

# Дискретная математика

Лектор: Пузынина Светлана Александровна

# Содержание

<b>Булевы функции</b>	<b>1</b>
1    Определение . . . . .	1
2    Представление булевых функций . . . . .	1
3    Основные эквивалентности . . . . .	2
4    Формулы . . . . .	2
5    Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) . . . . .	2
6    Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) . . . . .	3
7    Многочлен Жегалкина . . . . .	3
8    Замкнутые классы . . . . .	4
9    Двойственные функции . . . . .	5
10    Монотонные функции . . . . .	5
11    Линейные функции . . . . .	5
12    Критерий полноты системы функций . . . . .	6
<b>Комбинаторика</b>	<b>8</b>
13    Выборки . . . . .	8
14    Число сочетаний . . . . .	9
15    Факториал . . . . .	10
16    Числа Каталана . . . . .	10
<b>Введение в графы</b>	<b>14</b>
17    Граф . . . . .	14
18    Основные определения . . . . .	17
19    Эйлеровы циклы и пути . . . . .	19
20    Гамильтоновы циклы и пути . . . . .	21
<b>Деревья</b>	<b>23</b>
21    Дерево . . . . .	23
22    Мосты . . . . .	23
23    Теорема о деревьях . . . . .	24
24    Остовное дерево . . . . .	25
25    Изоморфные графы . . . . .	26
26    Плоский граф . . . . .	26
27    Формула Эйлера . . . . .	27
28    Критерий планарности . . . . .	29
29    Теорема о художественной галерее . . . . .	30
30    Теорема Фари . . . . .	31
<b>Раскраски графов</b>	<b>34</b>
31    Раскраски графов . . . . .	34
32    Хроматическое число графа . . . . .	34
33    Теорема Брукса . . . . .	35
<b>Паросочетания</b>	<b>38</b>
34    Паросочетания в двудольном графе . . . . .	38
35    Паросочетания в графах общего вида . . . . .	39
36    Несовершенные паросочетания . . . . .	40
37    Теорема Петерсена . . . . .	41
38    Паросочетания с предпочтениями . . . . .	41
39    Связность и разделяющие множества . . . . .	44

40	Вершинное покрытие . . . . .	45
<b>Реберные раскраски</b>		<b>46</b>
41	Реберные раскраски . . . . .	46
<b>Теория Рамсея</b>		<b>50</b>
42	Теория Рамсея . . . . .	50
43	Числа Рамсея . . . . .	50
44	Оценки на числа Рамсея . . . . .	51
45	Следствия . . . . .	52
<b>Теорема Ван-дер-Вардена</b>		<b>55</b>
46	Теорема Ван-дер-Вардена . . . . .	55
47	Малые значения параметров и база индукции . . . . .	55
48	$VDW(3, 2)$ . . . . .	55
49	$VDW(3, 3)$ . . . . .	57
50	$VDW(4, 2)$ . . . . .	58
51	Доказательство теоремы . . . . .	59

# Булевы функции

## 1 Определение

**Определение 1.1.** Булева функция — функция вида  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

**Основные функции:**

- Конъюнкция (логическое "и")  $x \wedge y$   
 $x \wedge y = 1 \iff x = 1 \text{ и } y = 1$
- Дизъюнкция (логическое "или")  $x \vee y$   
 $x \vee y = 1 \iff x = 1 \text{ или } y = 1$
- Импликация (логическое "следует")  $x \rightarrow y$   
 $x \rightarrow y = 1 \iff x = 0 \text{ или } y = 1$
- Симметрическая разность (хор или сумма по модулю 2)  $x \oplus y$   
 $x \oplus y = 1 \iff x \neq y$
- Отрицание  $\neg x$   
 $\neg x = 1 \iff x = 0$

## 2 Представление булевых функций

*Замечание.* Всего существует  $2^{2^n}$  булевых функций от  $n$  переменных.

**Таблица истинности:**

$x$	$\neg x$	$x$	$y$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \oplus y$
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0

**Вектор истинности:**

Упорядочим все наборы в лексикографическом порядке, тогда  $i$ -й компоненте вектора сопоставим значение функции в  $i$ -м наборе.

**Примеры.**

- $x \wedge y = (0, 0, 0, 1)$
- $x \vee y = (0, 1, 1, 1)$
- $x \rightarrow y = (1, 1, 0, 1)$
- $x \oplus y = (0, 1, 1, 0)$

### 3 Основные эквивалентности

- $\neg\neg x \equiv x$
- $x \rightarrow y \equiv \neg x \vee y$
- $x \rightarrow y \equiv \neg y \rightarrow \neg x$
- $x \wedge y \equiv y \wedge x$  (коммутативность)
- $x \vee y \equiv y \vee x$  (коммутативность)
- $(x \wedge y) \wedge z \equiv x \wedge (y \wedge z)$  (ассоциативность)
- $(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z)$  (ассоциативность)
- $\neg(x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y$  (закон Моргана)
- $\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$  (закон Моргана)

### 4 Формулы

**Определение 4.1.** Базис  $\mathcal{F}$  — некоторое подмножество булевых функций.

**Определение 4.2.** Формула над базисом  $\mathcal{F}$  определяется по индукции:

База: любая функция  $f \in \mathcal{F}$  является формулой над  $\mathcal{F}$ .

Индукционный переход: Если  $f(x_1, \dots, x_n)$  - формула над базисом  $\mathcal{F}$ , а  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  - либо формулы над  $\mathcal{F}$ , либо переменные, то тогда  $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  - формула над базисом  $\mathcal{F}$ .

**Пример.**  $(x \vee y) \wedge x$  — формула над базисом  $\{\vee, \wedge\}$ .

### 5 Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)

**Предложение 5.1.**

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1 \\ \neg x, & \sigma = 0 \end{cases}$$

**Определение 5.1.** Простая конъюнкция — конъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причем все переменные встречаются не более одного раза.

**Определение 5.2.** Дизъюнктивная нормальная форма — представление булевой функции в виде дизъюнкции простых конъюнкций.

**Пример.**  $(x \wedge \neg y) \vee z$

**Определение 5.3.** Совершенная ДНФ — ДНФ, в любой конъюнкции которой участвуют все переменные.

## Построение СДНФ по таблице истинности

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} (x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n})$$

**Теорема 5.1.** Для любой булевой функции, не равной тождественно нулю, существует СДНФ ее задающая.

**Доказательство.**  $(x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}) = 1 \iff \forall_{i=1}^n x_i^{\sigma_i} = 1 \iff \forall_{i=1}^n x_i = \sigma_i$  по обозначению  $x^\sigma$ . Булева функция не равна 0  $\iff \exists (x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}) = 1 \iff$  для некоторого набора  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \forall_{i=1}^n x_i = \sigma_i \iff f(x_1, \dots, x_n) = 1$  по построению.

## 6 Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

**Определение 6.1.** Простая дизъюнкция — дизъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причем все переменные встречаются не более одного раза.

**Определение 6.2.** Конъюнктивная нормальная форма — представление булевой функции в виде конъюнкции простых дизъюнкций.

**Пример.**  $(x \vee \neg y) \wedge z$

**Определение 6.3.** Совершенная КНФ — КНФ, в любой конъюнкции которой участвуют все переменные.

## Построение СКНФ по таблице истинности

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=0} (x_1^{\neg \sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\neg \sigma_n})$$

## 7 Многочлен Жегалкина

**Определение 7.1.** Многочлен Жегалкина — сумма по модулю два конъюнкций переменных (также допускается слагаемое-единица) без повторения слагаемых, а также константа 0.

**Пример.**  $f(x, y, z) = 1 \oplus x \oplus (x \wedge y \wedge z)$

**Общий вид**

$$f(x_1, \dots, x_n) = a \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ k \in \{1, \dots, n\}}} a_{i_1 \dots i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$$

где  $a_i, a_{i_1 \dots i_k} \in \{0, 1\}$

**Замечание.** Зачастую константу 0 не считают полиномом Жегалкина, то есть в выражении допускаются только конъюнкции, сложения и константа 1.

**Теорема 7.1.** Для каждой функции существует единственное представление многочленом Жегалкина.

**Доказательство.**

*Существование:* Преобразуем ДНФ:

замена дизъюнкции:  $x \vee y = x \oplus y \oplus (x \wedge y)$

замена отрицаний:  $\neg x = x \oplus 1$

раскрытие скобок:  $(x \oplus y) \wedge z = (x \wedge z) \oplus (y \wedge z)$

сокращение одинаковых слагаемых:  $x \oplus x = 0$

*Единственность:* всего многочленов Жегалкина  $2^{2^n}$ ; функций столько же  $\implies$  представление единственно.

## 8 Замкнутые классы

**Определение 8.1.** Замыкание  $[\mathcal{F}]$  — множество булевых функций относительно суперпозиции — множество всех булевых функций, представимых формулой над  $\mathcal{F}$ .

**Примеры.**

$$[0] = 0,$$

$$[\neg x] = \{x, \neg x\},$$

$$[x \vee y] = \{x_1 \vee \dots \vee x_n \mid n > 1\}.$$

**Определение 8.2.** Замкнутый класс — класс булевых функций, равный своему замыканию.

**Определение 8.3.**  $T_0$  — класс функций, сохраняющих ноль:

$$T_0 = \{f \mid f(0, \dots, 0) = 0\}.$$

**Определение 8.4.**  $T_1$  — класс функций, сохраняющих единицу:

$$T_1 = \{f \mid f(1, \dots, 1) = 1\}.$$

**Примеры.**

- $\vee$  и  $\wedge$  сохраняют 0 и 1
- $\oplus$  сохраняет только 0
- $\rightarrow$  сохраняет только 1
- $\neg$  ничего не сохраняет

**Предложение 8.1.** Классы функций  $T_0$  и  $T_1$  замкнуты.

## 9 Двойственные функции

**Определение 9.1.** Двойственная функция к  $f$  —  $f^*(x_1, \dots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$ .

**Определение 9.2.** Самодвойственная функция — равная двойственной к себе.

**Примеры.**

- $\vee$  и  $\wedge$  двойственны друг другу
- $\neg$  самодвойственно

**Предложение 9.1.**  $S$  — класс самодвойственных функций

**Предложение 9.2.** Класс функций  $S$  замкнут.

## 10 Монотонные функции

**Определение 10.1.** Частичный порядок на множестве двоичных наборов  $(b_1, \dots, b_n) \leq (c_1, \dots, c_n)$ , если  $\forall_{i=1}^n b_i \leq c_i$

**Определение 10.2.** Монотонная функция — функция  $f$ , такая что  $f(\alpha) \leq f(\beta)$ ,  $\forall \alpha \leq \beta$ .

