

Алгебра

Лектор: Жуков Игорь Борисович

Содержание

1	Теория чисел	1
1	Делимость	1
2	Отношение эквивалентности и разбиение на классы	1
3	Сравнение по модулю	2
4	Кольцо классов вычетов	3
5	Наибольший общий делитель	6
6	Взаимно простые числа	8
7	Линейные диофантовы уравнения	9
8	Простые числа	10
9	Основная теорема арифметики	11
10	Китайская теорема об остатках	13
11	Функция Эйлера	14
2	Комплексные числа	18
1	Построение поля комплексных чисел	18
2	Тригонометрическая форма комплексного числа	20
3	Корни из комплексных чисел	23
3	Многочлены	27
1	Многочлены и формальные степенные ряды	27
2	Свойства степени	28
3	Деление с остатком	29
4	Гомоморфизм подстановки	30
5	Евклидовы области	34
6	Факториальность области главных идеалов	36
7	Кратные корни и производные	39
8	Формула Тейлора	41
9	Алгебраически замкнутые поля. Каноническое разложение над \mathbb{C} и над \mathbb{R}	42
10	Рациональные дроби	44
11	Интерполяция	47
4	Линейная алгебра	49
1	Матрицы	49
2	Элементарные преобразования и элементарные матрицы	51
3	Перестановки	55
4	Определители	57

1 Теория чисел

1 Делимость

Определение 1.1. $a, b \in \mathbb{Z}, a \mid b \iff \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$

Свойства.

1. $a \mid a$ — рефлексивность
2. $a \mid b, b \mid c \implies \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$ — транзитивность
3. $a \mid b, k \in \mathbb{Z} \implies ka \mid kb$
4. $a \mid b_1, a \mid b_2 \implies a \mid (b_1 \pm b_2)$
5. $\pm 1 \mid a$
6. $\begin{cases} ka \mid kb \\ k \neq 0 \end{cases} \implies a \mid b$

Определение 1.2. a, b называются *ассоциированными*, если $a \mid b$ и $b \mid a$. Иногда такое отношение обозначают $a \sim b$:

$$a \sim b \iff a \mid b \wedge b \mid a$$

Свойства.

1. Пусть $a \sim a', b \sim b'$. Тогда $a \mid b \iff a' \mid b'$.

2 Отношение эквивалентности и разбиение на классы

Определение 2.1. Отношение эквивалентности — бинарное отношение, удовлетворяющее следующим свойствам: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Определение 2.2. Разбиение на классы множества M — это представление M в виде $M = \bigcup_{i \in I} M_i$, где M_i — классы, I — индексное множество, $M_i \cap M_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Теорема 2.1. Пусть $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ — разбиение на классы. Введем отношение \sim над M так, что $a \sim b \iff \exists i \in I : a, b \in M_i$. Тогда \sim — отношение эквивалентности.

Доказательство.

Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность.

$$a \sim b, b \sim c \implies \exists i, j : \begin{cases} a, b \in M_i \\ b, c \in M_j \end{cases}$$

Тогда $b \in M_i \cap M_j$, но так как $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ при неравных i и j , $i = j$. Значит $a, b, c \in M_i$.

Теорема 2.2. Пусть \sim — отношение эквивалентности на M . Значит существует разбиение на классы $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ такое, что $\forall a, b \in M : a \sim b \iff \exists i : a, b \in M_i$.

Доказательство.

Рассмотрим $a \in M$. Назовем классом элемента a множество

$$[a] = \{b \in M \mid a \sim b\}.$$

Докажем, что для любых элементов a и b , либо $[a] = [b]$, либо $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Пусть $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Тогда

$$\exists x \in [a] \cap [b] \implies \begin{cases} x \in [a] \\ x \in [b] \end{cases} \xRightarrow{\text{опр. класса}} \begin{cases} x \sim a \\ x \sim b \end{cases} \xRightarrow{\text{транзитивность } \sim} a \sim b.$$

$$(\forall c \in [a] \ c \sim a \xRightarrow{a \sim b} c \sim b \implies c \in [b]) \implies [a] \subset [b] \quad (1)$$

$$(\forall c \in [b] \ c \sim b \xRightarrow{a \sim b} c \sim a \implies c \in [a]) \implies [b] \subset [a] \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем $[a] = [b]$.

Тогда искомое разбиение можно построить как

$$X = \{[a] \mid a \in M\}.$$

Действительно $\forall a \in M$, так как $a \in [a]$, то $M = \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$, а так как различные классы не пересекаются (доказано выше) $\forall a, b \ [a] \neq [b]$.

Определение 2.3. Построенное множество X называют *фактор-множеством* множества M по отношению эквивалентности \sim , обозначение: M/\sim .

Пример. $\mathbb{Z}/\sim = \{[z] \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], [2], \dots\}$

3 Сравнение по модулю

Определение 3.1. $\exists a, b, m \in \mathbb{Z}$. Говорят, что

$$\begin{aligned} a &\equiv_m b && \iff \\ a &\equiv_m b && \iff \\ a &\equiv b \pmod{m} && \iff m \mid (a - b) \end{aligned}$$

Свойства.

1. \equiv_m — рефлексивно
2. \equiv_m — симметрично
3. \equiv_m — транзитивно
4. $a \equiv_m b, d \mid m \implies a \equiv_d b$
5. $a \equiv_m b, k \in \mathbb{Z} \implies ka \equiv_{km} kb$
6. $a \equiv_m b, k \in \mathbb{Z} \implies ka \equiv_m kb$ (ослабленная версия предыдущего свойства)

$$7. a_1 \equiv_m b_1, a_2 \equiv_m b_2 \implies a_1 \pm a_2 \equiv_m b_1 \pm b_2$$

$$8. a_1 \equiv_m b_1, a_2 \equiv_m b_2 \implies a_1 a_2 \equiv_m b_1 b_2$$

Замечание. Сравнение по модулю — отношение эквивалентности.

4 Кольцо классов вычетов

Определение 4.1. Множество классов вычетов по модулю m — это множество всех вычетов по модулю m .

Обозначается как $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \iff \mathbb{Z}/m \iff \mathbb{Z}/\equiv_m$

Теорема 4.1. $\exists m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$1. \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$$

$$2. |\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = m$$

Доказательство.

$$1. \exists a \in \mathbb{Z}, (!) \bar{a} = \bar{r}, \quad 0 \leq r < m$$

а) Случай $a \geq 0$: $\exists r$ — наименьшее число, такое что $r \geq 0$ и $a \equiv_m r$.

Если $r \geq m$, то $r - m \equiv_m a$, $r - m \geq 0$, $r - m < r$. То есть $r - m$ подходит под условие для r и меньше. Противоречие с выбором r .

Значит $r < m$, то есть r — искомое.

б) Случай $a < 0$:

Рассмотрим $a' = a \pm (-a)m = a(1 - m)$. Тогда $a < 0$, $1 - m \geq 0$, и $a' \geq 0$.

$$\bar{a} = \overline{a'} = \bar{r}, \quad 0 \leq r < m$$

$$2. \text{ предположим } \bar{r} = \overline{r'}, \quad 0 \leq r, r' < m.$$

$$\begin{cases} |r' - r| < m \\ m \mid (r - r') \end{cases} \implies r' - r = 0 \implies r = r'.$$

Следствие. Теорема о делении с остатком

Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\exists! q, r \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

Доказательство.

«Существование»:

В $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ рассмотрим $\bar{a} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{b-1}\}$, тогда по теореме выше найдется $0 \leq r < b$ для которого $\bar{a} = \bar{r}$:

$$a \equiv_b r \iff a = bq + r, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

«Единственность»: Пусть нашлось два таких $q, q' \in \mathbb{Z}$ и $r, r' \in \mathbb{Z}$ для которых $a = bq + r$, $a = bq' + r'$. Тогда

$$bq + r \equiv_b bq' + r' \iff r \equiv_b r' \stackrel{0 \leq r, r' < b}{\iff} r = r' \implies bq = bq' \iff q = q'.$$

Напомним, что вторая равносильность выполняется благодаря единственности класса вычетов \bar{r} .

Определение 4.2. q — *неполное частное* при делении a на b , r — *остаток* при делении a на b .

Определение 4.3. Операция на множестве M — бинарное отображение $M \times M \rightarrow M$.

На $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ определим операцию сложения и умножения по модулю m :

- $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$
- $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$

Предложение 4.1. Это правда операции над множеством $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$:

Доказательство. То, что за пределы множества при сложении и умножении мы не выходим, очевидно. Надо доказать, что при подстановке одинаковых классов, получаются одинаковые результаты, то есть:

$$(!) \bar{a} = \bar{a'}, \bar{b} = \bar{b'} \implies \bar{a} + \bar{b} = \overline{a' + b'}, \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a' \cdot b'}$$

распишем условия через сравнения по модулю:

$$\bar{a} = \bar{a'}, \bar{b} = \bar{b'} \implies a \equiv_m a', b \equiv_m b'$$

Воспользуемся свойствами сравнения:

$$a \equiv_m a', b \equiv_m b' \implies a + b \equiv_m a' + b', a \cdot b \equiv_m a' \cdot b'$$

И перейдем обратно к классам:

$$a + b \equiv_m a' + b', a \cdot b \equiv_m a' \cdot b' \implies \overline{a + b} = \overline{a' + b'}, \overline{a \cdot b} = \overline{a' \cdot b'}$$

Пример. $m = 4$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

\cdot	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Определение 4.4. $e \in M$ — *нейтральный элемент* относительно операции $*$ на M , если $\forall a \in M$ справедливо $a * e = e * a = a$.

Предложение 4.2. Операции сложения и умножения на $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ обладают следующими свойствами:

$\forall A, B, C \quad \exists A'$:

1. $A + B = B + A$ — коммутативность сложения
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ — ассоциативность сложения
3. $A + \bar{0} = A$ — существование нейтрального элемента относительно сложения
4. $A + A' = \bar{0}$ — существование обратного элемента относительно сложения
5. $AB = BA$ — коммутативность умножения
6. $(AB)C = A(BC)$ — ассоциативность умножения
7. $A \cdot \bar{1} = A$ — существование нейтрального элемента относительно умножения
8. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ — дистрибутивность умножения относительно сложения.
9. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ — дистрибутивность сложения относительно умножения.

Определение 4.5. *Кольцом* называется множество M с операциями сложения и умножения, для которых выполнены аналоги свойств 1-4 и 8-9.

Определение 4.6. Кольцо *коммутативное*, если выполнено свойство 5.

Определение 4.7. Кольцо *ассоциативное*, если выполнено свойство 6.

Определение 4.8. Кольцо *с единицей*, если выполнено свойство 7.

Определение 4.9. Я оставляю это для полноты картины, но wtf is this?

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} : x + y = n \implies n$ — ~~нейтральный элемент относительно сложения.~~

Замечание. Если $*$ — операция на M , то существует единственный нейтральный элемент относительно $*$.

Доказательство. e, e' — нейтральные элементы относительно $*$, тогда $e = e * e' = e'$.

Типа просто в определение нейтрального элемента подставили и получилось.

Предложение 4.3. В нашем курсе все кольца будут ассоциативные с единицей.

Лемма 4.1. В любом кольце $0 \cdot a = 0$.

Доказательство.

Предположим противное. Покажем, что $0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a$.

$$0 + 0 = 0 \xrightarrow{\exists 0} (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a \xrightarrow{\text{дистр.}} 0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a$$

Теперь вычтем $0 \cdot a$. Так как $\exists b : b + (0 \cdot a) = 0$, то

$$0 = b + (0 \cdot a) = b + (0 \cdot a + 0 \cdot a) = (b + 0 \cdot a) + (0 \cdot a) = 0 + (0 \cdot a) = 0 \cdot a$$

Противоречие.

Определение 4.10. A^* — множество обратимых элементов кольца A (по умножению, разумеется).

Примеры.

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$
- $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{3}\}$
- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

Определение 4.11. *Поле* называется коммутативное кольцо F , такое что $F^* = F \setminus \{0\}$.

5 Наибольший общий делитель

Определение 5.1. R — коммутативное кольцо, $a, b \in R$.

Элемент d называется наибольшим общим делителем, если:

1. $d \mid a, d \mid b$
2. $d' \mid a, d' \mid b \implies d' \mid d$

Предложение 5.1.

1. d_1, d_2 — наибольшие общие делители, тогда $d_1 \sim d_2$.
2. $\exists d_1$ — наибольший общий делитель, $d_2 \sim d_1$, тогда d_2 — тоже наибольший общий делитель.

Доказательство.

1. По свойству 2 : $d_1 \mid d_2, d_2 \mid d_1 \implies d_1 \sim d_2$.
2. $d_2 \mid d_1, d_1 \mid a, d_1 \mid b \implies d_2 \mid a, d_2 \mid b$

Пусть d_2 не наибольший, тогда $\exists d' > d_2$.

$d' \mid a, d' \mid b \implies d' \mid d_1$, так как d_1 наибольший общий делитель,

$d' \mid d_1, d_1 \mid d_2 \implies d' \mid d_2$, противоречие, так как $d' > d_2$.

Предложение 5.2. $\exists a, b \in \mathbb{Z} \implies$

1. $\exists d \in \mathbb{Z} : a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, иначе говоря: $\forall x, y \in \mathbb{Z} \exists d, z \in \mathbb{Z} : ax + by = dz$
2. при этом d — наибольший общий делитель a, b .

Доказательство.

1. Пусть $I = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

Заметим что $0 \in I$, так как $0a + 0b = 0$.

Если $I = \{0\}$, то $I = 0\mathbb{Z}$.

Иначе $I \neq \{0\} \implies c \in I \implies -c \in I$, так как $-(ax + by) = a \cdot -x + b \cdot -y$

То есть в I есть положительные числа.

Пусть $d = \min\{c \mid c \in I, c > 0\}$, и докажем что $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.

« \supset »:

$$d \in I \text{ (по определению)} \implies d = ax_0 + by_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{Z} \implies$$

$$\forall z \in \mathbb{Z}: dz = a(x_0z) + b(y_0z) \in I, \text{ значит } d\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$$

« \subset »:

$$\exists c \in I, d \in \mathbb{N} \implies \exists q, r \in \mathbb{Z}: c = dq + r, \quad 0 \leq r < d$$

$$c \in I, \text{ значит } c = ax_1 + by_1, \quad x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Мы уже знаем, что } d \in I, \text{ значит } d = ax_0 + by_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$$

$$r = c - dq = a(x_1 - x_0q) + b(y_1 - y_0q) \in I$$

$$\text{По определению остатка: } \begin{cases} r \geq 0, \\ r < d \end{cases}, \text{ но } d = \min\{c \mid c \in I, c > 0\} \implies \begin{cases} r = 0 \\ r = c - dq \end{cases} \implies$$

$$c = dq \implies c \in d\mathbb{Z} \implies a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$$

2. Пусть d — наибольший общий делитель a, b .

$$a = a1 + b0 \in I = d\mathbb{Z} \implies d \mid a$$

$$b = a0 + b1 \in I = d\mathbb{Z} \implies d \mid b$$

$$\exists d' \mid a, d' \mid b, d = ax_0 + by_0$$

$$d' \mid ax_0, d' \mid by_0 \implies d' \mid d, \text{ значит } d \text{ действительно наибольший общий делитель } a, b.$$

Следствие.

1. $a, b \in \mathbb{Z}$: Тогда наибольший общий делитель a, b существует.

2. Если d — наибольший общий делитель a, b , то $\exists x, y \in \mathbb{Z}: d = ax + by$ (*Линейное представление наибольшего общего делителя*).

Доказательство.

1. Доказали в двух частях предложения.

2. Из первой части знаем, что существует d_0 — наибольший общий делитель a, b , то есть $d_0 = ax_0 + by_0$

$$d \text{ ассоциирован с } d_0 \implies d = d_0\mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z} \implies d = a(x_0z) + b(y_0z)$$

Определение 5.2. $\text{НОД}(a, b) \iff \gcd(a, b)$ — неотрицательный наибольший общий делитель a, b .

Предложение 5.3. $\exists a_1, a_2, b \in \mathbb{Z}: a_1 \equiv a_2 \pmod{b}$

Тогда $\gcd(a_1, b) = \gcd(a_2, b)$.

