

# Алгебра

Лектор: Жуков Игорь Борисович

# Содержание

<b>1</b>	<b>Теория чисел</b>	<b>1</b>
1	Делимость . . . . .	1
2	Отношение эквивалентности и разбиение на классы . . . . .	1
3	Сравнение по модулю . . . . .	2
4	Кольцо классов вычетов . . . . .	3
5	Наибольший общий делитель . . . . .	6
6	Взаимно простые числа . . . . .	8
7	Линейные диофантовы уравнения . . . . .	9
8	Простые числа . . . . .	10
9	Основная теорема арифметики . . . . .	11
10	Китайская теорема об остатках . . . . .	13
11	Функция Эйлера . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Комплексные числа</b>	<b>18</b>
1	Построение поля комплексных чисел . . . . .	18
2	Тригонометрическая форма комплексного числа . . . . .	20
3	Корни из комплексных чисел . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Многочлены</b>	<b>27</b>
1	Многочлены и формальные степенные ряды . . . . .	27
2	Свойства степени . . . . .	28
3	Деление с остатком . . . . .	29
4	Гомоморфизм подстановки . . . . .	30
5	Евклидовы области . . . . .	34
6	Факториальность области главных идеалов . . . . .	36
7	Кратные корни и производные . . . . .	39
8	Формула Тейлора . . . . .	41
9	Алгебраически замкнутые поля. Каноническое разложение над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$ . . . . .	42
10	Рациональные дроби . . . . .	44
11	Интерполяция . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Линейная алгебра</b>	<b>49</b>
1	Матрицы . . . . .	49
2	Элементарные преобразования и элементарные матрицы . . . . .	51
3	Перестановки . . . . .	55
4	Определители . . . . .	57
5	Дальнейшие свойства определителя . . . . .	58
6	Линейные пространства . . . . .	60
6.1	Основные определения . . . . .	60
7	Базис и размерность . . . . .	63
8	Координаты . . . . .	65
9	Ранг матрицы . . . . .	65

# 1 Теория чисел

## 1 Делимость

**Определение 1.1.**  $a, b \in \mathbb{Z}, a \mid b \iff \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$

**Свойства.**

1.  $a \mid a$  — рефлексивность
2.  $a \mid b, b \mid c \implies \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$  — транзитивность
3.  $a \mid b, k \in \mathbb{Z} \implies ka \mid kb$
4.  $a \mid b_1, a \mid b_2 \implies a \mid (b_1 \pm b_2)$
5.  $\pm 1 \mid a$
6.  $\begin{cases} ka \mid kb \\ k \neq 0 \end{cases} \implies a \mid b$

**Определение 1.2.**  $a, b$  называются *ассоциированными*, если  $a \mid b$  и  $b \mid a$ . Иногда такое отношение обозначают  $a \sim b$ :

$$a \sim b \iff a \mid b \wedge b \mid a$$

**Свойства.**

1. Пусть  $a \sim a', b \sim b'$ . Тогда  $a \mid b \iff a' \mid b'$ .

## 2 Отношение эквивалентности и разбиение на классы

**Определение 2.1.** Отношение эквивалентности — бинарное отношение, удовлетворяющее следующим свойствам: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

**Определение 2.2.** Разбиение на классы множества  $M$  — это представление  $M$  в виде  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ , где  $M_i$  — классы,  $I$  — индексное множество,  $M_i \cap M_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$  — разбиение на классы. Введем отношение  $\sim$  над  $M$  так, что  $a \sim b \iff \exists i \in I : a, b \in M_i$ . Тогда  $\sim$  — отношение эквивалентности.

**Доказательство.**

Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность.

$$a \sim b, b \sim c \implies \exists i, j : \begin{cases} a, b \in M_i \\ b, c \in M_j \end{cases}$$

Тогда  $b \in M_i \cap M_j$ , но так как  $M_i \cap M_j \neq \emptyset$  при неравных  $i$  и  $j$ ,  $i = j$ . Значит  $a, b, c \in M_i$ .

**Теорема 2.2.** Пусть  $\sim$  — отношение эквивалентности на  $M$ . Значит существует разбиение на классы  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$  такое, что  $\forall a, b \in M : a \sim b \iff \exists i : a, b \in M_i$ .

### Доказательство.

Рассмотрим  $a \in M$ . Назовем классом элемента  $a$  множество

$$[a] = \{b \in M \mid a \sim b\}.$$

Докажем, что для любых элементов  $a$  и  $b$ , либо  $[a] = [b]$ , либо  $[a] \cap [b] = \emptyset$ .

Пусть  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ . Тогда

$$\exists x \in [a] \cap [b] \implies \begin{cases} x \in [a] \\ x \in [b] \end{cases} \xRightarrow{\text{опр. класса}} \begin{cases} x \sim a \\ x \sim b \end{cases} \xRightarrow{\text{транзитивность } \sim} a \sim b.$$

$$(\forall c \in [a] \ c \sim a \xRightarrow{a \sim b} c \sim b \implies c \in [b]) \implies [a] \subset [b] \quad (1)$$

$$(\forall c \in [b] \ c \sim b \xRightarrow{a \sim b} c \sim a \implies c \in [a]) \implies [b] \subset [a] \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем  $[a] = [b]$ .

Тогда искомое разбиение можно построить как

$$X = \{[a] \mid a \in M\}.$$

Действительно  $\forall a \in M$ , так как  $a \in [a]$ , то  $M = \bigcup_{\alpha \in I} M_i$ , а так как различные классы не пересекаются (доказано выше)  $\forall a, b \ [a] \neq [b]$ .

**Определение 2.3.** Построенное множество  $X$  называют *фактор-множеством* множества  $M$  по отношению эквивалентности  $\sim$ , обозначение:  $M/\sim$ .

**Пример.**  $\mathbb{Z}/\sim = \{[z] \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], [2], \dots\}$

## 3 Сравнение по модулю

**Определение 3.1.**  $\exists a, b, m \in \mathbb{Z}$ . Говорят, что

$$\begin{aligned} a &\equiv_m b && \iff \\ a &\equiv_m b && \iff \\ a &\equiv b \pmod{m} && \iff m \mid (a - b) \end{aligned}$$

**Свойства.**

1.  $\equiv_m$  — рефлексивно
2.  $\equiv_m$  — симметрично
3.  $\equiv_m$  — транзитивно
4.  $a \equiv_m b, d \mid m \implies a \equiv_d b$
5.  $a \equiv_m b, k \in \mathbb{Z} \implies ka \equiv_{km} kb$
6.  $a \equiv_m b, k \in \mathbb{Z} \implies ka \equiv_m kb$  (ослабленная версия предыдущего свойства)

$$7. a_1 \equiv_m b_1, a_2 \equiv_m b_2 \implies a_1 \pm a_2 \equiv_m b_1 \pm b_2$$

$$8. a_1 \equiv_m b_1, a_2 \equiv_m b_2 \implies a_1 a_2 \equiv_m b_1 b_2$$

**Замечание.** Сравнение по модулю — отношение эквивалентности.

## 4 Кольцо классов вычетов

**Определение 4.1.** Множество классов вычетов по модулю  $m$  — это множество всех вычетов по модулю  $m$ .

Обозначается как  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \iff \mathbb{Z}/m \iff \mathbb{Z}/\equiv_m$

**Теорема 4.1.**  $\exists m \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$1. \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$$

$$2. |\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = m$$

**Доказательство.**

$$1. \exists a \in \mathbb{Z}, (!) \bar{a} = \bar{r}, \quad 0 \leq r < m$$

а) Случай  $a \geq 0$ :  $\exists r$  — наименьшее число, такое что  $r \geq 0$  и  $a \equiv_m r$ .

Если  $r \geq m$ , то  $r - m \equiv_m a$ ,  $r - m \geq 0$ ,  $r - m < r$ . То есть  $r - m$  подходит под условие для  $r$  и меньше. Противоречие с выбором  $r$ .

Значит  $r < m$ , то есть  $r$  — искомое.

б) Случай  $a < 0$ :

Рассмотрим  $a' = a \pm (-a)m = a(1 - m)$ . Тогда  $a < 0$ ,  $1 - m \leq 0$ , и  $a' \geq 0$ .

$$\bar{a} = \overline{a'} = \bar{r}, \quad 0 \leq r < m$$

$$2. \text{ предположим } \bar{r} = \overline{r'}, \quad 0 \leq r, r' < m.$$

$$\begin{cases} |r' - r| < m \\ m \mid (r - r') \end{cases} \implies r' - r = 0 \implies r = r'.$$

**Следствие.** Теорема о делении с остатком

Пусть  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\exists! q, r \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a = bq + r \\ \leq r < b \end{cases}$$

**Доказательство.**

«Существование»:

В  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  рассмотрим  $\bar{a} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{b-1}\}$ , тогда по теореме выше найдется  $0 \leq r < b$  для которого  $\bar{a} = \bar{r}$ :

$$a \equiv_b r \iff a = bq + r, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

«Единственность»: Пусть нашлось два таких  $q, q' \in \mathbb{Z}$  и  $r, r' \in \mathbb{Z}$  для которых  $a = bq + r$ ,  $a = bq' + r'$ . Тогда

$$bq + r \equiv_b bq' + r' \iff r \equiv_b r' \overset{0 \leq r, r' < b}{\iff} r = r' \implies bq = bq' \iff q = q'.$$

Напомним, что вторая равносильность выполняется благодаря единственности класса вычетов  $\bar{r}$ .

**Определение 4.2.**  $q$  — *неполное частное* при делении  $a$  на  $b$ ,  $r$  — *остаток* при делении  $a$  на  $b$ .

**Определение 4.3.** *Операция* на множестве  $M$  — бинарное отображение  $M \times M \rightarrow M$ .

На  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  определим операцию сложения и умножения по модулю  $m$ :

- $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$
- $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$

**Предложение 4.1.** Это правда операции над множеством  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ :

**Доказательство.** То, что за пределы множества при сложении и умножении мы не выходим, очевидно. Надо доказать, что при подстановке одинаковых классов, получаются одинаковые результаты, то есть:

$$(!) \bar{a} = \bar{a'}, \bar{b} = \bar{b'} \implies \bar{a} + \bar{b} = \overline{a' + b'}, \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a' \cdot b'}$$

распишем условия через сравнения по модулю:

$$\bar{a} = \bar{a'}, \bar{b} = \bar{b'} \implies a \equiv_m a', b \equiv_m b'$$

Воспользуемся свойствами сравнения:

$$a \equiv_m a', b \equiv_m b' \implies a + b \equiv_m a' + b', a \cdot b \equiv_m a' \cdot b'$$

И перейдем обратно к классам:

$$a + b \equiv_m a' + b', a \cdot b \equiv_m a' \cdot b' \implies \overline{a + b} = \overline{a' + b'}, \overline{a \cdot b} = \overline{a' \cdot b'}$$

**Пример.**  $m = 4$ ,  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

**Определение 4.4.**  $e \in M$  — *нейтральный элемент* относительно операции  $*$  на  $M$ , если  $\forall a \in M$  справедливо  $a * e = e * a = a$ .

**Предложение 4.2.** Операции сложения и умножения на  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  обладают следующими свойствами:

$\forall A, B, C \quad \exists A'$ :

1.  $A + B = B + A$  — коммутативность сложения
2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$  — ассоциативность сложения
3.  $A + \bar{0} = A$  — существование нейтрального элемента относительно сложения
4.  $A + A' = \bar{0}$  — существование обратного элемента относительно сложения
5.  $AB = BA$  — коммутативность умножения
6.  $(AB)C = A(BC)$  — ассоциативность умножения
7.  $A \cdot \bar{1} = A$  — существование нейтрального элемента относительно умножения
8.  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  — дистрибутивность умножения относительно сложения.
9.  $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$  — дистрибутивность сложения относительно умножения.

**Определение 4.5.** *Кольцом* называется множество  $M$  с операциями сложения и умножения, для которых выполнены аналоги свойств 1-4 и 8-9.

**Определение 4.6.** Кольцо *коммутативное*, если выполнено свойство 5.

**Определение 4.7.** Кольцо *ассоциативное*, если выполнено свойство 6.

**Определение 4.8.** Кольцо *с единицей*, если выполнено свойство 7.

**Определение 4.9.** Я оставлю это для полноты картины, но wtf is this?

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} : x + y = n \implies n$  — ~~нейтральный элемент относительно сложения.~~

**Замечание.** Если  $*$  — операция на  $M$ , то существует единственный нейтральный элемент относительно  $*$ .

**Доказательство.**  $e, e'$  — нейтральные элементы относительно  $*$ , тогда  $e = e * e' = e'$ .

Типа просто в определение нейтрального элемента подставили и получилось.

**Предложение 4.3.** В нашем курсе все кольца будут ассоциативные с единицей.

**Лемма 4.1.** В любом кольце  $0 \cdot a = 0$ .

**Доказательство.**

Предположим противное. Покажем, что  $0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a$ .

$$0 + 0 = 0 \xrightarrow{\exists 0} (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a \xrightarrow{\text{дистр.}} 0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a$$

Теперь вычтем  $0 \cdot a$ . Так как  $\exists b : b + (0 \cdot a) = 0$ , то

$$0 = b + (0 \cdot a) = b + (0 \cdot a + 0 \cdot a) = (b + 0 \cdot a) + (0 \cdot a) = 0 + (0 \cdot a) = 0 \cdot a$$

Противоречие.

**Определение 4.10.**  $A^*$  — множество обратимых элементов кольца  $A$  (по умножению, разумеется).

**Примеры.**

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$
- $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{3}\}$
- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

**Определение 4.11.** *Поле* называется коммутативное кольцо  $F$ , такое что  $F^* = F \setminus \{0\}$ .

## 5 Наибольший общий делитель

**Определение 5.1.**  $R$  — коммутативное кольцо,  $a, b \in R$ .

Элемент  $d$  называется наибольшим общим делителем, если:

1.  $d \mid a, d \mid b$
2.  $d' \mid a, d' \mid b \implies d' \mid d$

**Предложение 5.1.**

1.  $d_1, d_2$  — наибольшие общие делители, тогда  $d_1 \sim d_2$ .
2.  $\exists d_1$  — наибольший общий делитель,  $d_2 \sim d_1$ , тогда  $d_2$  — тоже наибольший общий делитель.

**Доказательство.**

1. По свойству 2 :  $d_1 \mid d_2, d_2 \mid d_1 \implies d_1 \sim d_2$ .
2.  $d_2 \mid d_1, d_1 \mid a, d_1 \mid b \implies d_2 \mid a, d_2 \mid b$

Пусть  $d_2$  не наибольший, тогда  $\exists d' > d_2$ .

$d' \mid a, d' \mid b \implies d' \mid d_1$ , так как  $d_1$  наибольший общий делитель,

$d' \mid d_1, d_1 \mid d_2 \implies d' \mid d_2$ , противоречие, так как  $d' > d_2$ .

**Предложение 5.2.**  $\exists a, b \in \mathbb{Z} \implies$

1.  $\exists d \in \mathbb{Z} : a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ , иначе говоря:  $\forall x, y \in \mathbb{Z} \exists d, z \in \mathbb{Z} : ax + by = dz$
2. при этом  $d$  — наибольший общий делитель  $a, b$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $I = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ .

Заметим что  $0 \in I$ , так как  $0a + 0b = 0$ .

Если  $I = \{0\}$ , то  $I = 0\mathbb{Z}$ .

Иначе  $I \neq \{0\} \implies c \in I \implies -c \in I$ , так как  $-(ax + by) = a \cdot -x + b \cdot -y$

То есть в  $I$  есть положительные числа.



Пусть  $d = \min\{c \mid c \in I, c > 0\}$ , и докажем что  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ .

« $\supset$ »:

$$d \in I \text{ (по определению)} \implies d = ax_0 + by_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{Z} \implies$$

$$\forall z \in \mathbb{Z}: dz = a(x_0z) + b(y_0z) \in I, \text{ значит } d\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$$

« $\subset$ »:

$$\exists c \in I, d \in \mathbb{N} \implies \exists q, r \in \mathbb{Z}: c = dq + r, \quad 0 \leq r < d$$

$$c \in I, \text{ значит } c = ax_1 + by_1, \quad x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Мы уже знаем, что } d \in I, \text{ значит } d = ax_0 + by_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$$

$$r = c - dq = a(x_1 - x_0q) + b(y_1 - y_0q) \in I$$

$$\text{По определению остатка: } \begin{cases} r \geq 0, \\ r < d \end{cases}, \text{ но } d = \min\{c \mid c \in I, c > 0\} \implies \begin{cases} r = 0 \\ r = c - dq \end{cases} \implies$$

$$c = dq \implies c \in d\mathbb{Z} \implies a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$$

2. Пусть  $d$  — наибольший общий делитель  $a, b$ .

$$a = a1 + b0 \in I = d\mathbb{Z} \implies d \mid a$$

$$b = a0 + b1 \in I = d\mathbb{Z} \implies d \mid b$$

$$\exists d' \mid a, d' \mid b, d = ax_0 + by_0$$

$$d' \mid ax_0, d' \mid by_0 \implies d' \mid d, \text{ значит } d \text{ действительно наибольший общий делитель } a, b.$$

**Следствие.**

1.  $a, b \in \mathbb{Z}$ : Тогда наибольший общий делитель  $a, b$  существует.

2. Если  $d$  — наибольший общий делитель  $a, b$ , то  $\exists x, y \in \mathbb{Z}: d = ax + by$  (*Линейное представление наибольшего общего делителя*).

**Доказательство.**

1. Доказали в двух частях предложения.

2. Из первой части знаем, что существует  $d_0$  — наибольший общий делитель  $a, b$ , то есть  $d_0 = ax_0 + by_0$

$$d \text{ ассоциирован с } d_0 \implies d = d_0\mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z} \implies d = a(x_0z) + b(y_0z)$$

**Определение 5.2.**  $\text{НОД}(a, b) \iff \gcd(a, b)$  — неотрицательный наибольший общий делитель  $a, b$ .

**Предложение 5.3.**  $\exists a_1, a_2, b \in \mathbb{Z}: a_1 \equiv a_2 \pmod{b}$

Тогда  $\gcd(a_1, b) = \gcd(a_2, b)$ .

**Доказательство.** (!)  $\{c: c \mid a_1, c \mid b\} = \{c: c \mid a_2, c \mid b\}$

« $\subset$ »:

$$a_2 - a_1 = bm \implies a_2 = a_1 + bm$$

$$c \mid a_1, c \mid b \implies c \mid a_2$$

« $\supset$ »:

$$a_1 - a_2 = bm \implies a_1 = a_2 + bm$$

$$c \mid a_2, c \mid b \implies c \mid a_1$$

Получается, что:

$$\forall x \in \{c : c \mid a_1, c \mid b\} : x \mid \gcd(a_1, b)$$

$$\forall x \in \{c : c \mid a_2, c \mid b\} : x \mid \gcd(a_2, b)$$

$$\gcd(a_1, b) = \gcd(a_2, b)$$

**Определение 5.3.** Алгоритм Евклида

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b), \text{ если } b \neq 0$$

```
int gcd(int a, int b) {
    if (b == 0) return a;
    return gcd(b, a % b);
}
```

## 6 Взаимно простые числа

**Определение 6.1.** Числа  $a$  и  $b$  называются взаимно простыми, если  $\gcd(a, b) = 1$ .

$a \perp b$  — сокращенная запись для обозначения взаимной простоты.