**Примеры.**

- $\vee$  и  $\wedge$  монотонны
- $\neg, \oplus, \rightarrow$  немонотонны

**Предложение 10.1.**  $M$  — класс монотонных функций

**Предложение 10.2.** Класс функций  $M$  замкнут.

## 11 Линейные функции

**Определение 11.1.** Линейная функция — функция, многочлен Жегалкина, которой не использует конъюнкций.

**Предложение 11.1.**  $L$  — класс линейных функций

$$L = \{x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_m} \oplus c \mid m \geq 0, 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n, c \in \{0, 1\}\}$$

**Примеры.**

- $\oplus, \neg$  линейны



- $\vee, \wedge$  нелинейны

**Предложение 11.2.** Класс функций  $L$  замкнут.

## 12 Критерий полноты системы функций

**Определение 12.1.** Полная система — множество булевых функций  $\mathcal{F}$ , где все булевы функции выразимы формулами над этим базисом.

**Теорема 12.1** (Пост, 1921). Множество булевых функций  $\mathcal{F}$  является полным тогда и только тогда, когда  $\mathcal{F}$  не содержится ни в одном из пяти классов  $T_0, T_1, S, M, L$ .

**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ ":

Если содержится, то его замыкание  $[\mathcal{F}]$  также содержится в этом классе. А значит система не полная.

" $\Leftarrow$ ":

Пусть не содержится, то есть есть функции  $f_0, f_1, f_S, f_M, f_L \in \mathcal{F}$ , где  $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_S \notin S, f_M \notin M, f_L \notin L$ . (Эти функции не обязательно различны)

*План доказательства:*

1. Из  $f_0, f_1$  выражается либо отрицание, или обе константы, или и то и другое.
2. Выразим отрицание и константы следующим образом:
  - 2.1 Если получилось отрицание, то из  $f_S$  выражаются константы.
  - 2.2 Если же вышли обе константы, то отрицание выражается из  $f_M$ .
3. Из  $f_L$  выражается конъюнкция.

Получив константу, отрицание и конъюнкцию можно выразить любую булеву функцию (например через ДНФ).

(1) Так как  $f_0 \notin T_0$ , то по определению  $T_0$  имеем  $f_0(0, \dots, 0) = 1$ .

1. Если при этом  $f_0(1, \dots, 1) = 1$ , то получена константа 1 в виде  $\varphi_1(x) = f_0(x, \dots, x) = 1$ .
2. Если же  $f_0(1, \dots, 1) = 0$ , то в таком виде получено отрицание,  $\bar{\varphi}(x) = \neg x = f_0(x, \dots, x)$ .

Аналогично, для  $f_1 \notin T_1$ : известно, что  $f_1(1, \dots, 1) = 0$ , и рассматривая значение  $f_1(0, \dots, 0)$ , получаем или константу 0, или отрицание.

(2.1) Пусть получено отрицание Для функции  $f_S \notin S$  известно, что существует набор  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , на котором

$$f_S(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \neq \neg f_S(\neg \sigma_1, \dots, \neg \sigma_n),$$

то есть

$$f_S(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f_S(\neg \sigma_1, \dots, \neg \sigma_n).$$

Тогда формула  $f_S(x^{\sigma_1}, \dots, x^{\sigma_n})$ , построенная из  $f_S$  и из отрицания, выражает одну из констант. С помощью отрицания выражается вторая константа.

(2.2) Пусть получены обе константы.

Для функции  $f_M \notin M$  существует два набора  $\alpha$  и  $\beta$ , для которых  $\alpha < \beta$ , но  $f_M(\alpha) = 1$  и  $f_M(\beta) = 0$ .

Пусть  $i_1, \dots, i_k$  — номера всех координат, в которых  $\alpha$  и  $\beta$  отличаются друг от друга. Соответственно, в  $\alpha$  там 0, в  $\beta$  — 1, а остальные координаты общие,  $\sigma_i$ , где  $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ :

$$f_M(\sigma_1, \dots, \sigma_{i_1-1}, 0, \sigma_{i_1+1}, \dots, \sigma_{i_k-1}, 0, \sigma_{i_k+1} \dots \sigma_n) = 1,$$

$$f_M(\sigma_1, \dots, \sigma_{i_1-1}, 1, \sigma_{i_1+1}, \dots, \sigma_{i_k-1}, 1, \sigma_{i_k+1} \dots \sigma_n) = 0.$$

Чтобы получить отрицание, подставим:

- константы вместо всех общих координат
- одну и ту же переменную  $x$  во все изменяющиеся координаты:

$$\neg x = f_M(\sigma_1, \dots, \sigma_{i_1-1}, x, \sigma_{i_1+1}, \dots, \sigma_{i_k-1}, x, \sigma_{i_k+1} \dots \sigma_n).$$

(3) Так как функция  $f_L$  нелинейна, ее многочлен Жегалкина содержит хотя бы одну конъюнкцию.

Пусть переменные  $x$  и  $y$  входят в состав этой конъюнкции.

Тогда функцию можно представить в виде  $f_L(x, y, z, \dots) = xyP(z, \dots) \oplus xQ(z, \dots) \oplus yR(z, \dots) \oplus S(z, \dots)$ , где  $P, Q, R, S$  — многочлены Жегалкина ( $Q, R, S$  могут отсутствовать).

Так как  $P$  — не константа 0, она равна единице на некотором наборе  $\alpha$ .

Тогда  $g(x, y) = f_L(x, y, \alpha) = xyP(\alpha) \oplus xQ(\alpha) \oplus yR(\alpha) \oplus S(\alpha) = xy \oplus xb \oplus yc \oplus d$ , где  $b, c, d \in \{0, 1\}$ .

Подстановкой  $g(x \oplus c, y \oplus b)$  получается следующая функция:

$$h(x, y) = g(x \oplus c, y \oplus b) = (x \oplus c)(y \oplus b) \oplus (x \oplus c)b \oplus (y \oplus b)c \oplus d = xy \oplus bc \oplus d.$$

В зависимости от значения константного слагаемого  $bc \oplus d$ , получилась или конъюнкция или ее отрицание. В последнем случае можно применить к ней ранее выраженную операцию отрицания.

# Комбинаторика

## 13 Выборки

**Определение 13.1.** Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  — множество из  $n$  элементов. Набор элементов  $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ ,  $r \geq 1$  называется выборкой объема  $r$  из  $n$  элементов или  $(n, r)$ -выборкой.

Выборки бывают:

- упорядоченные(порядок элементов важен) и неупорядоченные(порядок элементов не важен);
- с повторениями и без повторений.

### Правило суммы и правило произведения

Типичная задача: число возможных выборок с определенными свойствами.

Полезны два правила:

- Правило суммы: если объект  $A$  может быть выбран  $m$  способами, а другой объект  $B$  — другими  $n$  способами, то выбор  $A$  или  $B$  можно осуществить  $m + n$  способами.
- Правило произведения: если объект  $A$  может быть выбран  $m$  способами, и после каждого из таких выборов объект  $B$  в свою очередь может быть выбран  $n$  способами, то выбор пары  $A$  и  $B$  можно осуществить  $mn$  способами.

### Выборки $k$ элементов из $n$

1. Упорядоченная с повторениями:

$$n^k$$

2. Упорядоченная без повторений (размещения):

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \dots (n-k+1)$$

3. Неупорядоченная без повторений (сочетания):

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. Неупорядоченная с повторениями (сочетания с повторениями):

$$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

**Доказательство.** Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Неупорядоченная выборка с повторениями из  $k$  элементов из  $A$  задается вектором чисел  $(x_1, \dots, x_n)$ , где  $x_i$  — число повторений  $a_i$  и

$$x_1 + \dots + x_n = k$$

То есть число таких выборок равно числу решений этого уравнения в целых неотрицательных числах.

Закодируем решение бинарным вектором:

$$\underbrace{11 \dots 1}_x 0 \underbrace{11 \dots 1}_x 0 \dots 0 \underbrace{11 \dots 1}_x$$

То есть получаем вектор длины  $(n + k - 1)$ , содержащий ровно  $k$  единиц (и ровно  $(n - 1)$  нулей).

Как найти число решений уравнения

$$x_1 + \dots + x_n = k$$

в целых положительных числах ( $x_i > 0, k \geq n$ )?

Положим  $y_i = x_i - 1$  и найдем число решений

$$y_1 + \dots + y_n = k - n$$

в целых неотрицательных числах ( $y_i \geq 0$ ):

$$\hat{C}_n^{k-n} = C_{n+k-n-1}^{k-n} = C_{k-1}^{n-1}.$$

## 14 Число сочетаний

**Теорема 14.1.**

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)!((n-k)+k)}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k. \end{aligned}$$

**Треугольник Паскаля**

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & & \dots & & & & \\ & & & & C_{n-1}^k & & C_{n-1}^{k-1} & & & \\ & & & & & C_n^k & & & & \end{array}$$

## Бином Ньютона

### Теорема 14.2.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

**Доказательство.** Член  $a^k b^{n-k}$  участвует в разложении  $(a+b)^n$  столько раз, сколько есть способов выбрать  $a$  в  $k$  множителях из  $n$  (и, соответственно,  $b$  в  $n-k$  множителях из  $n$ ) — а это  $C_n^k$ .

## 15 Факториал

**Лемма 15.1.** (грубые оценки для  $n!$ )

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < n^n$$

**Доказательство.** Верхняя оценка очевидна.

Докажем нижнюю оценку по индукции.

База:  $\left(\frac{1}{e} < 1\right)$ , верно.

**Переход:** Пусть верно для  $n$ :  $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$ .

Покажем для  $(n+1)$ .

$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1) \left(\frac{n}{e}\right)^n$  (по предположению индукции).

Надо показать:  $(n+1) \left(\frac{n}{e}\right)^n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$ .

Это верно тогда и только тогда, когда  $en^n > (n+1)^n$ .

что в свою очередь равносильно  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ , что верно.

**Теорема 15.1.** (формула Стирлинга)

$$n! = (1 + o(1)) \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**Доказательство.** в курсе матанализа.

## 16 Числа Каталана

**Правильная скобочная последовательность (ПСП)**

**Определение 16.1.** Язык строк над  $\Sigma = \{ (, ) \}$

Определение по индукции:

- пустая строка  $\varepsilon$  — ПСП;
- если  $w$  — ПСП, то  $(w)$  — ПСП;
- если  $w, u$  — ПСП, то  $wu$  — ПСП.