Доказательство. (!) $\{c: c \mid a_1, c \mid b\} = \{c: c \mid a_2, c \mid b\}$

« \subset »:

$$a_2 - a_1 = bm \implies a_2 = a_1 + bm$$

$$c \mid a_1, c \mid b \implies c \mid a_2$$

« \supset »:

$$a_1 - a_2 = bm \implies a_1 = a_2 + bm$$

$$c \mid a_2, c \mid b \implies c \mid a_1$$

Получается, что:

$$\forall x \in \{c : c \mid a_1, c \mid b\} : x \mid \gcd(a_1, b)$$

$$\forall x \in \{c : c \mid a_2, c \mid b\} : x \mid \gcd(a_2, b)$$

$$\gcd(a_1, b) = \gcd(a_2, b)$$

Определение 5.3. Алгоритм Евклида

$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$, если $b \neq 0$

```
int gcd(int a, int b) {
    if (b == 0) return a;
    return gcd(b, a % b);
}
```

6 Взаимно простые числа

Определение 6.1. Числа a и b называются взаимно простыми, если $\gcd(a, b) = 1$.

$a \perp b$ — сокращенная запись для обозначения взаимной простоты.

Предложение 6.1.

1. $\exists a, b \in \mathbb{Z}$, тогда $a \perp b \iff \exists m, n \in \mathbb{Z} : am + bn = 1$.
2. $a_1 \perp b, a_2 \perp b \implies a_1 a_2 \perp b$.
3. $\begin{cases} a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z} \\ b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ и $\forall i, j : a_i \perp b_j \implies a_1 \dots a_m \perp b_1 \dots b_n$.
4. $a \mid bc, a \perp b \implies a \mid c$.
5. $ax \equiv ay, a \perp m \implies x \equiv y \pmod{m}$.
6. $\gcd(a, b) = d \implies a = da', b = db', a' \perp b'$.

Доказательство.

1. m и n существуют согласно линейному представлению НОД.

$$d = \gcd(a, b), d \mid a, d \mid b \implies d \mid (am + bn) = 1 \implies d \mid 1 \implies d = 1.$$

2. $\begin{cases} 1 = a_1 m_1 + b n_1 \\ 1 = a_2 m_2 + b n_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{перемножим}} 1 = a_1 a_2 (m_1 m_2) + b (a_1 m_1 n_2 + a_2 m_2 n_1 + b n_1 n_2) \implies a_1 a_2 \perp b$.

3. $\begin{cases} a_1 \perp b \\ \vdots \\ a_n \perp b \end{cases} \implies a_1 \dots a_n \perp b$

$$\begin{cases} a_1 \dots a_n \perp b_1 \\ \dots \\ a_1 \dots a_n \perp b_n \end{cases} \implies a_1 \dots a_n \perp b_1 \dots b_n$$

$$4. 1 = am + bn \implies c = acm + bcn$$

$$a \mid acm, a \mid bcn \implies a \mid c.$$

$$5. m \mid (ax - ay), a \perp m \implies m \mid (x - y) \implies x \equiv_m y.$$

$$6. d \mid a, d \mid b \implies \begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases} : a', b' \in \mathbb{Z}$$

$$d = am + bn, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$d = 0 \implies a' = b' = 0 = da'm + db'n$$

$$d \neq 0 \implies 1 = a'm + b'n \implies a' \perp b'.$$

7 Линейные диофантовы уравнения

Определение 7.1. *Линейным диофантовым уравнением с двумя неизвестными называется уравнение вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$.*

Определение 7.2. *Решением линейного диофантова уравнения называется множество всех пар $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : ax + by = c$.*

Замечание. Если $\gcd(a, b) \nmid c$, то решение — пустое множество, так как все линейные комбинации a, b делятся на $\gcd(a, b)$.

Замечание. Теперь заметим следующее: если $ax_1 + by_1 = c$ и $ax_2 + by_2 = c$, то $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$. Иными словами, разность двух решений линейного диофантова уравнения — решение соответствующего однородного уравнения.

А значит все решения линейного диофантова уравнения можно найти, решив однородное уравнение и прибавив ко всем его решениям какое-то решение исходного уравнения.

Решим однородное уравнение:

$$ax + by = 0 \iff ax = -by$$

$$\exists d = \gcd(a, b), \quad a = da', \quad b = db'$$

$$ax = -by \iff da'x = -db'y \iff a'x = -b'y \xLeftrightarrow^{(*)} \begin{cases} x = b'k \\ y = -a'k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(*) \gcd(a', b') = 1 \implies a' \mid y, b' \mid x \implies x = b'k, k \in \mathbb{Z} \implies y = -a'k$$

Теперь найдём какое-то решение исходного уравнения, вспомнив о линейном представлении \gcd :

$$\gcd(a, b) = d = ax_0 + by_0 \implies c = dc' = a(c'x_0) + b(c'y_0)$$

Таким образом, решение исходного уравнения: $\{(c'x_0 + b'k, c'y_0 - a'k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, где:

x_0, y_0 - коэффициенты при a, b в линейном представлении $\gcd(a, b)$,

$$a' = \frac{a}{\gcd(a, b)}, \quad b' = \frac{b}{\gcd(a, b)}, \quad c' = \frac{c}{\gcd(a, b)}$$

```

int extgcd(int a, int b, int &x, int &y) {
    if (b == 0) {
        x = 1, y = 0;
        return a;
    }
    int x1, y1;
    int tmp = extgcd(b, a % b, x1, y1);
    x = y1, y = x1 - (a / b) * y1;
    return tmp;
}

void solve() {
    int a, b, c;
    cin >> a >> b >> c;
    int x, y;
    int gcd = extgcd(a, b, x, y);
    if (c % gcd != 0) {
        cout << "No solutions\n";
    } else {
        int k = c / gcd;
        cout << x * k << ' ' << b / gcd << '\n'; // c' * x_0 + b' * k
        cout << y * k << ' ' << -(a / gcd) << '\n'; // c' * y_0 - a' * k
    }
}

```

8 Простые числа

Определение 8.1. Число $p \in \mathbb{Z}$ называется простым, если $p \notin \{-1, 0, 1\}$ и все делители p — это ± 1 и p .

Свойства.

1. p — простое $\iff -p$ — простое.
2. p — простое, $a \in \mathbb{Z} \implies p \mid a$ или $p \perp a$.
3. p, q — простые $\implies p \sim q$ или $p \perp q$.
4. $p \mid ab \implies p \mid a$ или $p \mid b$.

Предложение 8.1. $\exists a \neq \pm 1$, тогда существует простое число $p : p \mid a$.

Доказательство.

Пусть $a = 0$, тогда $p = 239$

Тогда $a \neq 0$, пускай $a > 0$, так как, случай $a < 0$ аналогичен.

Индукция по a :

«База»: $a = 1$, но $a > 0$, значит простое число уже встречалось.

«Переход»:

a — простое $\implies p = a, p \mid a$

a — не простое, значит $\exists d : 1 < d < a, d \mid a$

$a = dd'$, тогда по индукционному переходу существует простое число $p : p \mid d$

$$p \mid d, d \mid a \implies p \mid a$$

Определение 8.2. Составное число — это число отличное от 0, и не являющееся простым.

Определение 8.3. Решето Эратосфена — это алгоритм, который позволяет найти все простые числа от 1 до n .

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., 100

- 2 — простое, вычеркиваем все числа кратные 2
- 3 — простое, вычеркиваем все числа кратные 3
- 4 — составное, пропускаем
- и т. д.

В итоге получим все простые числа от 1 до 100.

Замечание. \mathbb{P} — множество всех простых чисел.

Теорема 8.1 (Теорема Евклида). Существует бесконечно много простых чисел

Доказательство.

$\exists p_1, p_2, \dots, p_n$ — все простые числа. Возьмем $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$, пусть оно составное \implies

$$\exists p \in \mathbb{P} : p \mid N, p > 0 \implies \exists j : p = p_j$$

Тогда, $p \mid (N - 1) \implies p \mid 1 \implies p = \pm 1$, противоречие.

9 Основная теорема арифметики

Теорема 9.1. Пусть $n \geq 2$. Тогда n можно представить в виде произведения простых чисел, и такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей.

Доказательство.

«Существование»:

$\exists n_0$ — наименьшее число (≥ 2), для которого такого представления нету.

$$n_0 \text{ — составное число} \implies n_0 = ab, \quad 2 \leq a, b < n_0$$

Это число минимальное $\implies a = p_1 \dots p_k, b = q_1 \dots q_l$, где все p_i, q_j — простые.

Но тогда, $n_0 = p_1 \dots p_k q_1 \dots q_l$, где все p_i, q_j — простые \implies такое представление существует, противоречие.

«Единственность»:

$$n = p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_l, \quad p_i, q_j \text{ — простые.}$$

Нужно доказать, что $k = l$ и что q_1, \dots, q_l совпадают с p_1, \dots, p_k с точностью до порядка.

Не умаляя общности можно считать: $k \leq l$.

Индукция по k :

$$\text{«База»} : k = 1 : p_1 = q_1 \dots q_l, p_1 \text{ — простое} \implies l = 1, p_1 = q_1$$

«Переход»: $k > 1 : p_k \mid n \implies p_k \mid (q_1 \dots q_l) \implies \exists j : p_k \mid q_j \implies p_k \sim q_j \implies p_k = q_j$

А значит $p_1 \dots p_{k-1} = q_1 \dots \hat{q}_j \dots q_l$, где $k-1 \leq l-1$

$k-1 < k \implies$ применим индукционный переход:

$k-1 = l-1$ и $q_1, \dots, \hat{q}_j, \dots, q_k$ — это p_1, \dots, p_{k-1} с точностью до порядка. \implies

$q_1, \dots, (q_j = p_k), \dots, q_k$ — это p_1, \dots, p_k с точностью до порядка.

Определение 9.1. Каноническое разложение (факторизация) числа n — это представление n в виде $p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$, где $\forall i : p_i \in \mathbb{P}, r_i \in \mathbb{N}$

Примеры.

- $n = 112 = 2^4 \cdot 7$
- $n = 6006 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1$

Предложение 9.1. $\exists a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}, b = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}$

Тогда $a \mid b \iff r_i \leq t_i \forall i \in \{1, \dots, s\}$

Доказательство.

« \Leftarrow »:

$$b = a \cdot p_1^{t_1-r_1} \dots p_s^{t_s-r_s} \implies a \mid b$$

« \Rightarrow »:

$$a \mid b \implies b = ac, c = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s} p_{s+1}^{m_{s+1}} \dots p_n^{m_n}$$

$$b = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s} = p_1^{r_1+m_1} \dots p_s^{r_s+m_s} p_{s+1}^{m_{s+1}} \dots p_n^{m_n} \implies$$

$$\begin{cases} t_i = r_i + m_i, & \forall i \in \{1, \dots, s\} \\ m_{s+1} = \dots = m_n = 0 \end{cases} \implies t_i \geq r_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}$$

Следствие. $\exists a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$

Тогда $\{d > 0 \mid a \mid d\} = \{p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s} \mid 0 \leq t_i \leq r_i, \forall i \in \{1, \dots, s\}\}$

Следствие. $\exists a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}, b = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}$

Тогда $\gcd(a, b) = p_1^{\min(r_1, t_1)} \dots p_s^{\min(r_s, t_s)}$

Определение 9.2. $\exists a, b \in \mathbb{Z}$. Число $c \in \mathbb{Z}$ называется наименьшим общим кратным чисел a и b , если:

1. $a \mid c, b \mid c$
2. $a \mid c', b \mid c' \implies c \mid c'$

Предложение 9.2. $\exists a = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}, b = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}$

Тогда $c = p_1^{\max(r_1, t_1)} \dots p_s^{\max(r_s, t_s)}$ — наименьшее общее кратное чисел a и b

Доказательство.

1. $a \mid c, b \mid c$ — очевидно
2. $\exists a \mid c', b \mid c', c' = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s} p_{s+1}^{m_{s+1}} \dots p_n^{m_n}$
 $a \mid c', b \mid c' \implies r_i \leq m_i, t_i \leq m_i, \forall i \in \{1, \dots, s\} \implies$
 $\max(r_i, t_i) \leq m_i, \forall i \in \{1, \dots, s\} \implies c \mid c'$

Определение 9.3. $\text{НОК}(a, b) \iff \text{lcm}(a, b)$ — положительное значение наименьшего общего кратного чисел a и b .

Следствие. $\exists a, b \in \mathbb{N}$

Тогда $\text{lcm}(a, b) \cdot \text{gcd}(a, b) = ab$

Доказательство. $\min(r_i, t_i) + \max(r_i, t_i) = r_i + t_i$

10 Китайская теорема об остатках

Теорема 10.1. Пусть $m_1 \perp m_2, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, тогда:

1. $\exists x_0 \in \mathbb{Z}: \begin{cases} x_0 \equiv a_1 \\ m_1 \\ x_0 \equiv a_2 \\ m_2 \end{cases}$
2. $\exists x_0$ удовлетворяет системе выше, тогда:

$$x \in \mathbb{Z}, \text{ где } x \text{ удовлетворяет системе выше} \iff x \equiv x_0 \pmod{m_1 m_2}$$

Доказательство.

1. $x_0 = a_1 + km_1 = a_2 + lm_2 \implies km_1 - lm_2 = a_2 - a_1$ — линейное диофантово уравнение с двумя неизвестными k, l

$m_1 \perp m_2 \implies$ у него есть решение (k_0, l_0)

$x_0 = a_1 + k_0 m_1$ — искомое

$$2. \text{ «} \Leftarrow \text{»}: x \equiv x_0 \pmod{m_1 m_2} \implies \begin{cases} x \equiv x_0 \\ m_1 \\ x \equiv x_0 \\ m_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv a_1 \\ m_1 \\ x \equiv a_2 \\ m_2 \end{cases}$$

$$\text{«} \Rightarrow \text{»}: x \text{ удовлетворяет системе из теоремы} \implies \begin{cases} x \equiv x_0 \\ m_1 \\ x \equiv x_0 \\ m_2 \end{cases} \implies \begin{cases} m_1 \mid (x - x_0) \\ m_2 \mid (x - x_0) \end{cases} \xRightarrow{m_1 \perp m_2} m_1 m_2 \mid (x - x_0)$$

Определение 10.1. $\exists R, S$ — кольца с единицей. Отображение $\varphi : R \rightarrow S$ называется изоморфизмом колец, если: φ биекция.

1. $\forall r_1, r_2 : \varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$
2. $\forall r_1, r_2 : \varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_1) \varphi(r_2)$

Предложение 10.1. $\exists m_1 \perp m_2$, тогда существует изоморфизм: $\mathbb{Z}/m_1 m_2 \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m_1 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2 \mathbb{Z}$

$$[a]_{m_1 m_2} \mapsto ([a]_{m_1}, [a]_{m_2})$$

Доказательство.

Проверим корректность:

«при подстановке одинаковых классов»:

$$\exists [a]_{m_1 m_2} = [a']_{m_1 m_2} \implies a \equiv_{m_1 m_2} a' \implies \begin{cases} a \equiv_{m_1} a' \\ a \equiv_{m_2} a' \end{cases} \implies ([a]_{m_1}, [a]_{m_2}) = ([a']_{m_1}, [a']_{m_2})$$

«сложения»:

$$\begin{aligned} \varphi([a]_{m_1 m_2} + [b]_{m_1 m_2}) &= \varphi([a + b]_{m_1 m_2}) = ([a + b]_{m_1}, [a + b]_{m_2}) = \\ &= ([a]_{m_1}, [a]_{m_2}) + ([b]_{m_1}, [b]_{m_2}) = \varphi([a]_{m_1 m_2}) + \varphi([b]_{m_1 m_2}) \end{aligned}$$

«умножения»:

$$\begin{aligned} \varphi([a]_{m_1 m_2} \cdot [b]_{m_1 m_2}) &= \varphi([a \cdot b]_{m_1 m_2}) = ([a \cdot b]_{m_1}, [a \cdot b]_{m_2}) = \\ &= ([a]_{m_1}, [a]_{m_2}) \cdot ([b]_{m_1}, [b]_{m_2}) = \varphi([a]_{m_1 m_2}) \cdot \varphi([b]_{m_1 m_2}) \end{aligned}$$

Проверим биективность, инъективность и сюръективность:

φ — отображение между конечными равномощными множествами, поэтому оно биективно \iff оно сюръективно \iff оно инъективно.

Действительно, если $\varphi : A \rightarrow B$, $|A| = |B| < \infty$ инъективно, то полный прообраз любого элемента из B состоит из не более чем одного элемента из A (определение инъективности).

А если сложить количества прообразов у всех элементов из B , то должно получиться в точности $|A|$, так как каждый прообраз — чей-то образ.

Но тогда каждый прообраз состоит из в точности одного элемента, т. е. φ — биекция.

Аналогично можно рассуждать и про сюръективное отображение.

$$\text{По китайской теореме об остатках } \forall a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \exists a \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a \equiv_{m_1} a_1 \\ a \equiv_{m_2} a_2 \end{cases}$$

Таким образом φ — биекция.