**Предложение 6.1.**

1.  $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ , тогда  $a \perp b \iff \exists m, n \in \mathbb{Z} : am + bn = 1$ .
2.  $a_1 \perp b, a_2 \perp b \implies a_1 a_2 \perp b$ .
3.  $\begin{cases} a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z} \\ b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ и } \forall i, j : a_i \perp b_j \implies a_1 \dots a_m \perp b_1 \dots b_n$ .
4.  $a \mid bc, a \perp b \implies a \mid c$ .
5.  $ax \equiv ay, a \perp m \implies x \equiv y$ .
6.  $\gcd(a, b) = d \implies a = da', b = db', a' \perp b'$ .

**Доказательство.**

1.  $m$  и  $n$  существуют согласно линейному представлению НОД.

$$d = \gcd(a, b), d \mid a, d \mid b \implies d \mid (am + bn) = 1 \implies d \mid 1 \implies d = 1.$$

$$2. \begin{cases} 1 = a_1 m_1 + b n_1 \\ 1 = a_2 m_2 + b n_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{перемножим}} 1 = a_1 a_2 (m_1 m_2) + b (a_1 m_1 n_2 + a_2 m_2 n_1 + b n_1 n_2) \implies a_1 a_2 \perp b.$$

$$3. \begin{cases} a_1 \perp b \\ \vdots \\ a_n \perp b \end{cases} \implies a_1 \dots a_n \perp b$$

$$\begin{cases} a_1 \dots a_n \perp b_1 \\ \dots \\ a_1 \dots a_n \perp b_n \end{cases} \implies a_1 \dots a_n \perp b_1 \dots b_n$$

$$4. 1 = am + bn \implies c = acm + bcn$$

$$a \mid acm, a \mid bcn \implies a \mid c.$$

$$5. m \mid (ax - ay), a \perp m \implies m \mid (x - y) \implies x \equiv_m y.$$

$$6. d \mid a, d \mid b \implies \begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases} : a', b' \in \mathbb{Z}$$

$$d = am + bn, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$d = 0 \implies a' = b' = 0 = da'm + db'n$$

$$d \neq 0 \implies 1 = a'm + b'n \implies a' \perp b'.$$

## 7 Линейные диофантовы уравнения

**Определение 7.1.** *Линейным диофантовым уравнением с двумя неизвестными называется уравнение вида  $ax + by = c$ , где  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .*

**Определение 7.2.** *Решением линейного диофантова уравнения называется множество всех пар  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : ax + by = c$ .*

**Замечание.** Если  $\gcd(a, b) \nmid c$ , то решение — пустое множество, так как все линейные комбинации  $a, b$  делятся на  $\gcd(a, b)$ .

**Замечание.** Теперь заметим следующее: если  $ax_1 + by_1 = c$  и  $ax_2 + by_2 = c$ , то  $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$ . Иными словами, разность двух решений линейного диофантова уравнения — решение соответствующего однородного уравнения.

А значит все решения линейного диофантова уравнения можно найти, решив однородное уравнение и прибавив ко всем его решениям какое-то решение исходного уравнения.

Решим однородное уравнение:

$$ax + by = 0 \iff ax = -by$$

$$\exists d = \gcd(a, b), \quad a = da', \quad b = db'$$

$$ax = -by \iff da'x = -db'y \iff a'x = -b'y \xLeftrightarrow^{(*)} \begin{cases} x = b'k \\ y = -a'k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(*) \gcd(a', b') = 1 \implies a' \mid y, b' \mid x \implies x = b'k, k \in \mathbb{Z} \implies y = -a'k$$

Теперь найдём какое-то решение исходного уравнения, вспомнив о линейном представлении  $\gcd$ :

$$\gcd(a, b) = d = ax_0 + by_0 \implies c = dc' = a(c'x_0) + b(c'y_0)$$

Таким образом, решение исходного уравнения:  $\{(c'x_0 + b'k, c'y_0 - a'k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , где:

$x_0, y_0$  - коэффициенты при  $a, b$  в линейном представлении  $\gcd(a, b)$ ,

$$a' = \frac{a}{\gcd(a, b)}, \quad b' = \frac{b}{\gcd(a, b)}, \quad c' = \frac{c}{\gcd(a, b)}$$

```

int extgcd(int a, int b, int &x, int &y) {
    if (b == 0) {
        x = 1, y = 0;
        return a;
    }
    int x1, y1;
    int tmp = extgcd(b, a % b, x1, y1);
    x = y1, y = x1 - (a / b) * y1;
    return tmp;
}

void solve() {
    int a, b, c;
    cin >> a >> b >> c;
    int x, y;
    int gcd = extgcd(a, b, x, y);
    if (c % gcd != 0) {
        cout << "No solutions\n";
    } else {
        int k = c / gcd;
        cout << x * k << ' ' << b / gcd << '\n'; // c' * x_0 + b' * k
        cout << y * k << ' ' << -(a / gcd) << '\n'; // c' * y_0 - a' * k
    }
}

```

## 8 Простые числа

**Определение 8.1.** Число  $p \in \mathbb{Z}$  называется простым, если  $p \notin \{-1, 0, 1\}$  и все делители  $p$  — это  $\pm 1$  и  $p$ .

*Свойства.*

1.  $p$  — простое  $\iff -p$  — простое.
2.  $p$  — простое,  $a \in \mathbb{Z} \implies p \mid a$  или  $p \perp a$ .
3.  $p, q$  — простые  $\implies p \sim q$  или  $p \perp q$ .
4.  $p \mid ab \implies p \mid a$  или  $p \mid b$ .

**Предложение 8.1.**  $\exists a \neq \pm 1$ , тогда существует простое число  $p : p \mid a$ .

**Доказательство.**

Пусть  $a = 0$ , тогда  $p = 239$

Тогда  $a \neq 0$ , пускай  $a > 0$ , так как, случай  $a < 0$  аналогичен.

Индукция по  $a$ :

«База»:  $a = 1$ , но  $a > 0$ , значит простое число уже встречалось.

«Переход»:

$a$  — простое  $\implies p = a, p \mid a$

$a$  — не простое, значит  $\exists d : 1 < d < a, d \mid a$

$a = dd'$ , тогда по индукционному переходу существует простое число  $p : p \mid d$

$$p \mid d, d \mid a \implies p \mid a$$

**Определение 8.2.** Составное число — это число отличное от 0, и не являющееся простым.

**Определение 8.3.** Решето Эратосфена — это алгоритм, который позволяет найти все простые числа от 1 до  $n$ .

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., 100

- 2 — простое, вычеркиваем все числа кратные 2
- 3 — простое, вычеркиваем все числа кратные 3
- 4 — составное, пропускаем
- и т. д.

В итоге получим все простые числа от 1 до 100.

*Замечание.*  $\mathbb{P}$  — множество всех простых чисел.

**Теорема 8.1** (Теорема Евклида). Существует бесконечно много простых чисел

**Доказательство.**

$\exists p_1, p_2, \dots, p_n$  — все простые числа. Возьмем  $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ , пусть оно составное  $\implies$

$$\exists p \in \mathbb{P} : p \mid N, p > 0 \implies \exists j : p = p_j$$

Тогда,  $p \mid (N - 1) \implies p \mid 1 \implies p = \pm 1$ , противоречие.

## 9 Основная теорема арифметики

**Теорема 9.1.** Пусть  $n \geq 2$ . Тогда  $n$  можно представить в виде произведения простых чисел, и такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей.

**Доказательство.**

«Существование»:

$\exists n_0$  — наименьшее число ( $\geq 2$ ), для которого такого представления нету.

$$n_0 \text{ — составное число } \implies n_0 = ab, 2 \leq a, b < n_0$$

Это число минимальное  $\implies a = p_1 \dots p_k, b = q_1 \dots q_l$ , где все  $p_i, q_j$  — простые.

Но тогда,  $n_0 = p_1 \dots p_k q_1 \dots q_l$ , где все  $p_i, q_j$  — простые  $\implies$  такое представление существует, противоречие.

«Единственность»:

$$n = p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_l, \quad p_i, q_j \text{ — простые.}$$

Нужно доказать, что  $k = l$  и что  $q_1, \dots, q_l$  совпадают с  $p_1, \dots, p_k$  с точностью до порядка.

Не умаляя общности можно считать:  $k \leq l$ .

Индукция по  $k$ :

$$\text{«База»} : k = 1 : p_1 = q_1 \dots q_l, p_1 \text{ — простое } \implies l = 1, p_1 = q_1$$

«Переход»:  $k > 1 : p_k \mid n \implies p_k \mid (q_1 \dots q_l) \implies \exists j : p_k \mid q_j \implies p_k \sim q_j \implies p_k = q_j$

А значит  $p_1 \dots p_{k-1} = q_1 \dots \hat{q}_j \dots q_l$ , где  $k-1 \leq l-1$

$k-1 < k \implies$  применим индукционный переход:

$k-1 = l-1$  и  $q_1, \dots, \hat{q}_j, \dots, q_k$  — это  $p_1, \dots, p_{k-1}$  с точностью до порядка.  $\implies$

$q_1, \dots, (q_j = p_k), \dots, q_k$  — это  $p_1, \dots, p_k$  с точностью до порядка.

**Определение 9.1.** Каноническое разложение (факторизация) числа  $n$  — это представление  $n$  в виде  $p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$ , где  $\forall i : p_i \in \mathbb{P}, r_i \in \mathbb{N}$

**Примеры.**

- $n = 112 = 2^4 \cdot 7$
- $n = 6006 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1$

**Предложение 9.1.**  $\exists a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}, b = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}$

Тогда  $a \mid b \iff r_i \leq t_i \forall i \in \{1, \dots, s\}$

**Доказательство.**

« $\Leftarrow$ »:

$$b = a \cdot p_1^{t_1-r_1} \dots p_s^{t_s-r_s} \implies a \mid b$$

« $\Rightarrow$ »:

$$a \mid b \implies b = ac, c = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s} p_{s+1}^{m_{s+1}} \dots p_n^{m_n}$$

$$b = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s} = p_1^{r_1+m_1} \dots p_s^{r_s+m_s} p_{s+1}^{m_{s+1}} \dots p_n^{m_n} \implies$$

$$\begin{cases} t_i = r_i + m_i, & \forall i \in \{1, \dots, s\} \\ m_{s+1} = \dots = m_n = 0 \end{cases} \implies t_i \geq r_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}$$

**Следствие.**  $\exists a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$

Тогда  $\{d > 0 \mid a \mid d\} = \{p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s} \mid 0 \leq t_i \leq r_i, \forall i \in \{1, \dots, s\}\}$

**Следствие.**  $\exists a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}, b = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}$

Тогда  $\gcd(a, b) = p_1^{\min(r_1, t_1)} \dots p_s^{\min(r_s, t_s)}$

**Определение 9.2.**  $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ . Число  $c \in \mathbb{Z}$  называется наименьшим общим кратным чисел  $a$  и  $b$ , если:

1.  $a \mid c, b \mid c$
2.  $a \mid c', b \mid c' \implies c \mid c'$

**Предложение 9.2.**  $\exists a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}, b = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}$

Тогда  $c = p_1^{\max(r_1, t_1)} \dots p_s^{\max(r_s, t_s)}$  — наименьшее общее кратное чисел  $a$  и  $b$

**Доказательство.**

1.  $a \mid c, b \mid c$  — очевидно
2.  $\exists a \mid c', b \mid c', c' = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s} p_{s+1}^{m_{s+1}} \dots p_n^{m_n}$   
 $a \mid c', b \mid c' \implies r_i \leq m_i, t_i \leq m_i, \forall i \in \{1, \dots, s\} \implies$   
 $\max(r_i, t_i) \leq m_i, \forall i \in \{1, \dots, s\} \implies c \mid c'$

**Определение 9.3.**  $\text{НОК}(a, b) \iff \text{lcm}(a, b)$  — положительное значение наименьшего общего кратного чисел  $a$  и  $b$ .

**Следствие.**  $\exists a, b \in \mathbb{N}$

Тогда  $\text{lcm}(a, b) \cdot \text{gcd}(a, b) = ab$

**Доказательство.**  $\min(r_i, t_i) + \max(r_i, t_i) = r_i + t_i$

## 10 Китайская теорема об остатках

**Теорема 10.1.** Пусть  $m_1 \perp m_2, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ , тогда:

1.  $\exists x_0 \in \mathbb{Z}: \begin{cases} x_0 \equiv a_1 \\ m_1 \\ x_0 \equiv a_2 \\ m_2 \end{cases}$
2.  $\exists x_0$  удовлетворяет системе выше, тогда:  
 $x \in \mathbb{Z}$ , где  $x$  удовлетворяет системе выше  $\iff x \equiv x_0 \pmod{m_1 m_2}$

**Доказательство.**

1.  $x_0 = a_1 + km_1 = a_2 + lm_2 \implies km_1 - lm_2 = a_2 - a_1$  — линейное диофантово уравнение с двумя неизвестными  $k, l$

$m_1 \perp m_2 \implies$  у него есть решение  $(k_0, l_0)$

$x_0 = a_1 + k_0 m_1$  — искомое

2. « $\Leftarrow$ »:  $x \equiv x_0 \pmod{m_1 m_2} \implies \begin{cases} x \equiv x_0 \\ m_1 \\ x \equiv x_0 \\ m_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv a_1 \\ m_1 \\ x \equiv a_2 \\ m_2 \end{cases}$

« $\Rightarrow$ »:  $x$  удовлетворяет системе из теоремы  $\implies \begin{cases} x \equiv x_0 \\ m_1 \\ x \equiv x_0 \\ m_2 \end{cases} \implies \begin{cases} m_1 \mid (x - x_0) \\ m_2 \mid (x - x_0) \end{cases} \xRightarrow{m_1 \perp m_2} m_1 m_2 \mid (x - x_0)$

**Определение 10.1.**  $\exists R, S$  — кольца с единицей. Отображение  $\varphi : R \rightarrow S$  называется изоморфизмом колец, если:  $\varphi$  биекция.

1.  $\forall r_1, r_2 : \varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$
2.  $\forall r_1, r_2 : \varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_1) \varphi(r_2)$

**Предложение 10.1.**  $\exists m_1 \perp m_2$ , тогда существует изоморфизм:  $\mathbb{Z}/m_1 m_2 \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m_1 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2 \mathbb{Z}$

$[a]_{m_1 m_2} \mapsto ([a]_{m_1}, [a]_{m_2})$

### Доказательство.

Проверим корректность:

«при подстановке одинаковых классов»:

$$\exists [a]_{m_1 m_2} = [a']_{m_1 m_2} \implies a \equiv_{m_1 m_2} a' \implies \begin{cases} a \equiv_{m_1} a' \\ a \equiv_{m_2} a' \end{cases} \implies ([a]_{m_1}, [a]_{m_2}) = ([a']_{m_1}, [a']_{m_2})$$

«сложения»:

$$\begin{aligned} \varphi([a]_{m_1 m_2} + [b]_{m_1 m_2}) &= \varphi([a + b]_{m_1 m_2}) = ([a + b]_{m_1}, [a + b]_{m_2}) = \\ &= ([a]_{m_1}, [a]_{m_2}) + ([b]_{m_1}, [b]_{m_2}) = \varphi([a]_{m_1 m_2}) + \varphi([b]_{m_1 m_2}) \end{aligned}$$

«умножения»:

$$\begin{aligned} \varphi([a]_{m_1 m_2} \cdot [b]_{m_1 m_2}) &= \varphi([a \cdot b]_{m_1 m_2}) = ([a \cdot b]_{m_1}, [a \cdot b]_{m_2}) = \\ &= ([a]_{m_1}, [a]_{m_2}) \cdot ([b]_{m_1}, [b]_{m_2}) = \varphi([a]_{m_1 m_2}) \cdot \varphi([b]_{m_1 m_2}) \end{aligned}$$

Проверим биективность, инъективность и сюръективность:

$\varphi$  — отображение между конечными равномошными множествами, поэтому оно биективно  $\iff$  оно сюръективно  $\iff$  оно инъективно.

Действительно, если  $\varphi : A \rightarrow B$ ,  $|A| = |B| < \infty$  инъективно, то полный прообраз любого элемента из  $B$  состоит из не более чем одного элемента из  $A$  (определение инъективности).

А если сложить количества прообразов у всех элементов из  $B$ , то должно получиться в точности  $|A|$ , так как каждый прообраз — чей-то образ.

Но тогда каждый прообраз состоит из в точности одного элемента, т. е.  $\varphi$  — биекция.

Аналогично можно рассуждать и про сюръективное отображение.

$$\text{По китайской теореме об остатках } \forall a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \exists a \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a \equiv_{m_1} a_1 \\ a \equiv_{m_2} a_2 \end{cases}$$

Таким образом  $\varphi$  — биекция.

## 11 Функция Эйлера

**Предложение 11.1.**  $\exists m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ , тогда  $[a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \iff a \perp m$

Доказательство.

$$[a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \iff \exists [b]_m : [a]_m \cdot [b]_m = [1]_m \iff$$

$$\exists b \in \mathbb{Z} : ab \equiv_m 1 \iff$$

$$\exists b, c \in \mathbb{Z} : ab = 1 + mc \iff$$

$$\exists b, c \in \mathbb{Z} : ab - mc = 1 \iff \gcd(a, m) = 1 \iff a \perp m$$

**Следствие.**  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  — поле  $\iff m$  — простое число.

Доказательство.



$$m = 1 : \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{\bar{0}\}$$

$$m \text{ — простое: } \gcd(a, m) = 1, \quad \forall a \in \{1, 2, \dots, m-1\} \implies$$

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$$

$$m \text{ — составное: } m = ab, \quad 2 \leq a < m$$

$$\gcd(a, m) \neq 1 \implies \bar{a} \notin (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$$

**Определение 11.1.**  $\mathbb{F}_n$  — поле из  $n$  элементов. Называется конечным полем или полем Галуа.

**Предложение 11.2.**  $\mathbb{F}_n$  — поле из  $n$  элементов  $\iff n = p^r, \quad p \in \mathbb{P}, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$

$p$  — характеристика  $\mathbb{F}_n$ .

**Доказательство.** Пока без доказательства.

**Определение 11.2.**  $\exists m \in \mathbb{N} : \varphi(n) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*|$

Функция  $\varphi \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — функция Эйлера.