Множество ПСП называется языком Дика:

$\varepsilon, (), (()), ()(), ((())), ()(), (((()()))), \dots$

Сколько существует ПСП с  $n$  парами скобок (= сколько слов длины  $2n$  в языке Дика)?

Это задается последовательностью чисел Каталана  $C_n$ .

## Реккурентная формула для чисел Каталана

**Теорема 16.1.** (рекуррентная формула)

$$C_0 = 1; \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$$

**Доказательство.** Пусть  $w$  — произвольная ПСП длины  $2n$ .

Она начинается с открывающей скобки. Найдем парную ей закрывающую скобку и представим последовательность  $w$  в виде:  $w = (u)v$ , где  $u$  и  $v$  ПСП.

Если длина  $u$  равна  $2k$ , то  $u$  можно составить  $D_k$  способами.

Тогда длина  $v$  равна  $2(n - k - 1)$  и  $v$  можно составить  $D_{n-k-1}$  способами.

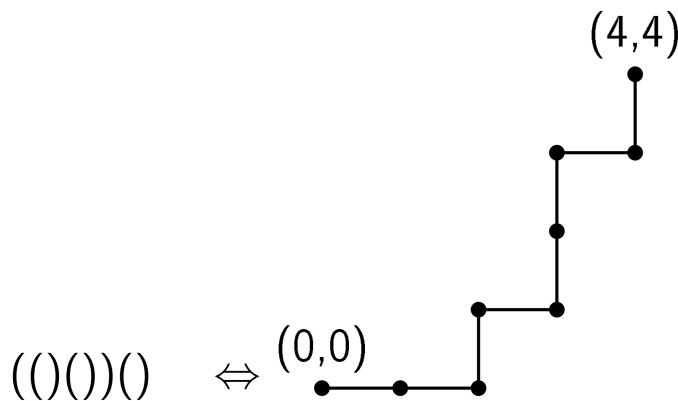
Комбинация любого способа составить  $u$  с любым способом составить  $v$  даст новую последовательность  $w$ .

Суммируя по  $k$  от 0 до  $n - 1$  получаем рекуррентную формулу.

## Числа Каталана через монотонные пути

ПСП длины  $2n$  поставим в соответствие путь в квадрате  $[0, n] \times [0, n]$  из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, n)$ .

Открывающей скобке сопоставим горизонтальный отрезок длины 1, а закрывающей — вертикальный отрезок длины 1.



Если путь сопоставлен ПСП, то ни одна его точка не может лежать выше главной диагонали квадрата («правильный путь»). Обратно, такому пути сопоставляется ПСП.

## Аналитическая формула для чисел Каталана

**Теорема 16.2.**

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

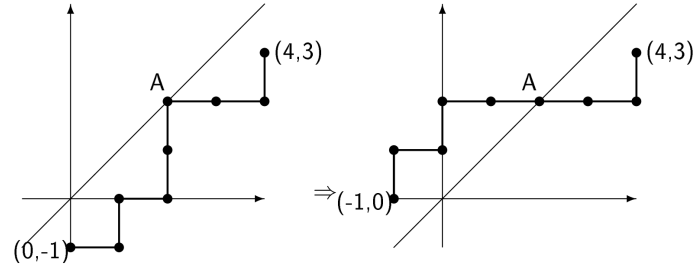
**Доказательство.**

Сместим правильный путь на 1 клетку вниз. Теперь правильный путь идет из  $(0, -1)$  в  $(n, n - 1)$  и не имеет общих точек с прямой  $y = x$ .

Число правильных путей = общее число путей - число неправильных.

Общее число путей из  $(0, -1)$  в  $(n, n-1)$  — число способов выбрать  $n$  вертикальных сегментов (и  $n$  горизонтальных) из общего числа  $2n$ , то есть  $C_{2n}^n$ .

Рассмотрим неправильный путь и его первую точку на прямой  $y = x$  (точка  $A$ ). Отрезок пути от  $(0, -1)$  до  $A$  заменим симметричным относительно прямой  $y = x$ . Получим путь длины  $2n$  из  $(-1, 0)$  в  $(n, n-1)$ .



Обратно, пусть дан путь длины  $2n$  из  $(-1, 0)$  в  $(n, n-1)$  и пусть  $A$  — первая точка этого пути на прямой  $y = x$ .

Заменяв участок пути от  $(-1, 0)$  до  $A$  на симметричный относительно прямой  $y = x$ , получим неправильный путь из  $(0, -1)$  в  $(n, n-1)$ .

Следовательно, неправильных путей из  $(0, -1)$  в  $(n, n-1)$  столько же, сколько путей из точки из  $(-1, 0)$  в  $(n, n-1)$ .

Путь из  $(-1, 0)$  в  $(n, n-1)$  содержит  $n+1$  горизонтальных и  $n-1$  вертикальных участков. Поэтому количество таких путей равно  $C_{2n}^{n-1}$ .

Значит, количество правильных путей (то есть число Каталана  $C_n$ ) равно

$$C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{2n!}{n!n!} - \frac{2n!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{2n!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)} C_{2n}^n.$$

## Асимптотика чисел Каталана

### Теорема 16.3.

$$C_n = (1 + o(1)) \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}$$

### Доказательство.

Используем формулу Стирлинга:

$$n! = (1 + o(1)) \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Оценим биномиальный коэффициент:

$$C_{2n}^n = \frac{2n!}{(n!)^2} = \frac{(1 + o(1)) \sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(1 + o(1))^2 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = (1 + o(1)) \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Далее, число Каталана

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n = (1 + o(1)) \frac{1}{n+1} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} = (1 + o(1)) \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}$$

## Другие представления чисел Каталана

- число разбиений выпуклого  $(n + 2)$ -угольника на треугольники непересекающимися диагоналями.
- число способов соединения  $2n$  точек на окружности  $n$  непересекающимися хордами
- число способов заполнить  $n$ -лесенку  $n$  прямоугольниками
- число таблиц Юнга размером  $2 \times n$ . Таблица Юнга — прямоугольник, заполненный последовательными числами так, чтобы они возрастали во всех строках и столбцах:

1	2	4
3	5	6

- число плоских корневых деревьев с  $n + 1$  вершинами
- число неизоморфных корневых деревьев с  $n + 1$  вершинами
- число параллеломино (пар путей на клетчатой бумаге с началом  $(0, 0)$  и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра  $2n + 2$
- число последовательностей натуральных чисел  $1, a_1, \dots, a_n, 1$  в которых каждый член является делителем суммы двух соседей:

1 4 3 2 1, 1 3 5 2 1, 1 3 2 3 1, 1 2 5 3 1, 1 2 3 4 1

- число наборов из  $n$  целых чисел от 0 до  $n$ , сумма которых делится на  $(n + 1)$

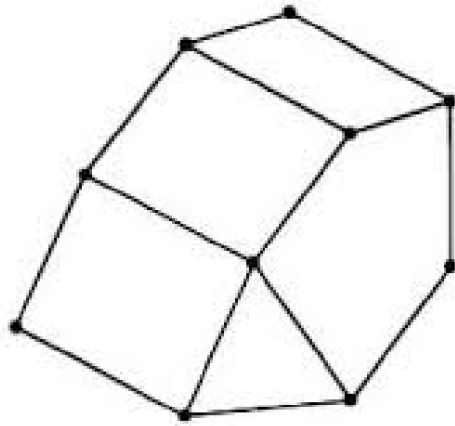
0 0 0, 0 1 3, 0 2 2, 1 1 2, 2 3 3

- число способов разделить скобками  $(n + 1)$  множитель



# Введение в графы

## 17 Граф



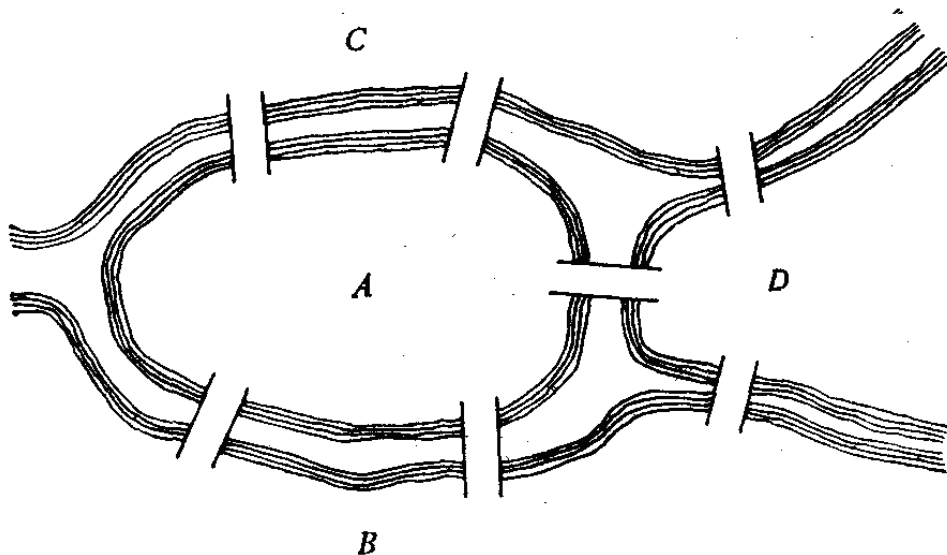
Вершины = точки

Ребра = линии, соединяющие некоторые пары вершин

Графы представляют объекты и связи между ними, например:

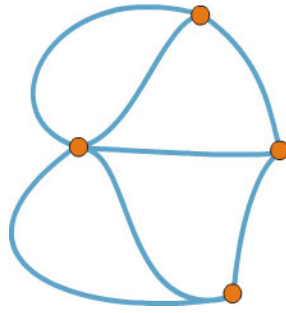
- города и дороги
- люди и знакомства
- атомы и межатомные связи

### Задача о Кенигсбергских мостах



Можно ли обойти все Кенигсбергские мосты, пройдя только один раз через каждый из этих мостов?

Головоломке о мостах можно сопоставить граф (части города — вершины, мосты — ребра)



Эквивалентная формулировка: можно ли «обойти» данный граф, пройдя по каждому ребру ровно один раз, и вернуться в исходную точку.

То есть существует ли последовательность ребер графа со следующими свойствами:

- любые два соседних ребра имеют общую вершину;
- последнее ребро имеет общую вершину с первым ребром;
- каждое ребро графа встречается в последовательности ровно один раз.

Путем полного перебора несложно убедиться, что этот граф обойти нельзя.