11 Функция Эйлера

Предложение 11.1. $\exists m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, тогда $[a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \iff a \perp m$

Доказательство.

$$[a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \iff \exists [b]_m : [a]_m \cdot [b]_m = [1]_m \iff$$

$$\exists b \in \mathbb{Z} : ab \equiv 1 \pmod{m} \iff$$

$$\exists b, c \in \mathbb{Z} : ab = 1 + mc \iff$$

$$\exists b, c \in \mathbb{Z} : ab - mc = 1 \iff \gcd(a, m) = 1 \iff a \perp m$$

Следствие. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ — поле $\iff m$ — простое число.

Доказательство.

$$m = 1 : \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{\bar{0}\}$$

$$m \text{ — простое: } \gcd(a, m) = 1, \quad \forall a \in \{1, 2, \dots, m-1\} \implies$$

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$$

$$m \text{ — составное: } m = ab, \quad 2 \leq a < m$$

$$\gcd(a, m) \neq 1 \implies \bar{a} \notin (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$$

Определение 11.1. \mathbb{F}_n — поле из n элементов. Называется конечным полем или полем Галуа.

Предложение 11.2. \mathbb{F}_n — поле из n элементов $\iff n = p^r, \quad p \in \mathbb{P}, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$

p — характеристика \mathbb{F}_n .

Доказательство. Пока без доказательства.

Определение 11.2. $\exists m \in \mathbb{N} : \varphi(n) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*|$

Функция $\varphi \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — функция Эйлера.

Предложение 11.3. $\exists p \in \mathbb{P}, \quad r \in \mathbb{N}.$

$$\text{Тогда } \varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}.$$

$$\text{Доказательство. } \varphi(p^r) = |\{a \mid 0 \leq a < p^r, \quad (a, p^r) = 1\}| =$$

$$p^r - |\{a \mid 0 \leq a < p^r, \quad (a, p) \neq 1\}| =$$

$$p^r - |\{a \mid 0 \leq a < p^r, \quad p \mid a\}| = p^r - p^{r-1}$$

Предложение 11.4. Мультипликативность функции Эйлера.

$$\exists m, n \in \mathbb{N}, \quad m \perp n.$$

$$\text{Тогда } \varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$

Доказательство. Построим отображение $\lambda : (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*:$

$$[a]_{mn} = A \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \mapsto ([a]_m, [a]_n)$$

$$[a]_{mn} \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \implies a \perp mn \implies \begin{cases} a \perp m \\ a \perp n \end{cases} \implies \begin{cases} [a]_m \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \\ [a]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \end{cases}$$

Проверка корректности:

$$[a]_{mn} = [a']_{mn} \implies a \equiv_{mn} a' \implies \begin{cases} a \equiv_m a' \\ a \equiv_n a' \end{cases} \implies \begin{cases} [a]_m = [a']_m \\ [a]_n = [a']_n \end{cases} \implies ([a]_m, [a]_n) = ([a']_m, [a']_n)$$

Проверим что λ — биекция:

Инъективность:

$$\lambda([a]_{mn}) = \lambda([b]_{mn}) \implies \begin{cases} [a]_m = [b]_m \\ [a]_n = [b]_n \end{cases} \xRightarrow{m \perp n} a \equiv_{mn} b \implies [a]_{mn} = [b]_{mn}$$

Сюръективность:

Рассмотрим $([b]_m, [c]_n) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

$$m \perp n \xrightarrow{\text{КТО}} \exists a : \begin{cases} a \equiv b \\ m \\ a \equiv c \\ n \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \perp m \implies a \perp m \\ c \perp n \implies a \perp n \end{cases} \implies a \perp mn \implies [a]_{mn} \in (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^*$$

$$\lambda([a]_{mn}) = ([a]_m, [a]_n) = ([b]_m, [c]_n) \implies \lambda - \text{биекция.}$$

$$\lambda - \text{биекция} \implies |(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^*| = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| \implies \varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

Следствие. $\exists m_1, \dots, m_k$ — попарно взаимно простые числа.

$$\text{Тогда } \varphi\left(\prod_{i=1}^k m_i\right) = \prod_{i=1}^k \varphi(m_i).$$

Доказательство. Индукция по k .

$$\text{«База»}: k = 1 \implies \varphi(m_1) = \varphi(m_1)$$

$$\text{«Переход»}: n - 1 \rightarrow n$$

$$(m_n, m_1) = \dots = (m_n, m_{n-1}) = 1 \implies (m_1, \dots, m_n) = 1 \implies$$

$$\varphi(m_1 \dots m_n) = \varphi(m_1 \dots m_{n-1}) \varphi(m_n) = \varphi(m_1) \dots \varphi(m_{n-1}) \varphi(m_n)$$

Следствие. $\exists n = p_1^{r_1}, \dots, p_s^{r_s}$ — разложение числа n на простые множители.

$$\implies \varphi(n) = \prod_{i=1}^s (p_i^{r_i} - p_i^{r_i-1})$$

$$\text{Доказательство. По следствию: } \varphi(n) = \varphi\left(\prod_{i=1}^s p_i^{r_i}\right) = \prod_{i=1}^s \varphi(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (p_i^{r_i} - p_i^{r_i-1})$$

Лемма 11.1. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей.

$$1. a, b \in R^* \implies ab \in R^*$$

$$2. a \in R^*, x, y \in R \implies \begin{cases} ax = ay \implies x = y \\ xa = ya \implies x = y \end{cases}$$

Доказательство.

$$1. a' - \text{обратный к } a \text{ элемент, } b' - \text{обратный к } b \text{ элемент.}$$

$$(ab)(b'a') = a(bb')a' = aa' = 1$$

$$(b'a')(ab) = b'(aa')b = bb' = 1$$

$$2. a' - \text{обратный к } a \text{ элемент.}$$

$$ax = ay \implies a'ax = a'ay \implies x = y$$

$$xa = ya \implies xaa' = yaa' \implies x = y$$

Теорема 11.1 (Теорема Эйлера). $\exists m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, a \perp m \implies a^{\varphi(m)} \equiv_m 1$.

Доказательство.

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{A_1, A_2, \dots, A_{\varphi(m)}\}$$

$[a]_m, A_j \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ $\xrightarrow{1 \text{ из леммы}}$ $[a]_m A_j \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, тогда $[a]_m A_1, \dots, [a]_m A_{\varphi(m)}$ — различные элементы, иначе $[a]_m A_j = [a]_m A_k \xrightarrow{2 \text{ из леммы}}$ $A_j = A_k$

$$\{[a]_m A_1, \dots, [a]_m A_{\varphi(m)}\} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \implies$$

$$[a]_m A_1 \cdot \dots \cdot [a]_m A_{\varphi(m)} = A_1 A_2 \dots A_{\varphi(m)} \implies$$

$$[a]_m^{\varphi(m)} A_1 A_2 \dots A_{\varphi(m)} = [1]_m A_1 A_2 \dots A_{\varphi(m)} \xrightarrow{2 \text{ из леммы}}$$

$$[a]_m^{\varphi(m)} = [1]_m \implies [a^{\varphi(m)}]_m = [1]_m \implies a^{\varphi(m)} \equiv_m 1$$

Теорема 11.2 (Малая теорема Ферма). $\exists p \in \mathbb{P}, a \in \mathbb{Z} \implies a^p \equiv_p a$

Доказательство.

$$(a, p) = 1 \implies a^{p-1} \equiv_p 1 \implies a^{p-1} \cdot a \equiv_p 1 \cdot a \implies a^p \equiv_p a$$

$$(a, p) \neq 1 \implies a \equiv_p 0 \implies \begin{cases} a^p \equiv_p 0 \\ a \equiv_p 0 \end{cases} \implies a^p \equiv_p a$$

Теорема 11.3 (Теорема Вильсона). $p \in \mathbb{P} \implies (p-1)! \equiv_p -1$

Доказательство. В $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* : \overline{(p-1)!} = \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \dots \cdot \overline{p-1} = \prod_{A \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} A =$

$$\left(\prod_{A^2=\bar{1}} A \right) \cdot \left(\prod_{A^2 \neq \bar{1}} A \right) = \left(\prod_{A^2=\bar{1}} A \right) \cdot (A_1 \cdot A'_1 \cdot \dots) = \left(\prod_{A^2=\bar{1}} A \right) \cdot \bar{1} = \prod_{A^2=\bar{1}} A$$

Рассмотрим каждый элемент:

$$A^2 = \bar{1} \iff A^2 - \bar{1}^2 = \bar{0} \iff (A - \bar{1})(A + \bar{1}) = \bar{0} \xrightarrow{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ — ОЦ}} A - \bar{1} = \bar{0} \text{ или } A + \bar{1} = \bar{0}$$

$$\text{Тогда, если: } \begin{cases} p = 2, & \text{то } \prod_{A^2=\bar{1}} A = \bar{1} = \overline{-1} \\ p \neq 2, & \text{то } \prod_{A^2=\bar{1}} A = \bar{1} \cdot \overline{-1} = \overline{-1} \end{cases}$$

2 Комплексные числа

1 Построение поля комплексных чисел

Определение 1.1. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Определение 1.2.

- Сложение на \mathbb{C} : $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- Умножение на \mathbb{C} : $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Предложение 1.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ — поле.

Доказательство.

- Коммутативность сложения:

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b') = (b + a, b' + a') = (b, b') + (a, a')$$

- Ассоциативность сложения:

$$((a, a') + (b, b')) + (c, c') = (a + b + c, a' + b' + c') = (a + (b + c), a' + (b' + c')) = (a, a') + ((b, b') + (c, c'))$$

- $(0, 0)$ — нейтральный элемент сложения.
- $(-a, -b)$ — обратный элемент к (a, b) .

- Коммутативность умножения:

$$(a, a') \cdot (b, b') = (ab - a'b', ab' + a'b) = (ba - b'a', ba' + b'a) = (b, b') \cdot (a, a')$$

- Ассоциативность умножения:

$$((a, a') \cdot (b, b')) \cdot (c, c') = (ab - a'b', ab' + a'b) \cdot (c, c') = (c(ab - a'b') - c'(ab' + a'b), c(ab' + a'b) + c'(ab - a'b')) = (cab - ca'b' - c'ab' - c'a'b, cab' + ca'b + c'ab - c'a'b') = (abc - a'b'c - ab'c' - a'bc', abc' + ab'c + abc' - a'b'c')$$

$$(a, a') \cdot ((b, b') \cdot (c, c')) = (a, a') \cdot (bc - b'c', bc' + b'c) = (a(bc - b'c') - a'(bc' + b'c), a(bc' + b'c) + a'(bc - b'c')) = (abc - a'b'c - ab'c' - a'bc', abc' + ab'c + abc' - a'b'c')$$

Как видно, выражения совпадают.

- Дистрибутивность:

Проверим правую, левая проверяется аналогично:

$$((a, a') + (b, b')) \cdot (c, c') = (a + b, a' + b') \cdot (c, c') = ((ac + bc) - (a'c' + b'c'), (a'c + b'c) + (ac' + bc')) = (ac - a'c', a'c + ac') + (bc - b'c', b'c + bc') = (a, a') \cdot (c, c') + (b, b') \cdot (c, c')$$

- $(1, 0)$ — нейтральный элемент умножения.
- $(a, b)z_1 z_2 = (1, 0) : z_1 = (a, -b), z_2 = \frac{1}{a^2 + b^2}$

Определение 1.3. \mathbb{C} — поле комплексных чисел.

Определение 1.4. $c \in \mathbb{C}$ — комплексное число.

Предложение 1.2. $\mathbb{R}' = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, тогда:

\mathbb{R}' замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения, содержит единицу, то есть является подкольцом поля $\mathbb{C} \implies \mathbb{R}'$ — само является кольцом относительно сложения, умножения, ограниченных на \mathbb{R}' .

Тогда существует отображение $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$, где $a \mapsto (a, 0)$, и $\varphi(a)$ — изоморфизм колец,

то есть φ — биекция и
$$\begin{cases} \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \end{cases}.$$

Отождествим $(a, 0)$ с вещественным числом a .

Давайте наконец-то определим комплексное число.

$$(a, 0) \cdot (0, 1) = (0, a)$$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b \cdot (0, 1) = a + bi$$

Определение 1.5. $z = a + bi$ — комплексное число.

$a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$ — действительная и мнимая части комплексного числа z .

В геометрическом виде это вектор $z = (a, b)$.

Определение 1.6. Пусть $z = a + bi$ — комплексное число, тогда $\bar{z} = a - bi$ — сопряженное к z .

Отступление про отображения

Определение 1.7. $\operatorname{id}_M : M \rightarrow M$, $x \mapsto x$ — тождественное отображение на M .

Определение 1.8. $\alpha : M \rightarrow N$, $\beta : N \rightarrow P$ — отображения

Тогда $\alpha \circ \beta : M \rightarrow P$, $x \mapsto \alpha(\beta(x))$ — композиция отображений.

Определение 1.9. $\alpha : M \rightarrow N$ — отображение

Отображение $\beta : N \rightarrow M$ — обратное к α , если $\beta \circ \alpha = \operatorname{id}_M$.

Предложение 1.3. У отображения $\alpha : M \rightarrow N$ есть обратное отображение, если и только если α — биекция.

Доказательство.

« \implies »:

Инъективность:

$$\beta \circ \alpha = \operatorname{id}_M, \alpha(x) = \alpha(y) \implies \beta(\alpha(x)) = \beta(\alpha(y)) \implies x = y$$

Сюръективность:

$$y \in N, y = \alpha(\beta(y)) \in \operatorname{Im}(\alpha) \text{ (Im это прообраз)}$$

« \impliedby »:

Пусть α — биекция, назовем $\beta : N \rightarrow M$ — обратным, если $\forall y \in N \alpha^{-1}(y) = \{x\}$, $x \in M$

$$\text{Положим } \beta(y) = x, \alpha \circ \beta = \operatorname{id}_N, \beta \circ \alpha = \operatorname{id}_M$$

Продолжение

Определение 1.10. Автоморфизм — изоморфизм на себя.

Предложение 1.4. $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ — автоморфизм.

Доказательство.

σ — биекция, т.к. $\sigma \circ \sigma = id_{\mathbb{C}}$

$\sigma(z_1 + z_2) = \sigma(z_1) + \sigma(z_2)$ — очевидно

$\sigma(z_1 z_2) = \sigma(z_1) \sigma(z_2)$

$\sigma(1) = 1$ — очевидно

$z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$

$\sigma(z_1 z_2) = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$\sigma(z_1) \sigma(z_2) = \overline{(a_1 - i b_1)(a_2 - i b_2)} = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

2 Тригонометрическая форма комплексного числа

Определение 2.1. $a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$a = r \cos \varphi$

$b = r \sin \varphi$

Определение 2.2. Модулем комплексного числа $z = a + bi \in \mathbb{C}$ назовем:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Предложение 2.1.

1. $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $|\bar{z}| = |z|$
5. $z \bar{z} = |z|^2$

Доказательство.

1. очевидно

2. $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 = \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \end{aligned}$$

3. $\iff |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

$$\iff (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leq a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2|z_1| |z_2|$$

$$\iff a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |a_1a_2 + b_1b_2| \leq \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \\
&\Leftrightarrow a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 \leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\
&\Leftrightarrow 2a_1a_2b_1b_2 \leq b_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 \\
&\Leftrightarrow (b_1a_2 - b_2a_1)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

4. очевидно

$$5. z = a + bi \implies \bar{z} = a - bi$$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Замечание. $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Определение 2.3. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Аргументом z назовем такое $\varphi \in \mathbb{R}$, что $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Предложение 2.2.

1. Если $z = 0$, то любой $\varphi \in \mathbb{R}$ - аргумент z
2. Если $z \neq 0$, то:
 - (а) аргумент существует
 - (б) если φ_0 - аргумент z , и φ - аргумент $z \iff \varphi = \varphi_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

1. тривиально

$$2. z_0 = \frac{1}{|z|} \cdot z$$

$$|z_0| = \left| \frac{1}{|z|} \right| \cdot |z| = \frac{1}{|z|} \cdot |z| = 1$$

$$z_0 = a_0 + ib_0, |z_0| = a_0^2 + b_0^2 = 1 \implies \exists \varphi_0 : \begin{cases} a_0 = \cos \varphi_0 \\ b_0 = \sin \varphi_0 \end{cases}$$

$$z = |z| \cdot z_0 = |z|(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$$

« \Leftarrow »:

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k \implies \begin{cases} \cos \varphi = \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi = \sin \varphi_0 \end{cases} \implies \varphi - \text{аргумент}$$

« \Rightarrow »:

$$\varphi - \text{аргумент} \implies z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \implies \begin{cases} \cos \varphi = \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi = \sin \varphi_0 \end{cases} \implies \varphi - \varphi_0 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Определение 2.4. $\arg(z) = \varphi$ означает φ — один из аргументов z

Замечание. Предположим оказалось, что $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ для некоторых $r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$. Тогда $r = |z|, \varphi = \arg z$

Доказательство. $|z| = \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \sqrt{r^2} = r$, а φ — аргумент по определению

Предложение 2.3.