**Предложение 11.3.**  $\exists p \in \mathbb{P}, \quad r \in \mathbb{N}.$

$$\text{Тогда } \varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}.$$

$$\text{Доказательство. } \varphi(p^r) = |\{a \mid 0 \leq a < p^r, \quad (a, p^r) = 1\}| =$$

$$p^r - |\{a \mid 0 \leq a < p^r, \quad (a, p) \neq 1\}| =$$

$$p^r - |\{a \mid 0 \leq a < p^r, \quad p \mid a\}| = p^r - p^{r-1}$$

**Предложение 11.4.** Мультипликативность функции Эйлера.

$$\exists m, n \in \mathbb{N}, \quad m \perp n.$$

$$\text{Тогда } \varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$

**Доказательство.** Построим отображение  $\lambda : (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*:$

$$[a]_{mn} = A \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \mapsto ([a]_m, [a]_n)$$

$$[a]_{mn} \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \implies a \perp mn \implies \begin{cases} a \perp m \\ a \perp n \end{cases} \implies \begin{cases} [a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \\ [a]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \end{cases}$$

Проверка корректности:

$$[a]_{mn} = [a']_{mn} \implies a \equiv_{mn} a' \implies \begin{cases} a \equiv_m a' \\ a \equiv_n a' \end{cases} \implies \begin{cases} [a]_m = [a']_m \\ [a]_n = [a']_n \end{cases} \implies ([a]_m, [a]_n) = ([a']_m, [a']_n)$$

Проверим что  $\lambda$  — биекция:

Инъективность:

$$\lambda([a]_{mn}) = \lambda([b]_{mn}) \implies \begin{cases} [a]_m = [b]_m \\ [a]_n = [b]_n \end{cases} \xRightarrow{m \perp n} a \equiv_{mn} b \implies [a]_{mn} = [b]_{mn}$$

Сюръективность:

Рассмотрим  $([b]_m, [c]_n) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ .

$$m \perp n \xrightarrow{\text{КТО}} \exists a : \begin{cases} a \equiv b \\ m \\ a \equiv c \\ n \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \perp m \implies a \perp m \\ c \perp n \implies a \perp n \end{cases} \implies a \perp mn \implies [a]_{mn} \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^*$$

$$\lambda([a]_{mn}) = ([a]_m, [a]_n) = ([b]_m, [c]_n) \implies \lambda - \text{биекция.}$$

$$\lambda - \text{биекция} \implies |(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^*| = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| \implies \varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

**Следствие.**  $\exists m_1, \dots, m_k$  — попарно взаимно простые числа.

$$\text{Тогда } \varphi\left(\prod_{i=1}^k m_i\right) = \prod_{i=1}^k \varphi(m_i).$$

**Доказательство.** Индукция по  $k$ .

$$\text{«База»}: k = 1 \implies \varphi(m_1) = \varphi(m_1)$$

$$\text{«Переход»}: n - 1 \rightarrow n$$

$$(m_n, m_1) = \dots = (m_n, m_{n-1}) = 1 \implies (m_1, \dots, m_n) = 1 \implies$$

$$\varphi(m_1 \dots m_n) = \varphi(m_1 \dots m_{n-1}) \varphi(m_n) = \varphi(m_1) \dots \varphi(m_{n-1}) \varphi(m_n)$$

**Следствие.**  $\exists n = p_1^{r_1}, \dots, p_s^{r_s}$  — разложение числа  $n$  на простые множители.

$$\implies \varphi(n) = \prod_{i=1}^s (p_i^{r_i} - p_i^{r_i-1})$$

$$\text{Доказательство. По следствию: } \varphi(n) = \varphi\left(\prod_{i=1}^s p_i^{r_i}\right) = \prod_{i=1}^s \varphi(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (p_i^{r_i} - p_i^{r_i-1})$$

**Лемма 11.1.** Пусть  $R$  — ассоциативное кольцо с единицей.

$$1. a, b \in R^* \implies ab \in R^*$$

$$2. a \in R^*, x, y \in R \implies \begin{cases} ax = ay \implies x = y \\ xa = ya \implies x = y \end{cases}$$

**Доказательство.**

$$1. a' - \text{обратный к } a \text{ элемент, } b' - \text{обратный к } b \text{ элемент.}$$

$$(ab)(b'a') = a(bb')a' = aa' = 1$$

$$(b'a')(ab) = b'(aa')b = bb' = 1$$

$$2. a' - \text{обратный к } a \text{ элемент.}$$

$$ax = ay \implies a'ax = a'ay \implies x = y$$

$$xa = ya \implies xaa' = yaa' \implies x = y$$

**Теорема 11.1** (Теорема Эйлера).  $\exists m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, a \perp m \implies a^{\varphi(m)} \equiv_m 1$ .

**Доказательство.**

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{A_1, A_2, \dots, A_{\varphi(m)}\}$$

$[a]_m, A_j \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$   $\xrightarrow{1 \text{ из леммы}}$   $[a]_m A_j \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ , тогда  $[a]_m A_1, \dots, [a]_m A_{\varphi(m)}$  — различные элементы, иначе  $[a]_m A_j = [a]_m A_k \xrightarrow{2 \text{ из леммы}}$   $A_j = A_k$

$$\{[a]_m A_1, \dots, [a]_m A_{\varphi(m)}\} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \implies$$

$$[a]_m A_1 \cdot \dots \cdot [a]_m A_{\varphi(m)} = A_1 A_2 \dots A_{\varphi(m)} \implies$$

$$[a]_m^{\varphi(m)} A_1 A_2 \dots A_{\varphi(m)} = [1]_m A_1 A_2 \dots A_{\varphi(m)} \xrightarrow{2 \text{ из леммы}}$$

$$[a]_m^{\varphi(m)} = [1]_m \implies [a^{\varphi(m)}]_m = [1]_m \implies a^{\varphi(m)} \equiv_m 1$$

**Теорема 11.2** (Малая теорема Ферма).  $\exists p \in \mathbb{P}, a \in \mathbb{Z} \implies a^p \equiv_p a$

**Доказательство.**

$$(a, p) = 1 \implies a^{p-1} \equiv_p 1 \implies a^{p-1} \cdot a \equiv_p 1 \cdot a \implies a^p \equiv_p a$$

$$(a, p) \neq 1 \implies a \equiv_p 0 \implies \begin{cases} a^p \equiv_p 0 \\ a \equiv_p 0 \end{cases} \implies a^p \equiv_p a$$

**Теорема 11.3** (Теорема Вильсона).  $p \in \mathbb{P} \implies (p-1)! \equiv_p -1$

**Доказательство.** В  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* : \overline{(p-1)!} = \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \dots \cdot \overline{p-1} = \prod_{A \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} A =$

$$\left( \prod_{A^2=\bar{1}} A \right) \cdot \left( \prod_{A^2 \neq \bar{1}} A \right) = \left( \prod_{A^2=\bar{1}} A \right) \cdot (A_1 \cdot A'_1 \cdot \dots) = \left( \prod_{A^2=\bar{1}} A \right) \cdot \bar{1} = \prod_{A^2=\bar{1}} A$$

Рассмотрим каждый элемент:

$$A^2 = \bar{1} \iff A^2 - \bar{1}^2 = \bar{0} \iff (A - \bar{1})(A + \bar{1}) = \bar{0} \xrightarrow{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ ОЦ}} A - \bar{1} = \bar{0} \text{ или } A + \bar{1} = \bar{0}$$

$$\text{Тогда, если: } \begin{cases} p = 2, & \text{то } \prod_{A^2=\bar{1}} A = \bar{1} = \overline{-1} \\ p \neq 2, & \text{то } \prod_{A^2=\bar{1}} A = \bar{1} \cdot \overline{-1} = \overline{-1} \end{cases}$$

## 2 Комплексные числа

### 1 Построение поля комплексных чисел

**Определение 1.1.**  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

**Определение 1.2.**

- Сложение на  $\mathbb{C}$ :  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- Умножение на  $\mathbb{C}$ :  $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

**Предложение 1.1.**  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  — поле.

**Доказательство.**

- Коммутативность сложения:

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b') = (b + a, b' + a') = (b, b') + (a, a')$$

- Ассоциативность сложения:

$$((a, a') + (b, b')) + (c, c') = (a + b + c, a' + b' + c') = (a + (b + c), a' + (b' + c')) = (a, a') + ((b, b') + (c, c'))$$

- $(0, 0)$  — нейтральный элемент сложения.
- $(-a, -b)$  — обратный элемент к  $(a, b)$ .

- Коммутативность умножения:

$$(a, a') \cdot (b, b') = (ab - a'b', ab' + a'b) = (ba - b'a', ba' + b'a) = (b, b') \cdot (a, a')$$

- Ассоциативность умножения:

$$((a, a') \cdot (b, b')) \cdot (c, c') = (ab - a'b', ab' + a'b) \cdot (c, c') = (c(ab - a'b') - c'(ab' + a'b), c(ab' + a'b) + c'(ab - a'b')) = (cab - ca'b' - c'ab' - c'a'b, cab' + ca'b + c'ab - c'a'b') = (abc - a'b'c - ab'c' - a'bc', abc' + ab'c + abc' - a'b'c')$$

$$(a, a') \cdot ((b, b') \cdot (c, c')) = (a, a') \cdot (bc - b'c', bc' + b'c) = (a(bc - b'c') - a'(bc' + b'c), a(bc' + b'c) + a'(bc - b'c')) = (abc - a'b'c - ab'c' - a'bc', abc' + ab'c + abc' - a'b'c')$$

Как видно, выражения совпадают.

- Дистрибутивность:

Проверим правую, левая проверяется аналогично:

$$((a, a') + (b, b')) \cdot (c, c') = (a + b, a' + b') \cdot (c, c') = ((ac + bc) - (a'c' + b'c'), (a'c + b'c) + (ac' + bc')) = (ac - a'c', a'c + ac') + (bc - b'c', b'c + bc') = (a, a') \cdot (c, c') + (b, b') \cdot (c, c')$$

- $(1, 0)$  — нейтральный элемент умножения.
- $(a, b)z_1 z_2 = (1, 0) : z_1 = (a, -b), z_2 = \frac{1}{a^2 + b^2}$

**Определение 1.3.**  $\mathbb{C}$  — поле комплексных чисел.

**Определение 1.4.**  $c \in \mathbb{C}$  — комплексное число.

**Предложение 1.2.**  $\mathbb{R}' = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ , тогда:

$\mathbb{R}'$  замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения, содержит единицу, то есть является подкольцом поля  $\mathbb{C} \implies \mathbb{R}'$  — само является кольцом относительно сложения, умножения, ограниченных на  $\mathbb{R}'$ .

Тогда существует отображение  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ , где  $a \mapsto (a, 0)$ , и  $\varphi(a)$  — изоморфизм колец,

то есть  $\varphi$  — биекция и 
$$\begin{cases} \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \end{cases}.$$

Отождествим  $(a, 0)$  с вещественным числом  $a$ .

Давайте наконец-то определим комплексное число.

$$(a, 0) \cdot (0, 1) = (0, a)$$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b \cdot (0, 1) = a + bi$$

**Определение 1.5.**  $z = a + bi$  — комплексное число.

$a = \operatorname{Re}(z)$ ,  $b = \operatorname{Im}(z)$  — действительная и мнимая части комплексного числа  $z$ .

В геометрическом виде это вектор  $z = (a, b)$ .

**Определение 1.6.** Пусть  $z = a + bi$  — комплексное число, тогда  $\bar{z} = a - bi$  — сопряженное к  $z$ .

## Отступление про отображения

**Определение 1.7.**  $\operatorname{id}_M : M \rightarrow M$ ,  $x \mapsto x$  — тождественное отображение на  $M$ .

**Определение 1.8.**  $\alpha : M \rightarrow N$ ,  $\beta : N \rightarrow P$  — отображения

Тогда  $\alpha \circ \beta : M \rightarrow P$ ,  $x \mapsto \alpha(\beta(x))$  — композиция отображений.

**Определение 1.9.**  $\alpha : M \rightarrow N$  — отображение

Отображение  $\beta : N \rightarrow M$  — обратное к  $\alpha$ , если  $\beta \circ \alpha = \operatorname{id}_M$ .

**Предложение 1.3.** У отображения  $\alpha : M \rightarrow N$  есть обратное отображение, если и только если  $\alpha$  — биекция.

**Доказательство.**

« $\implies$ »:

Инъективность:

$$\beta \circ \alpha = \operatorname{id}_M, \alpha(x) = \alpha(y) \implies \beta(\alpha(x)) = \beta(\alpha(y)) \implies x = y$$

Сюръективность:

$$y \in N, y = \alpha(\beta(y)) \in \operatorname{Im}(\alpha) \text{ (Im это прообраз)}$$

« $\impliedby$ »:

Пусть  $\alpha$  — биекция, назовем  $\beta : N \rightarrow M$  — обратным, если  $\forall y \in N \alpha^{-1}(y) = \{x\}$ ,  $x \in M$

Положим  $\beta(y) = x$ ,  $\alpha \circ \beta = \operatorname{id}_N$ ,  $\beta \circ \alpha = \operatorname{id}_M$

## Продолжение

**Определение 1.10.** Автоморфизм — изоморфизм на себя.

**Предложение 1.4.**  $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$  — автоморфизм.

**Доказательство.**

$\sigma$  — биекция, т.к.  $\sigma \circ \sigma = id_{\mathbb{C}}$

$\sigma(z_1 + z_2) = \sigma(z_1) + \sigma(z_2)$  — очевидно

$\sigma(z_1 z_2) = \sigma(z_1) \sigma(z_2)$

$\sigma(1) = 1$  — очевидно

$z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$

$\sigma(z_1 z_2) = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$\sigma(z_1) \sigma(z_2) = \overline{(a_1 - i b_1)(a_2 - i b_2)} = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

## 2 Тригонометрическая форма комплексного числа

**Определение 2.1.**  $a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$a = r \cos \varphi$

$b = r \sin \varphi$

**Определение 2.2.** Модулем комплексного числа  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  назовем:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Предложение 2.1.**

1.  $|z| \geq 0, |z| = 0 \iff z = 0$
2.  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
3.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4.  $|\bar{z}| = |z|$
5.  $z \bar{z} = |z|^2$

**Доказательство.**

1. очевидно

2.  $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 = \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \end{aligned}$$

3.  $\iff |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

$$\iff (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leq a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2|z_1| |z_2|$$

$$\iff a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |a_1a_2 + b_1b_2| \leq \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\
&\Leftrightarrow a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 \leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\
&\Leftrightarrow 2a_1a_2b_1b_2 \leq b_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 \\
&\Leftrightarrow (b_1a_2 - b_2a_1)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

4. очевидно

$$5. z = a + bi \implies \bar{z} = a - bi$$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

**Замечание.**  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

**Определение 2.3.** Пусть  $z \in \mathbb{C}$ . Аргументом  $z$  назовем такое  $\varphi \in \mathbb{R}$ , что  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

**Предложение 2.2.**

1. Если  $z = 0$ , то любой  $\varphi \in \mathbb{R}$  - аргумент  $z$
2. Если  $z \neq 0$ , то:
  - (а) аргумент существует
  - (б) если  $\varphi_0$  - аргумент  $z$ , и  $\varphi$  - аргумент  $z \iff \varphi = \varphi_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

**Доказательство.**

1. тривиально

$$2. z_0 = \frac{1}{|z|} \cdot z$$

$$|z_0| = \left| \frac{1}{|z|} \right| \cdot |z| = \frac{1}{|z|} \cdot |z| = 1$$

$$z_0 = a_0 + ib_0, |z_0| = a_0^2 + b_0^2 = 1 \implies \exists \varphi_0 : \begin{cases} a_0 = \cos \varphi_0 \\ b_0 = \sin \varphi_0 \end{cases}$$

$$z = |z| \cdot z_0 = |z|(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$$

« $\Leftarrow$ »:

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k \implies \begin{cases} \cos \varphi = \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi = \sin \varphi_0 \end{cases} \implies \varphi - \text{аргумент}$$

« $\Rightarrow$ »:

$$\varphi - \text{аргумент} \implies z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \implies \begin{cases} \cos \varphi = \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi = \sin \varphi_0 \end{cases} \implies \varphi - \varphi_0 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

**Определение 2.4.**  $\arg(z) = \varphi$  означает  $\varphi$  — один из аргументов  $z$

**Замечание.** Предположим оказалось, что  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  для некоторых  $r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$ . Тогда  $r = |z|, \varphi = \arg z$

**Доказательство.**  $|z| = \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \sqrt{r^2} = r$ , а  $\varphi$  — аргумент по определению

**Предложение 2.3.**

1.  $\arg \bar{z} = -\arg z$
2.  $z \in \mathbb{R} \iff \arg z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
3.  $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
4.  $z_2 \neq 0 \implies \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

**Доказательство.**

1.  $\arg z = \varphi$   
 $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$   
 $\bar{z} = |z|(\cos \varphi - i \sin \varphi) = |\bar{z}|(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) \implies$   
 $\arg \bar{z} = -\varphi$
2. « $\implies$ »:  
 $z > 0$ :  
 $z = |z| \cdot 1 = |z|(\cos 0 + i \sin 0) \implies \arg z = 0$   
 $z < 0$ :  
 $z = |z| \cdot (-1) = |z|(\cos \pi + i \sin \pi) \implies \arg z = \pi$   
« $\impliedby$ »:  
 $\sin(k\pi) = 0$
3.  $\arg z_1 = \varphi_1, \arg z_2 = \varphi_2 \implies$   
(!)  $\varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 z_2)$   
 $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \implies$   
 $z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)) =$   
 $|z_1 z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \implies \arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$
4.  $z_1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \implies \arg z_1 = \arg \frac{z_1}{z_2} + \arg z_2 \implies \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

**Следствие** (Формула Муавра). Пусть  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = r$ ,  $\arg z = \varphi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Тогда  $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$

**Доказательство.**

- $n > 0$  : индукция по  $n$   
«База»:  $n = 1$  — тривиально  
«Переход»:  $n - 1 \rightarrow n$   
 $z^n = z^{n-1} \cdot z = r^{n-1}(\cos((n-1)\varphi) + i \sin((n-1)\varphi)) \cdot z =$   
 $r^{n-1}(\cos((n-1)\varphi) + i \sin((n-1)\varphi)) \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi) =$



$$r^n(\cos((n-1)\varphi + \varphi) + i \sin((n-1)\varphi + \varphi)) = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

- $n = 0 : 1 = r^0(\cos(0) + i \sin(0)) = 1$
- $n < 0 : n = -k, k \in \mathbb{N}$

$$z^n = \frac{1}{z^k}$$

$$|z^n| = \frac{1}{|z^k|} = \frac{1}{|z|^k} = |z|^{-k} = |z|^n$$

$$\arg z^n = \arg 1 - \arg z^k = 0 - k\varphi = n\varphi$$

### 3 Корни из комплексных чисел

Рассмотрим уравнение  $z^n = w$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w \in \mathbb{C}$ .

**Теорема 3.1.**  $\exists n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$

1. Если  $w = 0$ , То уравнение  $z^n = w$  имеет единственный корень  $z = 0$ .
2. Если  $w \neq 0$ , То уравнение  $z^n = w$  имеет ровно  $n$  различных корней:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$$

**Доказательство.**

1.  $w = 0 \implies z = 0$
2.  $w \neq 0 \implies \begin{cases} w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) : & r > 0, \varphi \in \mathbb{R} \\ z = p(\cos \alpha + i \sin \alpha) : & p > 0, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$z^n = w \iff p^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \iff \begin{cases} p^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} p = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$z^n = w \iff z = \underbrace{\sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)}_{z_k}, k \in \mathbb{Z}$$

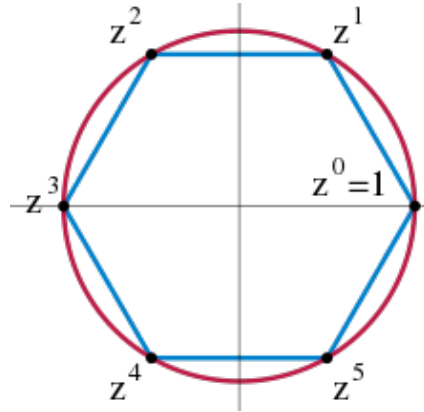
При каких  $k, l$  :  $z_k = z_l$ ?

$$z_k = z_l \iff \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi l}{n} + 2\pi s, s \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\frac{k}{n} = \frac{l}{n} + s, s \in \mathbb{Z} \iff k = l + ns, s \in \mathbb{Z} \iff$$

$$k \equiv l \pmod{n} \iff z \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$$

## Изображение на окружности



Комплексные корни образуют правильный  $n$ -угольник на окружности.

**Лемма 3.1.** Пусть  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  — все корни  $z^n = w$ ,  $n > 1$

Тогда  $z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = 0$

**Доказательство.**

Заметим, что  $z_k = z_{k-1} \underbrace{\left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)}_{\xi}$ , тогда  $z_k = z_0 \cdot \xi^k$ .