Более общая задача:

**Задача.** (Эйлер, 1736)

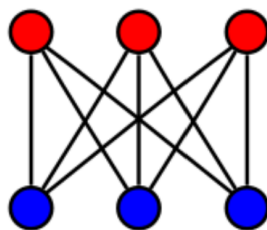
Дан произвольный граф. Определить, можно ли его обойти в указанном выше смысле.

Исторически первый серьезный математический результат в теории графов.

### Дома и колодцы (Головоломка о трех колодцах)

В деревне три дома и три общих колодца. Можно ли протоптать тропинки так, чтобы от каждого дома к каждому колодцу вела тропинка и никакие две тропинки не пересекались?

Переведем на язык теории графов: 6 вершин, три из которых дома, другие три — колодца; ребра соединяют каждую вершину-дом с вершиной-колодцем:



Задача: можно ли перерисовать этот граф на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались.

Головоломка не имеет решения, но доказательство не тривиально, так как полный перебор тут бесполезен, поскольку способов нарисовать граф бесконечно много (будет позже).

Тип задач: изображение, или «укладка» графа так, чтобы выполнялись определенные свойства:

- проектирование транспортных развязок (транспортные потоки разных направлений не должны пересекаться)
- печатных плат (не должны пересекаться проводящие дорожки)

## Задача о деревенских свадьбах

Третья задача, в отличие от двух предыдущих, является не индивидуальной, а «массовой» то есть в ее условии присутствуют параметры, которые можно менять.

В деревне живут несколько юношей и несколько девушек. Некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша может пригласить на свадьбу только одну девушку, а каждая девушка может принять приглашение только от одного юноши. Нужно найти такое распределение юношей и девушек, чтобы каждый юноша знал хотя бы одну девушку, а каждая девушка знала хотя бы одного юноши. Требуется поженить максимально возможное число пар при условии, что женить можно только знакомые пары.

На языке теории графов:

- вершины графа — юноши и девушки
- ребра — знакомые пары юноша-девушка

Требуется найти максимальное по размеру множество ребер, никакие два из которых не имеют общих вершин.

К такой же математической модели сводятся и другие задачи (например, задача о назначениях).

## Задача о раскраске карты

Дана политическая карта мира. Требуется раскрасить каждую страну в какой-либо цвет так, чтобы любые две граничащие между собой страны были раскрашены в разные цвета, используя при этом минимально возможное число красок. (Две страны считаются граничащими, если их границы имеют общую линию, а не точку.)

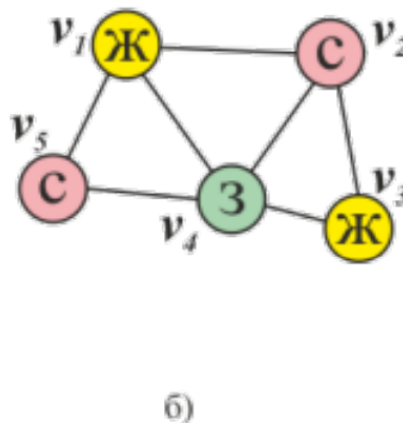
На языке теории графов:

- вершины графа — страны,
- ребра соединяют граничащие страны.

Получаем

## Задача о раскраске графа

Дан граф. Требуется раскрасить вершины графа в минимальное число цветов так, чтобы любые две смежные вершины имели различный цвет.



## 18 Основные определения

**Определение 18.1.** Графом называется пара  $G = (V, E)$ , где  $V$  — конечное множество вершин, а  $E \subseteq V \times V$  — множество ребер.

**Определение 18.2.** Граф можно задать матрицей смежности  $A = (a_{ij})$  порядка  $|V|$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in E, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Определение 18.3.** Граф неориентированный, если  $(u, v) \in E \iff (v, u) \in E$ . Иначе граф называется ориентированным (орграф). Если не указано, что граф ориентированный, то подразумевается что он неориентированный.

**Определение 18.4.** Мультиграф: допускаются кратные ребра (в матрице смежности соответствует натуральным числам).

**Определение 18.5.** Две вершины  $v, u$  называются смежными, если  $(u, v) \in E$ .

**Определение 18.6.** Вершина  $v$  и ребро  $e$  называются инцидентными, если  $e = (v, u)$  для некоторой вершины  $u$ .

**Определение 18.7.** Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется петлей.

**Определение 18.8.** Степень  $\deg(v)$  вершины  $v$  — число инцидентных ей ребер (петля считается дважды).

**Лемма 18.1.**

1. Во всяком графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер:  $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ .
2. В ориентированном графе сумма входящих степеней равна сумме исходящих степеней.
3. Всякий конечный граф содержит четное число вершин нечетной степени.

**Доказательство.**

1. Каждое ребро инцидентно двум вершинам, поэтому его удаление не уменьшает сумму степеней всех вершина на 2. Удаляя по очереди все ребра (пусть их  $k$ ), придем к пустому графу, в котором сумма степеней равна 0. Значит вначале она была равна  $2k$ .
2. В ориентированном случае при удалении ребра как сумма входящих, так и сумма исходящих степеней уменьшается на 1, откуда аналогично следует второе утверждение леммы.
3. Получено, что сумма степеней вершин четна. А для этого необходимо, чтобы нечетных степеней было четное число.

## Пути и циклы

**Определение 18.9.** Путь, соединяющий вершины  $v_0$  и  $v_n$ : последовательность вершин и ребер  $v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_n} v_n$  из  $v_0$  в  $v_n$ , так что  $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Определение 18.10.** Если все вершины пути различны, то он называется простым;

**Определение 18.11.** Если все ребра пути различны, то он называется реберно-простым;

**Определение 18.12.** Реберно-простой путь с  $v_0 = v_n$  называется циклом.

**Определение 18.13.** Цикл называется простым, если различны вершины  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ .

**Замечание.** Если между двумя вершинами есть путь, то есть и простой путь. В частности, если в графе есть цикл, то есть и простой цикл.

## Связность

**Определение 18.14.** Если две вершины неориентированного графа совпадают или соединены некоторым путем, они называются связанными.

В ориентированном случае связанными называются такие вершины  $a$  и  $b$ , что существует путь как из  $a$  в  $b$ , так и из  $b$  в  $a$  (либо  $a = b$ ).

## Отношение эквивалентности

**Определение 18.15.** Бинарное отношение на множестве  $X$  — это подмножество  $X \times X$ .

**Определение 18.16.** Отношение эквивалентности  $\sim$  на множестве  $X$  — это бинарное отношение, для которого выполнены следующие условия:

- Рефлексивность:  $a \sim a$  для любого  $a \in X$
- Симметричность:  $a \sim b \iff b \sim a$
- Транзитивность:  $a \sim b$  и  $b \sim c \implies a \sim c$

## Классы эквивалентности

Для каждого  $x \in X$  определим класс  $C_x = \{y \in X \mid y \sim x\}$ .

**Предложение 18.1.**  $X$  разбивается на (непересекающиеся) классы эквивалентности.

**Доказательство.**

Рефлексивность  $\implies x \in C_x$ ;

Симметричность  $\implies x \in C_y \iff y \in C_x$ ;

Транзитивность  $\implies y \in C_x \implies C_y \subseteq C_x$ . (действительно, для всякого  $z \in C_y$  имеем  $z \sim y \sim x \implies x \sim z \iff z \in C_x$ )

Меняя  $x$  и  $y$  местами, получаем  $C_x \subseteq C_y$ , то есть  $C_x = C_y$ .

Наконец, если  $C_x$  и  $C_y$  пересекаются,  $z \in C_x \cap C_y$ , то по доказанному выше  $C_x = C_z = C_y$ .

## Компоненты связности

**Определение 18.17.** Связанность — отношение эквивалентности на множестве вершин.

**Определение 18.18.** Классы эквивалентности называются компонентами связности (в ориентированном случае иногда говорят компоненты сильной связности).

**Определение 18.19.** Граф связный, если в нем ровно одна компонента связности.

**Определение 18.20.** Орграф, в котором одна компонента связности называют сильно связным.

**Утверждение 18.1.** Компонента связности является связным графом. Компонента связности орграфа является сильно связным орграфом.

**Доказательство.**

Для вершин  $u, v$  одной компоненты связности (или сильной связности для орграфа) есть путь  $P$  из  $u$  в  $v$  в исходном графе, а доказать надо, что есть путь в компоненте. Это следует из того, что любая промежуточная вершина пути  $P$  в исходном графе связана как с  $u$ , так и с  $v$ , так что все они действительно лежат в компоненте связности.

В неориентированном случае между вершинами из разных компонент связности ребер нет. В ориентированном случае все ребра между вершинами двух компонент  $A$  и  $B$  направлены в одну сторону (либо все из  $A$  в  $B$ , либо все из  $B$  в  $A$ ).

## 19 Эйлеровы циклы и пути

**Определение 19.1.** Эйлеров путь: путь без повторяющихся ребер, проходящий по всем ребрам графа.

**Определение 19.2.** Эйлеров путь, возвращающийся в исходную вершину: эйлеров цикл.

**Теорема 19.1.**

Связный граф содержит эйлеров цикл  $\iff$  все вершины в нем имеют четную степень.

Связный граф содержит эйлеров путь  $\iff$  он содержит две или ни одной вершины нечетной степени.

**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ ":

Очевидно: эйлеров путь, проходя каждую промежуточную вершину, использует два инцидентных ей ребра; следовательно, степени всех вершин, кроме начала и конца, четны. Аналогично для цикла.

" $\Leftarrow$ ":

Индукцией по количеству ребер сразу двух утверждений: предположим, что верно и для пути, и для цикла для графов с не более чем  $n$  ребрами. Докажем, что верно для пути в графе с  $(n + 1)$  ребром.

Рассмотрим путь между двумя вершинами нечетной степени. Удалим его.

Граф, возможно, распадется на компоненты связности, в каждой из которых степени всех вершин будут четными.

Следовательно, в них по индукционному предположению будут существовать эйлеровы циклы.

Будем двигаться в исходном графе по удаленному пути.

Каждый раз, встречая вершину из очередной не обойденной компоненты, будем обходить ее по эйлерову циклу этой компоненты и продолжать движение по пути.

Для цикла аналогично.

## Ориентированные графы

### Теорема 19.2.

Сильно связный ориентированный граф содержит эйлеров цикл  $\iff$  каждая его вершина имеет равные степень захода и степень исхода.

Сильно связный ориентированный граф содержит эйлеров путь  $\iff$  все его вершины, кроме возможно двух, имеют равные степень захода и степень исхода.

Из двух особых вершин одна имеет степень исхода на единицу большую, чем степень захода, а другая — степень захода на единицу большую, чем степень исхода.