1. $\arg \bar{z} = -\arg z$
2. $z \in \mathbb{R} \iff \arg z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
3. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
4. $z_2 \neq 0 \implies \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

Доказательство.

1. $\arg z = \varphi$
 $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
 $\bar{z} = |z|(\cos \varphi - i \sin \varphi) = |\bar{z}|(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) \implies$
 $\arg \bar{z} = -\varphi$
2. « \implies »:
 $z > 0$:
 $z = |z| \cdot 1 = |z|(\cos 0 + i \sin 0) \implies \arg z = 0$
 $z < 0$:
 $z = |z| \cdot (-1) = |z|(\cos \pi + i \sin \pi) \implies \arg z = \pi$
« \impliedby »:
 $\sin(k\pi) = 0$
3. $\arg z_1 = \varphi_1, \arg z_2 = \varphi_2 \implies$
(!) $\varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 z_2)$
 $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \implies$
 $z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)) =$
 $|z_1 z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \implies \arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$
4. $z_1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \implies \arg z_1 = \arg \frac{z_1}{z_2} + \arg z_2 \implies \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

Следствие (Формула Муавра). Пусть $z \in \mathbb{C}$, $|z| = r$, $\arg z = \varphi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$

Доказательство.

- $n > 0$: индукция по n
«База»: $n = 1$ — тривиально
«Переход»: $n - 1 \rightarrow n$
 $z^n = z^{n-1} \cdot z = r^{n-1}(\cos((n-1)\varphi) + i \sin((n-1)\varphi)) \cdot z =$
 $r^{n-1}(\cos((n-1)\varphi) + i \sin((n-1)\varphi)) \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi) =$

$$r^n(\cos((n-1)\varphi + \varphi) + i \sin((n-1)\varphi + \varphi)) = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

- $n = 0 : 1 = r^0(\cos(0) + i \sin(0)) = 1$
- $n < 0 : n = -k, k \in \mathbb{N}$

$$z^n = \frac{1}{z^k}$$

$$|z^n| = \frac{1}{|z^k|} = \frac{1}{|z|^k} = |z|^{-k} = |z|^n$$

$$\arg z^n = \arg 1 - \arg z^k = 0 - k\varphi = n\varphi$$

3 Корни из комплексных чисел

Рассмотрим уравнение $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$.

Теорема 3.1. $\exists n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$

1. Если $w = 0$, То уравнение $z^n = w$ имеет единственный корень $z = 0$.
2. Если $w \neq 0$, То уравнение $z^n = w$ имеет ровно n различных корней:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$$

Доказательство.

$$1. w = 0 \implies z = 0$$

$$2. w \neq 0 \implies \begin{cases} w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) : & r > 0, \varphi \in \mathbb{R} \\ z = p(\cos \alpha + i \sin \alpha) : & p > 0, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$z^n = w \iff p^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \iff \begin{cases} p^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} p = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$z^n = w \iff z = \underbrace{\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)}_{z_k}, k \in \mathbb{Z}$$

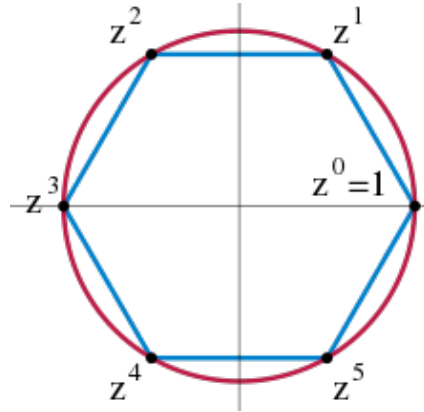
При каких $k, l : z_k = z_l$?

$$z_k = z_l \iff \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi l}{n} + 2\pi s, s \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\frac{k}{n} = \frac{l}{n} + s, s \in \mathbb{Z} \iff k = l + ns, s \in \mathbb{Z} \iff$$

$$k \equiv l \pmod{n} \iff z \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$$

Изображение на окружности



Комплексные корни образуют правильный n -угольник на окружности.

Лемма 3.1. Пусть z_0, z_1, \dots, z_{n-1} — все корни $z^n = w$, $n > 1$

Тогда $z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = 0$

Доказательство.

Заметим, что $z_k = z_{k-1} \underbrace{\left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)}_{\xi}$, тогда $z_k = z_0 \cdot \xi^k$.

Обозначим $S = z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}$, значит $\xi \cdot S = z_1 + z_2 + \dots + \underbrace{z_n}_{=z_0} = S \implies \xi S = S \implies (\xi - 1)S = 0$

Из того что $n > 1 \implies \xi \neq 1$, а значит $(\xi - 1)S = 0 \implies S = 0$

Определение 3.1. Группа — это множество G с операцией $*$: $G \times G \rightarrow G$ такая, что:

1. $*$ — ассоциативна: $(a * b) * c = a * (b * c)$
2. Существует нейтральный элемент $e \in G$ такой, что $a * e = e * a = a$ для любого $a \in G$
3. У любого элемента $a \in G$ существует обратный элемент $a^{-1} \in G$ такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Примеры.

1. $(\mathbb{Z}, +)$
2. $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$
3. Если R — ассоциативное кольцо с 1, то $R^* = \{r \mid \exists s \in R : rs = sr = 1\}$ — группа относительно умножения.

Предложение 3.1. $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{ \underbrace{\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}}_{\xi_k} \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$ — группа

относительно умножения.

Доказательство.

- Ассоциативность — так как есть ассоциативность в \mathbb{C}

- $1 \in \mu_n$ ($1 = \xi_0$)
- $\xi_k \cdot \xi_{-k} = \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right) \left(\cos \frac{2\pi(-k)}{n} + i \sin \frac{2\pi(-k)}{n} \right) = 1$

Лемма 3.2. $\xi_k = \xi_1^k$

Доказательство. $\left(1 \cdot \cos \frac{2\pi k}{n} + 1 \cdot i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)^k = 1^k \cdot \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)$ (по формуле Муавра)

Определение 3.2. G — группа с операцией $*$, $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда:

$$g^n = \begin{cases} g * g * \dots * g, & n > 0 \\ e, & n = 0 \\ g^{-1} * g^{-1} * \dots * g^{-1}, & n < 0 \end{cases}$$

Определение 3.3. Группа G называется циклической, если $\exists g \in G : G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Пишут: $G = \langle g \rangle$

Определение 3.4. g — образующий элемент группы G

Примеры.

- $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$ (по сложению) $g^n = \begin{cases} 1 + 1 + \dots + 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 + -1 + \dots + -1 & n < 0 \end{cases}$
- $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{4} \rangle$ (по сложению)
- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle$ (по сложению)
- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{3} \rangle$ (по умножению)
- $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$ — не циклическая группа $g^2 = e \implies g^{2k} = e, g^{2k+1} = g$

Определение 3.5. G — группа, $g \in G$

Если $\forall n \in \mathbb{N} : g^n \neq e$, то говорят, что g — бесконечный порядок

Если $\exists n \in \mathbb{N} : g^n = e$, то минимальное такое n называют порядком g (пишут: $\text{ord } g = n$)

Пример. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$\text{ord } \bar{1} = 1$$

$$\text{ord } \bar{2} = 4$$

$$\text{ord } \bar{3} = 4$$

$$\text{ord } \bar{4} = 2$$

Предложение 3.2. Пусть G — конечная группа, $|G| = n$, $g \in G$.

Тогда: $G = \langle g \rangle \iff \text{ord } g = n$

Доказательство.

« \Rightarrow »:

$$\exists k, l \in \{0, 1, \dots, n\}, k \neq l : g^k = g^l$$

$$k < l : g^{-k} \cdot g^k = g^{-k} \cdot g^l = g^{l-k} = e$$

$$0 < l - k \leq n$$

Таким образом, порядок g не превосходит n

Предположим, $\text{ord } g = m < n$

$G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{g^{mq+r} \mid q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < m\} = \{g^0, g^1, \dots, g^{m-1}\}$ — противоречие, так как $|G| \leq m < n$, а мы знаем что $|G| = n$.

« \Leftarrow »:

$$\text{ord } g = n$$

$$\Rightarrow g^0, g^1, g^2, \dots, g^{n-1} \text{ — попарно различны}$$

$$\Rightarrow \{g^0, g^1, \dots, g^{n-1}\} = G$$

$$\Rightarrow G = \langle g \rangle$$

Определение 3.6. Первообразным корнем из 1 степени n называется такой элемент $z \in \mathbb{C}^*$, что $\text{ord } z = n$

Пример. $\mu_6 = \{1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$

$$\text{ord } 1 = 1, \text{ord } \xi_1 = 6, \text{ord } \xi_2 = 3, \text{ord } \xi_3 = 2, \text{ord } \xi_4 = 3, \text{ord } \xi_5 = 6$$

ξ_2 — первообразный корень из 1 степени 3

3 Многочлены

1 Многочлены и формальные степенные ряды

Определение 1.1. Последовательность *финитная* $\iff \exists N : \forall n \geq N : a_n = 0$.

Определение 1.2. Многочленом над R (от одной переменной) называется финитная последовательность (a_i) , $a_i \in R$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Определение 1.3. R — коммутативное кольцо с 1, тогда:

$R[x] = \{(a_i) \mid a_i \in R, i = 0, 1, \dots; a_i = 0 \text{ при } i \rightarrow \infty\}$ — кольцо многочленов над R .

Предложение 1.1. Операции в $R[x]$:

«Сложение»: $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$

«Умножение»: $(a_i) \cdot (b_i) = (p_i)$, где $p_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$

Предложение 1.2 (Переход к стандартной записи).

$\sqcup a \in R$, $[a] = (a, 0, 0, \dots)$ — многочлен, равный a .

$$[a] + [b] = [a + b]$$

$$[a] \cdot [boba] = (aboba, 0, 0, \dots) = [aboba]$$

Отождествим $[a]$ с a .

$$[a] \cdot (b_0, b_1, \dots) = (ab_0, ab_1, \dots)$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = (a_0, 0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, 0, \dots) + \dots + (0, 0, \dots, a_n, 0, 0, \dots) =$$

$$a_0 \cdot \underbrace{(1, 0, 0, \dots)}_{x_0} + a_1 \cdot \underbrace{(0, 1, 0, \dots)}_{x_1} + \dots + a_n \cdot \underbrace{(0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)}_{x_n} = a_0 + a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n$$

$$x_j \cdot x_1 = (0, \dots, 1, 0, 0, \dots) \cdot (0, 1, 0, 0, \dots) = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) = x_{j+1} \implies \forall m \in \mathbb{N} : x_m = x_1^m$$

$$x_1 = x \implies x_m = x_1^m = x^m$$

Значит получили стандартную запись многочленов $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)$

Определение 1.4. $\sqcup f \in R[x]$, $f \neq 0$ (то есть не (0))

Тогда степенью f называется максимальное j такое что $a_j \neq 0$

Обозначим $\deg f = j$.

Если $f = 0$, то $\deg f \in \{-1, -\infty\}$ (по разному обозначают).

Определение 1.5. $d = \deg f \implies a_d$ называется старшим коэффициентом f .

Определение 1.6. Константой называется множество f такое что $\deg f \leq 0$.

Определение 1.7. Мономом называется множество вида ax^j .

Предложение 1.3. $R[x]$ — коммутативное ассоциативное кольцо с 1.

Доказательство.

1-4. Аксиомы относящиеся к сложению очевидны.

5. Коммутативность умножения очевидна.

6. Ассоциативность умножения:

$$f, g, h \in R[x], (fg)h = f(gh)$$

$$f = \sum_{i=0}^k f_i X_i, \text{ где } f_i \in R$$

$$g = \sum_{i=0}^l g_i X_i, \text{ где } g_i \in R$$

$$h = \sum_{i=0}^n h_i X_i, \text{ где } h_i \in R$$

Ассоциативность мономов $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ — сводится к сложению, f, g, h — мономы.

$$(fg)h = (\sum f_i X^i \cdot \sum g_j X^j) \cdot \sum h_k X^k = \sum (f_i X^i \cdot g_j X^j) \cdot \sum h_k X^k \stackrel{\text{ассоц. мономов}}{=} \\ \sum f_i X^i \cdot \sum (g_j X^j \cdot h_k X^k) = f(gh)$$

7. Нейтральный элемент по умножению — $1 = (1, 0, 0, \dots)$.

$$8. \text{ Дистрибутивность: } \begin{cases} (aX^i \cdot bX^j) \cdot cX^k = abX^{i+j} \cdot cX^k = abc \cdot X^{i+j+k} \\ aX^i \cdot (bX^j \cdot cX^k) = aX^i \cdot bcX^{j+k} = abc \cdot X^{i+j+k} \end{cases}$$

Определение 1.8. $R[[x]] = \{(a_i) \mid a_i \in R, i = 0, 1, \dots\}$ — множество формальных степенных рядов над R .

$$(a_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$$

Упражнение. $R[[x]]$ — коммутативное ассоциативное кольцо с 1.

2 Свойства степени

Предложение 2.1. $f, g \in R[x], \deg f = m, \deg g = n$

$$1. \deg(f + g) \leq \max(m, n)$$

$$\text{При этом: } m \neq n \implies \deg(f + g) = \max(m, n)$$

$$2. \deg(fg) \leq m + n$$

Доказательство.

$$1. f = \sum_{i=0}^m a_i X^i, g = \sum_{i=0}^n b_i X^i, d = \max(m, n)$$

$$f = \sum_{i=0}^d a_i X^i, g = \sum_{i=0}^d b_i X^i$$

$$f + g = \sum_{i=0}^d (a_i + b_i) X^i \implies \deg(f + g) \leq d$$

$$m \neq n \implies \begin{cases} a_d = 0 \\ b_d \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_d \neq 0 \\ b_d = 0 \end{cases} \implies a_d + b_d \neq 0 \implies \deg(f + g) = d$$

$$2. \left(\sum_{i=0}^m a_i X^i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j X^j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + \dots + a_m b_n X^{m+n} \implies \deg fg \leq m + n$$

Замечание. $\deg fg < m + n$, если $a_m \neq 0$ или $b_n \neq 0$ и $a_m b_n = 0$

Замечание. Будем считать, что $\deg 0 = -\infty$

Определение 2.1. Область целостности (целостное кольцо, область) — коммутативное ассоциативное кольцо с $1 \neq 0$ и без делителей нуля (то есть никакие два ненулевых элемента не дают ноль при умножении)

Предложение 2.2. Пусть R — область целостности.

1. $\forall f, g \in R[x] : \deg(fg) = \deg f + \deg g$
2. $R[x]$ — область целостности

Доказательство.

1. В предыдущем доказательстве $\begin{cases} a_m \neq 0 \\ b_n \neq 0 \end{cases} \implies a_m b_n \neq 0 \implies \deg(fg) = m + n$
2. $f \neq 0 \implies \deg f \geq 0$, $g \neq 0 \implies \deg g \geq 0 \implies \deg(fg) \geq 0 \implies fg \neq 0$

Следствие. Пусть R — область целостности: тогда $R[x]^* = R^*$

Доказательство.

« \supset »: очевидно $R^* \subset R[x]^*$

« \subset »: пусть $f \in R[x]^* \implies \exists g \in R[x] : f \cdot g = 1$

$$\deg(fg) = 0 = \deg f + \deg g \implies \deg f = \deg g = 0 \implies f \in R \implies f \in R^*$$

Примеры.

1. $\mathbb{Z}[x]^* = \{\pm 1\}$
2. $\mathbb{R}[x]^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[x]^*$ — бесконечное множество

Упражнение. $R[[x]]^* = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_0 \in R^* \right\}$

3 Деление с остатком

Теорема 3.1 (о делении с остатком для многочленов). R — область целостности.

Пусть $f, g \in R[x]$, $g \neq 0$ и старший коэффициент g обратим.