Обозначим  $S = z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}$ , значит  $\xi \cdot S = z_1 + z_2 + \dots + \underbrace{z_n}_{=z_0} = S \implies \xi S = S \implies (\xi - 1)S = 0$

Из того что  $n > 1 \implies \xi \neq 1$ , а значит  $(\xi - 1)S = 0 \implies S = 0$

**Определение 3.1.** Группа — это множество  $G$  с операцией  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$  такая, что:

1.  $*$  — ассоциативна:  $(a * b) * c = a * (b * c)$
2. Существует нейтральный элемент  $e \in G$  такой, что  $a * e = e * a = a$  для любого  $a \in G$
3. У любого элемента  $a \in G$  существует обратный элемент  $a^{-1} \in G$  такой, что  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

**Примеры.**

1.  $(\mathbb{Z}, +)$
2.  $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$
3. Если  $R$  — ассоциативное кольцо с 1, то  $R^* = \{r \mid \exists s \in R : rs = sr = 1\}$  — группа относительно умножения.

**Предложение 3.1.**  $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{ \underbrace{\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}}_{\xi_k} \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$  — группа

относительно умножения.

**Доказательство.**

- Ассоциативность — так как есть ассоциативность в  $\mathbb{C}$

- $1 \in \mu_n$  ( $1 = \xi_0$ )
- $\xi_k \cdot \xi_{-k} = \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right) \left( \cos \frac{2\pi(-k)}{n} + i \sin \frac{2\pi(-k)}{n} \right) = 1$

**Лемма 3.2.**  $\xi_k = \xi_1^k$

**Доказательство.**  $\left( 1 \cdot \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)^k = 1^k \cdot \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)$  (по формуле Муавра)

**Определение 3.2.**  $G$  — группа с операцией  $*$ ,  $g \in G$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , тогда:

$$g^n = \begin{cases} g * g * \dots * g, & n > 0 \\ e, & n = 0 \\ g^{-1} * g^{-1} * \dots * g^{-1}, & n < 0 \end{cases}$$

**Определение 3.3.** Группа  $G$  называется циклической, если  $\exists g \in G : G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Пишут:  $G = \langle g \rangle$

**Определение 3.4.**  $g$  — образующий элемент группы  $G$

**Примеры.**

- $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$  (по сложению)  $g^n = \begin{cases} 1 + 1 + \dots + 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 + -1 + \dots + -1 & n < 0 \end{cases}$
- $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{4} \rangle$  (по сложению)
- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle$  (по сложению)
- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{3} \rangle$  (по умножению)
- $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$  — не циклическая группа  $g^2 = e \implies g^{2k} = e, g^{2k+1} = g$

**Определение 3.5.**  $G$  — группа,  $g \in G$

Если  $\forall n \in \mathbb{N} : g^n \neq e$ , то говорят, что  $g$  — бесконечный порядок

Если  $\exists n \in \mathbb{N} : g^n = e$ , то минимальное такое  $n$  называют порядком  $g$  (пишут:  $\text{ord } g = n$ )

**Пример.**  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$\text{ord } \bar{1} = 1$$

$$\text{ord } \bar{2} = 4$$

$$\text{ord } \bar{3} = 4$$

$$\text{ord } \bar{4} = 2$$

**Предложение 3.2.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $|G| = n$ ,  $g \in G$ .

Тогда:  $G = \langle g \rangle \iff \text{ord } g = n$

**Доказательство.**

« $\Rightarrow$ »:

$$\exists k, l \in \{0, 1, \dots, n\}, k \neq l : g^k = g^l$$

$$k < l : g^{-k} \cdot g^k = g^{-k} \cdot g^l = g^{l-k} = e$$

$$0 < l - k \leq n$$

Таким образом, порядок  $g$  не превосходит  $n$

Предположим,  $\text{ord } g = m < n$

$G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{g^{mq+r} \mid q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < m\} = \{g^0, g^1, \dots, g^{m-1}\}$  — противоречие, так как  $|G| \leq m < n$ , а мы знаем что  $|G| = n$ .

« $\Leftarrow$ »:

$$\text{ord } g = n$$

$$\Rightarrow g^0, g^1, g^2, \dots, g^{n-1} \text{ — попарно различны}$$

$$\Rightarrow \{g^0, g^1, \dots, g^{n-1}\} = G$$

$$\Rightarrow G = \langle g \rangle$$

**Определение 3.6.** Первообразным корнем из 1 степени  $n$  называется такой элемент  $z \in \mathbb{C}^*$ , что  $\text{ord } z = n$

**Пример.**  $\mu_6 = \{1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$

$$\text{ord } 1 = 1, \text{ord } \xi_1 = 6, \text{ord } \xi_2 = 3, \text{ord } \xi_3 = 2, \text{ord } \xi_4 = 3, \text{ord } \xi_5 = 6$$

$\xi_2$  — первообразный корень из 1 степени 3

## 3 Многочлены

### 1 Многочлены и формальные степенные ряды

**Определение 1.1.** Последовательность *финитная*  $\iff \exists N : \forall n \geq N : a_n = 0$ .

**Определение 1.2.** Многочленом над  $R$  (от одной переменной) называется финитная последовательность  $(a_i)$ ,  $a_i \in R$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$

**Определение 1.3.**  $R$  — коммутативное кольцо с 1, тогда:

$R[x] = \{(a_i) \mid a_i \in R, i = 0, 1, \dots; a_i = 0 \text{ при } i \rightarrow \infty\}$  — кольцо многочленов над  $R$ .

**Предложение 1.1.** Операции в  $R[x]$ :

«Сложение»:  $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$

«Умножение»:  $(a_i) \cdot (b_i) = (p_i)$ , где  $p_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$

**Предложение 1.2** (Переход к стандартной записи).

$\sqcup a \in R$ ,  $[a] = (a, 0, 0, \dots)$  — многочлен, равный  $a$ .

$$[a] + [b] = [a + b]$$

$$[a] \cdot [boba] = (aboba, 0, 0, \dots) = [aboba]$$

Отождествим  $[a]$  с  $a$ .

$$[a] \cdot (b_0, b_1, \dots) = (ab_0, ab_1, \dots)$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = (a_0, 0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, 0, \dots) + \dots + (0, 0, \dots, a_n, 0, 0, \dots) =$$

$$a_0 \cdot \underbrace{(1, 0, 0, \dots)}_{x_0} + a_1 \cdot \underbrace{(0, 1, 0, \dots)}_{x_1} + \dots + a_n \cdot \underbrace{(0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)}_{x_n} = a_0 + a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n$$

$$x_j \cdot x_1 = (0, \dots, 1, 0, 0, \dots) \cdot (0, 1, 0, 0, \dots) = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) = x_{j+1} \implies \forall m \in \mathbb{N} : x_m = x_1^m$$

$$x_1 = x \implies x_m = x_1^m = x^m$$

Значит получили стандартную запись многочленов  $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)$

**Определение 1.4.**  $\sqcup f \in R[x]$ ,  $f \neq 0$  (то есть не  $(0)$ )

Тогда степенью  $f$  называется максимальное  $j$  такое что  $a_j \neq 0$

Обозначим  $\deg f = j$ .

Если  $f = 0$ , то  $\deg f \in \{-1, -\infty\}$  (по разному обозначают).

**Определение 1.5.**  $d = \deg f \implies a_d$  называется старшим коэффициентом  $f$ .

**Определение 1.6.** Константой называется множество  $f$  такое что  $\deg f \leq 0$ .

**Определение 1.7.** Мономом называется множество вида  $ax^j$ .

**Предложение 1.3.**  $R[x]$  — коммутативное ассоциативное кольцо с 1.

### Доказательство.

1-4. Аксиомы относящиеся к сложению очевидны.

5. Коммутативность умножения очевидна.

6. Ассоциативность умножения:

$$f, g, h \in R[x], (fg)h = f(gh)$$

$$f = \sum_{i=0}^k f_i X^i, \text{ где } f_i \in R$$

$$g = \sum_{i=0}^l g_i X^i, \text{ где } g_i \in R$$

$$h = \sum_{i=0}^n h_i X^i, \text{ где } h_i \in R$$

Ассоциативность мономов  $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$  — сводится к сложению,  $f, g, h$  — мономы.

$$(fg)h = (\sum f_i X^i \cdot \sum g_j X^j) \cdot \sum h_k X^k = \sum (f_i X^i \cdot g_j X^j) \cdot \sum h_k X^k \stackrel{\text{ассоц. мономов}}{=} \\ \sum f_i X^i \cdot \sum (g_j X^j \cdot h_k X^k) = f(gh)$$

7. Нейтральный элемент по умножению —  $1 = (1, 0, 0, \dots)$ .

$$8. \text{ Дистрибутивность: } \begin{cases} (aX^i \cdot bX^j) \cdot cX^k = abX^{i+j} \cdot cX^k = abc \cdot X^{i+j+k} \\ aX^i \cdot (bX^j \cdot cX^k) = aX^i \cdot bcX^{j+k} = abc \cdot X^{i+j+k} \end{cases}$$

**Определение 1.8.**  $R[[x]] = \{(a_i) \mid a_i \in R, i = 0, 1, \dots\}$  — множество формальных степенных рядов над  $R$ .

$$(a_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$$

**Упражнение.**  $R[[x]]$  — коммутативное ассоциативное кольцо с 1.

## 2 Свойства степени

**Предложение 2.1.**  $f, g \in R[x], \deg f = m, \deg g = n$

$$1. \deg(f + g) \leq \max(m, n)$$

$$\text{При этом: } m \neq n \implies \deg(f + g) = \max(m, n)$$

$$2. \deg(fg) \leq m + n$$

### Доказательство.

$$1. f = \sum_{i=0}^m a_i X^i, g = \sum_{i=0}^n b_i X^i, d = \max(m, n)$$

$$f = \sum_{i=0}^d a_i X^i, g = \sum_{i=0}^d b_i X^i$$

$$f + g = \sum_{i=0}^d (a_i + b_i) X^i \implies \deg(f + g) \leq d$$

$$m \neq n \implies \begin{cases} a_d = 0 \\ b_d \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_d \neq 0 \\ b_d = 0 \end{cases} \implies a_d + b_d \neq 0 \implies \deg(f + g) = d$$

$$2. \left( \sum_{i=0}^m a_i X^i \right) \left( \sum_{j=0}^n b_j X^j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + \dots + a_m b_n X^{m+n} \implies \deg fg \leq m + n$$

*Замечание.*  $\deg fg < m + n$ , если  $a_m \neq 0$  или  $b_n \neq 0$  и  $a_m b_n = 0$

*Замечание.* Будем считать, что  $\deg 0 = -\infty$

**Определение 2.1.** Область целостности (целостное кольцо, область) — коммутативное ассоциативное кольцо с  $1 \neq 0$  и без делителей нуля (то есть никакие два ненулевых элемента не дают ноль при умножении)

**Предложение 2.2.** Пусть  $R$  — область целостности.

1.  $\forall f, g \in R[x] : \deg(fg) = \deg f + \deg g$
2.  $R[x]$  — область целостности

**Доказательство.**

1. В предыдущем доказательстве  $\begin{cases} a_m \neq 0 \\ b_n \neq 0 \end{cases} \implies a_m b_n \neq 0 \implies \deg(fg) = m + n$
2.  $f \neq 0 \implies \deg f \geq 0$ ,  $g \neq 0 \implies \deg g \geq 0 \implies \deg(fg) \geq 0 \implies fg \neq 0$

**Следствие.** Пусть  $R$  — область целостности: тогда  $R[x]^* = R^*$

**Доказательство.**

« $\supset$ »: очевидно  $R^* \subset R[x]^*$

« $\subset$ »: пусть  $f \in R[x]^* \implies \exists g \in R[x] : f \cdot g = 1$

$$\deg(fg) = 0 = \deg f + \deg g \implies \deg f = \deg g = 0 \implies f \in R \implies f \in R^*$$

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z}[x]^* = \{\pm 1\}$
2.  $\mathbb{R}[x]^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3.  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[x]^*$  — бесконечное множество

**Упражнение.**  $R[[x]]^* = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_0 \in R^* \right\}$

### 3 Деление с остатком

**Теорема 3.1** (о делении с остатком для многочленов).  $R$  — область целостности.

Пусть  $f, g \in R[x]$ ,  $g \neq 0$  и старший коэффициент  $g$  обратим.

Тогда  $\exists! q, r \in R[x]$ :

1.  $f = gq + r$
2.  $\deg r < \deg g$

**Доказательство.** Пусть  $\deg g = d$ ,  $g = b_d X^d + \dots$

1. «Существование»

Индукция по  $\deg f$ :  $\deg f < d \implies$  подходит  $q = 0, r = f$

Пусть  $\deg f = n \geq d$

$f_1 = f - g \cdot a_n \cdot b_d^{-1} \cdot X^{n-d}$ , где  $b_d$  — старший коэффициент  $g$  (на первый взгляд здесь написано что-то неочевидное, но на деле это простое деление многочленов столбиком, то есть мы просто делаем так, чтобы старший коэффициент  $f$  исчез)

$$g \cdot a_n \cdot b_d^{-1} \cdot X^{n-d} = (b_d X^d + \dots) \cdot a_n \cdot b_d^{-1} \cdot X^{n-d} = a_n X^n + \dots \implies \deg f_1 < n$$

По индукционному предположению  $\exists q_1, r_1 \in R[x]$  такие, что:

$$(a) \quad f_1 = gq_1 + r_1$$

$$(b) \quad \deg r_1 < d$$

$$f = g \cdot a_n \cdot b_d^{-1} \cdot X^{n-d} + f_1 = g \underbrace{(a_n \cdot b_d^{-1} \cdot X^{n-d} + q_1)}_q + \underbrace{r_1}_r$$

2. «Единственность»

Предположим  $f = g \cdot q_1 + r_1 = g \cdot q_2 + r_2$ ,  $\deg r_1 < d$ ,  $\deg r_2 < d$

$$g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$$

Предположим  $q_1 \neq q_2 \implies \deg g \cdot (q_1 - q_2) \stackrel{R-\text{ОЦ}}{=} \underbrace{\deg g}_d + \underbrace{\deg q_1 - q_2}_{\geq 0} \geq d \implies \deg(r_2 - r_1) \geq d$ ,

но  $\deg(r_2 - r_1) < d$ , противоречие.

**Замечание.** Условие  $R$  — область целостности не существенно.

(я без понятия что написано дальше, но пускай будет)

$$g = b_d X^d + \dots, \quad b_d \in R^*$$

$$b_d \cdot a = 0 \implies b_d^{-1}(b_d a) = 0 \implies a = 0 \quad (\text{что это значит?})$$

## 4 Гомоморфизм подстановки

**Определение 4.1.** Пусть  $R, S$  — кольца. Гомоморфизм из кольца  $R$  в кольцо  $S$  называется отображением  $\varphi : R \rightarrow S$ , такое что:

1.  $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ,  $\forall a, b \in R$ ;
2.  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
3.  $\varphi(1_R) = 1_S$

**Предложение 4.1** (свойства гомоморфизма).

1.  $\varphi(0_R) = 0_S$
2.  $\forall a \in R : \varphi(-a) = -\varphi(a)$



$$3. \forall a, b \in R : \varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b)$$

**Доказательство.**

$$1. 0_R = 0_R + 0_R \implies \varphi(0_R) = \varphi(0_R) + \varphi(0_R) \implies \underbrace{\varphi(0_R) + (-\varphi(0_R))}_{0_S} = \varphi(0_R) + \underbrace{\varphi(0_R) + (-\varphi(0_R))}_{0_S} \implies$$

$$0_S = \varphi(0_R) + 0_S \implies \varphi(0_R) = 0_S$$

$$2. a + (-a) = 0_R \implies \varphi(a) + \varphi(-a) = \varphi(0_R) = 0_S \implies \varphi(-a) = -\varphi(a)$$

$$3. \varphi(a - b) = \varphi(a) + \varphi(-b) = \varphi(a) - \varphi(b)$$

**Определение 4.2.** Пусть  $S$  — кольцо,  $R \subset S$ .  $R$  называется подкольцом  $S$ , если:

$$1. \forall a, b \in R : a - b \in R$$

$$2. \forall a, b \in R : ab \in R$$

$$3. 1_S \in R$$

**Замечание.** Этих условий достаточно (остальные выражаются)

$$1 \in R \implies 0 = 1 - 1 \in R$$

$$a \in R \implies -a = 0 + (-a) = 0 - a \in R$$

$$a, b \in R \implies a + (-(-b)) = a - (-b) \in R$$

**Примеры.**

$$1. \text{ Пусть } R \text{ — подкольцо в } S. \text{ Тогда } i_R : R \rightarrow S \text{ — гомоморфизм, } a \mapsto a.$$

$$2. \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ — гомоморфизм, } a \mapsto \bar{a}$$

$$3. \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ — гомоморфизм, } z \mapsto \bar{z}$$

**Теорема 4.1.** Пусть  $B$  — кольцо,  $A$  — подкольцо такое что,  $\forall a \in A \forall b \in B : ab = ba$

Зафиксируем  $b \in B$ . Тогда отображение  $\varphi_b : A[x] \rightarrow A[b]$

$a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \mapsto a_n b^n + \dots + a_1 b + a_0$  является гомоморфизмом колец.

(Смысл этой теоремы в том, что подставить элементы надкольца в сумму/произведение многочленов, это тоже самое, что подставить элементы надкольца в многочлены, а потом сложить/умножить)

**Доказательство.**

$$\text{Если } f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0, \text{ то } f(b) = a_n b^n + \dots + a_1 b + a_0 = \varphi_b(f)$$

$$\text{Нужно проверить: } (f + g)(b) = f(b) + g(b) \text{ и } (fg)(b) = f(b)g(b)$$

$$1(b) = 1 \text{ — тривиально}$$

$$(f + g)(b) = f(b) + g(b) \text{ — очевидно из определения } f + g.$$

Осталось проверить, что  $(fg)(b) = f(b)g(b)$ :

$$f = \sum_{i=0}^n a_i X^i, \quad g = \sum_{i=0}^m c_i X^i$$

$$fg = \sum_{k=0}^{n+m} d_k X^k, \quad d_k = \sum_{i+j=k} a_i c_j$$

$$(fg)(b) = \sum_{k=0}^{n+m} d_k b^k$$

$$f(b)g(b) = \left( \sum_{i=0}^n a_i b^i \right) \left( \sum_{j=0}^m c_j b^j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b^i c_j b^j \stackrel{\text{КОММУТ.}}{=} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i c_j b^{i+j}$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i c_j b^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m} \underbrace{\left( \sum_{i,j \geq 0, i+j=k} (a_i c_j) \right)}_{d_k} b^k = (fg)(b)$$

### Примеры.

1.  $A$  — любое коммутативное кольцо,  $B = A[x]$

$A$  — подкольцо в  $B = A[x] \implies$  можно рассмотреть  $f(g)$ , где  $f, g \in A[x]$

2.  $\mathbb{R}[x] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}[x], f \mapsto f(5)$

$$\text{Im } \varphi = \mathbb{R} \neq \mathbb{R}[x]$$

3.  $A \rightarrow A$

$f \mapsto f(x_2, x_3, x_4, \dots)$  — инъективный, но не сюръективный

$f \mapsto f(0, x_1, x_2, x_3, \dots)$  — сюръективный, но не инъективный

### Упражнение.

1. Найти все автоморфизмы  $\mathbb{Q}$
2. Найти все автоморфизмы  $\mathbb{R}$
3. Найти все автоморфизмы  $\mathbb{R}[x]$

**Теорема 4.2 (Безу).** Пусть  $f \in R[X]$ ,  $c \in R$ . Тогда остаток при делении  $f$  на  $X - c$  есть  $f(c)$ .

### Доказательство.

$f = (X - c) \cdot q + r$ , по теореме о делении с остатком  $\deg r < \deg(X - c) = 1 \implies$

$$f(c) = (c - c) \cdot q(c) + r(c) = r(c)$$

**Следствие.** Пусть  $f \in R[X]$ ,  $c \in R$ . Тогда  $f(c) = 0 \iff (X - c) \mid f$

**Определение 4.3.** Пусть  $R$  — подкольцо  $S$ , элементы  $R$  коммутируют с элементами  $S$ . Тогда  $s \in S$ , такой что  $f(s) = 0$ , где  $f \in R[x]$  — называется корнем из  $f$  в  $R$ .