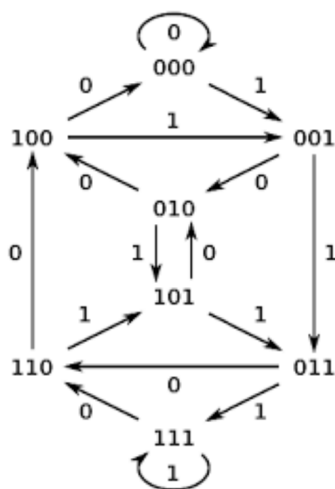
**Доказательство.** Аналогично доказательству теоремы для неориентированных графов.

### Граф де Брейна

Граф порядка  $n$  для  $k$ -символьного алфавита  $\Sigma$ :

- множество вершин  $V = \Sigma^n$ .
- $k$  исходящих дуг у каждой вершины  $w_1 \dots w_n \in \Sigma^n$ :  
для всех  $b \in \Sigma$  дуга из  $w_1 \dots w_n$  в  $w_2 \dots w_n b$ .

Для  $n = 3$ ,  $k = 2$ :



**Теорема 19.3.** В графе де Брейна существует эйлеров цикл.

Существует строка длины  $k^{n+1} + n$ , содержащая все подстроки длины  $n + 1$ .

**Доказательство.** В каждой вершине  $wb$  ( $w \in \sum^{n-1}$ ,  $b \in \sum$ ) ровно  $k$  входящих дуг, идущих из всех вершин вида  $aw$ , для  $a \in \sum$ . Поэтому эйлеров цикл есть.

Искомая строка строится так:

- сперва записывается произвольная  $n$ -символьная строка  $w^0$ ,
- затем, начиная с вершины  $w^0$ , проходится весь эйлеров цикл
- при этом другие символы, соответствующие посещаемым дугам, приписываются к строке.

При прохождении дуги  $b$  из вершины  $aw$  в вершину  $wb$  последние  $n + 1$  символов строки равны  $awb$ , и все подстроки так обходятся.

## 20 Гамильтоновы циклы и пути

**Определение 20.1.** Простой путь или цикл в графе называется гамильтоновым, если он проходит через каждую вершину ровно один раз.

В отличие от эйлерова пути, простых критериев существования гамильтонова пути или цикла в графе неизвестно. (NP-полная задача — позже в курсе; 1000000\$ за решение от института Клея).

**Лемма 20.1.** Если в графе с  $k \geq 3$  вершинами имеется гамильтонов путь, и сумма степеней концов этого пути не меньше, чем  $k$ , то в нем имеется и гамильтонов цикл.

**Доказательство.**

Пусть  $p = A_1A_2 \dots A_k$  гамильтонов путь, и вершина  $A_1$  имеет степень  $l$ .

Назовем зелеными вершины, предшествующие (в смысле порядка от  $A_1$  до  $A_k$ ) в пути  $p$  тем  $l$  вершинам, с которыми смежна  $A_1$ . Очевидно, зеленых вершин ровно  $l$ .

Предположим, что вершина  $A_k$  не соединена с зелеными вершинами. Тогда степень вершины  $A_k$  не больше  $k - 1 - l$ , то есть сумма степеней вершин  $A_1$  и  $A_k$  не больше  $k - 1$  — противоречие.

Значит, вершина  $A_k$  соединена с какой-то зеленой вершиной  $A_i$ . В этом случае в графе существует гамильтонов цикл  $A_1A_2 \dots A_iA_kA_{k-1} \dots A_{i+1}A_1$ .

Достаточное условие существования гамильтонова пути или цикла в терминах степеней вершин.

**Теорема 20.1** (Дирак, 1952).

Если в графе  $G$  с  $n \geq 3$  вершинами сумма степеней любых двух вершин не меньше  $n - 1$  (соответственно, не меньше  $n$ ), в нем существует гамильтонов путь (соответственно цикл).

**Доказательство.**

Лемма  $\implies$  если теорема верна для пути, то верна и для цикла. Докажем для пути.

Рассмотрим самый длинный простой путь  $p$ . Предположим, что он не гамильтонов, и содержит  $k < n$  вершин.

Граф, образованный вершинами пути  $p$  назовем  $H$ .



Концы самого длинного пути  $p$  соединены только с другими вершинами  $p$ , так что к  $H$  применима лемма: сумма степеней концов пути  $p$ , являющегося в  $H$  гамильтоновым, не меньше чем  $n - 1 \geq k$  (легко видеть, что  $k \geq 3$ , так что лемму применять можно).

Следовательно, в  $G$  есть цикл длины  $k$ .

Если из него ведет хотя бы одно ребро вне цикла, то имеем путь длины  $k + 1$ . Противоречие с максимальнойностью  $p$ .

Иначе степени всех вершин цикла  $\leq k - 1$ , а степени не входящих в цикл вершин  $\leq n - k - 1$ , что в сумме дает  $\leq n - 2$ . Противоречие.

# Деревья

## 21 Дерево

**Определение 21.1.** Лес — граф без циклов.

**Определение 21.2.** Дерево — связный граф без циклов.

**Определение 21.3.** Ориентированное дерево — орграф без циклов, в котором только одна вершина имеет нулевую степень захода, а все остальные вершины имеют степень захода 1.

Вершина с нулевой степенью захода — корень дерева,

вершины с нулевой степенью исхода — листья.



## 22 Мосты

**Определение 22.1.** Мост — ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности.

**Теорема 22.1** (о мостах). Ребро является мостом тогда и только тогда, когда оно не принадлежит ни одному циклу.

**Доказательство.**

Необходимость:

Предположим, что оно принадлежит некоторому циклу  $e, e_1, \dots, e_k$ . Рассмотрим две произвольные вершины  $u, v$  из одной компоненты связности в  $G$ , то есть они соединены некоторым путем в  $G$ . Если  $e$  не принадлежит этому пути, то они им соединены и в  $G \setminus e$ . Если  $e$  принадлежит этому пути, то заменив в нем ребро  $e$  на последовательность ребер  $e_1, \dots, e_k$ , получим что они соединены путем в  $G \setminus e$ . Следовательно, после удаления  $e$  компоненты связности не меняются, то есть  $e$  не является мостом по определению.

Достаточность:

Пусть ребро  $e = (x, y)$  не содержится ни в одном из циклов графа  $G$ .

Вершины  $x$  и  $y$  связаны, то есть лежат в одной компоненте связности  $G_1$  графа  $G$ .

Если в графе  $G \setminus e$  вершины  $x$  и  $y$  соединены путем, то прибавив к нему  $e$ , получим цикл, что невозможно по условию.

Следовательно вершины  $x$  и  $y$  находятся в разных компонентах связности графа  $G \setminus e$ .

Таким образом, после удаления ребра  $e$  из  $G$  компонента  $G_1$  распалась как минимум на две компоненты связности, то есть число компонент связности увеличилось и  $e$  — мост по определению.

## 23 Теорема о деревьях

**Определение 23.1.** Простой граф — неориентированный граф без петель и кратных ребер.

**Теорема 23.1.** Для простого графа  $G$  следующие условия эквивалентны:

1.  $G$  — дерево;
2. любые две различные вершины в  $G$  соединены ровно одним простым путем;
3.  $G$  не содержит циклов, но если любую пару несмежных в  $G$  вершин соединить ребром, то в полученном графе будет ровно один цикл;
4.  $G$  — связный граф и  $|V| = |E| + 1$ ;
5.  $G$  не содержит циклов и  $|V| = |E| + 1$ ;
6.  $G$  — связный граф, и всякое ребро в  $G$  является мостом.

**Доказательство.** Предположим  $G$  — дерево и докажем условия (2)-(6).

**2.** Дерево — связный граф, а значит, любые две вершины соединены путем.

Предположим, что вершины  $u$  и  $v$  соединены в  $G$  не менее чем двумя цепями. Пусть

$$\begin{aligned} u &= v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k = v \text{ и} \\ u &= v'_0 \rightarrow v'_1 \rightarrow \dots \rightarrow v'_l = v. \end{aligned}$$

различные простые пути из  $u$  в  $v$ .

Поскольку первые вершины в этих цепях совпадают, существует число  $i$  такое, что  $v_0 = v'_0, \dots, v_i = v'_i$ , но  $v_{i+1} \neq v'_{i+1}$ .

Пусть  $j$  — наименьшее из чисел, больших  $i$ , такое, что вершина  $v_j$  принадлежит второй цепи (такое  $j$  существует, поскольку в рассматриваемых цепях совпадают и последние вершины).

Тогда путь  $v_i \rightarrow \dots v_j = v'_r \rightarrow \dots v'_i = v_i$  не содержит повторяющихся ребер, а значит, является циклом в  $G$ , противоречие.

**3.** При добавлении к простому пути из  $u$  в  $v$  ребра  $(u, v)$  очевидно, возникает цикл. Таким образом, из связности  $G$  следует, что цикл возникает при добавлении любого ребра. Если при добавлении ребра  $(u, v)$  возникло более одного цикла, значит вершины  $u$  и  $v$  соединены более чем одной цепью, что невозможно, так как это противоречит условию (2).

**4, 5.** Индукция по числу вершин в графе.

**База:**  $|V| = 1$ , тогда  $|E| = 0$ , равенство верно.

**Переход:** Пусть  $|V| > 2$ . Сперва покажем, что в графе есть вершина степени 1. Вершин степени 0 нет, потому что граф связный. Если каждая вершина имеет степень 2 и более, то можно построить цикл, двигаясь из вершины в вершину (используя конечность графа). Следовательно, есть вершина  $v$  степени 1. Если удалить эту вершину и инцидентное ей ребро, получится дерево с  $|V| - 1$  вершинами и  $|E| - 1$  ребрами. По предположению индукции для него верно  $|V| - 1 = |E| - 1 + 1$ , и отсюда  $|V| = |E| + 1$ .

**6.** По теореме о мостах.

Теперь покажем, что каждое из условий (2)-(6) влечет, что  $G$  — дерево.

**2.** Поскольку любые две вершины соединены простым путем,  $G$  — связен, а так как цепь единственна, то в  $G$  нет циклов (две вершины, находящиеся в цикле, соединены по крайней мере двумя цепями — фрагментами этого цикла).

**3.** Циклов в  $G$  нет по условию. Предположим, что в  $G$  более одной компоненты связности. Соединим ребром две вершины из разных компонент. В полученном графе новое ребро будет мостом по определению. По теореме о мостах оно не лежит ни в каком цикле, то есть при его добавлении цикл не образовался, противоречие.