Тогда $\exists! q, r \in R[x]$:

1. $f = gq + r$
2. $\deg r < \deg g$

Доказательство. Пусть $\deg g = d$, $g = b_d X^d + \dots$

1. «Существование»

Индукция по $\deg f$: $\deg f < d \implies$ подходит $q = 0, r = f$

Пусть $\deg f = n \geq d$

$f_1 = f - g \cdot a_n \cdot b_d^{-1} \cdot X^{n-d}$, где b_d — старший коэффициент g (на первый взгляд здесь написано что-то неочевидное, но на деле это простое деление многочленов столбиком, то есть мы просто делаем так, чтобы старший коэффициент f исчез)

$$g \cdot a_n \cdot b_d^{-1} \cdot X^{n-d} = (b_d X^d + \dots) \cdot a_n \cdot b_d^{-1} \cdot X^{n-d} = a_n X^n + \dots \implies \deg f_1 < n$$

По индукционному предположению $\exists q_1, r_1 \in R[x]$ такие, что:

$$(a) \quad f_1 = gq_1 + r_1$$

$$(b) \quad \deg r_1 < d$$

$$f = g \cdot a_n \cdot b_d^{-1} \cdot X^{n-d} + f_1 = g \underbrace{(a_n \cdot b_d^{-1} \cdot X^{n-d} + q_1)}_q + \underbrace{r_1}_r$$

2. «Единственность»

Предположим $f = g \cdot q_1 + r_1 = g \cdot q_2 + r_2$, $\deg r_1 < d$, $\deg r_2 < d$

$$g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$$

$$\text{Предположим } q_1 \neq q_2 \implies \deg g \cdot (q_1 - q_2) \stackrel{R-\text{оп}}{=} \underbrace{\deg g}_d + \underbrace{\deg q_1 - q_2}_{\geq 0} \geq d \implies \deg(r_2 - r_1) \geq d,$$

но $\deg(r_2 - r_1) < d$, противоречие.

Замечание. Условие R — область целостности не существенно.

(я без понятия что написано дальше, но пускай будет)

$$g = b_d X^d + \dots, \quad b_d \in R^*$$

$$b_d \cdot a = 0 \implies b_d^{-1}(b_d a) = 0 \implies a = 0 \quad (\text{что это значит?})$$

4 Гомоморфизм подстановки

Определение 4.1. Пусть R, S — кольца. Гомоморфизм из кольца R в кольцо S называется отображением $\varphi : R \rightarrow S$, такое что:

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\forall a, b \in R$;
2. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
3. $\varphi(1_R) = 1_S$

Предложение 4.1 (свойства гомоморфизма).

1. $\varphi(0_R) = 0_S$
2. $\forall a \in R : \varphi(-a) = -\varphi(a)$

$$3. \forall a, b \in R : \varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b)$$

Доказательство.

$$1. 0_R = 0_R + 0_R \implies \varphi(0_R) = \varphi(0_R) + \varphi(0_R) \implies \underbrace{\varphi(0_R) + (-\varphi(0_R))}_{0_S} = \varphi(0_R) + \underbrace{\varphi(0_R) + (-\varphi(0_R))}_{0_S} \implies$$

$$0_S = \varphi(0_R) + 0_S \implies \varphi(0_R) = 0_S$$

$$2. a + (-a) = 0_R \implies \varphi(a) + \varphi(-a) = \varphi(0_R) = 0_S \implies \varphi(-a) = -\varphi(a)$$

$$3. \varphi(a - b) = \varphi(a) + \varphi(-b) = \varphi(a) - \varphi(b)$$

Определение 4.2. Пусть S — кольцо, $R \subset S$. R называется подкольцом S , если:

$$1. \forall a, b \in R : a - b \in R$$

$$2. \forall a, b \in R : ab \in R$$

$$3. 1_S \in R$$

Замечание. Этих условий достаточно (остальные выражаются)

$$1 \in R \implies 0 = 1 - 1 \in R$$

$$a \in R \implies -a = 0 + (-a) = 0 - a \in R$$

$$a, b \in R \implies a + (-(-b)) = a - (-b) \in R$$

Примеры.

$$1. \text{ Пусть } R \text{ — подкольцо в } S. \text{ Тогда } i_R : R \rightarrow S \text{ — гомоморфизм, } a \mapsto a.$$

$$2. \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ — гомоморфизм, } a \mapsto \bar{a}$$

$$3. \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ — гомоморфизм, } z \mapsto \bar{z}$$

Теорема 4.1. Пусть B — кольцо, A — подкольцо такое что, $\forall a \in A \forall b \in B : ab = ba$

Зафиксируем $b \in B$. Тогда отображение $\varphi_b : A[x] \rightarrow A[b]$

$$a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \mapsto a_n b^n + \dots + a_1 b + a_0 \text{ является гомоморфизмом колец.}$$

(Смысл этой теоремы в том, что подставить элементы надкольца в сумму/произведение многочленов, это тоже самое, что подставить элементы надкольца в многочлены, а потом сложить/умножить)

Доказательство.

$$\text{Если } f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0, \text{ то } f(b) = a_n b^n + \dots + a_1 b + a_0 = \varphi_b(f)$$

$$\text{Нужно проверить: } (f + g)(b) = f(b) + g(b) \text{ и } (fg)(b) = f(b)g(b)$$

$$1(b) = 1 \text{ — тривиально}$$

$$(f + g)(b) = f(b) + g(b) \text{ — очевидно из определения } f + g.$$

Осталось проверить, что $(fg)(b) = f(b)g(b)$:

$$f = \sum_{i=0}^n a_i X^i, \quad g = \sum_{i=0}^m c_i X^i$$

$$fg = \sum_{k=0}^{n+m} d_k X^k, \quad d_k = \sum_{i+j=k} a_i c_j$$

$$(fg)(b) = \sum_{k=0}^{n+m} d_k b^k$$

$$f(b)g(b) = \left(\sum_{i=0}^n a_i b^i \right) \left(\sum_{j=0}^m c_j b^j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b^i c_j b^j \stackrel{\text{КОММУТ.}}{=} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i c_j b^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{i,j \geq 0, i+j=k} (a_i c_j) \right)}_{d_k} b^k = (fg)(b)$$

Примеры.

1. A — любое коммутативное кольцо, $B = A[x]$
 A — подкольцо в $B = A[x] \implies$ можно рассмотреть $f(g)$, где $f, g \in A[x]$
2. $\mathbb{R}[x] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}[x], f \mapsto f(5)$
 $\text{Im } \varphi = \mathbb{R} \neq \mathbb{R}[x]$
3. $A \rightarrow A$
 $f \mapsto f(x_2, x_3, x_4, \dots)$ — инъективный, но не сюръективный
 $f \mapsto f(0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ — сюръективный, но не инъективный

Упражнение.

1. Найти все автоморфизмы \mathbb{Q}
2. Найти все автоморфизмы \mathbb{R}
3. Найти все автоморфизмы $\mathbb{R}[x]$

Теорема 4.2 (Безу). Пусть $f \in R[X]$, $c \in R$. Тогда остаток при делении f на $X - c$ есть $f(c)$.

Доказательство.

$$f = (X - c) \cdot q + r, \text{ по теореме о делении с остатком } \deg r < \deg(X - c) = 1 \implies$$

$$f(c) = (c - c) \cdot q(c) + r(c) = r(c)$$

Следствие. Пусть $f \in R[X]$, $c \in R$. Тогда $f(c) = 0 \iff (X - c) \mid f$

Определение 4.3. Пусть R — подкольцо S , элементы R коммутируют с элементами S . Тогда $s \in S$, такой что $f(s) = 0$, где $f \in R[x]$ — называется корнем из f в R .

Примеры.

1. $f = x^4 - 2$ в $\mathbb{Z}[x]$
 f не имеет корней в \mathbb{Z}
 f имеет 2 корня в \mathbb{R}

f имеет 4 корня в \mathbb{C}

Предложение 4.2. Пусть R – область целостности, $f \in R[x]$, $\deg f = d \geq 0$. Тогда число корней f в R не превосходит d .

Доказательство. Индукция по d

База: $d = 0 \implies f$ ненулевой $d \implies$ корней нет

Переход: $d > 0$

$\forall f$ нет корней в $R \implies$ утверждение выполнено

$\forall f$ есть корни в R , пусть $c \in R$ – какой-либо из корней f

$f(c) = 0 \implies f = (X - c) \cdot g$, где $g \in R[x]$

$\deg f = \deg(X - c) + \deg g \implies \deg g = d - 1$

Пусть c_1, \dots, c_l – все корни g в R

По предположению индукции: $l \leq d - 1$

Утверждение: $\{c_1, \dots, c_l, c\}$ – все корни f в R

$f(c_1) = \dots = f(c_l) = f(c) = 0$

Предположим $\exists c' \notin \{c_1, \dots, c_l, c\}$, такой что $f(c') = 0$

$\implies (c' - c) \cdot g(c') = 0$ – противоречие с тем, что R – область целостности

$\implies \forall f$ не более $l + 1 \leq d$ корней в R .

Пример. $x^2 - 1$ имеет 4 корня в $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ или в $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$x^2 \equiv_{77} 1 \iff \begin{cases} x^2 \equiv_7 1 \\ x^2 \equiv_{11} 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv_7 1 \text{ или } x \equiv_7 -1 \\ x \equiv_{11} 1 \text{ или } x \equiv_{11} -1 \end{cases}$$

Предложение 4.3 (формальное и функциональное равенство многочленов).

Пусть R – бесконечная область: $f, g \in R[x]$ таковы, что $\forall a \in R : f(a) = g(a)$

Тогда $f = g$

Доказательство.

$h = f - g$, предположим, что $h \neq 0 \implies \deg h = d \geq 0 \implies \forall h$ есть $\leq d$ корней.

Но $\forall a \in R : h(a) = f(a) - g(a) = 0$, R – бесконечная область, противоречие. Так как их не больше чем d , но R бесконечно.

Пример. $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $f = X$, $g = X^3$

$\forall A \in \mathbb{Z} : a^3 \equiv_3 a \implies \forall \alpha \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} : f(\alpha) = g(\alpha)$

5 Евклидовы области

Определение 5.1. Евклидовой областью целостности (евклидовой областью, евклидовым кольцом) называется область целостности R , для которой существует функция $\nu : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, называемая евклидовой нормой, такая что:

1. Если $d \mid a$, то $\nu(d) \leq \nu(a)$, причем $\nu(d) = \nu(a) \iff d \sim a$.
2. Для любых $a, b \in R$, $b \neq 0$: существует представление $a = bq + r$, где $r = 0$ или $\nu(r) < \nu(b)$.

Замечание: свойство один можно убрать, но доказательства будут сложнее.

Примеры.

1. $R = K[x]$, (K — поле), где $\nu(P) = \deg P$
2. $R = \mathbb{Z}$, где $\nu(a) = |a|$
3. $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, где $\nu(a + bi) = a^2 + b^2$ (подробнее в книжке Аейрленд, Роузен - «Классическое введение в современную теорию чисел»)
4. $R = K[[x]]$, (K — поле)

$$R^* = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \mid a_0 \neq 0\}$$

$$\text{ord } f = \min\{j \mid a_j \neq 0\}$$

$$f = x^{\text{ord } f} \cdot (a_j + a_{j+1}x + \dots) \sim x^{\text{ord } f}$$

Упражнение. Докажите, что это евклидова область.

5. $R = \mathbb{Z}_{(5)} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 5 \nmid b\}$

Упражнение. Докажите, что это евклидова область.

Лемма 5.1. Пусть R — область целостности, $a, b \in R$. Тогда $a \sim b \iff a = \varepsilon b$, $\varepsilon \in R^*$

Доказательство.

« \Leftarrow »:

Пусть $a = \varepsilon b \implies b$. Так как ε — обратим, $b = \varepsilon^{-1}a$.

$$\left. \begin{array}{l} a = \varepsilon b \implies a \mid b \\ b = \varepsilon^{-1}a \implies b \mid a \end{array} \right\} \iff a \sim b$$

« \Rightarrow »:

$$a \sim b \implies \left\{ \begin{array}{l} a \mid b \\ b \mid a \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} b = \varepsilon a \\ a = \varepsilon' b \end{array} \right. \implies b = \varepsilon \varepsilon' b \implies (\varepsilon \varepsilon' - 1)b = 0 \implies \varepsilon \text{ — обратим.}$$

Определение 5.2. R — коммутативное кольцо, $I \subset R$ называется идеалом в R , если:

1. $I \neq \emptyset$
2. $\forall a, b \in I : a + b \in I$
3. $\forall a \in I \forall b \in R : ab \in I$

Примеры.

1. $R = \mathbb{Z}$, $I = 2\mathbb{Z}$
2. $R = K[X]$, $I = \{f \in R \mid f(0) = 0\}$
3. $R = C[0, 1]$ (непрерывные функции на отрезке $[0, 1]$), $I = \{f \in R \mid f(0) = 0\}$

Определение 5.3. Пусть R — коммутативное кольцо, $r \in R$. Из свойств кольца очевидно, что $\langle r \rangle \Leftrightarrow (r) \Leftrightarrow \{rs \mid s \in R\}$ — идеал в R .

Тогда (r) называется *главным идеалом* порожденным элементом r .

Замечание. $(r) = (r') \iff r \sim r'$

Пример. Пример неглавного идеала:

$$R = \mathbb{Z}[X], \quad I = \{f : 2 \mid f(0)\}$$

Это множество всех многочленов, у которых свободный член четный.

Предложение 5.1. В евклидовой области все идеалы главные.

Доказательство. Пусть I — идеал в евклидовой области R .

Случай $I = \{0\}$ — тривиален, тогда $I = (0)$. Пусть $I \neq \{0\}$.

Зафиксируем норму ν и рассмотрим $c \in I$ с минимальной нормой. Докажем, что $I = (c)$.

« \supset »:

Так как для любого $b \in R$ должно быть выполнено $cb \in I$, то $I \supset (c)$.

« \subset »:

Предположим, $\exists a \in I \setminus (c)$. Представим евклидову норму в виде $a = cq + r$, $q, r \in R$. Если $r = 0$, то $a \in (c)$ по определению главного идеала. Но иначе $\nu(r) < \nu(c)$. Выразим r :

$$r = a - cq = a + c(-q).$$

Так как $c \in I$ и $a \in I$, то и $c(-q) \in I$, следовательно $r \in I$. Но $\nu(r) < \nu(c)$, что противоречит минимальности нормы $\nu(c)$

Определение 5.4. Область целостности, в которых все идеалы главные, называется *областью главных идеалов (ОГИ)*.

Предложение 5.2. Пусть R — область главных идеалов. Тогда:

1. $a, b \in R \implies$ у a и b существует наибольший общий делитель
2. Если d — наибольший общий делитель a и b , то $d = at + bn$, $t, n \in R$

Доказательство.

Можно считать $a \neq 0$ или $b \neq 0$, если $a = b = 0$, то $d = 0$ подходит, $d \neq 0$ не подходит.

1. Рассмотрим множество $I = \{am + bn \mid m, n \in R\}$ — идеал в R . Тогда можно записать $I = (d)$, так как I — область главных идеалов.

Заметим, что d — общий делитель a и b .

$$\begin{cases} a = a \cdot 1 + b \cdot 0 \in I = (d) \\ b = a \cdot 0 + b \cdot 1 \in I = (d) \end{cases} \implies \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$$

Покажем, что d — наибольший общий делитель a и b . То есть, что

$$\begin{cases} d' \mid a \\ d' \mid b \end{cases} \xRightarrow{(!)} d' \mid d$$

Так как $d \in I$, $d = am_0 + bn_0$, $m_0, n_0 \in R$.

$$\begin{cases} d' \mid a \\ d' \mid b \end{cases} \implies \begin{cases} d' \mid am_0 \\ d' \mid bn_0 \end{cases} \implies d' \mid d.$$

Что и требовалось доказать.

2. Если d' — наибольший общий делитель a и b , то:

$$d' \sim d \in I \implies d' \in I \implies d' = am + bn, \quad m, n \in R.$$

Замечание. Наибольший общий делитель в ОГИ обозначают (a, b) .

Определение 5.5. Элементы ОГИ a и b называют *взаимно простыми*, если $(a, b) = 1$.

Предложение 5.3. $(a, b) = 1 \iff m, n \in R : am + bn = 1$

Доказательство.

« \Rightarrow »: Из предыдущего предложения

« \Leftarrow »: $\exists m, n \in R : am + bn = 1$

$$\exists d = (a, b) \implies d \mid a, d \mid b \implies d \mid (am + bn) \implies d \mid 1 \implies d \sim 1 \implies (a, b) = 1$$

6 Факториальность области главных идеалов

Определение 6.1. Пусть R — коммутативное кольцо. Элемент a называется *неприводимым*, если $a \neq 0$, $a \notin R^*$ и $a = bc \implies b \in R^*$ или $c \in R^*$.

То есть неприводимый элемент — необратимый элемент, который не раскладывается в произведение двух обратимых.

Определение 6.2. *Приводимый элемент* — элемент, который не является ни 0, ни обратимым, ни неприводимым.

Примеры.

