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |\overline{z}|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \implies$

   $\arg \overline{z} = -\varphi$

2. "$\Rightarrow$":

   $z > 0$:

   $z = |z| \cdot 1 = |z|(\cos 0 + i\sin 0) \implies \arg z = 0$

   $z < 0$:

   $z = |z| \cdot (-1) = |z|(\cos\pi + i\sin\pi) \implies \arg z = \pi$

   "$\Leftarrow$":

   $\sin(k\pi) = 0$

3. $\arg z_1 = \varphi_1,\ \arg z_2 = \varphi_2 \implies$

   (!) $\varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 z_2)$

   $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \implies$

   $z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)) =$

   $|z_1 z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \implies \arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$

4. $z_1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \implies \arg z_1 = \arg \frac{z_1}{z_2} + \arg z_2 \implies \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

Следствие: (Формула Муавра)

Пусть $z \in \mathbb{C},\ |z| = r,\ \arg z = \varphi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Тогда $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

Доказательство.

$n > 0$ — индукция по n

База: $n = 1$ — тривиально

Переход: $n - 1 \to n$

$z^n = z^{n-1} \cdot z = r^{n-1}(\cos((n-1)\varphi) + i\sin((n-1)\varphi)) \cdot z =$

$r^{n-1}(\cos((n-1)\varphi) + i\sin((n-1)\varphi)) \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$r^n(\cos((n-1)\varphi + \varphi) + i\sin((n-1)\varphi + \varphi)) =$

$r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

$n = 0,\ 1 = r^0(\cos(0) + i\sin(0)) = 1$

$n < 0$: $n = -k,\ k \in \mathbb{N}$

$z^n = \frac{1}{z^k}$

$|z^n| = \frac{1}{|z^k|} = \frac{1}{|z|^k} = |z|^{-k} = |z|^n$

$\arg z^n = \arg 1 - \arg z^k = 0 - k\varphi = n\varphi$

14 Корни из комплексных чисел

$z^n = w,\ n \in \mathbb{N},\ w \in \mathbb{C}$

$w = 0 \implies z = 0$

$w \neq 0,\ w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ r > 0,\ \varphi \in \mathbb{R},\ z = p(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ p > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$z^n = w \iff p^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \iff \begin{cases} p^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} p = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$z^n = w \iff z = \underbrace{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}_{z_k},\ k \in \mathbb{Z}$$

При каких $k, l : z_k = z_l$?

$z_k = z_l \iff \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi l}{n} + 2\pi s,\ s \in \mathbb{Z} \iff \frac{k}{n} + \frac{l}{n} + s,\ s \in \mathbb{Z} \iff$

$k = l + ns,\ s \in \mathbb{Z} \iff k \underset{n}{\equiv} l \iff z \in \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$

Таким образом, мы доказали:

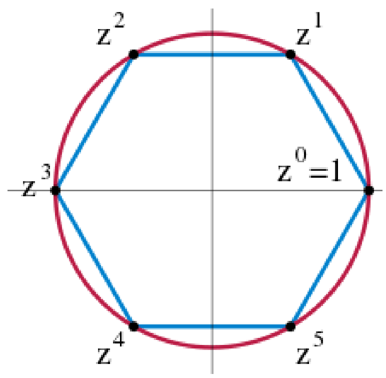
Теорема. $\exists n \in \mathbb{N},\ w \in \mathbb{C}$

1. *Если* $w = 0$, *То уравнение* $z^n = w$ *имеет единственный корень* $z = 0$.

2. *Если* $w \neq 0$, *То уравнение* $z^n = w$ *имеет ровно* n *различных корней:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Изображение на окружности



Комплексные корни образуют праильный n-угольник на окружности.

Лемма. *Пусть* $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ — *все корни* $z^n = w,\ n > 1$

Тогда $z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1} = 0$

Доказательство.

$z_k = z_{k-1}\underbrace{\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}_{\xi}$

$S = z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1}$

$z_k = z_0 \cdot \xi^k$

$\xi \cdot S = z_1 + z_2 + \ldots + \underbrace{z_n}_{=z_0} = S \implies (\xi - 1)S = 0$

$n \neq 1 \implies \xi \neq 1$

$(\xi - 1)S = 0 \implies S = 0$

Определение. Группа — это множество G с операцией $* : G \times G \to G$ такая, что:

1. $*$ — ассоциативна: $(a * b) * c = a * (b * c)$
2. Существует нейтраальный элемент $e \in G$ такой, что $a * e = e * a = a$ для любого $a \in G$
3. У любого элемента $a \in G$ существует обратный элемент $a^{-1} \in G$ такой, что $a \ * \ a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Примеры:

1. $(\mathbb{Z}, +)$
2. $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$
3. Если R — ассоциативное кольцо с 1, то $R^* = \{r \mid \exists s \in R : rs = sr = 1\}$ — группа относительно умножения.