**4.** Вначале докажем, что в связном графе  $|V| \leq |E| + 1$ .

Возьмем граф без ребер с  $n$  вершинами и будем добавлять ребра по одному.

Если добавленное ребро в новом графе оказалось мостом, то новый граф содержит ровно на одну компоненту связности меньше, чем старый.

Если же добавленное ребро — не мост, то число компонент связности не изменилось.

Поскольку в исходном графе  $n$  компонент связности, необходимо как минимум  $n - 1$  ребер, чтобы сделать его связным.

Граф  $G$  связен по условию. Если в нем есть цикл, удалим из него ребро и получим связный граф, у которого ребер на 2 меньше, чем вершин, что невозможно, как мы только что доказали.

**5.** Так как  $G$  не содержит циклов, каждая из его компонент связности является деревом, а значит, по доказанному ранее, число ребер в ней на единицу меньше числа вершин. Поскольку это же условие выполняется и для всего графа, компонента связности может быть только одна.

**6.** Связность  $G$  дана по условию, а отсутствие циклов прямо следует из теоремы о мостах.

## 24 Остовное дерево

**Определение 24.1.**  $H$  — остовный подграф  $G$ , если  $V(H) = V(G)$ .

**Определение 24.2.** Остовное дерево — остовный подграф, который является деревом.

**Утверждение 24.1.** Всякий связный граф содержит остовное дерево.

**Доказательство.**

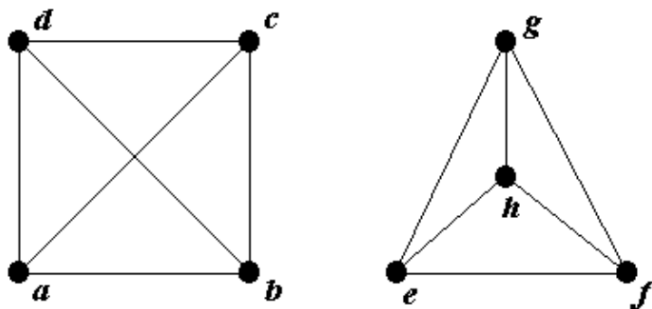
Если связный граф  $G$  не содержит циклов, то он сам является своим остовным деревом.

В противном случае выберем произвольное ребро  $e$  графа  $G$ , входящее в цикл, и удалим его из  $G$  — связность сохраняется. Будем повторять процедуру удаления ребра из цикла, пока не получим связный граф без циклов.

**Следствие.** В связном графе с  $n$  вершинами хотя бы  $n - 1$  ребро.

## 25 Изоморфные графы

**Определение 25.1.** Графы  $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$  и  $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$  изоморфны, если существует биекция  $f: V_1 \rightarrow V_2$  такая, что любых двух вершин  $u, v \in V_1$  они смежны тогда и только тогда, когда  $f(u)$  и  $f(v)$  смежны.



$$f: a \rightarrow e, b \rightarrow f, c \rightarrow g, d \rightarrow h$$

**Утверждение 25.1.** Два графа изоморфны  $\iff$  вершины одного из них можно перенумеровать, так чтобы матрица смежности этого графа совпала с матрицей смежности второго графа.

## 26 Плоский граф

**Определение 26.1.** Граф называется плоским, если его можно изобразить в виде геометрической фигуры на плоскости без пересечения ребер, так что его вершины — это точки плоскости, а ребра — непересекающиеся кривые на ней, соединяющие смежные вершины («укладка» графа на плоскости).

Более формально, ребра можно изображать ломаными с конечным числом звеньев.

**Определение 26.2.** Области, на которые граф разбивает плоскость, называют его гранями. Неограниченная часть плоскости — тоже грань («внешняя грань»).

**Определение 26.3.** Множество граней:  $F$ .

**Определение 26.4.** Плоский граф:  $G = (V, E, F)$ .

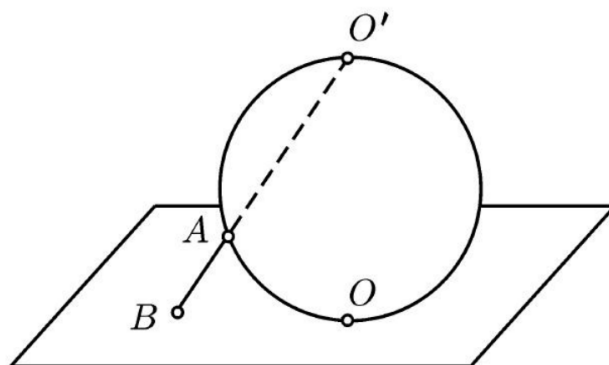
**Определение 26.5.** Планарный граф: изоморфный плоскому графу.

Теорема Фари(30.1): Любой планарный граф, можно изобразить так, что его ребра — отрезки.

### Изображение на сфере

**Предложение 26.1.** Плоский граф = существует укладка на сфере

**Доказательство.** через стереографическую проекцию



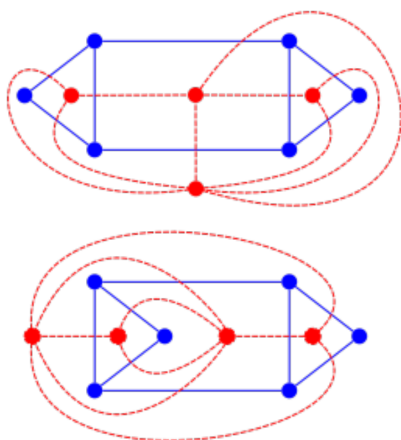
## Двойственный граф

**Определение 26.6.**  $G = (V, E, F)$  — плоский связный мультиграф.

Граф  $G^*$ , двойственный  $G$ : каждая грань становится вершиной, и каждое ребро исходного графа, служившее границей между двумя гранями, переходит в ребро, соединяющие соответствующие вершины.

**Утверждение 26.1.** Для всякого плоского графа  $G$  граф  $G^*$  тоже плоский, и  $(G^*)^* = G$ .

*Замечание.* Двойственность — соответствие между укладками, а не между графами! Для разных укладок одного и того же графа двойственные ему графы могут быть неизоморфными.



## 27 Формула Эйлера

**Теорема 27.1** (Формула Эйлера, 1758).

Во всяком связном плоском графе выполняется равенство  $|V| - |E| + |F| = 2$ .

**Доказательство.** Индукция по числу граней.

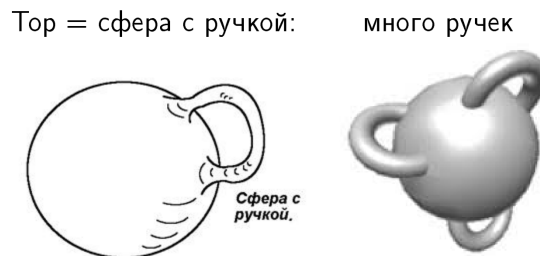
База:  $|F| = 1$  — это дерево, равенство  $|V| - |E| = 1$  выполняется по теореме о деревьях.

Пусть  $|F| \geq 2$ . Удаляем одно ребро, входящее в цикл; оно разделяло две грани.

Получается граф, в котором  $|V|$  вершин,  $|E| - 1$  ребер,  $|F| - 1$  граней.

Для него, по предположению индукции, выполняется  $|V| - (|E| - 1) + (|F| - 1) = 2$ , откуда следует  $|V| - |E| + |F| = 2$ .

**Следствие.** Число граней в планарном графе не зависит от его укладки.



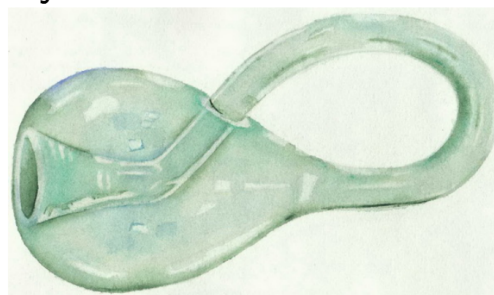
**Теорема 27.2** (обобщение формулы Эйлера).

Для графа, укладываемого на тор с  $k$  ручками, выполняется  $|V| - |E| + |F| = 2 - 2k$ .

В укладке граф связный, каждая грань является областью, то есть гомеоморфна диску.

Без доказательств и без формальных определений.

**Бутылка Кляйна:**



$$|V| - |E| + |F| = 0$$

**Теорема 27.3.** Во всяком планарном графе  $G = (V, E)$  без петель и кратных ребер, где  $|V| \geq 3$ , выполняется неравенство  $|E| \leq 3|V| - 6$ .

Если, кроме того, всякий цикл в графе имеет длину не менее чем  $l$ , то  $|E| \leq \frac{l}{l-2}(|V| - 2)$ .

**Доказательство.** Граф допускает укладку с некоторым множеством граней  $F$ .

Утверждение: Длина границы каждой грани не менее чем 3.

Если длина границы 2, то имеем цикл длины 2, то есть кратное ребро — а по условию их нет. Если длина границы 1, то имеем петлю.

Грани соответствует как минимум три ребра, а ребру соответствует не более двух граней, получаем  $3|F| \leq 2|E|$ .

Подставим в формулу Эйлера  $|V| - |E| + |F| = 2$ :

$$\begin{aligned}
3|V| - 3|E| + 2|E| &\geq 3|V| - 3|E| + 3|F| = 6 \\
&\implies |E| \leq 3|V| - 6.
\end{aligned}$$

Вторая часть: здесь  $l|F| \leq 2|E|$ , и далее из формулы Эйлера  $l|V| - l|E| + 2|E| \geq l|V| - l|E| + l|F| = 2l$ , откуда следует требуемое неравенство.

$$\begin{aligned}
l|V| - l|E| + 2|E| &\geq 2l \implies l|V| - (l-2)|E| \geq 2l \implies l|V| \geq (l-2)|E| + 2l \\
&\implies |E| \leq \frac{l}{l-2}(|V| - 2)
\end{aligned}$$

**Следствие.** Во всяком планарном графе  $G = (V, E)$  без петель и кратных ребер есть вершина степени не более чем 5.

**Доказательство.** Пусть все вершины имеют степень 6 и более. Тогда

$$\sum_{v \in V} \deg v \geq 6|V|.$$

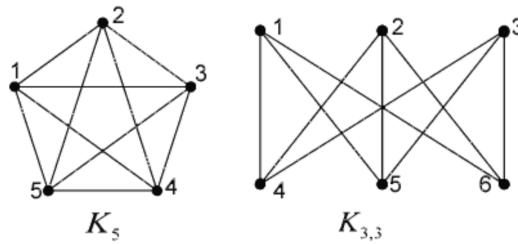
С другой стороны,

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

Отсюда вытекает, что  $|E| \geq 3|V|$ . Противоречие с  $|E| \leq 3|V| - 6$ .