1. $R = K[x]$, (K — поле)

$$\deg f = 1 \implies f \text{ — неприводимый, так как } f = bc, \deg f = \deg b + \deg c = 1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

2. $\mathbb{R}[x]$:

$x^2 - 4$ приводим $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

$x^2 + 1$ неприводим, иначе имел бы корень в \mathbb{R}

Лемма 6.1. Пусть $f \in K[x]$ — многочлен степени 2 или 3. Тогда f приводим \iff у него есть корень в K .

Доказательство.

« \Rightarrow »:

a — корень $f \xrightarrow{\text{т. Безу}} (X-a) \mid f$. Рассмотрим разложение $f = (X-a) \cdot g$. Так как $\deg g = \deg f - 1 \geq 1$, оно нетривиально и f — приводимый.

« \Leftarrow »:

Пусть $f = gh$ и $\deg g, \deg h \geq 1$, не умаляя общности, $\deg g \geq \deg h$. Тогда:

$$\underbrace{\deg f}_{2 \text{ или } 3} = \deg g + \deg h$$

Есть два стула: $2 = 1 + 1$ и $3 = 2 + 1$ (на какой сам сядешь, на какой друга посадишь?)

В любом случае:

$$\deg h = 1 \implies h = aX + b \implies h\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \implies f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.$$

Значит $-\frac{b}{a}$ — корень f .

Замечание. Многочлены большей степени могут быть приводимыми, но не иметь корней в K .

Пример. Рассмотрим $f = x^4 + 2x^2 + 1$ в $\mathbb{R}[x]$:

$$f = (x^2 + 1)^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Замечание. Далее считается, что R — область главных идеалов

Лемма 6.2. Пусть $p, f \in R$. p — неприводимый элемент. Тогда $p \mid f$ либо $(p, f) = 1$.

Доказательство. $(p, f) \mid p \implies (p, f) = 1$ или $(p, f) = p \implies (p, f) = 1$ или $p \mid f$.

Предложение 6.1. Пусть p — неприводимый, $p \mid ab \implies p \mid a$ или $p \mid b$.

Доказательство. Пусть $p \nmid a, p \nmid b \implies (p, a) = (p, b) = 1 \implies$

$$pm + an = 1, pm' + bn' = 1 \xrightarrow{\text{перемножим}} p(pmm' + mbn' + anm') + abnn' = 1 \implies p \mid 1$$

Определение 6.3. Область целостности R называют факториальным кольцом, если:

1. Любой $a \in R$ отличный от 0 и не являющийся обратимым можно представить в виде $a = p_1 \dots p_s$, $s \geq 1$ и p_1, \dots, p_s — неприводимые элементы.

2. Если $p_1 \dots p_s = q_1 \dots q_t$, где все p_i, q_i — неприводимые элементы, то $s = t$ и после перенумерации q_j выполнено $q_1 \sim p_1, \dots, q_s \sim p_s$.

Теорема 6.1. Область главных идеалов является факториальным кольцом.

Доказательство.

1. «Существование разложения»

Есть элемент a , докажем что существует неприводимый p такой, что $p \mid a$.

Возьмем a , если он неприводимый, то доказывать нечего (т.к. $a \mid a$), иначе: $a = a_1 b_1$, где $a_1, b_1 \notin R^*$ (a не неприводим $\implies a_1, b_1$ оба обратимы либо оба необратимы, если оба обратимы, то a обратим, а нас такие элементы не интересуют)

a_1 — неприводимый, следовательно утверждение доказано, иначе $a_1 = a_2 b_2$, где $a_2, b_2 \notin R^*$

и так далее

Предположим, утверждение неверно. Обозначим $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i)$.

Можно заметить, что $a_2 \mid a_1, a_3 \mid a_2, \dots \implies (a_1) \subset (a_2) \subset \dots$

Покажем, что I — главный идеал.

$$(a) \quad x, y \in (a_j) \subset I \implies x + y \in (a_j) \subset I$$

$$(b) \quad x \in I \implies x \in (a_i) \text{ для некоторого } i, \text{ тогда для } a \in R \implies ax \in (a_i) \subset I$$

Значит I главный идеал, тогда $I = (c)$ для некоторого $c \in I \implies c \in (a_i)$ для некоторого i , при этом $a_{i+1} \in I \implies c \mid a_{i+1}$

$$\begin{cases} a_i \mid c \\ c \mid a_{i+1} \end{cases} \implies a_i \mid a_{i+1} \xrightarrow{a_{i+1} \mid a_i} a_i \sim a_{i+1} \implies \text{цепочка когда-то прервется, так как} \\ a_i = a_{i+1} \cdot b_{i+1}, \text{ где } a_i = \varepsilon a_{i+1}, \varepsilon \in R^* \implies b_{i+1} = \varepsilon \in R^*$$

Значит любой необратимый элемент делится на неприводимый.

2. «Единственность разложения»

Пусть $p_1 \dots p_s = q_1 \dots q_t$, где все p_i, q_i — неприводимы и не умаляя общности $s \leq t$

Индукция по S

«База»: $s = 1$

$$p_1 = q_1 \dots q_t, \text{ где } p_1 \text{ — неприводимый} \implies t = 1, q_1 = p_1.$$

«Переход»: $s > 1$

$$p_s \mid (p_1 \dots p_s) \implies p_s \mid (q_1 \dots q_t) \implies \exists j : p_s \mid q_j$$

Перенумеруем, так чтобы $j = t$, тогда $q_t = p_s \cdot \varepsilon$, но q_t неприводим $\implies \varepsilon \in R^*$

$$p_1 \dots p_s = q_1 \dots q_{t-1} \cdot \varepsilon p_s \implies p_1 \dots p_{s-1} = q_1 \dots q_{t-1} \cdot \underbrace{\varepsilon q_1}_{\text{неприводимый}} \cdot q_2 \dots q_{t-1}$$

По индукционному предположению $p_1 \dots p_{s-1}$ совпадает с $(\varepsilon q_1) \cdot q_2 \dots q_{t-1}$ с точностью до порядка и ассоциированности.

Замечание. Евклидова область \subset Область главных идеалов \subset Факториальное кольцо \subset Область целостности

Примеры.

1. R — факториальное кольцо $\implies R[X]$ — факториальное кольцо.
2. $\mathbb{Z}[X]$ — факториальное кольцо.
3. $K[X][Y] = K[X, Y] \implies K[X, Y]$ — факториальное кольцо.

7 Кратные корни и производные

Определение 7.1. Пусть $f \in R[x]$ и $f \neq 0$. Пусть $a \in R$ — корень.

$(X - a) \mid f$ по теореме Безу.

Наибольший n , такой что $(X - a)^n \mid f$, называется *кратностью корня a* . Можно заметить, что $n \leq \deg f$, поэтому он всегда существует.

Корни кратности 1 называются *простыми корнями f* ,

корни кратности ≤ 2 называются *кратными корнями f* ,

корни кратности 2 — *двойными*, 3 — *тройными*

Теорема 7.1. Пусть K поле, $f \in K[X]$, $d = \deg f > 0$

a_1, \dots, a_s — его корни, n_1, \dots, n_s — их кратности.

Тогда $n_1 + \dots + n_s \leq d$.

Доказательство. Разложим f на неприводимые множители.

$f = (X - a_1)^{m_1} \dots (X - a_s)^{m_s} \cdot g$, где $g \in K[x]$ и $(X - a_j)$ — неприводимые множители.

Заметим, что $(X - a_1) \neq g, \dots, (X - a_s) \neq g$.

Считаем, что $m_1 \leq n_1, \dots, m_s \leq n_s$. Предположим, при некотором j : $n_j > m_j \implies$

$$(X - a_j)^{m_j+1} \mid f \implies (X - a_j)^{m_j+1} \cdot h = (X - a_1)^{m_1} \dots (X - a_s)^{m_s} \cdot g \implies$$

$$(X - a_j) \cdot h = (X - a_1)^{m_1} \dots \widehat{(X - a_j)^{m_j}} \dots (X - a_s)^{m_s} \cdot g \implies$$

$$(X - a_j) \mid (X - a_1)^{m_1} \dots \widehat{(X - a_j)^{m_j}} \dots (X - a_s)^{m_s} \cdot g \implies$$

Либо $(X - a_j) \mid (X - a_i)$, $i \neq j$ или $(X - a_j) \mid g$, но такого не может быть, значит $m_j = n_j$, $j = 1, \dots, s$.

$$\text{Тогда } d = \deg f = m_1 + \dots + m_s + \underbrace{\deg g}_{\geq 0} \geq n_1 + \dots + n_s$$

Определение 7.2. Пусть $f \in K[X]$, $f = a_n X_n + a_{n-1} X_{n-1} + \dots + a_1 X_1 + a_0$

Его *производной* будет называться многочлен $f' \in K[X]$, $f' = n a_n X_{n-1} + (n-1) a_{n-1} X_{n-2} + \dots + a_1$

Предложение 7.1.

1. $(f + g)' = f' + g'$
2. $(fg)' = f'g + fg'$

$$3. (f^n)' = n f^{n-1} f'$$

Доказательство.

1. лёгкая непосредственная проверка (сначала очевидно, потом тривиально, как всегда короче)

2. Пусть f, g — мономы, то есть $f = aX^n, g = bX^m$

$$(fg)' = (abX^{n+m})' = (n+m)abX^{n+m-1} = n \cdot abX^{n+m-1} + m \cdot abX^{n+m-1} =$$

$$\underbrace{naX^{n-1}}_{f'} \cdot \underbrace{bX^m}_g + \underbrace{aX^n}_f \cdot \underbrace{mbX^{m-1}}_{g'}$$

$$f = \sum f_i, g = \sum g_i, f_i, g_i \text{ — мономы}$$

$$(fg)' = \left(\sum_{i,j} f_i g_j \right)' = \sum_{i,j} (f_i g_j)' = \sum_{i,j} (f'_i g_j + f_i g'_j) = \sum_{i,j} f'_i g_j + \sum_{i,j} f_i g'_j = \sum_i f'_i \sum_j g_j + \sum_i f_i \sum_j g'_j = f'g + fg'$$

3. Индукция по n

«База»: $n = 1$

$$f' = f'$$

«Переход»: $n > 1$

$$(f^n)' = (f^{n-1} \cdot f)' = (f^{n-1})' \cdot f + f^{n-1} \cdot f' \stackrel{\text{переход}}{=} (n-1) \cdot f' \cdot f^{n-2} \cdot f + f^{n-1} \cdot f' = (n-1)f' \cdot f^{n-1} + f' \cdot f^{n-1} = n f^{n-1} f'$$

$$((n-1) \cdot f' \cdot f^{n-2}) \cdot f + f^{n-1} \cdot f' = (n-1)f' \cdot f^{n-1} + f' \cdot f^{n-1} = n f^{n-1} f'$$

Предложение 7.2. K — поле. $f \in K[X], f \neq 0, a \in K$

Тогда a кратный корень $f \iff f(a) = f'(a) = 0$

Доказательство.

« \implies »:

$$a \text{ кратный корень } f \implies (X-a)^2 \mid f \implies f = (X-a)^2 \cdot g, \quad g \in K[X]$$

$$f' = ((X-a)^2)' \cdot g + (X-a)^2 \cdot g' = 2(X-a) \cdot g + (X-a)^2 \cdot g' \implies f'(a) = 0$$

« \impliedby »:

$$\text{Пусть } f(a) = f'(a) = 0.$$

$$f(a) = 0 \stackrel{\text{т.Безу}}{\implies} f = (X-a) \cdot g, \quad g \in K[X] \implies f' = g + (X-a)g'$$

$$f'(a) = 0 \implies g(a) = 0 \implies (X-a) \mid g \implies (X-a)^2 \mid f \implies a \text{ кратный корень } f$$

Следствие. K — поле. $f \in K[X], f \neq 0, a \in K$

$$\text{Пусть } D = (f, f')$$

$$\text{Тогда } a \text{ кратный корень } f \iff D(a) = 0$$

Доказательство. a кратный корень $\iff f(a) = f'(a) = 0 \stackrel{\text{т.Безу}}{\iff} (X-a) \mid f \text{ и } (X-a) \mid f' \iff (X-a) \mid D \stackrel{\text{т.Безу}}{\iff} D(a) = 0$

Определение 7.3. Для кольца с 1 *характеристикой* $\text{char } R$ называется минимальное $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\underbrace{1 + \dots + 1}_n = 0$, а если такого n нет, то $\text{char } R = 0$

Предложение 7.3. K — поле с характеристикой 0, то есть $\underbrace{1 + \dots + 1}_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f \in K[X], a \in K$ — корень f кратности $s \geq 2$.

Тогда a — корень f' кратности $s - 1$

Доказательство. $f = (X - a)^s g$

$$(X - a) \nmid g \xrightarrow{\text{т.Безу}} g(a) \neq 0$$

$$f' = ((X - a)^s)' \cdot g + (X - a)^s \cdot g' =$$

$$s(X - a)^{s-1} \cdot g + (X - a)^s \cdot g' =$$

$$(X - a)^{s-1} \cdot h, \text{ где } h = s \cdot g + (X - a)g'$$

$$h(a) \stackrel{\text{char } K = 0}{=} s \cdot g(a) \neq 0 \implies (X - a) \nmid h$$

8 Формула Тейлора

Предложение 8.1. K — поле, $f, g \in K[x], f \neq 0, d = \deg(g) \geq 1$.

Тогда f можно представить единственным образом в виде:

$$f = h_n g^n + \dots + h_1 g + h_0,$$

где $n \geq 0, h_i \in K[x], h_n \neq 0, \deg(h_i) < d, \forall i = 0, \dots, n$.

Доказательство.

«Существование»:

Индукция по $l = \deg f$.

«База»: При $l < d$ подходит $n = 0, h_0 = f$.

«Переход»: При $l \geq d: f = gq + r, \deg(r) < d, q \neq 0$.

$$\deg gq \geq \deg g > \deg r$$

$$\implies \deg f = \deg gq \implies \deg q = l - d$$

По ИП: $q = h_n g^n + \dots + h_1 g + h_0, h_n \neq 0, \deg(h_i) < d, i = 0, \dots, n$.

$$\implies f = h_n g^{n+1} + \dots + h_0 g + r.$$

«Единственность»:

Индукция по $l = \deg f$.

При $l < d$:

$$\deg h_n g^n \geq nd > \deg h_i g^i, i = 0, \dots, n-1 \implies \deg f = \deg h_n g^n \implies \deg h_n g^n < d.$$

$$nd + d - 1 \geq l \geq nd \implies n — \text{неполное частное при делении } l \text{ на } d.$$

«База»: При $l < d: n = 0 \implies h_0 = f$.

«Переход»: При $l \geq d$ предположим, что есть еще разложение $f = \hat{h}_n g^n + \dots + \hat{h}_1 g + \hat{h}_0$.

$$f = g(h_n g^{n-1} + \dots + h_1) + h_0 = g(\hat{h}_n g^{n-1} + \dots + \hat{h}_1) + \hat{h}_0, \quad \deg h_0, \deg \hat{h}_0 < d$$

Тогда $h_0 = \hat{h}_0$. По единственности деления с остатком.

По ИП: $\deg f_1 = h_n g^{n-1} + \dots + h_1 < \deg f \implies h_i = \hat{h}_i, i = 1, \dots, n-1$.

Предложение 8.2. $\text{char } K = 0, f \in K[x], f \neq 0, d = \deg(f) = n \geq 0, a \in K$.

$$\implies f = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x-a)^i}{i!}, f^{(i)} \in K[x], \deg(f^{(i)}) < d, i = 0, \dots, n.$$

Доказательство. $f = \sum_{i=0}^n c_i (x-a)^i, c_i \in K, i = 0, \dots, n, c_n \neq 0$.

$$f^{(i)} = \sum_{j=i}^n c_j j! (x-a)^{j-i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

$$f^{(j)}(a) = c_j j! \implies c_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}.$$

9 Алгебраически замкнутые поля. Каноническое разложение над \mathbb{C} и над \mathbb{R} .

Определение 9.1. Поле K называется *алгебраически замкнутым*, если любой $f \in K[x]$ имеет корень в K .

Теорема 9.1. Основная теорема алгебры.

\mathbb{C} алгебраически замкнуто.

Доказательство. Не будет в курсе.

Идея доказательства:

$$f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, z \in \mathbb{C}, f(z) = 0.$$

$$r > \max\{|a_0|, \dots, |a_n|\}.$$

$$f(r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))) = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) + g(r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))).$$

$$|g(r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)))| < r^{n-1}(|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|) < r^n.$$

$$\implies \Delta \arg f(r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))) = 2\pi n.$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$$

$\xRightarrow{\text{Топология}} f(D)$ — односвязная область.

$$\implies 0 \in f(D) \implies \exists z f(z) = 0.$$

Замечание. Любое поле можно вложить в алгебраически замкнутое поле.