### Примеры.

1.  $f = x^4 - 2$  в  $\mathbb{Z}[x]$

$f$  не имеет корней в  $\mathbb{Z}$

$f$  имеет 2 корня в  $\mathbb{R}$

$f$  имеет 4 корня в  $\mathbb{C}$

**Предложение 4.2.** Пусть  $R$  – область целостности,  $f \in R[x]$ ,  $\deg f = d \geq 0$ . Тогда число корней  $f$  в  $R$  не превосходит  $d$ .

**Доказательство.** Индукция по  $d$

База:  $d = 0 \implies f$  ненулевой  $d \implies$  корней нет

Переход:  $d > 0$

$\forall f$  нет корней в  $R \implies$  утверждение выполнено

$\forall f$  есть корни в  $R$ , пусть  $c \in R$  – какой-либо из корней  $f$

$f(c) = 0 \implies f = (X - c) \cdot g$ , где  $g \in R[x]$

$\deg f = \deg(X - c) + \deg g \implies \deg g = d - 1$

Пусть  $c_1, \dots, c_l$  – все корни  $g$  в  $R$

По предположению индукции:  $l \leq d - 1$

Утверждение:  $\{c_1, \dots, c_l, c\}$  – все корни  $f$  в  $R$

$f(c_1) = \dots = f(c_l) = f(c) = 0$

Предположим  $\exists c' \notin \{c_1, \dots, c_l, c\}$ , такой что  $f(c') = 0$

$\implies (c' - c) \cdot g(c') = 0$  – противоречие с тем, что  $R$  – область целостности

$\implies \forall f$  не более  $l + 1 \leq d$  корней в  $R$ .

**Пример.**  $x^2 - 1$  имеет 4 корня в  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  или в  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$x^2 \equiv_{77} 1 \iff \begin{cases} x^2 \equiv_7 1 \\ x^2 \equiv_{11} 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv_7 1 \text{ или } x \equiv_7 -1 \\ x \equiv_{11} 1 \text{ или } x \equiv_{11} -1 \end{cases}$$

**Предложение 4.3** (формальное и функциональное равенство многочленов).

Пусть  $R$  – бесконечная область:  $f, g \in R[x]$  таковы, что  $\forall a \in R : f(a) = g(a)$

Тогда  $f = g$

**Доказательство.**

$h = f - g$ , предположим, что  $h \neq 0 \implies \deg h = d \geq 0 \implies \forall h$  есть  $\leq d$  корней.

Но  $\forall a \in R : h(a) = f(a) - g(a) = 0$ ,  $R$  – бесконечная область, противоречие. Так как их не больше чем  $d$ , но  $R$  бесконечно.

**Пример.**  $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ,  $f = X$ ,  $g = X^3$

$\forall A \in \mathbb{Z} : a^3 \equiv_3 a \implies \forall \alpha \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} : f(\alpha) = g(\alpha)$

## 5 Евклидовы области

**Определение 5.1.** Евклидовой областью целостности (евклидовой областью, евклидовым кольцом) называется область целостности  $R$ , для которой существует функция  $\nu : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , называемая евклидовой нормой, такая что:

1. Если  $d \mid a$ , то  $\nu(d) \leq \nu(a)$ , причем  $\nu(d) = \nu(a) \iff d \sim a$ .
2. Для любых  $a, b \in R$ ,  $b \neq 0$ : существует представление  $a = bq + r$ , где  $r = 0$  или  $\nu(r) < \nu(b)$ .

*Замечание:* свойство один можно убрать, но доказательства будут сложнее.

### Примеры.

1.  $R = K[x]$ , ( $K$  — поле), где  $\nu(P) = \deg P$
2.  $R = \mathbb{Z}$ , где  $\nu(a) = |a|$
3.  $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ , где  $\nu(a + bi) = a^2 + b^2$  (подробнее в книжке Аейрленд, Роузен - «Классическое введение в современную теорию чисел»)
4.  $R = K[[x]]$ , ( $K$  — поле)

$$R^* = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \mid a_0 \neq 0\}$$

$$\text{ord } f = \min\{j \mid a_j \neq 0\}$$

$$f = x^{\text{ord } f} \cdot (a_j + a_{j+1}x + \dots) \sim x^{\text{ord } f}$$

**Упражнение.** Докажите, что это евклидова область.

5.  $R = \mathbb{Z}_{(5)} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 5 \nmid b\}$

**Упражнение.** Докажите, что это евклидова область.

**Лемма 5.1.** Пусть  $R$  — область целостности,  $a, b \in R$ . Тогда  $a \sim b \iff a = \varepsilon b$ ,  $\varepsilon \in R^*$

### Доказательство.

« $\Leftarrow$ »:

Пусть  $a = \varepsilon b \implies b$ . Так как  $\varepsilon$  — обратим,  $b = \varepsilon^{-1}a$ .

$$\left. \begin{array}{l} a = \varepsilon b \implies a \mid b \\ b = \varepsilon^{-1}a \implies b \mid a \end{array} \right\} \iff a \sim b$$

« $\Rightarrow$ »:

$$a \sim b \implies \left\{ \begin{array}{l} a \mid b \\ b \mid a \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} b = \varepsilon a \\ a = \varepsilon' b \end{array} \right. \implies b = \varepsilon \varepsilon' b \implies (\varepsilon \varepsilon' - 1)b = 0 \implies \varepsilon \text{ — обратим.}$$

**Определение 5.2.**  $R$  — коммутативное кольцо,  $I \subset R$  называется идеалом в  $R$ , если:

1.  $I \neq \emptyset$
2.  $\forall a, b \in I : a + b \in I$
3.  $\forall a \in I \forall b \in R : ab \in I$

### Примеры.

1.  $R = \mathbb{Z}$ ,  $I = 2\mathbb{Z}$
2.  $R = K[X]$ ,  $I = \{f \in R \mid f(0) = 0\}$
3.  $R = C[0, 1]$  (непрерывные функции на отрезке  $[0, 1]$ ),  $I = \{f \in R \mid f(0) = 0\}$

**Определение 5.3.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо,  $r \in R$ . Из свойств кольца очевидно, что  $\langle r \rangle \Leftrightarrow (r) \Leftrightarrow \{rs \mid s \in R\}$  — идеал в  $R$ .

Тогда  $(r)$  называется *главным идеалом* порожденным элементом  $r$ .

*Замечание.*  $(r) = (r') \iff r \sim r'$

**Пример.** Пример неглавного идеала:

$$R = \mathbb{Z}[X], \quad I = \{f : 2 \mid f(0)\}$$

Это множество всех многочленов, у которых свободный член четный.

**Предложение 5.1.** В евклидовой области все идеалы главные.

**Доказательство.** Пусть  $I$  — идеал в евклидовой области  $R$ .

Случай  $I = \{0\}$  — тривиален, тогда  $I = (0)$ . Пусть  $I \neq \{0\}$ .

Зафиксируем норму  $\nu$  и рассмотрим  $c \in I$  с минимальной нормой. Докажем, что  $I = (c)$ .

« $\supset$ »:

Так как для любого  $b \in R$  должно быть выполнено  $cb \in I$ , то  $I \supset (c)$ .

« $\subset$ »:

Предположим,  $\exists a \in I \setminus (c)$ . Представим евклидову норму в виде  $a = cq + r$ ,  $q, r \in R$ . Если  $r = 0$ , то  $a \in (c)$  по определению главного идеала. Но иначе  $\nu(r) < \nu(c)$ . Выразим  $r$ :

$$r = a - cq = a + c(-q).$$

Так как  $c \in I$  и  $a \in I$ , то и  $c(-q) \in I$ , следовательно  $r \in I$ . Но  $\nu(r) < \nu(c)$ , что противоречит минимальности нормы  $\nu(c)$

**Определение 5.4.** Область целостности, в которых все идеалы главные, называется *областью главных идеалов (ОГИ)*.

**Предложение 5.2.** Пусть  $R$  — область главных идеалов. Тогда:

1.  $a, b \in R \implies$  у  $a$  и  $b$  существует наибольший общий делитель
2. Если  $d$  — наибольший общий делитель  $a$  и  $b$ , то  $d = at + bn$ ,  $t, n \in R$

**Доказательство.**

Можно считать  $a \neq 0$  или  $b \neq 0$ , если  $a = b = 0$ , то  $d = 0$  подходит,  $d \neq 0$  не подходит.

1. Рассмотрим множество  $I = \{am + bn \mid m, n \in R\}$  — идеал в  $R$ . Тогда можно записать  $I = (d)$ , так как  $I$  — область главных идеалов.

Заметим, что  $d$  — общий делитель  $a$  и  $b$ .

$$\begin{cases} a = a \cdot 1 + b \cdot 0 \in I = (d) \\ b = a \cdot 0 + b \cdot 1 \in I = (d) \end{cases} \implies \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$$

Покажем, что  $d$  — наибольший общий делитель  $a$  и  $b$ . То есть, что

$$\begin{cases} d' \mid a \\ d' \mid b \end{cases} \xRightarrow{(!)} d' \mid d$$

Так как  $d \in I$ ,  $d = am_0 + bn_0$ ,  $m_0, n_0 \in R$ .

$$\begin{cases} d' \mid a \\ d' \mid b \end{cases} \implies \begin{cases} d' \mid am_0 \\ d' \mid bn_0 \end{cases} \implies d' \mid d.$$

Что и требовалось доказать.

2. Если  $d'$  — наибольший общий делитель  $a$  и  $b$ , то:

$$d' \sim d \in I \implies d' \in I \implies d' = am + bn, \quad m, n \in R.$$

*Замечание.* Наибольший общий делитель в ОГИ обозначают  $(a, b)$ .

**Определение 5.5.** Элементы ОГИ  $a$  и  $b$  называют *взаимно простыми*, если  $(a, b) = 1$ .

**Предложение 5.3.**  $(a, b) = 1 \iff m, n \in R : am + bn = 1$

**Доказательство.**

« $\Rightarrow$ »: Из предыдущего предложения

« $\Leftarrow$ »:  $\exists m, n \in R : am + bn = 1$

$$\exists d = (a, b) \implies d \mid a, d \mid b \implies d \mid (am + bn) \implies d \mid 1 \implies d \sim 1 \implies (a, b) = 1$$

## 6 Факториальность области главных идеалов

**Определение 6.1.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо. Элемент  $a$  называется *неприводимым*, если  $a \neq 0$ ,  $a \notin R^*$  и  $a = bc \implies b \in R^*$  или  $c \in R^*$ .

То есть неприводимый элемент — необратимый элемент, который не раскладывается в произведение двух обратимых.

**Определение 6.2.** *Приводимый элемент* — элемент, который не является ни 0, ни обратимым, ни неприводимым.

**Примеры.**

1.  $R = K[x]$ , ( $K$  — поле)

$$\deg f = 1 \implies f \text{ — неприводимый, так как } f = bc, \deg f = \deg b + \deg c = 1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

2.  $\mathbb{R}[x]$ :

$x^2 - 4$  приводим  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

$x^2 + 1$  неприводим, иначе имел бы корень в  $\mathbb{R}$

**Лемма 6.1.** Пусть  $f \in K[x]$  — многочлен степени 2 или 3. Тогда  $f$  приводим  $\iff$  у него есть корень в  $K$ .

**Доказательство.**

« $\Rightarrow$ »:

$a$  — корень  $f \xrightarrow{\text{т. Безу}} (X - a) \mid f$ . Рассмотрим разложение  $f = (X - a) \cdot g$ . Так как  $\deg g = \deg f - 1 \geq 1$ , оно нетривиально и  $f$  — приводимый.

« $\Leftarrow$ »:

Пусть  $f = gh$  и  $\deg g, \deg h \geq 1$ , не умаляя общности,  $\deg g \geq \deg h$ . Тогда:

$$\underbrace{\deg f}_{2 \text{ или } 3} = \deg g + \deg h$$

Есть два стула:  $2 = 1 + 1$  и  $3 = 2 + 1$  (на какой сам сядешь, на какой друга посадишь?)

В любом случае:

$$\deg h = 1 \implies h = aX + b \implies h\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \implies f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.$$

Значит  $-\frac{b}{a}$  — корень  $f$ .

**Замечание.** Многочлены большей степени могут быть приводимыми, но не иметь корней в  $K$ .

**Пример.** Рассмотрим  $f = x^4 + 2x^2 + 1$  в  $\mathbb{R}[x]$ :

$$f = (x^2 + 1)^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

**Замечание.** Далее считается, что  $R$  — область главных идеалов

**Лемма 6.2.** Пусть  $p, f \in R$ .  $p$  — неприводимый элемент. Тогда  $p \mid f$  либо  $(p, f) = 1$ .

**Доказательство.**  $(p, f) \mid p \implies (p, f) = 1$  или  $(p, f) = p \implies (p, f) = 1$  или  $p \mid f$ .

**Предложение 6.1.** Пусть  $p$  — неприводимый,  $p \mid ab \implies p \mid a$  или  $p \mid b$ .

**Доказательство.** Пусть  $p \nmid a, p \nmid b \implies (p, a) = (p, b) = 1 \implies$

$$pt + an = 1, \quad pt' + bn' = 1 \xrightarrow{\text{перемножим}} p(ptm' + tbn' + anm') + abnn' = 1 \implies p \mid 1$$

**Определение 6.3.** Область целостности  $R$  называют факториальным кольцом, если:

1. Любой  $a \in R$  отличный от 0 и не являющийся обратимым можно представить в виде  $a = p_1 \dots p_s$ ,  $s \geq 1$  и  $p_1, \dots, p_s$  — неприводимые элементы.

2. Если  $p_1 \dots p_s = q_1 \dots q_t$ , где все  $p_i, q_i$  — неприводимые элементы, то  $s = t$  и после перенумерации  $q_j$  выполнено  $q_1 \sim p_1, \dots, q_s \sim p_s$ .

**Теорема 6.1.** Область главных идеалов является факториальным кольцом.

**Доказательство.**

1. «Существование разложения»

Есть элемент  $a$ , докажем что существует неприводимый  $p$  такой, что  $p \mid a$ .

Возьмем  $a$ , если он неприводимый, то доказывать нечего (т.к.  $a \mid a$ ), иначе:  $a = a_1 b_1$ , где  $a_1, b_1 \notin R^*$  ( $a$  не неприводим  $\implies a_1, b_1$  оба обратимы либо оба необратимы, если оба обратимы, то  $a$  обратим, а нас такие элементы не интересуют)

$a_1$  — неприводимый, следовательно утверждение доказано, иначе  $a_1 = a_2 b_2$ , где  $a_2, b_2 \notin R^*$

и так далее

Предположим, утверждение неверно. Обозначим  $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i)$ .

Можно заметить, что  $a_2 \mid a_1, a_3 \mid a_2, \dots \implies (a_1) \subset (a_2) \subset \dots$

Покажем, что  $I$  — главный идеал.

$$(a) \quad x, y \in (a_j) \subset I \implies x + y \in (a_j) \subset I$$

$$(b) \quad x \in I \implies x \in (a_i) \text{ для некоторого } i, \text{ тогда для } a \in R \implies ax \in (a_i) \subset I$$

Значит  $I$  главный идеал, тогда  $I = (c)$  для некоторого  $c \in I \implies c \in (a_i)$  для некоторого  $i$ , при этом  $a_{i+1} \in I \implies c \mid a_{i+1}$

$$\begin{cases} a_i \mid c \\ c \mid a_{i+1} \end{cases} \implies a_i \mid a_{i+1} \xrightarrow{a_{i+1} \mid a_i} a_i \sim a_{i+1} \implies \text{цепочка когда-то прервется, так как} \\ a_i = a_{i+1} \cdot b_{i+1}, \text{ где } a_i = \varepsilon a_{i+1}, \varepsilon \in R^* \implies b_{i+1} = \varepsilon \in R^*$$

Значит любой необратимый элемент делится на неприводимый.

2. «Единственность разложения»

Пусть  $p_1 \dots p_s = q_1 \dots q_t$ , где все  $p_i, q_i$  — неприводимы и не умаляя общности  $s \leq t$

Индукция по  $S$

«База»:  $s = 1$

$p_1 = q_1 \dots q_t$ , где  $p_1$  — неприводимый  $\implies t = 1, q_1 = p_1$ .

«Переход»:  $s > 1$

$$p_s \mid (p_1 \dots p_s) \implies p_s \mid (q_1 \dots q_t) \implies \exists j : p_s \mid q_j$$

Перенумеруем, так чтобы  $j = t$ , тогда  $q_t = p_s \cdot \varepsilon$ , но  $q_t$  неприводим  $\implies \varepsilon \in R^*$

$$p_1 \dots p_s = q_1 \dots q_{t-1} \cdot \varepsilon p_s \implies p_1 \dots p_{s-1} = q_1 \dots q_{t-1} \cdot \underbrace{\varepsilon q_1}_{\text{неприводимый}} \cdot q_2 \dots q_{t-1}$$

По индукционному предположению  $p_1 \dots p_{s-1}$  совпадает с  $(\varepsilon q_1) \cdot q_2 \dots q_{t-1}$  с точностью до порядка и ассоциированности.



**Замечание.** Евклидова область  $\subset$  Область главных идеалов  $\subset$  Факториальное кольцо  $\subset$  Область целостности

**Примеры.**

1.  $R$  — факториальное кольцо  $\implies R[X]$  — факториальное кольцо.
2.  $\mathbb{Z}[X]$  — факториальное кольцо.
3.  $K[X][Y] = K[X, Y] \implies K[X, Y]$  — факториальное кольцо.

## 7 Кратные корни и производные

**Определение 7.1.** Пусть  $f \in R[x]$  и  $f \neq 0$ . Пусть  $a \in R$  — корень.

$(X - a) \mid f$  по теореме Безу.

Наибольший  $n$ , такой что  $(X - a)^n \mid f$ , называется *кратностью корня  $a$* . Можно заметить, что  $n \leq \deg f$ , поэтому он всегда существует.

Корни кратности 1 называются *простыми корнями  $f$* ,

корни кратности  $\leq 2$  называются *кратными корнями  $f$* ,

корни кратности 2 — *двойными*, 3 — *тройными*

**Теорема 7.1.** Пусть  $K$  поле,  $f \in K[X]$ ,  $d = \deg f > 0$

$a_1, \dots, a_s$  — его корни,  $n_1, \dots, n_s$  — их кратности.

Тогда  $n_1 + \dots + n_s \leq d$ .

**Доказательство.** Разложим  $f$  на неприводимые множители.

$f = (X - a_1)^{m_1} \dots (X - a_s)^{m_s} \cdot g$ , где  $g \in K[x]$  и  $(X - a_j)$  — неприводимые множители.

Заметим, что  $(X - a_1) \neq g, \dots, (X - a_s) \neq g$ .