## 28 Критерий планарности

Непланарность  $K_5$  и  $K_{3,3}$



**Лемма 28.1.** Граф  $K_5$  не планарен.

**Доказательство.** В нем  $|V| = 5$  и  $|E| = 10$ ; противоречие с частью 1 теоремы 27.3.

**Лемма 28.2.** Граф  $K_{3,3}$  не планарен.

**Доказательство.** В нем  $|V| = 6$  и  $|E| = 9$ , всякий цикл имеет длину не менее чем 4; противоречие с частью 2 теоремы 27.3.



## Гомеоморфизм графов

**Определение 28.1.** Операция разбиения ребра: добавить вершину в середине ребра  $(u, v) \rightarrow (u, w), (w, v)$ , где  $w$  — новая вершина.

Графы  $G_1$  и  $G_2$  гомеоморфны, если, применяя к каждому из них операцию разбиения ребер, можно привести их к двум изоморфным графам.

**Теорема 28.1** (Понтрягина-Куратовского, 1930).

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .

**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ ":

Пусть граф  $G$  планарен, но содержит подграф  $G_1$ , гомеоморфный  $K_5$  или  $K_{3,3}$ . Тогда, имея укладку  $G$ , из нее извлекаем укладку  $G_1$ , из которой в свою очередь можно получить укладку  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

Противоречие, так как  $K_5$  и  $K_{3,3}$  не планарны.

" $\Leftarrow$ ":

Не разбираем на курсе.

## 29 Теорема о художественной галерее

**Задача.** Сколько сторожей надо расставить в углах произвольного  $n$ -угольника, чтобы каждую внутреннюю точку видел кто-то из них?

**Лемма 29.1.** Всякий многоугольник можно диагоналями разбить на треугольники, причем полученный граф раскрашивается в 3 цвета.

**Доказательство.**

Индукция по числу сторон  $n$ .

База:  $n = 3$ , треугольник — уже разбит. Раскрашивается.

Переход: находим угол меньше  $180^\circ$ , он есть.

- Если отрезок между соседними с ним вершинами лежит внутри многоугольника:
  - Отрезаем треугольник
  - По индукции, все остальное разбивается и раскрашивается.
  - Отрезанная вершина раскрашивается в свободный цвет.
- Если этот отрезок пересекает какие-то другие отрезки:
  - Проводим отрезок из вершины угла к концу одного из мешающих отрезков (можно выбрать, например, конец отрезка внутри угла ближайший к вершине), разбиваем многоугольник на два.
  - Каждая половина разбивается и раскрашивается.

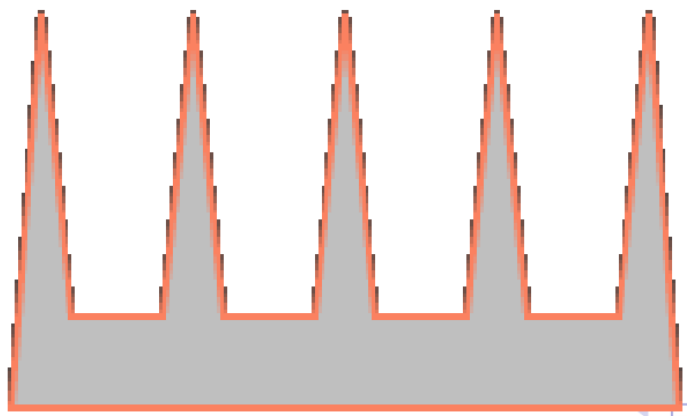
- Цвета в одной из половин переименовываются, чтобы на общем отрезке были те же два цвета.

**Теорема 29.1** (Хватал, 1975).

Для всякого  $n \geq 3$  в любом  $n$ -угольнике достаточно  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  сторожей, расставленных в вершинах.

Существует  $n$ -угольник, для которого необходимо не менее  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  сторожей, даже если разрешить их расстановку в произвольных точках.

Нижняя оценка — гребенка Хватала:  $n = 3k$ , минимум  $k$  сторожей.



**Доказательство.**

По лемме 29.1 строим разбиение на треугольники так, что полученный граф раскрашивается в три цвета.

Из этих цветов выбираем тот, который используется не чаще других; им раскрашено вершин  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .

Расставляем сторожей в вершинах, раскрашенных этим цветом.

У каждого треугольника есть сторож в одной из его вершин, значит видно любую точку внутри любого треугольника, а значит и многоугольника.

## 30 Теорема Фари

**Теорема 30.1** (Фари, 1948). Для всякого планарного графа без кратных ребер и без петель существует укладка, в которой все ребра представлены отрезками.

**Доказательство.**

Граф можно предполагать связным.

Рассмотрим произвольную укладку графа, и докажем, что ее можно преобразовать в прямолинейную укладку с сохранением множества граней.

Сперва добавим в граф лишние ребра, чтобы сделать каждую его грань, включая внешнюю, треугольником (триангуляция). После построения укладки эти ребра удалим.

**Лемма 30.1** (Лемма о триангуляции). Пусть  $G$  — плоский граф без петель, причем в границе каждой грани не менее трех вершин. Тогда существует триангуляция  $T$ , остовным подграфом которой является  $G$ .

### Доказательство леммы.

Пусть  $f$  — грань, граница которой не треугольник.

Случай 1: граница связна.

Пусть  $V_f$  — множество вершин грани  $f$ ;  $H = G(V_f)$  — индуцированный подграф на  $V_f$

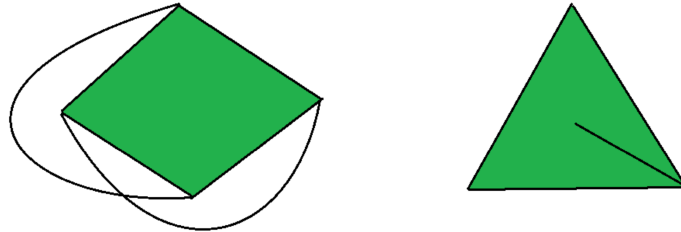
Если граф  $H$  неполный, то мы можем добавить в него ребро без образования новых пар кратных ребер; проведем это ребро в грани  $f$ .

Пусть  $H = K_m$ . Так как  $|V_f| \geq 3$  и граф  $H$  планарен, то  $m = 3$  или  $4$ .

Если  $m = 3$ , то граница грани  $f$  треугольник.

Для  $m = 4$  разбираем случаи.

- либо граница — цикл из 4 внешних ребер, и в этом случае невозможно провести оставшиеся два ребра вне грани  $f$ .
- либо граница состоит из треугольников внешних ребер и одного внутреннего, но в этом случае имеем висячую вершину, что невозможно в  $K_4$ .



Случай 2: граница не связна.

Пусть  $x$  и  $y$  — две вершины из разных компонент связности. Проведем ребро  $xy$  внутри грани  $f$ .

Это ребро будет внутренним для грани  $f$ , поэтому длина границы  $f$  увеличится на 2. Будем действовать таким образом, пока граница грани не окажется связной.

### Доказательство теоремы Фари.

Базис:  $|V| = 3$  — представляется треугольником.

Шаг индукции: Следствие из 27.3  $\implies$  есть вершина  $v$ :  $\deg v \leq 5$ .

Докажем, что существует такая вершина, не лежащая на границе внешней грани.

Пусть в всех вершин не на границе внешней грани  $\deg \geq 6$ .

На границе внешней грани ровно три вершины, степень каждой из них не менее чем 2, и должна быть хотя бы одна вершина степени не менее чем 3, потому что иначе весь граф — треугольник. Тогда

$$\sum_{v \in V} \deg v \geq 6(|V| - 3) + 3 + 2 + 2 = 6|V| - 11,$$

то есть

$$2|E| \geq 6|V| - 11.$$

Теорема 27.3  $\implies 2|E| \leq 6|V| - 12$ . Противоречие.

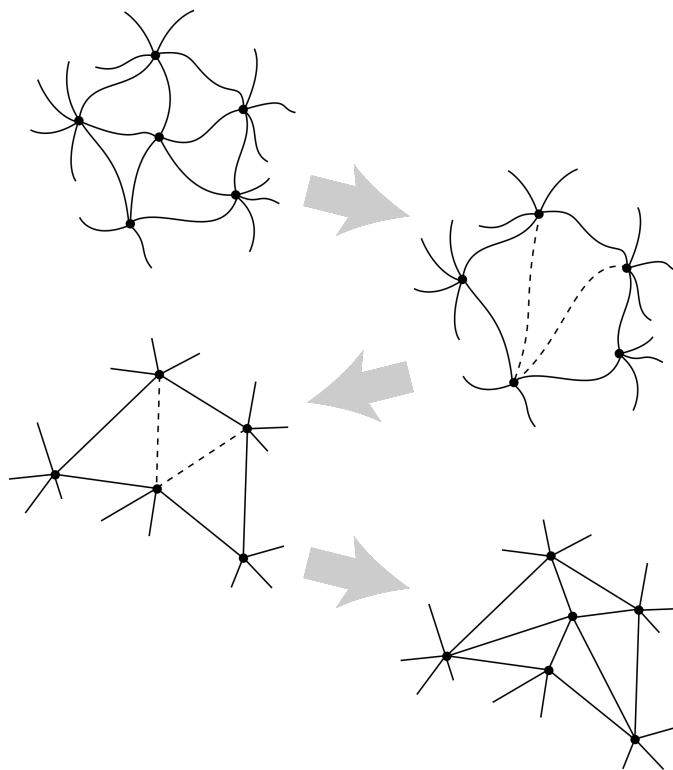
Ребра, примыкающие к  $v$ , принадлежат граням-треугольникам.

Удаляем  $v$ , на ее месте остается грань. К этой грани применяем триангуляцию.

По предположению индукции, для полученного графа есть прямолинейная укладка с сохранением набора граней.

Удаляя диагонали, получаем опять большую грань, граница которой — многоугольник с  $\leq 5$  сторонами.

По теореме о художественной галерее всю эту грань может обозревать один сторож. Там, где стоит этот сторож, размещаем вершину  $v$ ; из нее можно провести отрезки во все пять углов. Если сторож стоит в одной из вершин многоугольника, то вершину  $v$  можно разместить на небольшом расстоянии от нее.



# Раскраски графов

## 31 Раскраски графов

**Определение 31.1.**  $G = (V, E)$ ,  $C$  — множество цветов.

Раскраска — это всякая функция  $c : V \rightarrow C$ .