Проверить замкнутость относительно умножения.
Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$
$\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\underbrace{\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}}_{\xi_k} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ — группа относительно умножения
$z, w \in \mu_n \implies zw \in \mu_n$ — замкнутость относительно умножения
$(zw)^n = z^n w^n = 1 \cdot 1 = 1$
Доказательство, что μ_n — группа:

- Ассоциативность — так как есть ассоциативность в $\mathbb{C}$
- $1 \in \mu_n$ $(1 = \xi_0)$
- $\xi_k \cdot \xi_{-k} = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi(-k)}{n} + i\sin\frac{2\pi(-k)}{n}\right) = 1$

Лемма. $\xi_k = \xi_1^k$

Доказательство. $\left(1 \cdot \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = 1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$ (по формуле Муавра)

Определение. G — группа с операцией $*$, $g \in G,\ n \in \mathbb{Z}$

$$g^n = \begin{cases} g\ *\ g\ *\ \ldots\ *\ g & n > 0 \\ e & n = 0 \\ g^{-1} * g^{-1} *\ \ldots\ * g^{-1} & n < 0 \end{cases}$$

Определение. Группа G называется циклической, если $\exists g \in G : G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Пишут: $G = \langle g \rangle$

Определение. g — образующий элемент группы G

Примеры:

- $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$ (по сложению) $g^n = \begin{cases} 1 + 1 + \ldots + 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 + -1 + \ldots + -1 & n < 0 \end{cases}$
- $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \langle \overline{1} \rangle = \langle \overline{2} \rangle = \langle \overline{3} \rangle = \langle \overline{4} \rangle$ (по сложению)
- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \langle \overline{1} \rangle = \langle \overline{5} \rangle$ (по сложению)
- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \langle \overline{2} \rangle = \langle \overline{3} \rangle$ (по умножению)
- $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$ — не циклическая группа $g^2 = e \implies g^{2k} = e,\ g^{2k+1} = g$

Определение. G — группа, $g \in G$

Если $\forall n \in \mathbb{N} : g^n \neq e$, то говорят, что g — бесконечный порядок

Если $\exists n \in \mathbb{N} : g^n = e$, то минимальное такое n называют порядком g (пишут: $\operatorname{ord} g = n$)

Пример: $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$\operatorname{ord} \overline{1} = 1$

$\operatorname{ord} \overline{2} = 4$

$\operatorname{ord} \overline{3} = 4$

$\operatorname{ord} \overline{4} = 2$

Предложение. *Пусть G — конечная группа, $|G| = n,\ g \in G$.*

Тогда: $G = \langle g \rangle \iff \operatorname{ord} g = n$

Доказательство. "$\Rightarrow$":

$\exists k, l : g^k = g^l,\ k, l \in \{0, 1, \dots, n\},\ k \neq l$ (так как G конечная)

$k < l$: $g^{-k} \cdot g^k = g^{-k} \cdot g^l = g^{l-k} = e$

$0 < l - k \leqslant n$

Таким образом, порядок g не превосходит n

Предположим, $\operatorname{ord} g = m < n$

$G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{g^{mq+r} \mid q \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < m\} = \{g^0, g^1, \dots, g^{m-1}\}$ — противоречие, так как $|G| \leqslant m < n$

"$\Leftarrow$":

$\operatorname{ord} g = n$

$\implies g^0, g^1, g^2, \dots, g^{n-1}$ — они попарно различны

$\implies \{g^0, g^1, \dots, g^{n-1}\} = G$

$\implies G = \langle g \rangle$

Определение. Первообразным корнем из 1 степени n называется такой элемент $z \in \mathbb{C}^*$, что $\operatorname{ord} z = n$

<u>Пример:</u> $\mu_6 = \{1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$

$\operatorname{ord} 1 = 1$, $\operatorname{ord} \xi_1 = 6$, $\operatorname{ord} \xi_2 = 3$, $\operatorname{ord} \xi_3 = 2$, $\operatorname{ord} \xi_4 = 3$, $\operatorname{ord} \xi_5 = 6$

ξ_2 — первообразный корень из 1 степени 3

15 Temp