Считаем, что  $m_1 \leq n_1, \dots, m_s \leq n_s$ . Предположим, при некотором  $j$ :  $n_j > m_j \implies$

$$(X - a_j)^{m_j+1} \mid f \implies (X - a_j)^{m_j+1} \cdot h = (X - a_1)^{m_1} \dots (X - a_s)^{m_s} \cdot g \implies$$

$$(X - a_j) \cdot h = (X - a_1)^{m_1} \dots \widehat{(X - a_j)^{m_j}} \dots (X - a_s)^{m_s} \cdot g \implies$$

$$(X - a_j) \mid (X - a_1)^{m_1} \dots \widehat{(X - a_j)^{m_j}} \dots (X - a_s)^{m_s} \cdot g \implies$$

Либо  $(X - a_j) \mid (X - a_i)$ ,  $i \neq j$  или  $(X - a_j) \mid g$ , но такого не может быть, значит  $m_j = n_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

$$\text{Тогда } d = \deg f = m_1 + \dots + m_s + \underbrace{\deg g}_{\geq 0} \geq n_1 + \dots + n_s$$

**Определение 7.2.** Пусть  $f \in K[X]$ ,  $f = a_n X_n + a_{n-1} X_{n-1} + \dots + a_1 X_1 + a_0$

Его *производной* будет называться многочлен  $f' \in K[X]$ ,  $f' = n a_n X_{n-1} + (n-1) a_{n-1} X_{n-2} + \dots + a_1$

**Предложение 7.1.**

1.  $(f + g)' = f' + g'$
2.  $(fg)' = f'g + fg'$

$$3. (f^n)' = n f^{n-1} f'$$

**Доказательство.**

1. лёгкая непосредственная проверка (сначала очевидно, потом тривиально, как всегда короче)

2. Пусть  $f, g$  — мономы, то есть  $f = aX^n, g = bX^m$

$$(fg)' = (abX^{n+m})' = (n+m)abX^{n+m-1} = n \cdot abX^{n+m-1} + m \cdot abX^{n+m-1} =$$

$$\underbrace{naX^{n-1}}_{f'} \cdot \underbrace{bX^m}_g + \underbrace{aX^n}_f \cdot \underbrace{mbX^{m-1}}_{g'}$$

$$f = \sum f_i, g = \sum g_i, f_i, g_i \text{ — мономы}$$

$$(fg)' = \left( \sum_{i,j} f_i g_j \right)' = \sum_{i,j} (f_i g_j)' = \sum_{i,j} (f'_i g_j + f_i g'_j) = \sum_{i,j} f'_i g_j + \sum_{i,j} f_i g'_j = \sum_i f'_i \sum_j g_j + \sum_i f_i \sum_j g'_j = f'g + fg'$$

3. Индукция по  $n$

«База»:  $n = 1$

$$f' = f'$$

«Переход»:  $n > 1$

$$(f^n)' = (f^{n-1} \cdot f)' = (f^{n-1})' \cdot f + f^{n-1} \cdot f' \stackrel{\text{переход}}{=}$$

$$((n-1) \cdot f' \cdot f^{n-2}) \cdot f + f^{n-1} \cdot f' = (n-1)f' \cdot f^{n-1} + f' \cdot f^{n-1} = n f^{n-1} f'$$

**Предложение 7.2.**  $K$  — поле.  $f \in K[X], f \neq 0, a \in K$

Тогда  $a$  кратный корень  $f \iff f(a) = f'(a) = 0$

**Доказательство.**

« $\Rightarrow$ »:

$$a \text{ кратный корень } f \implies (X-a)^2 \mid f \implies f = (X-a)^2 \cdot g, \quad g \in K[X]$$

$$f' = ((X-a)^2)' \cdot g + (X-a)^2 \cdot g' = 2(X-a) \cdot g + (X-a)^2 \cdot g' \implies f'(a) = 0$$

« $\Leftarrow$ »:

$$\text{Пусть } f(a) = f'(a) = 0.$$

$$f(a) = 0 \stackrel{\text{т. Безу}}{\implies} f = (X-a) \cdot g, \quad g \in K[X] \implies f' = g + (X-a)g'$$

$$f'(a) = 0 \implies g(a) = 0 \implies (X-a) \mid g \implies (X-a)^2 \mid f \implies a \text{ кратный корень } f$$

**Следствие.**  $K$  — поле.  $f \in K[X], f \neq 0, a \in K$

$$\text{Пусть } D = (f, f')$$

$$\text{Тогда } a \text{ кратный корень } f \iff D(a) = 0$$

**Доказательство.**  $a$  кратный корень  $\iff f(a) = f'(a) = 0 \stackrel{\text{т. Безу}}{\iff} (X-a) \mid f \text{ и } (X-a) \mid f' \iff (X-a) \mid D \stackrel{\text{т. Безу}}{\iff} D(a) = 0$

**Определение 7.3.** Для кольца с 1 *характеристикой*  $\text{char } R$  называется минимальное  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $\underbrace{1 + \dots + 1}_n = 0$ , а если такого  $n$  нет, то  $\text{char } R = 0$

**Предложение 7.3.**  $K$  — поле с характеристикой 0, то есть  $\underbrace{1 + \dots + 1}_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f \in K[X], a \in K$  — корень  $f$  кратности  $s \geq 2$ .

Тогда  $a$  — корень  $f'$  кратности  $s - 1$

**Доказательство.**  $f = (X - a)^s g$

$$(X - a) \nmid g \xrightarrow{\text{т.Безу}} g(a) \neq 0$$

$$f' = ((X - a)^s)' \cdot g + (X - a)^s \cdot g' =$$

$$s(X - a)^{s-1} \cdot g + (X - a)^s \cdot g' =$$

$$(X - a)^{s-1} \cdot h, \text{ где } h = s \cdot g + (X - a)g'$$

$$h(a) \stackrel{\text{char } K = 0}{=} s \cdot g(a) \neq 0 \implies (X - a) \nmid h$$

## 8 Формула Тейлора

**Предложение 8.1.**  $K$  — поле,  $f, g \in K[x], f \neq 0, d = \deg(g) \geq 1$ .

Тогда  $f$  можно представить единственным образом в виде:

$$f = h_n g^n + \dots + h_1 g + h_0,$$

где  $n \geq 0, h_i \in K[x], h_n \neq 0, \deg(h_i) < d, \forall i = 0, \dots, n$ .

**Доказательство.**

«Существование»:

Индукция по  $l = \deg f$ .

«База»: При  $l < d$  подходит  $n = 0, h_0 = f$ .

«Переход»: При  $l \geq d: f = gq + r, \deg(r) < d, q \neq 0$ .

$$\deg gq \geq \deg g > \deg r$$

$$\implies \deg f = \deg gq \implies \deg q = l - d$$

По ИП:  $q = h_n g^n + \dots + h_1 g + h_0, h_n \neq 0, \deg(h_i) < d, i = 0, \dots, n$ .

$$\implies f = h_n g^{n+1} + \dots + h_0 g + r.$$

«Единственность»:

Индукция по  $l = \deg f$ .

При  $l < d$ :

$$\deg h_n g^n \geq nd > \deg h_i g^i, i = 0, \dots, n-1 \implies \deg f = \deg h_n g^n \implies \deg h_n g^n < d.$$

$$nd + d - 1 \geq l \geq nd \implies n — \text{неполное частное при делении } l \text{ на } d.$$

«База»: При  $l < d$ :  $n = 0 \implies h_0 = f$ .

«Переход»: При  $l \geq d$  предположим, что есть еще разложение  $f = \hat{h}_n g^n + \dots + \hat{h}_1 g + \hat{h}_0$ .

$$f = g(h_n g^{n-1} + \dots + h_1) + h_0 = g(\hat{h}_n g^{n-1} + \dots + \hat{h}_1) + \hat{h}_0, \quad \deg h_0, \deg \hat{h}_0 < d$$

Тогда  $h_0 = \hat{h}_0$ . По единственности деления с остатком.

По ИП:  $\deg f_1 = h_n g^{n-1} + \dots + h_1 < \deg f \implies h_i = \hat{h}_i, \quad i = 1, \dots, n-1$ .

**Предложение 8.2.**  $\text{char } K = 0, \quad f \in K[x], \quad f \neq 0, \quad d = \deg(f) = n \geq 0, \quad a \in K$ .

$$\implies f = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x-a)^i}{i!}, \quad f^{(i)} \in K[x], \quad \deg(f^{(i)}) < d, \quad i = 0, \dots, n.$$

**Доказательство.**  $f = \sum_{i=0}^n c_i (x-a)^i, \quad c_i \in K, \quad i = 0, \dots, n, \quad c_n \neq 0$ .

$$f^{(i)} = \sum_{j=i}^n c_j j! (x-a)^{j-i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

$$f^{(j)}(a) = c_j j! \implies c_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}.$$

## 9 Алгебраически замкнутые поля. Каноническое разложение над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$ .

**Определение 9.1.** Поле  $K$  называется *алгебраически замкнутым*, если любой  $f \in K[x]$  имеет корень в  $K$ .

**Теорема 9.1.** Основная теорема алгебры.

$\mathbb{C}$  алгебраически замкнуто.

**Доказательство.** Не будет в курсе.

Идея доказательства:

$$f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = 0.$$

$$r > \max\{|a_0|, \dots, |a_n|\}.$$

$$f(r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))) = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) + g(r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))).$$

$$|g(r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)))| < r^{n-1}(|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|) < r^n.$$

$$\implies \Delta \arg f(r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))) = 2\pi n.$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$$

$\xRightarrow{\text{Топология}} f(D)$  — односвязная область.

$$\implies 0 \in f(D) \implies \exists z \quad f(z) = 0.$$

**Замечание.** Любое поле можно вложить в алгебраически замкнутое поле.

Всегда есть минимальное такое поле.

Для  $\mathbb{Q}$  это поле алгебраических чисел.

Алгебраическое число — комплексный корень многочлена над  $\mathbb{Q}$ .

**Предложение 9.1.**  $K$  — алгебраически замкнутое поле,  $f \in K[x]$ .

Тогда  $f$  — неприводим  $\iff \deg f = 1$ .

**Доказательство.** Все многочлены степени 1 неприводимы.

$\deg f \neq 1 \implies \exists x \in K : f(x) = 0$

т. Безу  $\implies (x - c) \mid f \implies$  он приводим

Таким образом если  $f \in K[x]$ ,  $\deg f \geq 1$ , то его каноническое разложение имеет вид:

$$f = c_0 \prod_{i=1}^n (x - c_i)^{d_i},$$

где  $c_i \in K$ ,  $d_i \in \mathbb{Z}_+$ .

**Предложение 9.2.**  $f \in \mathbb{R}[x]$ ,  $a \in \mathbb{C}$  — его корень.

Тогда  $\bar{a}$  — корень  $f$  той же кратности.

**Доказательство.**

Пусть  $l$  — кратность корня  $a$ .

В  $\mathbb{C}[x]$  имеем  $f = (x - a)^l g$ ,  $g \in \mathbb{C}[x]$ ,  $g(a) \neq 0$ .

Пусть  $g = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ .

Рассмотрим  $\bar{g} = \bar{b}_n x^n + \dots + \bar{b}_1 x + \bar{b}_0$ .

Тогда  $f = \bar{f} = \overline{(x - a)^l g} = (x - \bar{a})^l \bar{g} \implies f(\bar{a}) = 0$

$0 \neq g(a) = \overline{\bar{g}(\bar{a})} \implies (x - \bar{a}) \nmid \bar{g}$

$\implies \bar{a}$  — корень  $f$  кратности  $l$

$\implies$  все корни разбиваются на пары сопряженных, тогда каноническое разложение в  $\mathbb{C}[x]$  имеет вид:

$$f = r_0 \left( \prod_{i=1}^n (x - r_i)^{d_i} \right) \cdot \left( \prod_{i=1}^m ((x - c_i)(x - \bar{c}_i))^{p_i} \right),$$

где  $r_i \in \mathbb{R}$ ,  $d_i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $c_i, \bar{c}_i \in \mathbb{C}$ ,  $p_i \in \mathbb{Z}_+$ .

$$\iff f = r_0 \left( \prod_{i=1}^n (x - r_i)^{d_i} \right) \cdot \left( \prod_{i=1}^m B_i^{p_i} \right),$$

$B_i$  — квадратичные многочлены, неприводимые в  $\mathbb{R}$ .

$$B_i = (x - c_i)(x - \bar{c}_i) = x^2 - (c_i + \bar{c}_i)x + c_i \bar{c}_i = x^2 - 2 \operatorname{Re} c_i x + |c_i|^2 \in \mathbb{R}[x]$$

**Предложение 9.3.** Унитарные неприводимые многочлены в  $\mathbb{R}$  — это:

1.  $x - a$ ,  $a \in \mathbb{R}$

2.  $x^2 + ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b^2 - 4ac < 0$

**Доказательство.** С многочленами степени 1 и 2 все ясно.

Если степень многочлена больше 2, то справедливо разложение 9.2, значит он приводим.

## 10 Рациональные дроби

**Определение 10.1.** Поле частных области целостности  $R$  — наименьшее поле, в которое вложена  $R$ .

Назовем его  $Q(R)$ .

Элементы поля частных представляются как дроби  $\frac{a}{b}$ , где  $a, b \in R$  и  $b \neq 0$ . Это поле строится так:

Рассмотрим  $M = R \times (R \setminus \{0\})$  и введём на  $M$  отношение  $\sim$ :

$$(a, b) \sim (a', b') \iff ab' = a'b$$

**Предложение 10.1.**  $\sim$  — отношение эквивалентности

**Доказательство.** рефлексивность и симметричность очевидны

$$\text{транзитивность: } \begin{cases} (a, b) \sim (a', b') \\ (a', b') \sim (a'', b'') \end{cases} \implies ab'b'' = a'bb'' = a''bb' \implies b'(ab'' - a''b) = 0$$

$$b \neq 0 \implies ab'' - a''b = 0 \implies ab'' = a''b \implies (a, b) \sim (a'', b'')$$

То есть  $\sim$  — это отношение эквивалентности на  $M$ .

**Определение 10.2.**  $Q(R) = M / \sim = \{[(a, b)] \mid a \in R, b \in R \setminus \{0\}\}$

**Определение 10.3.** Обозначим  $\frac{a}{b}$  — это  $[(a, b)] \in Q(R)$ .

**Предложение 10.2.** Введём в  $Q(R)$  операции сложения и умножения:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} &= \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{b_1b_2} \\ \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} &= \frac{a_1a_2}{b_1b_2} \end{aligned}$$

**Замечание.**  $(a, b) \sim (ac, bc) \quad \forall c \in R \setminus \{0\}$

Такая замена не изменит результат.

**Замечание.**  $(a, b) \sim (a', b') \iff (ab', bb') = (a'b, b'b)$

**Предложение 10.3.** Операции на  $Q(R)$  определены корректно, при этом  $Q(R)$  с этими операциями — поле.

**Доказательство.** Коммутативность и ассоциативность сложения очевидны в случае одинакового знаменателя.

$$\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} = \frac{a_1b + a_2b}{b^2} = \frac{a_2b + a_1b}{b^2} = \frac{a_2}{b} + \frac{a_1}{b}$$

Но любые 2 дроби можно привести к общему знаменателю:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2 b_1}{b_1 b_2}$$

Нейтральный по сложению элемент — это  $\frac{0}{1}$

Противоположный по сложению элемент к  $\frac{a}{b}$  — это  $\frac{-a}{b}$

$$\text{Дистрибутивность: } \left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b}\right) \frac{a'}{b'} = \frac{a_1+a_2}{b} \frac{a'}{b'} = \frac{(a_1+a_2)a'}{bb'} = \frac{a_1 a' + a_2 a'}{bb'} = \frac{a_1}{b} \frac{a'}{b'} + \frac{a_2}{b} \frac{a'}{b'} = \frac{a_1}{b} \frac{a'}{b'} + \frac{a_2}{b} \frac{a'}{b'}$$

Нейтральный по умножению элемент — это  $\frac{1}{1}$

$$\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1} \implies a \cdot 1 \neq b \cdot 0 \iff a \neq 0$$

Обратный по умножению элемент к  $\frac{a}{b}$  — это  $\frac{b}{a}$

*Замечание.*  $R \xrightarrow{\varepsilon} Q(R), r \mapsto \frac{r}{1}$

То есть, считаем  $R \subset Q(R)$

**Определение 10.4.** Пусть  $K$  — поле. Тогда поле  $K(x) = Q(K[x])$  назовем *полем рациональных дробей (дробно-рациональных функций)* над полем  $K$ .

**Предложение 10.4** (Несократимое представление). Пусть  $R$  — факториальное кольцо. Тогда любой  $s \in Q(R)$  представимых в виде  $s = \frac{p}{q}$ ,  $(p, q) = 1$ . Такое представление единственно с точностью до умножения  $p$  и  $q$  на  $\varepsilon \in R^*$ .

**Доказательство.**

$$\text{Пусть } s = \frac{a}{b}, d = \gcd(a, b) \implies a = da', b = db' \implies s = \frac{a'}{b'}, (a', b') = 1$$

$$\text{Если } \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}, (p, q) = (p', q') = 1, \text{ то } pq' = p'q \implies \begin{cases} p \mid p'q \\ (p, q) = 1 \end{cases} \implies p \mid p', \text{ аналогично } p' \mid p$$

$$\text{То есть } p \text{ и } p' \text{ ассоциативны} \implies p' = \varepsilon p, \varepsilon \in R^*$$

$$pq' = \varepsilon pq \implies q' = \varepsilon q$$

**Лемма 10.1.** Пусть  $s \in K(x)$ ,  $s = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in K[x]$

Тогда  $\deg p - \deg q$  — инвариант  $s$ . (то есть не зависит от выбора представления в виде  $p$  и  $q$ )

**Доказательство.**

$$\text{Если } \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}, \text{ то } pq' = p'q, \text{ а значит } \deg p + \deg q' = \deg p' + \deg q \implies \deg p - \deg q = \deg p' - \deg q'$$

$$\text{Таким образом можно определить степень рациональной дроби } \deg s = \deg \frac{p}{q} = \deg p - \deg q$$

**Определение 10.5.**  $s \in K(x)$  называется *правильной дробью*, если  $\deg s < 0$

В частности  $0$  — правильная дробь

*Замечание.* Очевидно сумма и произведение правильных дробей — правильная дробь

**Лемма 10.2.** Любая рациональная дробь однозначно представляется в виде суммы многочленов и правильной дроби.

### Доказательство.

«Существование»:

Пусть  $s = \frac{p}{q}$ , поделим на  $p$  на  $q$ , получается:

$$p = q \cdot t + r, \text{ где } r = 0 \text{ или } \deg r < \deg q \implies \frac{p}{q} = t + \frac{r}{q}, \quad t \in K[x], \text{ где } \frac{r}{q} \text{ — правильная дробь}$$

«Единственность»:

$$t + \frac{r}{q} = t_1 + \frac{r_1}{q_1}, \quad t_1 \in K[x], \text{ где } \frac{r_1}{q_1} \text{ — правильная дробь}$$

$$t - t_1 = \frac{r_1}{q_1} - \frac{r}{q} \text{ — правильная дробь}$$

$$t - t_1 = \frac{t - t_1}{1} = \frac{r_1}{q_1} - \frac{r}{q} \implies \deg\left(\frac{r_1}{q_1} - \frac{r}{q}\right) = \deg(t - t_1) < 0 \implies t - t_1 = 0 = \frac{r_1}{q_1} - \frac{r}{q}$$

**Лемма 10.3.** Пусть  $(f, g) = 1$ . Тогда любую дробь со знаменателем  $fg$  можно представить как сумму дробей со знаменателем  $f$  и  $g$ .

**Доказательство.**  $1 = cf + dg$  для некоторых  $c, d \in K[x]$

$$\frac{a}{fg} = \frac{a(cd+dg)}{fg} = \frac{acf}{fg} + \frac{adg}{fg} = \frac{ac}{g} + \frac{ad}{f}$$

**Определение 10.6.** Дробь  $s$  называется *примарной* ( *$p$ -примарной*), если  $s = \frac{a}{p^n}$ ,  $p$  — неприводимый многочлен,  $n \in \mathbb{N}$

**Предложение 10.5.** Любую правильную дробь можно однозначно представить в виде суммы нескольких отличных от 0 правильных  $p$ -примарных дробей, где  $p$  — различные унитарные неприводимые многочлены.