Всегда есть минимальное такое поле.

Для \mathbb{Q} это поле алгебраических чисел.

Алгебраическое число — комплексный корень многочлена над \mathbb{Q} .

Предложение 9.1. K — алгебраически замкнутое поле, $f \in K[x]$.

Тогда f — неприводим $\iff \deg f = 1$.

Доказательство. Все многочлены степени 1 неприводимы.

$\deg f \neq 1 \implies \exists x \in K : f(x) = 0$

$\xRightarrow{\text{т. Безу}} (x - c) \mid f \implies \text{он приводим}$

Таким образом если $f \in K[x]$, $\deg f \geq 1$, то его каноническое разложение имеет вид:

$$f = c_0 \prod_{i=1}^n (x - c_i)^{d_i},$$

где $c_i \in K$, $d_i \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение 9.2. $f \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{C}$ — его корень.

Тогда \bar{a} — корень f той же кратности.

Доказательство.

Пусть l — кратность корня a .

В $\mathbb{C}[x]$ имеем $f = (x - a)^l g$, $g \in \mathbb{C}[x]$, $g(a) \neq 0$.

Пусть $g = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$.

Рассмотрим $\bar{g} = \bar{b}_n x^n + \dots + \bar{b}_1 x + \bar{b}_0$.

Тогда $f = \bar{f} = \overline{(x - a)^l g} = (x - \bar{a})^l \bar{g} \implies f(\bar{a}) = 0$

$0 \neq g(a) = \overline{\bar{g}(\bar{a})} \implies (x - \bar{a}) \nmid \bar{g}$

$\implies \bar{a}$ — корень f кратности l

\implies все корни разбиваются на пары сопряженных, тогда каноническое разложение в $\mathbb{C}[x]$ имеет вид:

$$f = r_0 \left(\prod_{i=1}^n (x - r_i)^{d_i} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^m ((x - c_i)(x - \bar{c}_i))^{p_i} \right),$$

где $r_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{Z}_+$, $c_i, \bar{c}_i \in \mathbb{C}$, $p_i \in \mathbb{Z}_+$.

$$\iff f = r_0 \left(\prod_{i=1}^n (x - r_i)^{d_i} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^m B_i^{p_i} \right),$$

B_i — квадратичные многочлены, неприводимые в \mathbb{R} .

$B_i = (x - c_i)(x - \bar{c}_i) = x^2 - (c_i + \bar{c}_i)x + c_i \bar{c}_i = x^2 - 2 \operatorname{Re} c_i x + |c_i|^2 \in \mathbb{R}[x]$

Предложение 9.3. Унитарные неприводимые многочлены в \mathbb{R} — это:

1. $x - a$, $a \in \mathbb{R}$

2. $x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4ac < 0$

Доказательство. С многочленами степени 1 и 2 все ясно.

Если степень многочлена больше 2, то справедливо разложение 9.2, значит он приводим.

10 Рациональные дроби

Определение 10.1. Поле частных области целостности R — наименьшее поле, в которое вложена R .

Назовем его $Q(R)$.

Элементы поля частных представляются как дроби $\frac{a}{b}$, где $a, b \in R$ и $b \neq 0$. Это поле строится так:

Рассмотрим $M = R \times (R \setminus \{0\})$ и введём на M отношение \sim :

$$(a, b) \sim (a', b') \iff ab' = a'b$$

Предложение 10.1. \sim — отношение эквивалентности

Доказательство. рефлексивность и симметричность очевидны

$$\text{транзитивность: } \begin{cases} (a, b) \sim (a', b') \\ (a', b') \sim (a'', b'') \end{cases} \implies ab'b'' = a'bb'' = a''bb' \implies b'(ab'' - a''b) = 0$$

$$b \neq 0 \implies ab'' - a''b = 0 \implies ab'' = a''b \implies (a, b) \sim (a'', b'')$$

То есть \sim — это отношение эквивалентности на M .

Определение 10.2. $Q(R) = M / \sim = \{[(a, b)] \mid a \in R, b \in R \setminus \{0\}\}$

Определение 10.3. Обозначим $\frac{a}{b}$ — это $[(a, b)] \in Q(R)$.

Предложение 10.2. Введём в $Q(R)$ операции сложения и умножения:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} &= \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{b_1b_2} \\ \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} &= \frac{a_1a_2}{b_1b_2} \end{aligned}$$

Замечание. $(a, b) \sim (ac, bc) \quad \forall c \in R \setminus \{0\}$

Такая замена не изменит результат.

Замечание. $(a, b) \sim (a', b') \iff (ab', bb') = (a'b, b'b)$

Предложение 10.3. Операции на $Q(R)$ определены корректно, при этом $Q(R)$ с этими операциями — поле.

Доказательство. Коммутативность и ассоциативность сложения очевидны в случае одинакового знаменателя.

$$\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} = \frac{a_1b + a_2b}{b^2} = \frac{a_2b + a_1b}{b^2} = \frac{a_2}{b} + \frac{a_1}{b}$$

Но любые 2 дроби можно привести к общему знаменателю:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2 b_1}{b_1 b_2}$$

Нейтральный по сложению элемент — это $\frac{0}{1}$

Противоположный по сложению элемент к $\frac{a}{b}$ — это $\frac{-a}{b}$

$$\text{Дистрибутивность: } \left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b}\right) \frac{a'}{b'} = \frac{a_1+a_2}{b} \frac{a'}{b'} = \frac{(a_1+a_2)a'}{bb'} = \frac{a_1 a' + a_2 a'}{bb'} = \frac{a_1}{b} \frac{a'}{b'} + \frac{a_2}{b} \frac{a'}{b'} = \frac{a_1}{b} \frac{a'}{b'} + \frac{a_2}{b} \frac{a'}{b'}$$

Нейтральный по умножению элемент — это $\frac{1}{1}$

$$\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1} \implies a \cdot 1 \neq b \cdot 0 \iff a \neq 0$$

Обратный по умножению элемент к $\frac{a}{b}$ — это $\frac{b}{a}$

Замечание. $R \xrightarrow{\varepsilon} Q(R), r \mapsto \frac{r}{1}$

То есть, считаем $R \subset Q(R)$

Определение 10.4. Пусть K — поле. Тогда поле $K(x) = Q(K[x])$ назовем *полем рациональных дробей (дробно-рациональных функций)* над полем K .

Предложение 10.4 (Несократимое представление). Пусть R — факториальное кольцо. Тогда любой $s \in Q(R)$ представимых в виде $s = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$. Такое представление единственно с точностью до умножения p и q на $\varepsilon \in R^*$.

Доказательство.

$$\text{Пусть } s = \frac{a}{b}, d = \gcd(a, b) \implies a = da', b = db' \implies s = \frac{a'}{b'}, (a', b') = 1$$

$$\text{Если } \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}, (p, q) = (p', q') = 1, \text{ то } pq' = p'q \implies \begin{cases} p \mid p'q \\ (p, q) = 1 \end{cases} \implies p \mid p', \text{ аналогично } p' \mid p$$

$$\text{То есть } p \text{ и } p' \text{ ассоциативны} \implies p' = \varepsilon p, \varepsilon \in R^*$$

$$pq' = \varepsilon pq \implies q' = \varepsilon q$$

Лемма 10.1. Пусть $s \in K(x)$, $s = \frac{p}{q}$, $p, q \in K[x]$

Тогда $\deg p - \deg q$ — инвариант s . (то есть не зависит от выбора представления в виде p и q)

Доказательство.

$$\text{Если } \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}, \text{ то } pq' = p'q, \text{ а значит } \deg p + \deg q' = \deg p' + \deg q \implies \deg p - \deg q = \deg p' - \deg q'$$

$$\text{Таким образом можно определить степень рациональной дроби } \deg s = \deg \frac{p}{q} = \deg p - \deg q$$

Определение 10.5. $s \in K(x)$ называется правильной дробью, если $\deg s < 0$

В частности 0 — правильная дробь

Замечание. Очевидно сумма и произведение правильных дробей — правильная дробь

Лемма 10.2. Любая рациональная дробь однозначно представляется в виде суммы многочленов и правильной дроби.

Доказательство.

«Существование»:

Пусть $s = \frac{p}{q}$, поделим на p на q , получается:

$$p = q \cdot t + r, \text{ где } r = 0 \text{ или } \deg r < \deg q \implies \frac{p}{q} = t + \frac{r}{q}, \quad t \in K[x], \text{ где } \frac{r}{q} \text{ — правильная дробь}$$

«Единственность»:

$$t + \frac{r}{q} = t_1 + \frac{r_1}{q_1}, \quad t_1 \in K[x], \text{ где } \frac{r_1}{q_1} \text{ — правильная дробь}$$

$$t - t_1 = \frac{r_1}{q_1} - \frac{r}{q} \text{ — правильная дробь}$$

$$t - t_1 = \frac{t - t_1}{1} = \frac{r_1}{q_1} - \frac{r}{q} \implies \deg\left(\frac{r_1}{q_1} - \frac{r}{q}\right) = \deg(t - t_1) < 0 \implies t - t_1 = 0 = \frac{r_1}{q_1} - \frac{r}{q}$$

Лемма 10.3. Пусть $(f, g) = 1$. Тогда любую дробь со знаменателем fg можно представить как сумму дробей со знаменателем f и g .

Доказательство. $1 = cf + dg$ для некоторых $c, d \in K[x]$

$$\frac{a}{fg} = \frac{a(cd+dg)}{fg} = \frac{acf}{fg} + \frac{adg}{fg} = \frac{ac}{g} + \frac{ad}{f}$$

Определение 10.6. Дробь s называется *примарной* (*p -примарной*), если $s = \frac{a}{p^n}$, p — неприводимый многочлен, $n \in \mathbb{N}$

Предложение 10.5. Любую правильную дробь можно однозначно представить в виде суммы нескольких отличных от 0 правильных p -примарных дробей, где p — различные унитарные неприводимые многочлены.

Доказательство.

«Существование»:

Запишем значение s в виде $p_1^{m_1} \dots p_t^{m_t}$, где p_i — унитарные неприводимые многочлены

$$\text{По лемме } s = \frac{\dots}{p_1^{m_1}} + \frac{\dots}{p_t^{m_t}} = \frac{a_1}{p_1^{m_1}} + \dots + \frac{a_t}{p_t^{m_t}}$$

Перепишем это в виде суммы многочлена и правильных дробей, с тем же знаменателем, получим:

$$s = f + \frac{b_1}{p_1^{m_1}} + \dots + \frac{b_t}{p_t^{m_t}}, \quad f \in K[x], \quad \frac{b_j}{p_j^{m_j}} \text{ — правильная дробь}$$

$$\implies f = s - \frac{b_1}{p_1^{m_1}} - \dots - \frac{b_t}{p_t^{m_t}}, \text{ где } \frac{f}{1} \text{ — правильная дробь}$$

$$\implies \deg f < 0 \implies f = 0$$

«Единственность»:

Пусть у S есть 2 различных таких разложения

Вычитаем из первого разложения второе, получим:

$$\frac{c_1}{p_1^{n_1}} + \dots + \frac{c_l}{p_l^{n_l}} = 0, \quad p_i \text{ — унитарные неприводимые многочлены}$$

$$c_1, \dots, c_l \neq 0$$

Можно считать все эти дроби несократимыми.

$$\implies \frac{c_1}{p_1^{n_1}} + \dots + \frac{c_{l-1}}{p_{l-1}^{n_{l-1}}} = \frac{-c_l}{p_l^{n_l}}$$

Приведем к общему знаменателю левую часть и сократим дробь, тогда знаменатель полученной дроби будет делить $p_1^{n_1} \dots p_{l-1}^{n_{l-1}}$ и не будет ассоциирован с $p_l^{n_l}$, так как не может быть делителем p_l , противоречие.

Определение 10.7. Простейшей дробью называется дробь вида $\frac{a}{p^n}$, где p — неприводимый многочлен, $n \in \mathbb{N}$, $\deg a < \deg p$

Теорема 10.1. Любая ненулевая правильная дробь единственным образом представляется в виде суммы нескольких простейших дробей с различными знаменателями.

Доказательство.

«Существование»:

Достаточно разложить правильную примарную дробь $\frac{a}{p^n}$

$$a = r_m p^m + \dots + r_1 p + r_0, \deg r_i < \deg p, r_m \neq 0$$

$m < n$, так как $\deg a < \deg p$

$$\frac{a}{p^n} = \frac{r_m}{p^{n-m}} + \frac{r_{m-1}}{p^{n-m+1}} + \dots + \frac{r_1}{p^{n-1}} + \frac{r_0}{p^n} \text{ — искомое представление, если удалить нулевые слагаемые}$$

«Единственность»:

Пусть для s есть представления в виде суммы примарных. Обозначим C_p за сумму p -примарных дробей в этом представлении.

C_p — p -примарная правильная дробь

$$s = C_{p_1} + \dots + C_{p_t} \implies \text{все } C_p \text{ определены однозначно}$$

Пусть у C_p есть два разных разложения в сумму простейших дробей со степенями p в знаменателях.

$$\frac{r_n}{p^n} + \dots + \frac{r_1}{p^1} = \frac{s_n}{p^n} + \dots + \frac{s_1}{p^1}, \text{ где } n \text{ — максимальный показатель степени } p \text{ в знаменателях}$$

Пусть m — максимальный индекс, такой что $r_m \neq s_m$, некоторые r_i и s_i могут быть нулевыми

$$\frac{r_m - s_m}{p^m} + \dots + \frac{r_1 - s_1}{p^1} = 0$$

$$\implies \frac{r_m - s_m}{p} = -(r_{m-1} - s_{m-1}) - p(r_{m-2} - s_{m-2}) - \dots \in K[X]$$

Противоречие, слева дробь, а справа многочлен.

11 Интерполяция

Теорема 11.1. Пусть K — поле, $n \in \mathbb{N} : x_1, x_2, \dots, x_n \in K$, различные между собой. $y_1, y_2, \dots, y_n \in K$. Тогда $\exists! f \in K[x] : \deg f \leq n - 1$ и $f(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$.

Доказательство.

«Единственность»:

Предположим, что существует два многочлена $f, g \in K[x], \deg f \leq n - 1, \deg g \leq n - 1 : f(x_i) = g(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$

$$\exists h = f - g, \deg h \leq n - 1, h(x_i) = 0, i = 1, \dots, n$$

Предположим, $h \neq 0 \implies$ у $h \leq n - 1$ корней, но такого не может быть.

«Существование»:

Формула Лагранжа

Решим интерполяционную задачу в специальном случае, когда $y_1 = 1, y_2 = \dots = y_n = 0$.

Найдем соответствующий многочлен f_1 .

x_1, \dots, x_n — корни многочлена $f_1 \implies (x - x_2) \mid f_1, \dots, (x - x_n) \mid f_1 \implies$

$\underbrace{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}_{\text{степени } n-1} \mid f_1 \implies f_1 = c(x - x_2) \dots (x - x_n), c \in K$

$$f_1(x_1) = 1 \iff c(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n) = 1 \implies c = \frac{1}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$$

Получился многочлен $f_1 = \frac{(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$

Аналогичная задача с $y_i = 1, \forall_{j \neq i} y_j = 0$ имеет решение:

$$f_i = \frac{(x - x_1) \dots \widehat{(x - x_i)} \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \dots \widehat{(x_i - x_i)} \dots (x_i - x_n)} = \frac{(x - x_1) \dots \widehat{(x - x_i)} \dots (x - x_n)}{F'(x_i)}$$

Рассмотрим $f = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n$, y_1, \dots, y_n теперь произвольные.

$$\deg \leq \max(\deg f_1, \dots, \deg f_n) = n - 1$$

Получилась такая формула $f(x_i) = y_1 \underbrace{f_1(x_i)}_0 + y_2 \underbrace{f_2(x_i)}_0 + \dots + y_i \underbrace{f_i(x_i)}_1 + \dots + y_n \underbrace{f_n(x_i)}_0 = y_i$

Замечание. Про связь с производной

$$F = (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$F' = \sum_{i=1}^n (x - x_1) \dots \widehat{(x - x_i)} \dots (x - x_n)$$

$$F'(x_j) = \sum_{i=1}^n (x_j - x_1) \dots \widehat{(x_j - x_i)} \dots (x_j - x_n) = (x_j - x_1) \dots \widehat{(x_j - x_j)} \dots (x_j - x_n)$$

Метод Ньютона

Рассмотрим интерполяционную задачу и предположим, что мы уже нашли $f_{(n-1)} \in K[x]$, такой что $f_{(n-1)}$ решение интерполяционной задачи $(x_1, \dots, x_{n-1}; y_1, \dots, y_{n-1})$, то есть

$$\deg f_{(n-1)} \leq n - 2 \text{ и } f_{(n-1)}(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n - 1$$

Пусть f решение интерполяционной задачи

$$f = f_{(n-1)} + g, g = ?$$

$$f(x_i) = y_i = f_{(n-1)}(x_i), i = 1, \dots, n - 1$$

$$g = f - f_{(n-1)}, g(x_1) = \dots = g(x_{n-1}) = 0$$

$$\deg g \leq n - 1 \implies g = c(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$g(x_n) = f(x_n) - f_{(n-1)}(x_n) = y_n - f_{(n-1)}(x_n) \implies \text{отсюда находится } c$$

4 Линейная алгебра

1 Матрицы

Определение 1.1. R — кольцо, $m, n \in \mathbb{N}$

Матрица $m \times n$ над кольцом R — прямоугольная таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{ij} \in R$$

Есть краткая запись $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} = (a_{ij})$

Определение 1.2. Множество матриц $m \times n$ над кольцом R обозначается как $M_{m,n}(R)$

Так же обозначают, как: $R^{m \times n}$, $M(m, n, R)$, $M_{m \times n}(R)$

Пусть $A, B \in M_{m,n}(R)$ — матрицы. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

Их суммой называется матрица $C = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$, $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(R)$

Их произведением называется матрица $C = (c_{ij}) \in M_{m,p}(R)$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$

Пусть $c \in R$, $A \in M_{m,n}(R)$

Тогда $c \cdot A = (c \cdot a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$

Замечание. По умолчанию R — коммутативное кольцо

Определение 1.3. Транспонированная матрица $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ — матрица $B = (b_{ij}) \in M_{n,m}(R)$, где $b_{ij} = a_{ji}$

Обозначается как A^T

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Определение 1.4. Матрица $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ — квадратная, если $m = n$

Обозначается как $A \in M_n(R)$

Теорема 1.1 (Свойства операций над матрицами).