### Доказательство.

«Существование»:

Запишем значение  $s$  в виде  $p_1^{m_1} \dots p_t^{m_t}$ , где  $p_i$  — унитарные неприводимые многочлены

$$\text{По лемме } s = \frac{\dots}{p_1^{m_1}} + \frac{\dots}{p_t^{m_t}} = \frac{a_1}{p_1^{m_1}} + \dots + \frac{a_t}{p_t^{m_t}}$$

Перепишем это в виде суммы многочлена и правильных дробей, с тем же знаменателем, получим:

$$s = f + \frac{b_1}{p_1^{m_1}} + \dots + \frac{b_t}{p_t^{m_t}}, \quad f \in K[x], \quad \frac{b_j}{p_j^{m_j}} \text{ — правильная дробь}$$

$$\implies f = s - \frac{b_1}{p_1^{m_1}} - \dots - \frac{b_t}{p_t^{m_t}}, \text{ где } \frac{f}{1} \text{ — правильная дробь}$$

$$\implies \deg f < 0 \implies f = 0$$

«Единственность»:

Пусть у  $S$  есть 2 различных таких разложения

Вычитаем из первого разложения второе, получим:

$$\frac{c_1}{p_1^{n_1}} + \dots + \frac{c_l}{p_l^{n_l}} = 0, \quad p_i \text{ — унитарные неприводимые многочлены}$$

$$c_1, \dots, c_l \neq 0$$

Можно считать все эти дроби несократимыми.

$$\implies \frac{c_1}{p_1^{n_1}} + \dots + \frac{c_{l-1}}{p_{l-1}^{n_{l-1}}} = \frac{-c_l}{p_l^{n_l}}$$



Приведем к общему знаменателю левую часть и сократим дробь, тогда знаменатель полученной дроби будет делить  $p_1^{n_1} \dots p_{l-1}^{n_{l-1}}$  и не будет ассоциирован с  $p_l^{n_l}$ , так как не может быть делителем  $p_l$ , противоречие.

**Определение 10.7.** Простейшей дробью называется дробь вида  $\frac{a}{p^n}$ , где  $p$  — неприводимый многочлен,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg a < \deg p$

**Теорема 10.1.** Любая ненулевая правильная дробь единственным образом представляется в виде суммы нескольких простейших дробей с различными знаменателями.

**Доказательство.**

«Существование»:

Достаточно разложить правильную примарную дробь  $\frac{a}{p^n}$

$$a = r_m p^m + \dots + r_1 p + r_0, \deg r_i < \deg p, r_m \neq 0$$

$m < n$ , так как  $\deg a < \deg p$

$$\frac{a}{p^n} = \frac{r_m}{p^{n-m}} + \frac{r_{m-1}}{p^{n-m+1}} + \dots + \frac{r_1}{p^{n-1}} + \frac{r_0}{p^n} \text{ — искомое представление, если удалить нулевые слагаемые}$$

«Единственность»:

Пусть для  $s$  есть представления в виде суммы примарных. Обозначим  $C_p$  за сумму  $p$ -примарных дробей в этом представлении.

$C_p$  —  $p$ -примарная правильная дробь

$$s = C_{p_1} + \dots + C_{p_t} \implies \text{все } C_p \text{ определены однозначно}$$

Пусть у  $C_p$  есть два разных разложения в сумму простейших дробей со степенями  $p$  в знаменателях.

$$\frac{r_n}{p^n} + \dots + \frac{r_1}{p^1} = \frac{s_n}{p^n} + \dots + \frac{s_1}{p^1}, \text{ где } n \text{ — максимальный показатель степени } p \text{ в знаменателях}$$

Пусть  $m$  — максимальный индекс, такой что  $r_m \neq s_m$ , некоторые  $r_i$  и  $s_i$  могут быть нулевыми

$$\frac{r_m - s_m}{p^m} + \dots + \frac{r_1 - s_1}{p^1} = 0$$

$$\implies \frac{r_m - s_m}{p} = -(r_{m-1} - s_{m-1}) - p(r_{m-2} - s_{m-2}) - \dots \in K[X]$$

Противоречие, слева дробь, а справа многочлен.

## 11 Интерполяция

**Теорема 11.1.** Пусть  $K$  — поле,  $n \in \mathbb{N} : x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ , различные между собой.  $y_1, y_2, \dots, y_n \in K$ . Тогда  $\exists! f \in K[x] : \deg f \leq n - 1$  и  $f(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$ .

**Доказательство.**

«Единственность»:

Предположим, что существует два многочлена  $f, g \in K[x], \deg f \leq n - 1, \deg g \leq n - 1 : f(x_i) = g(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$

$$\exists h = f - g, \deg h \leq n - 1, h(x_i) = 0, i = 1, \dots, n$$

Предположим,  $h \neq 0 \implies$  у  $h \leq n - 1$  корней, но такого не может быть.

«Существование»:

### Формула Лагранжа

Решим интерполяционную задачу в специальном случае, когда  $y_1 = 1, y_2 = \dots = y_n = 0$ .

Найдем соответствующий многочлен  $f_1$ .

$x_1, \dots, x_n$  — корни многочлена  $f_1 \implies (x - x_2) \mid f_1, \dots, (x - x_n) \mid f_1 \implies$

$\underbrace{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}_{\text{степени } n-1} \mid f_1 \implies f_1 = c(x - x_2) \dots (x - x_n), c \in K$

$$f_1(x_1) = 1 \iff c(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n) = 1 \implies c = \frac{1}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$$

Получился многочлен  $f_1 = \frac{(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$

Аналогичная задача с  $y_i = 1, \forall_{j \neq i} y_j = 0$  имеет решение:

$$f_i = \frac{(x - x_1) \dots \widehat{(x - x_i)} \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \dots \widehat{(x_i - x_i)} \dots (x_i - x_n)} = \frac{(x - x_1) \dots \widehat{(x - x_i)} \dots (x - x_n)}{F'(x_i)}$$

Рассмотрим  $f = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n$ ,  $y_1, \dots, y_n$  теперь произвольные.

$$\deg \leq \max(\deg f_1, \dots, \deg f_n) = n - 1$$

Получилась такая формула  $f(x_i) = y_1 \underbrace{f_1(x_i)}_0 + y_2 \underbrace{f_2(x_i)}_0 + \dots + y_i \underbrace{f_i(x_i)}_1 + \dots + y_n \underbrace{f_n(x_i)}_0 = y_i$

**Замечание.** Про связь с производной

$$F = (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$F' = \sum_{i=1}^n (x - x_1) \dots \widehat{(x - x_i)} \dots (x - x_n)$$

$$F'(x_j) = \sum_{i=1}^n (x_j - x_1) \dots \widehat{(x_j - x_i)} \dots (x_j - x_n) = (x_j - x_1) \dots \widehat{(x_j - x_j)} \dots (x_j - x_n)$$

### Метод Ньютона

Рассмотрим интерполяционную задачу и предположим, что мы уже нашли  $f_{(n-1)} \in K[x]$ , такой что  $f_{(n-1)}$  решение интерполяционной задачи  $(x_1, \dots, x_{n-1}; y_1, \dots, y_{n-1})$ , то есть

$$\deg f_{(n-1)} \leq n - 2 \text{ и } f_{(n-1)}(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n - 1$$

Пусть  $f$  решение интерполяционной задачи

$$f = f_{(n-1)} + g, g = ?$$

$$f(x_i) = y_i = f_{(n-1)}(x_i), i = 1, \dots, n - 1$$

$$g = f - f_{(n-1)}, g(x_1) = \dots = g(x_{n-1}) = 0$$

$$\deg g \leq n - 1 \implies g = c(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$g(x_n) = f(x_n) - f_{(n-1)}(x_n) = y_n - f_{(n-1)}(x_n) \implies \text{отсюда находится } c$$

## 4 Линейная алгебра

### 1 Матрицы

**Определение 1.1.**  $R$  — кольцо,  $m, n \in \mathbb{N}$

Матрица  $m \times n$  над кольцом  $R$  — прямоугольная таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{ij} \in R$$

Есть краткая запись  $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} = (a_{ij})$

**Определение 1.2.** Множество матриц  $m \times n$  над кольцом  $R$  обозначается как  $M_{m,n}(R)$

Так же обозначают, как:  $R^{m \times n}$ ,  $M(m, n, R)$ ,  $M_{m \times n}(R)$

Пусть  $A, B \in M_{m,n}(R)$  — матрицы.  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$

Их суммой называется матрица  $C = (c_{ij})$ , где  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Пусть  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(R)$

Их произведением называется матрица  $C = (c_{ij}) \in M_{m,p}(R)$ , где  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$

Пусть  $c \in R$ ,  $A \in M_{m,n}(R)$

Тогда  $c \cdot A = (c \cdot a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$

**Замечание.** По умолчанию  $R$  — коммутативное кольцо

**Определение 1.3.** Транспонированная матрица  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$  — матрица  $B = (b_{ij}) \in M_{n,m}(R)$ , где  $b_{ij} = a_{ji}$

Обозначается как  $A^T$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

**Определение 1.4.** Матрица  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$  — квадратная, если  $m = n$

Обозначается как  $A \in M_n(R)$

**Теорема 1.1** (Свойства операций над матрицами).

1.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
2.  $0 = (0)$ , тогда  $A + 0 = 0 + A = A$
3. Для любой  $A$  есть  $-A$ , такая что  $A + (-A) = (-A) + A = 0$
4.  $A + B = B + A$

5.  $(AB)C = A(BC)$ , нужно чтобы  $A \in M_{m,n}(R)$ ,  $B \in M_{n,p}(R)$ ,  $C \in M_{p,q}(R)$

Обе матрицы принадлежат  $M_{m,q}(R)$

6.  $A(B + C) = AB + AC$

7.  $(B + C)A = BA + CA$

8.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ ,  $\lambda, \mu \in R$

9.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ,  $\lambda \in R$

10.  $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$ ,  $\lambda \in R$

11.  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ ,  $\lambda, \mu \in R$

12.  $(A + B)^T = A^T + B^T$

13.  $(AB)^T = B^T A^T$

**Определение 1.5.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Единичной матрицей порядка  $n$  называется:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(R)$$

Как кратко обозначить:  $E_n = (\delta_{ij})$ , где  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  — символ Кронекера

**Предложение 1.1.** Пусть  $A \in M_{m,n}(R)$ .

Тогда  $E_m A = A E_n = A$

**Доказательство.**

$$E_m A = (b_{ij}), \quad A = (a_{ij})$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$$

То есть  $E_m A = A$

$$E_n A^T = A^T \implies (E_n A^T)^T = (A^T)^T \implies (A^T)^T E_n^T = (A^T)^T \implies A E_n = A$$

**Следствие.**  $M_n(R)$  — кольцо, где  $E_n$  — нейтральный элемент по умножению

Называют кольцом квадратных матриц порядка  $n$ .

**Замечание.** Кольцо не обязательно коммутативное при  $n \geq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \neq B$$

*Замечание.*  $M_1(R) \cong R$

**Определение 1.6.**  $GL_n(R) = M_n(R)^* = \{A \in M_n(R) \mid \exists B \in M_n(R), AB = BA = E_n\}$

Такая  $B$  единственная и называется обратной к  $A$ , обозначается  $A^{-1}$

**Предложение 1.2.**

1.  $E_n \in GL_n(R), E_n^{-1} = E_n$
2.  $A_1, \dots, A_k \in GL_n(R) \implies \prod_{i=1}^k A_i \in GL_n(R), (A_1 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_1^{-1}$
3.  $A \in GL_n(R) \implies A^T \in GL_n(R), (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

**Доказательство.**

1.  $E_n E_n = E_n E_n = E_n$
2.  $(A_1 \dots A_k)(A_k^{-1} \dots A_1^{-1}) = A_1 \dots A_{k-1}(A_k A_k^{-1}) \dots A_1^{-1} = A_1 \dots A_{k-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_1^{-1} = A_1 A_1^{-1} = E_n$   
 $(A_k^{-1} \dots A_1^{-1})(A_1 \dots A_k) = \dots = A_k^{-1} A_k = E_n$
3.  $(A^T \cdot (A^T)^{-1}) = (A^{-1} \cdot A)^T = E_n^T = E_n$   
 $((A^T)^{-1} \cdot A^T) = (A \cdot A^{-1})^T = E_n^T = E_n$

**Определение 1.7.** Матричная единица — это матрица, где все элементы нулевые, кроме одного, который равен единице.

Обозначается как  $e_{ij}$ .

*Замечание.*  $A = (a_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij} e_{ij}$

## 2 Элементарные преобразования и элементарные матрицы

**Определение 2.1.** Элементарное преобразование 1 типа:

К  $i$  строке прибавить  $j$  строку, умноженную на  $\lambda \in R$ . Обозначается  $T_{ij}(\lambda)$

**Определение 2.2.** Элементарное преобразование 2 типа:

Поменять местами  $i$  и  $j$  строки. Обозначается  $S_{ij}$

**Определение 2.3.** Элементарное преобразование 3 типа:

Умножить  $i$  строку на  $\lambda \in R, \lambda \neq 0$ . Обозначается  $D_{ij}(\lambda)$

*Замечание.* Аналогичные преобразования можно делать с столбцами.

**Определение 2.4.** Матрица  $A \in M_{m,n}(K)$  называется ступенчатой, если существует  $0 \leq r \leq m$  и числа  $j_1, \dots, j_r : 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$  такие, что:

1.  $a_{kj_k} \neq 0, k = 1, \dots, r$
2.  $a_{kj} = 0, k = 1, \dots, r, j < j_k$

3.  $a_{kj} = 0, \forall j, k : k > r$

Пример. 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Предложение 2.1.** Любую матрицу можно превратить в ступенчатую с помощью преобразования строк 1 и 2 типа.

**Доказательство.** (короче Гаусса пишем и работает)

$$A = a(i, j) \in M_{m,n}(k)$$

Индукция по  $m$ .

База:  $m = 1$ .  $A$  ступенчатая по определению.

Переход:  $m > 1$ :

Если  $A = 0$ , то  $A$  ступенчатая по определению.

$j_1$  — номер первого ненулевого столбца.

$$\exists i : a_{ij_1} \neq 0$$

$i \neq 1 \implies$  применим  $S_{1i}$

Таким образом можно считать  $a_{1j_1} \neq 0$ .

$$\text{Применим } T_{21} \left( -\frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}} \right), T_{31} \left( -\frac{a_{3j_1}}{a_{1j_1}} \right), \dots, T_{m1} \left( -\frac{a_{mj_1}}{a_{1j_1}} \right)$$

$$\text{Получим } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

По индукции  $A'$  ступенчатая.

**Определение 2.5.** Окаймленная единичная матрица — матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Теорема 2.1.** Пусть  $A \in M_{m,n}(K)$ . Тогда ее можно преобразовать в окаймленную единичную матрицу с помощью преобразования строк и столбцов.

**Доказательство.**

Сделаем  $A$  ступенчатой.

С помощью третьего преобразования сделаем все ведущие элементы равными 1.

Превратим ступеньки разной длины в единичные. (меняя столбцы)

Применим  $D_1(a_{11}^{-1}), \dots, D_r(a_{rr}^{-1})$ .

Потом будем от верхней строки к нижней превращать их в строки с одной 1 и нулями. (вычитая строки и столбцы)

**Пример.**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{вычесть столбцы}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Определение 2.6.** Элементарная матрица:

«Первого типа»:

Пусть  $1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \lambda \in K$

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E_n + \lambda e_{ij}$$

«Второго типа»:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E_n - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}$$

«Третьего типа»:

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E_n + (\lambda - 1)e_{ii}$$

**Предложение 2.2.** Пусть  $A \in M_{m,n}(K)$ . Тогда при элементарных преобразованиях строк матрицы  $A$  получаются матрицы  $T_{ij}A, S_{ij}A, D_iA$ .

**Доказательство.**

1. «Первого типа»:

Поскольку матрица  $T_{ij}(\lambda)$  отличается от  $E_n$  только в  $i$ -ой строке, то произведение тоже. В  $i$ -ой строке  $T_{ij}(\lambda)$  только две позиции отличаются от нуля, это  $i$  и  $j$ . При умножении получаем следующее:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{jk} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = a_{ik} + \lambda a_{jk}$$

Такое происходит в каждом столбце матрицы, поэтому получаем, что  $i$ -строка матрицы  $T_{ij}A$  равна  $(a_{i1} + \lambda a_{j1} \quad \dots \quad a_{ik} + \lambda a_{jk} \quad \dots \quad a_{in} + \lambda a_{jn})$

2. «Второго типа»:

Поскольку матрица  $S_{ij}$  отличается от  $E_n$  только в  $i$ -ой и  $j$ -ой строках, то произведение тоже.  $i$ -ая строка равна произведению  $(0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0)$  на матрицу  $A$ , то есть на её  $j$ -тую строку. Аналогично с  $j$ -ой строкой.

3. «Третьего типа»:

Поскольку матрица  $D_i(\lambda)$  отличается от  $E_n$  только в  $i$ -ой строке, то произведение тоже.  $i$ -ая строка равна произведению  $(1 \quad \dots \quad \lambda \quad \dots \quad 1)$  на матрицу  $A$ , то есть на её  $i$ -тую строку. Что равно произведению  $i$ -ой строки на  $\lambda$ .

**Следствие.** Аналогично, преобразования столбцов можно записать в виде  $AT_{ji}(\lambda)$ ,  $AS_{ji}$ ,  $AD_j(\lambda)$ .

**Доказательство.**  $A \longrightarrow A'$  — результат прибавления к  $i$  столбцу  $j$ -го с коэффициентом  $\lambda$ .

$$\implies (A')^T = T_{ij}(\lambda)A^T$$

$$\implies A' = (T_{ij}(\lambda)A^T)^T = (A^T)^T(T_{ij}(\lambda))^T = AT_{ji}(\lambda)$$

Аналогично: элементарные преобразования столбцов 2 и 3 типов сводятся к умножению справа на  $S_{ij}$  и  $D_i(\lambda)$  соответственно.

**Следствие.**

1.  $T_{ij}(-\lambda)T_{ij}(\lambda) = E_n$
2.  $S_{ij}S_{ij} = E_n$
3.  $D_i(\lambda)D_i(\lambda^{-1}) = E_n$

**Следствие.**  $T_{ij}(\lambda)$ ,  $S_{ij}$ ,  $D_i(\lambda) \in GL_n(k)$  — все они обратимы.

**Предложение 2.3.** ( $PDQ$  — разложение матриц)

Пусть  $A \in M_{m,n}(k)$ . Тогда существуют элементарные матрицы  $P_1, \dots, P_k \in GL_m(k)$ ,  $Q_1, \dots, Q_l \in GL_n(k)$ , окаймленная единичная матрица  $D \in M_{m,n}(k)$ , такие, что  $A = P_1 \dots P_k D Q_1 \dots Q_l$ .

**Доказательство.** Существуют элементарные преобразования строк и столбцов, превращающие  $A$  в окаймленную единичную матрицу  $D$ .

$$\implies D = \underbrace{u_k \dots u_1}_{\text{обратимы}} A \underbrace{v_1 \dots v_l}_{\text{обратимы}}, \text{ где } u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l \text{ — элементарные матрицы}$$



$$\Rightarrow A = u_1^{-1} \dots u_k^{-1} D v_l^{-1} \dots v_1^{-1}$$

**Следствие.** Пусть  $A \in M_n(K)$ ? Тогда условия эквивалентны:

1.  $A \in GL_n(K)$
2.  $A = P_1 \dots P_m$ , где  $P_1, \dots, P_m$  — элементарные матрицы

**Доказательство.**

«2  $\Rightarrow$  1»: так как все  $P_i \in GL_n(k)$

«1  $\Rightarrow$  2»:

$$A = P_1 \dots P_k D Q_1 \dots Q_l, \quad D = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = P_k^{-1} \dots P_1^{-1} A Q_l^{-1} \dots Q_1^{-1} \Rightarrow D \in GL_n(K)$$

В  $D$  есть нулевая строка, значит  $\forall C \in M_n(k)$ : в  $DC$  есть нулевая строка  $\Rightarrow DC \neq E_n$ , но ведь  $D \in GL_n(K)$ , значит  $D = E_n \Rightarrow A = P_1 \dots P_k Q_1 \dots Q_l$ , где все матрицы элементарны.