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $0 = (0)$, тогда $A + 0 = 0 + A = A$
3. Для любой A есть $-A$, такая что $A + (-A) = (-A) + A = 0$
4. $A + B = B + A$

5. $(AB)C = A(BC)$, нужно чтобы $A \in M_{m,n}(R)$, $B \in M_{n,p}(R)$, $C \in M_{p,q}(R)$

Обе матрицы принадлежат $M_{m,q}(R)$

6. $A(B + C) = AB + AC$

7. $(B + C)A = BA + CA$

8. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda, \mu \in R$

9. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $\lambda \in R$

10. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$, $\lambda \in R$

11. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$, $\lambda, \mu \in R$

12. $(A + B)^T = A^T + B^T$

13. $(AB)^T = B^T A^T$

Определение 1.5. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Единичной матрицей порядка n называется:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(R)$$

Как кратко обозначить: $E_n = (\delta_{ij})$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера

Предложение 1.1. Пусть $A \in M_{m,n}(R)$.

Тогда $E_m A = A E_n = A$

Доказательство.

$$E_m A = (b_{ij}), \quad A = (a_{ij})$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$$

То есть $E_m A = A$

$$E_n A^T = A^T \implies (E_n A^T)^T = (A^T)^T \implies (A^T)^T E_n^T = (A^T)^T \implies A E_n = A$$

Следствие. $M_n(R)$ — кольцо, где E_n — нейтральный элемент по умножению

Называют кольцом квадратных матриц порядка n .

Замечание. Кольцо не обязательно коммутативное при $n \geq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \neq B$$

Замечание. $M_1(R) \cong R$

Определение 1.6. $GL_n(R) = M_n(R)^* = \{A \in M_n(R) \mid \exists B \in M_n(R), AB = BA = E_n\}$

Такая B единственная и называется обратной к A , обозначается A^{-1}

Предложение 1.2.

1. $E_n \in GL_n(R), E_n^{-1} = E_n$
2. $A_1, \dots, A_k \in GL_n(R) \implies \prod_{i=1}^k A_i \in GL_n(R), (A_1 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_1^{-1}$
3. $A \in GL_n(R) \implies A^T \in GL_n(R), (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Доказательство.

1. $E_n E_n = E_n E_n = E_n$
2. $(A_1 \dots A_k)(A_k^{-1} \dots A_1^{-1}) = A_1 \dots A_{k-1}(A_k A_k^{-1}) \dots A_1^{-1} = A_1 \dots A_{k-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_1^{-1} = A_1 A_1^{-1} = E_n$
 $(A_k^{-1} \dots A_1^{-1})(A_1 \dots A_k) = \dots = A_k^{-1} A_k = E_n$
3. $(A^T \cdot (A^T)^{-1}) = (A^{-1} \cdot A)^T = E_n^T = E_n$
 $((A^T)^{-1} \cdot A^T) = (A \cdot A^{-1})^T = E_n^T = E_n$

Определение 1.7. Матричная единица — это матрица, где все элементы нулевые, кроме одного, который равен единице.

Обозначается как e_{ij} .

Замечание. $A = (a_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij} e_{ij}$

2 Элементарные преобразования и элементарные матрицы

Определение 2.1. Элементарное преобразование 1 типа:

К i строке прибавить j строку, умноженную на $\lambda \in R$. Обозначается $T_{ij}(\lambda)$

Определение 2.2. Элементарное преобразование 2 типа:

Поменять местами i и j строки. Обозначается S_{ij}

Определение 2.3. Элементарное преобразование 3 типа:

Умножить i строку на $\lambda \in R, \lambda \neq 0$. Обозначается $D_{ij}(\lambda)$

Замечание. Аналогичные преобразования можно делать с столбцами.

Определение 2.4. Матрица $A \in M_{m,n}(K)$ называется ступенчатой, если существует $0 \leq r \leq m$ и числа $j_1, \dots, j_r : 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$ такие, что:

1. $a_{kj_k} \neq 0, k = 1, \dots, r$
2. $a_{kj} = 0, k = 1, \dots, r, j < j_k$

3. $a_{kj} = 0, \forall j, k : k > r$

Пример.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Предложение 2.1. Любую матрицу можно превратить в ступенчатую с помощью преобразования строк 1 и 2 типа.

Доказательство. (короче Гаусса пишем и работает)

$$A = a(i, j) \in M_{m,n}(k)$$

Индукция по m .

База: $m = 1$. A ступенчатая по определению.

Переход: $m > 1$:

Если $A = 0$, то A ступенчатая по определению.

j_1 — номер первого ненулевого столбца.

$$\exists i : a_{ij_1} \neq 0$$

$i \neq 1 \implies$ применим S_{1i}

Таким образом можно считать $a_{1j_1} \neq 0$.

$$\text{Применим } T_{21} \left(-\frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}} \right), T_{31} \left(-\frac{a_{3j_1}}{a_{1j_1}} \right), \dots, T_{m1} \left(-\frac{a_{mj_1}}{a_{1j_1}} \right)$$

$$\text{Получим } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

По индукции A' ступенчатая.

Определение 2.5. Окаймленная единичная матрица — матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 2.1. Пусть $A \in M_{m,n}(K)$. Тогда ее можно преобразовать в окаймленную единичную матрицу с помощью преобразования строк и столбцов.

Доказательство.

Сделаем A ступенчатой.

С помощью третьего преобразования сделаем все ведущие элементы равными 1.

Превратим ступеньки разной длины в единичные. (меняя столбцы)

Применим $D_1(a_{11}^{-1}), \dots, D_r(a_{rr}^{-1})$.

Потом будем от верхней строки к нижней превращать их в строки с одной 1 и нулями. (вычитая строки и столбцы)

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{вычесть столбцы}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Определение 2.6. Элементарная матрица:

«Первого типа»:

Пусть $1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \lambda \in K$

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E_n + \lambda e_{ij}$$

«Второго типа»:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E_n - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}$$

«Третьего типа»:

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E_n + (\lambda - 1)e_{ii}$$

Предложение 2.2. Пусть $A \in M_{m,n}(K)$. Тогда при элементарных преобразованиях строк матрицы A получаются матрицы $T_{ij}A, S_{ij}A, D_iA$.

Доказательство.

1. «Первого типа»:

Поскольку матрица $T_{ij}(\lambda)$ отличается от E_n только в i -ой строке, то произведение тоже. В i -ой строке $T_{ij}(\lambda)$ только две позиции отличаются от нуля, это i и j . При умножении получаем следующее:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{jk} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = a_{ik} + \lambda a_{jk}$$

Такое происходит в каждом столбце матрицы, поэтому получаем, что i -строка матрицы $T_{ij}A$ равна $(a_{i1} + \lambda a_{j1} \quad \dots \quad a_{ik} + \lambda a_{jk} \quad \dots \quad a_{in} + \lambda a_{jn})$

2. «Второго типа»:

Поскольку матрица S_{ij} отличается от E_n только в i -ой и j -ой строках, то произведение тоже. i -ая строка равна произведению $(0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0)$ на матрицу A , то есть на её j -тую строку. Аналогично с j -ой строкой.

3. «Третьего типа»:

Поскольку матрица $D_i(\lambda)$ отличается от E_n только в i -ой строке, то произведение тоже. i -ая строка равна произведению $(1 \quad \dots \quad \lambda \quad \dots \quad 1)$ на матрицу A , то есть на её i -тую строку. Что равно произведению i -ой строки на λ .

Следствие. Аналогично, преобразования столбцов можно записать в виде $AT_{ji}(\lambda)$, AS_{ji} , $AD_j(\lambda)$.

Доказательство. $A \longrightarrow A'$ — результат прибавления к i столбцу j -го с коэффициентом λ .

$$\implies (A')^T = T_{ij}(\lambda)A^T$$

$$\implies A' = (T_{ij}(\lambda)A^T)^T = (A^T)^T(T_{ij}(\lambda))^T = AT_{ji}(\lambda)$$

Аналогично: элементарные преобразования столбцов 2 и 3 типов сводятся к умножению справа на S_{ij} и $D_i(\lambda)$ соответственно.

Следствие.

1. $T_{ij}(-\lambda)T_{ij}(\lambda) = E_n$
2. $S_{ij}S_{ij} = E_n$
3. $D_i(\lambda)D_i(\lambda^{-1}) = E_n$

Следствие. $T_{ij}(\lambda)$, S_{ij} , $D_i(\lambda) \in GL_n(k)$ — все они обратимы.

Предложение 2.3. (PDQ — разложение матриц)

Пусть $A \in M_{m,n}(k)$. Тогда существуют элементарные матрицы $P_1, \dots, P_k \in GL_m(k)$, $Q_1, \dots, Q_l \in GL_n(k)$, окаймленная единичная матрица $D \in M_{m,n}(k)$, такие, что $A = P_1 \dots P_k D Q_1 \dots Q_l$.

Доказательство. Существуют элементарные преобразования строк и столбцов, превращающие A в окаймленную единичную матрицу D .

$$\implies D = \underbrace{u_k \dots u_1}_{\text{обратимы}} A \underbrace{v_1 \dots v_l}_{\text{обратимы}}, \text{ где } u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l \text{ — элементарные матрицы}$$

$$\Rightarrow A = u_1^{-1} \dots u_k^{-1} D v_l^{-1} \dots v_1^{-1}$$

Следствие. Пусть $A \in M_n(K)$? Тогда условия эквивалентны:

1. $A \in GL_n(K)$
2. $A = P_1 \dots P_m$, где P_1, \dots, P_m — элементарные матрицы

Доказательство.

«2 \Rightarrow 1»: так как все $P_i \in GL_n(k)$

«1 \Rightarrow 2»:

$$A = P_1 \dots P_k D Q_1 \dots Q_l, \quad D = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = P_k^{-1} \dots P_1^{-1} A Q_l^{-1} \dots Q_1^{-1} \Rightarrow D \in GL_n(K)$$

В D есть нулевая строка, значит $\forall C \in M_n(k)$: в DC есть нулевая строка $\Rightarrow DC \neq E_n$, но ведь $D \in GL_n(K)$, значит $D = E_n \Rightarrow A = P_1 \dots P_k Q_1 \dots Q_l$, где все матрицы элементарны.

3 Перестановки

Определение 3.1. M — множество. Перестановкой M называется биекция на себя.

$$S(M) = \{\text{перестановка } M\}$$

$$S(M) \times S(M) \rightarrow S(M)$$

$$(g, f) \mapsto g \circ f$$

Предложение 3.1. $(S(M), \circ)$ — группа.

Доказательство.

1. Ассоциативность очевидна.
2. id_M — нейтральный элемент.
3. $f \in S(M) \Rightarrow f^{-1} \in S(M)$ — обратный элемент.

Определение 3.2. S_n — симметрическая группа степени n (группа перестановок n -элементного множества)

Замечание. $|S_n| = n!$

Пример. $S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$

Определение 3.3. Циклом (i_1, i_2, \dots, i_k) называется $\sigma \in S_n$ такая что

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1,$$

а так же $\sigma(i_j) = i_j$ для всех $j \notin \{1, 2, \dots, k\}$.

$k \geq 2$ — длина цикла.

Определение 3.4. Циклы (i_1, i_2, \dots, i_k) и (j_1, j_2, \dots, j_l) называются *независимыми*, если $\forall r, s : i_r \neq j_s$

Предложение 3.2. Любая перестановка является произведением нескольких попарно независимых циклов.

Доказательство. $i, \sigma(i), \sigma(\sigma(i)), \dots$ все различны, так как σ — биекция, значит это — независимый цикл.

Определение 3.5. Цикл длины 2 называется *транспозицией*.

Определение 3.6. Транспозиция $(i, i+1)$ называется *элементарной транспозицией*.

Предложение 3.3. Любой цикл (i_1, i_2, \dots, i_n) раскладывается в произведение транспозиций $(i_1, i_2) \cdot (i_2, i_3) \cdot \dots \cdot (i_{n-1}, i_n)$

Упражнение. Любая перестановка раскладывается в произведение элементарных транспозиций.

Определение 3.7. (i, j) , $i < j$ — *инверсия*, если $\sigma(i) > \sigma(j)$

Определение 3.8. $\text{Inv}(\sigma)$ — *число инверсий* перестановки σ

Определение 3.9. *Четность перестановки* — четность числа инверсий в ней.

Определение 3.10. *Знак перестановки* — $\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка четная} \\ -1, & \text{если перестановка нечетная} \end{cases}$

Лемма 3.1. Если перестановку умножить справа на транспозицию, то ее знак поменяется на противоположный, то есть $\text{sgn}(\sigma \circ (i, j)) = -\text{sgn}(\sigma)$.

Доказательство. Четность числа инверсий с участием $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ не изменится, так как все элементы между i и j поменяют число инверсий четное число раз. Соответственно, изменится лишь инверсия между i и j .

Следствие. Четность перестановки равна четности количества транспозиций в ее разложении.

Доказательство. $\text{sgn}((i_1, j_1)(i_2, j_2) \dots (i_k, j_k)) = (-1)^k$

Следствие. Пусть $\sigma, \tau \in S_n$, тогда:

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau)$$

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$$

Определение 3.11. Множество четных перестановок $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\}$ — подгруппа S_n

Предложение 3.4. Пусть $n \geq 2$, тогда $|A_n| = \frac{n!}{2}$

Доказательство. Рассмотрим

$$\varphi : A_n \rightarrow S_n \setminus A_n$$

$\sigma \mapsto \sigma \circ (1, 2)$ — из четной перестановки получаем нечетную

$$\psi : S_n \setminus A_n \rightarrow A_n$$

$\sigma \mapsto \sigma \circ (1, 2)$ — из нечетной перестановки получаем четную

$$\varphi = \psi^{-1} \implies \varphi \text{ — биекция} \implies |A_n| = |S_n \setminus A_n| = \frac{n!}{2}$$

4 Определители

Мы знаем, что матрицы тесно связаны с системами линейных уравнений и мы хотим знать, когда системы разрешимы единственным образом, когда не имеют решений, и когда имеют бесконечно много решений.

Определение 4.1. Системы линейных уравнений подразделяются на:

- *Несовместные* — не имеют решений.
- *Совместные* — имеют решения.
 - *Определенные* — имеют единственное решение.
 - *Неопределенные* — имеют бесконечно много решений.

Определение 4.2. $A \in M_n(R)$, R — коммутативное кольцо.

Определителем матрицы A называется:

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

Замечание. *Мотивация*: Определитель это функция $\det : M_n(K) \mapsto K$, такая что:

$\det(A) \neq 0 \iff Ax = b$ — совместная определенная для всех b .

Предложение 4.1. $\det(A) = \det(A^T)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |A^T| &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma^{-1}(i)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma^{-1}(i)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = |A| \end{aligned}$$