### 3 Перестановки

**Определение 3.1.**  $M$  — множество. Перестановкой  $M$  называется биекция на себя.

$$S(M) = \{\text{перестановка } M\}$$

$$S(M) \times S(M) \rightarrow S(M)$$

$$(g, f) \mapsto g \circ f$$

**Предложение 3.1.**  $(S(M), \circ)$  — группа.

**Доказательство.**

1. Ассоциативность очевидна.
2.  $id_M$  — нейтральный элемент.
3.  $f \in S(M) \Rightarrow f^{-1} \in S(M)$  — обратный элемент.

**Определение 3.2.**  $S_n$  — симметрическая группа степени  $n$  (группа перестановок  $n$ -элементного множества)

**Замечание.**  $|S_n| = n!$

**Пример.**  $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$

**Определение 3.3.** Циклом  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  называется  $\sigma \in S_n$  такая что

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1,$$

а так же  $\sigma(i_j) = i_j$  для всех  $j \notin \{1, 2, \dots, k\}$ .

$k \geq 2$  — длина цикла.

**Определение 3.4.** Циклы  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  и  $(j_1, j_2, \dots, j_l)$  называются *независимыми*, если  $\forall r, s : i_r \neq j_s$

**Предложение 3.2.** Любая перестановка является произведением нескольких попарно независимых циклов.

**Доказательство.**  $i, \sigma(i), \sigma(\sigma(i)), \dots$  все различны, так как  $\sigma$  — биекция, значит это — независимый цикл.

**Определение 3.5.** Цикл длины 2 называется *транспозицией*.

**Определение 3.6.** Транспозиция  $(i, i+1)$  называется *элементарной транспозицией*.

**Предложение 3.3.** Любой цикл  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  раскладывается в произведение транспозиций  $(i_1, i_2) \cdot (i_2, i_3) \cdot \dots \cdot (i_{n-1}, i_n)$

**Упражнение.** Любая перестановка раскладывается в произведение элементарных транспозиций.

**Определение 3.7.**  $(i, j)$ ,  $i < j$  — *инверсия*, если  $\sigma(i) > \sigma(j)$

**Определение 3.8.**  $\text{Inv}(\sigma)$  — *число инверсий* перестановки  $\sigma$

**Определение 3.9.** *Четность перестановки* — четность числа инверсий в ней.

**Определение 3.10.** *Знак перестановки* —  $\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка четная} \\ -1, & \text{если перестановка нечетная} \end{cases}$

**Лемма 3.1.** Если перестановку умножить справа на транспозицию, то ее знак поменяется на противоположный, то есть  $\text{sgn}(\sigma \circ (i, j)) = -\text{sgn}(\sigma)$ .

**Доказательство.** Четность числа инверсий с участием  $\sigma(i)$  и  $\sigma(j)$  не изменится, так как все элементы между  $i$  и  $j$  поменяют число инверсий четное число раз. Соответственно, изменится лишь инверсия между  $i$  и  $j$ .

**Следствие.** Четность перестановки равна четности количества транспозиций в ее разложении.

**Доказательство.**  $\text{sgn}((i_1, j_1)(i_2, j_2) \dots (i_k, j_k)) = (-1)^k$

**Следствие.** Пусть  $\sigma, \tau \in S_n$ , тогда:

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau)$$

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$$

**Определение 3.11.** Множество четных перестановок  $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\}$  — подгруппа  $S_n$

**Предложение 3.4.** Пусть  $n \geq 2$ , тогда  $|A_n| = \frac{n!}{2}$

**Доказательство.** Рассмотрим

$$\varphi : A_n \rightarrow S_n \setminus A_n$$

$\sigma \mapsto \sigma \circ (1, 2)$  — из четной перестановки получаем нечетную

$$\psi : S_n \setminus A_n \rightarrow A_n$$

$\sigma \mapsto \sigma \circ (1, 2)$  — из нечетной перестановки получаем четную

$$\varphi = \psi^{-1} \implies \varphi \text{ — биекция} \implies |A_n| = |S_n \setminus A_n| = \frac{n!}{2}$$

## 4 Определители

Мы знаем, что матрицы тесно связаны с системами линейных уравнений и мы хотим знать, когда системы разрешимы единственным образом, когда не имеют решений, и когда имеют бесконечно много решений.

**Определение 4.1.** Системы линейных уравнений подразделяются на:

- *Несовместные* — не имеют решений.
- *Совместные* — имеют решения.
  - *Определенные* — имеют единственное решение.
  - *Неопределенные* — имеют бесконечно много решений.

**Определение 4.2.**  $A \in M_n(R)$ ,  $R$  — коммутативное кольцо.

*Определителем* матрицы  $A$  называется:

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

**Свойства.**

$$1. \det(A) = \det(A^T)$$

$$2. A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A'_i + A''_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \det(A) = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A'_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A''_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

$$3. A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \det(A) = \alpha \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

$$4. \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

$$5. A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, A_i = A_j \implies \det(A) = 0$$

$$6. A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad \det(A) = -\det(B)$$

$$7. A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + \alpha A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad \det(A) = \det(B)$$

**Доказательство.**

1.

$$\begin{aligned} |A^T| &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma^{-1}(i)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma^{-1}(i)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = |A| \end{aligned}$$

**TODO:** Дописать

## 5 Дальнейшие свойства определителя

*Свойства.*

$$A = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}, \quad \det(A) = \det(X) \det(Z)$$

**Доказательство.**

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} A_\sigma$$

$A_\sigma$  не включает элементов из нижней левой нулевой матрицы, значит  $\sigma(\{n+1, n+2, \dots, m\}) = \{n+1, n+2, \dots, m\}$  и  $\sigma(\{1, 2, \dots, n\}) = \{1, 2, \dots, n\}$

А тогда  $\sigma = \gamma\delta$ ,  $\gamma \in S_n$ ,  $\delta \in S_m$ ,  $A_\sigma = \operatorname{sgn}(\gamma)X_\gamma \operatorname{sgn}(\delta)Z_\delta$

*Свойства.*

$$A, B \in M_{n \times n}(K), \quad \det(AB) = \det(A) \det(B)$$

**Доказательство.** Элементарными преобразованиями можно и  $A$  и  $B$  привести к диагональному виду и тогда определители посчитаются легко

**Определение 5.1.** Минором  $M_{ij}$  матрицы  $A$  порядка  $n$  называется определитель  $A_{kl}$ , где  $i \neq k, j \neq l$ .

Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  называется  $(-1)^{i+j} M_{ij}$ .

**Лемма 5.1.** Об определителе квадратной матрицы с почти нулевой строкой.

$A \in M_{n \times n}(K)$   $1 \leq i_0, j_0 \leq n$ ,  $a_{i_0 j} = 0$  при  $j \neq j_0$

Тогда  $\det(A) = a_{i_0 j_0} \det(A_{i_0 j_0})$

**Доказательство.**  $\sigma(i_0) = j_0$  и потом посмотреть просто как знак перестановки меняется

**Теорема 5.1.** Разложение определителя по  $k$ -ой строке

$A \in M_{n \times n}(K)$ ,  $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ki}$

Тогда  $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

**Доказательство.** Разложим  $k$ -ую строку в сумму строк вида  $[0 \ \dots \ 0 \ a_{ki} \ 0 \ \dots \ 0]$  и применим лемму

**Следствие.** Разложение по столбцу ничем не отличается

**Следствие.** Матрица обратима  $\iff \det(A) \neq 0$

**Лемма 5.2.** Пусть  $1 \leq i \neq j \leq n$

Тогда  $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0$

**Доказательство.** Это выражение это определитель матрицы  $A' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$

**Следствие.**

$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det(A), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

**Определение 5.2.** Взаимная матрица  $\tilde{A}$  это матрица  $(A_{ij})_{i,j}^T$

**Следствие.**

$$A\tilde{A} = \tilde{A} = \det(A)I_n$$

$$A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$$

**Теорема 5.2.** (Крамера)

$A \in M_n(K)$ , тогда

$A$  - совместная определенная  $\iff \det(A) \neq 0$

**Доказательство.**

2  $\implies$  1

$A \in GL_n(K)$ , тогда

$$AX = b \iff X = A^{-1}b$$

1  $\implies$  2

Приведем методом Гаусса к ступенчатому виду. Таким образом можно считать, что  $(A|b)$  ступенчатая. Посмотрим на последнюю ступеньку. Если ведущий элемент последней ненулевой строки находится в последнем столбце, то система несовместная, что невозможно. В противном случае все ступеньки начинаются левее вертикальной черты и нет свободных неизвестных. Поскольку система определенная, ширина всех ступенек равна 1. Таким образом

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ 0 & a_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \text{ где } a_i \neq 0.$$

$$\text{Тогда } \det(A) = \prod_{i=1}^n a_i \neq 0$$

## 6 Линейные пространства

### 6.1 Основные определения

**Определение 6.1.**

Пусть  $K$  - поле. Говорят, что задано линейное пространство над полем  $K$ , если заданы

1. множество  $V$
2. операция  $V \times V \rightarrow V$  - сложение
3. операция  $K \times V \rightarrow V$  - умножение на скаляр

Такие что выполняются следующие аксиомы:

Пусть  $a, b \in K$ ,  $A, B \in V$ , тогда

$(V, +)$  - абелева группа

1.  $a(A + B) = aA + aB$
2.  $(a + b)A = aA + bA$
3.  $(ab)A = a(bA)$
4.  $1A = A$

**Пример.**

1.  $K^n = M(n, 1, K)$  - арифметическое  $n$ -мерное пространство над полем  $K$ .

$$2. V = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid a + b + c = 0 \right\}$$

$$3. V = K[x]$$

$$4. V = C[0, 1]$$

$$5. K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}_+$$

$$\oplus : v_1 \oplus v_2 = v_1 v_2$$

$$\otimes : a \otimes v = v^a$$

6.  $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ ,  $M$  - множество,  $V = 2^M$

$$\oplus : v_1 \oplus v_2 = v_1 \triangle v_2$$

$$\otimes : a \otimes v = \begin{cases} 1 \otimes v = v \\ 0 \otimes v = \emptyset \end{cases}$$

**Лемма 6.1.**

$$0 \cdot v = 0$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$av = 0 \iff a = 0 \vee v = 0$$

$$(-1) \cdot v = -v$$

**Доказательство.**

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \implies 0 \cdot v = 0$$

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \implies a \cdot 0 = 0$$

$$a \neq 0 \implies a^{-1}av = v = 0 \implies v = 0$$

$$v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = 0 \cdot v = 0 = v + -v \implies (-1) \cdot v = -v$$

**Системы образующих. Линейные подпространства****Определение 6.2.**

$a_1, a_2, \dots, a_n \in K, v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ , тогда

$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$  - линейная комбинация векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n$  с коэффициентами  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

$\text{Lin}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in K\}$  - линейная оболочка  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Пусть  $M \subset V$

$\langle M \rangle = V$ , говорят, что  $M$  - система/семейство образующих/порождающих пространства  $V$ .

**Предложение 6.1.**

$$M = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Пусть  $v_n$  представляется в виде линейной комбинации  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ , тогда

$$\langle M \rangle = \langle M \setminus v_n \rangle$$

**Доказательство.**

$$v_n = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{n-1} v_{n-1}$$

$$\forall w \in \langle M \rangle \quad w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_{n-1} v_{n-1} + b_n v_n = (b_1 + b_n a_1) v_1 + (b_2 + b_n a_2) v_2 + \dots + (b_{n-1} + b_n a_{n-1}) v_{n-1} \in \langle M \setminus v_n \rangle$$

Обратное включение очевидно.

**Определение 6.3.** Пространство  $V$  называется конечномерным, если у него есть конечная система образующих.

**Пример.**

1.  $M(n, m, K) = \langle e_{ij} \rangle$  - пространство размерности  $nm$
2.  $R_+$  - пространство размерности 1
3.  $K[x] = \langle x^i \rangle, 0 \leq i$  - пространство бесконечномерное

**Определение 6.4.**  $V' \subseteq V$  называется линейным подпространством пространства  $V$ , если

1.  $0 \in V'$
2.  $\forall v_1, v_2 \in V' \quad v_1 + v_2 \in V'$
3.  $\forall a \in K, v \in V' \quad av \in V'$

**Теорема 6.1.**

Пусть  $V'$  - линейное подпространство пространства  $V$ , тогда  $V'$  - линейное пространство.

**Доказательство.**

Из неочевидного только третья аксиома Абелевой группы.

$$v \in V' \implies -v \in V' \text{ - верно в силу } (-1)v = -v$$

**Определение 6.5.**  $V' < V$  - обозначает, что  $V'$  - линейное подпространство пространства  $V$ .

**Лемма 6.2.**

Пусть  $V' < V$  и  $M \subseteq V'$ , тогда  $\langle M \rangle \subseteq V'$ .

**Доказательство.** Очев.

**Линейная зависимость и независимость**

**Определение 6.6.**

$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  называются линейно независимыми семейством (ЛНС), если



$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0 \implies a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  называются линейно зависимыми семейством (ЛЗС), если существует  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$  такие, что  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$  и  $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$ .

### Теорема 6.2.

$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ , тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $v_1, v_2, \dots, v_n$  - ЛЗС
2.  $\forall j v_j \in \langle v_1, v_2, \dots, \widehat{v_{j-1}}, v_j, \dots, v_n \rangle$
3.  $\exists j v_j \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{j-1} \rangle$

**Доказательство.**

3)  $\implies$  2) - очевидно

2)  $\implies$  1) -  $v_j = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots \implies 0 = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + (-1)v_j + \dots$

1)  $\implies$  3) -  $0 = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots \implies 0 = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_jv_j \implies v_j = \frac{-a_1}{a_j}v_1 + \dots \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{j-1} \rangle$

**Предложение 6.2.**  $v_1, v_2, \dots, v_n$  - ЛЗС  $\implies v_1, v_2, \dots, v_n, v$  - ЛЗС

**Следствие.**  $v_1 = 0 \implies v_1, v_2, \dots, v_n$  - ЛЗС

### Теорема 6.3.

$V = v_1, v_2, \dots, v_n, W = w_1, w_2, \dots, w_m \in \langle V \rangle, m > n \implies W$  - ЛЗС

**Доказательство.**  $W = AV, A \in M(m, n)$

$m > n \implies$  элементарными преобразованиями строк над расширенной матрицей системы можно обнулить последнюю строку, а значит один из векторов  $w_i$  представляется в виде линейной комбинации других.

## 7 Базис и размерность

**Определение 7.1.**  $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$  - базис пространства  $V$ , если  $\forall v \in V \exists! a \in F^n a^T e = v$ .

### Теорема 7.1.

Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $e_1, e_2, \dots, e_n$  - базис пространства  $V$
2.  $V = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  и  $e_1, e_2, \dots, e_n$  - ЛНС.
3.  $e_1, e_2, \dots, e_n$  - максимальная по включению ЛНС.
4.  $e_1, e_2, \dots, e_n$  - минимальная по включению порождающая система.

**Доказательство.**

$e \in V^n$  - базис  $V, a, b \in F^n$  - ненулевые столбцы скаляров.

1.  $1 \implies 2$  :  $a^T e = 0 = 0^T e$  - противоречие с определением базиса.

2.  $2 \implies 1 : a^T e = b^T e \implies (a - b)^T e = 0 \implies a = b$
3.  $2 \implies 3 : \forall v \in V \ e, v - \text{ЛЗС, т. к. } v \in \langle e \rangle$
4.  $3 \implies 2 : v \notin \langle e \rangle \implies e, v - \text{ЛНС, противоречит максимальной.}$
5.  $2 \implies 4 : e \setminus e_1 - \text{порождающий набор} \implies e_1 \in \langle e \setminus e_1 \rangle$
6.  $4 \implies 2 : e - \text{ЛЗС} \implies \exists e_j \in \langle e_1, \dots, e_{j-1} \rangle \implies e \setminus e_j - \text{порождающий набор, противоречит минимальности.}$

**Следствие.** В любом конечномерном пространстве существует базис

**Замечание.** В бесконечномерном пространстве тоже есть базис, но линейные комбинации берутся финитные.

**Следствие.** Любые 2 базиса содержат одинаковое число векторов.

**Определение 7.2.**  $\dim V$  - Размерность пространства  $V$  - число векторов в базисе (мощность базиса в бесконечномерном случае)  $V$ .

**Пример.**

1.  $\dim F^n = n$
2.  $\dim M(n, m, F) = nm$

**Предложение 7.1.**

$\dim V = n \ v \in V^m - \text{ЛНС}$

1.  $m \leq n$
2.  $\langle v \rangle = V \implies m \geq n$
3.  $v(1 : n, 1) - \text{ЛНС} \implies v(1 : n, 1) - \text{базис.}$
4.  $\langle v(1 : n, 1) \rangle = V \implies v(n : 1) - \text{базис.}$

**Доказательство.**

$e \in V^n - \text{базис } V$

1.  $v \in \langle e \rangle \implies m \leq n$  по минимальности
2. Из порождающей системы можно выбрать базис
3.  $\neg v(1 : n, 1) - \text{не базис, тогда } \exists w \ v(1 : n, 1), w - \text{ЛНС, противоречит 1.}$
4. Можно выбрать базис, а значит  $v(1 : n, 1) - \text{базис.}$

**Предложение 7.2.**

Пусть  $\dim V = n, \ W \leq V$ , тогда

1.  $\dim W \leq n$
2.  $\dim W = n \implies W = V$

**Доказательство.**

$e \in V^n$  - базис  $V$

1.  $W \in \langle e \rangle \implies \dim W \leq n$
2.  $W = \langle e \rangle \implies \dim W = n$

## 8 Координаты

**Определение 8.1.**

Пусть  $\dim V = n$ ,  $e$  - базис  $V$ ,  $v \in V$ ,  $a \in F^n$   $v = a^T e$ , тогда

$a$  - столбец координат вектора  $v$  в базисе  $E$ .

**Определение 8.2.**

Пусть  $e, f$  - базисы  $V$ , тогда

$M_{e \rightarrow f} = ([f_i]_e)_{1 \leq i \leq n}$  - матрица перехода из базиса  $e$  в базис  $f$ .

**Предложение 8.1.**

1.  $M_{e \rightarrow f} \in GL_n(F) \implies M_{e \rightarrow f} = M_{f \rightarrow e}^{-1}$
2.  $e, f, g$  - три базиса, тогда  $M_{e \rightarrow g} = M_{e \rightarrow f} M_{f \rightarrow g}$

**Доказательство.** Очев

## 9 Ранг матрицы

**Определение 9.1.**

Пусть  $v \in V^n$ , тогда  $\text{rk}(v) = \dim \langle v \rangle$

Пусть  $A = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ , тогда  $\text{rk}(A) = \text{rk}(v)$  - столбцовый ранг  $A$ .

**Предложение 9.1.**  $\text{rk}(v)$  - наибольшее количество линейно независимых векторов в  $v$ .

**Доказательство.** Очев

**Теорема 9.1.**

$$\text{rk } A = \text{rk } A^T$$

**Доказательство.**