**Определение 31.2.** Раскраска правильная, если для всякого ребра  $(v, u)$  верно  $c(v) \neq c(u)$ .

**Примеры.**

- Двудольный граф: если раскрашивается в два цвета.
- Граф  $K_n$  не раскрашивается менее чем в  $n$  цветов.

**Теорема 31.1** (Хивуд). Всякий планарный граф раскрашивается в 5 цветов.

**Доказательство.**

Индукция по числу вершин.

Базис:  $|V| = 1$ : раскрашивается в один цвет.

Шаг индукции: По следствию из теоремы 27.3, есть вершина  $v$  степени  $\leq 5$ .

Если  $\deg v \leq 4$ , то удаляем ее, остаток раскрашиваем по предположению индукции, а затем возвращаем и раскрашиваем в свободный цвет.

Если  $\deg v = 5$ , то рассмотрим ее соседей  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$  в порядке их укладки на плоскости. Если какого-то из ребер  $(v_i, v_{i+1})$  нет, добавим его.

Хотя бы одной из диагоналей  $(v_i, v_{i+2})$  нет, иначе был бы подграф  $K_5$ .

Склеим вершины  $v_i, v_{i+2}$  и  $v$  — получим планарный граф меньшего размера, который раскрашивается в 5 цветов по предположению индукции. Тогда в исходном графе  $v_i$  и  $v_{i+2}$  покрасим в тот же цвет, что и склеенную вершину, а  $v$  — в свободный пятый цвет.

**Теорема 31.2** (Аппель, Хакен, 1977). Всякий планарный граф раскрашивается в 4 цвета.

**Доказательство.** Компьютерный перебор (первое в истории доказательство такого рода).

## 32 Хроматическое число графа

**Определение 32.1.** Хроматическое число  $\chi(G)$ : наименьшее число цветов, в которые можно правильно покрасить вершины графа  $G$ .

Критерий раскрашиваемости в два цвета:

**Теорема 32.1.** Граф двудольен если и только если он не содержит нечетных циклов.

**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ ":

Начнем путь из левой доли. Нужно пройти по четному числу ребер чтобы вернуться в левую долю  $\implies$  все циклы четные.

" $\Leftarrow$ ":

Пусть в графе  $G$  нет нечетных циклов. Выберем произвольную вершину  $u$  и разобьем множество вершин на два непересекающихся множества  $U$  и  $V$  так, чтобы в  $U$  лежали вершины  $v_0$ , такие что кратчайшая цепь  $(u, v_0)$  была четной длины, а в  $V$  соответственно вершины  $v_1$ , для которых длина цепи  $(u, v_1)$  — нечетная. При этом  $u \in U$ .

В графе  $G$  нет ребер  $ab$ , таких что  $a, b$  лежат одновременно в  $U$  и  $V$ . Докажем это от противного.

Пусть  $a, b \in U$ . Зададим  $P_0$  — кратчайшая  $(u, a)$  цепь, а  $P_1$  — кратчайшая  $(u, b)$  цепь. Обе цепи четной длины. Пусть  $v_0$  — последняя вершина цепи  $P_0$ , принадлежащая  $P_1$ .

Тогда подцепи от  $u$  до  $v_0$  в  $P_0$  и  $P_1$  имеют одинаковую длину (иначе бы, пройдя по более короткой подцепи от  $u$  до  $v_0$  мы смогли бы найти более короткую цепь от  $u$  до  $a$  или от  $u$  до  $b$ , чем цепь  $P_0$  или  $P_1$ ).

Так как подцепи от  $v_0$  до  $a$  и от  $v_0$  до  $b$  в цепях  $P_0$  и  $P_1$  имеют одинаковую четность, а значит в сумме с ребром  $ab$  они образуют цикл нечетной длины, что невозможно.

Значит  $G$  двудолен.

## Простые оценки

**Лемма 32.1.** Если граф  $H$  нельзя покрасить в  $k$  цветов, то он содержит индуцированный подграф, в котором степени вершин  $\geq k$ .

**Доказательство.** Если  $\deg v < k$ , то граф  $H \setminus v$  также нельзя покрасить в  $k$  цветов (иначе покрасим его, а потом докрасим  $v$ ). Удалим вершину  $v$  и продолжим процесс, в итоге останется подграф, в котором все степени не меньше  $k$ .

**Следствие.** Пусть  $v_1, v_2, \dots, v_n$  — все вершины графа  $G$ , и при всех  $k = 1, 2, \dots, n$  вершина  $v_k$  имеет не более чем  $d$  соседей среди вершин  $v_1, \dots, v_{k-1}$ . Тогда  $\chi(G) \leq d + 1$ .

**Доказательство.** Предположим противное, т.е.  $\chi(G) > d + 1$ .

По лемме 32.1 в  $G$  найдется индуцированный подграф, степени вершин которого  $\geq d + 1$ .

Но вершина этого подграфа с наибольшим номером имеет в нем степень не более  $d$ . Противоречие.

**Следствие.** Если степени всех вершин графа  $G$  не превосходят  $d$ , то  $\chi(G) \leq d + 1$ .

**Доказательство.** Пронумеруем вершины в произвольном порядке и применим предыдущее следствие.

## 33 Теорема Брукса

**Теорема 33.1** (Брукс, 1941). Пусть в графе  $G$  степени всех вершин  $\leq d$ . Тогда если  $d \geq 3$  и ни одна компонента связности  $G$  не является полным графом  $K_{d+1}$ , то  $\chi(G) \leq d$ .

При  $d = 2$  неравенство  $\chi(G) \leq 2$  выполняется, если ни одна компонента связности не является нечетным циклом.

**Утверждение 33.1.** Пусть  $u, v$  — две несмежные вершины графа  $H$ .

Рассмотрим графы:

$H/uv$ : вершины  $u, v$  склеены в одну (кратные ребра после склеивания сразу делаются простыми),

$H + uv$ : добавлено ребро  $uv$ .

Тогда граф  $H$  можно покрасить в  $k$  цветов  $\iff$  хотя бы один из этих двух графов можно.

**Доказательство утверждения.** Раскраскам  $H$ , в которых вершины  $u$  и  $v$  одного цвета, соответствуют покраски  $H/uv$ , а тем, в которых  $u$  и  $v$  разного цвета, покраски  $H + uv$ .

**Доказательство теоремы Брукса.**

Для  $d = 2$  утверждение следует из того, что четные циклы и пути легко красятся в два цвета, а других компонент связности в нашем графе нет.

Пусть  $d \geq 3$ . Можно считать граф  $G$  связным.

Предположим противное: пусть для графов с меньшим числом вершин, чем у  $G$ , утверждение теоремы Брукса выполняется, а для графа  $G$  нет.

Лемма 32.1  $\implies$  степени всех вершин графа  $G$  равны  $d$  (иначе возьмем подграф с таким свойством, связность  $\implies$  совпадает с  $G$ ).

Рассмотрим любую вершину  $p$  графа  $G$ , у нее найдутся два несмежных соседа  $u, v$  (иначе  $G$  совпадает с  $K_{d+1}$ ).

Рассмотрим граф  $G/uv$  ( $z$  — вершина, получаемая отождествлением  $u$  и  $v$ ).

- его не покрасить в  $d$  цветов в силу утверждения
- он связан
- степени всех его вершин  $\leq d$ , кроме, возможно,  $z$ .
- $\deg p < d$ .

По Лемме 32.1 в  $G/uv$  найдется индуцированный подграф  $H$ , в котором степени всех вершин  $\geq d$ .

$H$  получается из некоторого подграфа  $H'$  графа  $G$  стягиванием ребра  $uv$ .

$H$  содержит  $z$ , так как степени остальных и так не больше  $d$ , так что при удалении  $z$  из-за связности мы должны были удалить какие-то ведущие в них ребра.

$\implies$  в  $H$  есть вершина  $z$  и несколько вершин степени  $d$ , которые не смежны с вершинами вне  $H$ .

Попробуем теперь покрасить граф  $G + uv$ .

- граф  $\tilde{H}$ : состоит из  $u, v$  и вершин, не входящих в  $H'$
- $G + uv$  состоит из  $H'$  и  $\tilde{H}$ ; эти два графа имеют общее ребро  $uv$ , а их вершины, отличные от  $u$  и  $v$ , не смежны.
- $\implies$  если мы покрасим каждый из них в  $d$  цветов, то, склеивая эти раскраски по ребру  $uv$ , получим раскраску  $G + uv$ .
- Покажем что степени всех вершин графов  $H', \tilde{H}$  не превосходят  $d$ .
  - для всех вершин, кроме  $u$  и  $v$ , это очевидно, и проверить следует лишь что, например, вершина  $u$ , имеющая степень  $d + 1$  в графе  $G + uv$ , соединена не только с вершинами  $H'$  или не только с вершинами  $\tilde{H}$

- Для  $H'$ : вершина  $u$  соединена с вершиной  $p$ , лежащей в  $\tilde{H}$ .
- Для  $\tilde{H}$ : если  $u$  соединена только с вершинами  $\tilde{H}$ , то в  $H$  имеем  $\deg z < d$  (ребрам, выходящим в  $H$  из  $z$ , будут соответствовать лишь ребра, выходящие в  $G$  из  $v$ , причем не все — например, не ребро  $zp$ ).

Таким образом, для графов  $H', \tilde{H}$  (оба имеют меньше вершин, чем  $G$ ) выполняется утверждение теоремы Брукса, так что один из них  $K_{d+1}$ .

Это не  $H'$ , так как в  $H'$  вершины  $u$  и  $v$  не имеют общих соседей (такой общий сосед имел бы степень меньше  $d$  в  $H$  и потому попал бы в  $\tilde{H}$ ).

И это не  $\tilde{H}$ , поскольку в этом случае степень  $z$  в  $H'$  получается не больше двух — противоречие.



# Паросочетания

## 34 Паросочетания в двудольном графе

**Определение 34.1.** Паросочетание(matching) — подмножество ребер  $M \subseteq E$ , где никакие два ребра не имеют общих концов.

**Определение 34.2.** Совершенное паросочетание: участвуют все вершины.

**Теорема 34.1** (Теорема Холла, 1935). Пусть  $G = (V_1, V_2, E)$  — двудольный граф.

Паросочетание, покрывающее  $V_1$ , существует  $\iff \forall U \subseteq V_1, |U| = k$ , у вершин  $U$  в совокупности есть не менее  $k$  смежных вершин в  $V_2$ .

**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ ":

Очевидно: Паросочетание есть, значит  $\forall U \subseteq V_1$  есть не менее  $|U|$  смежных вершин в  $V_2$ .

" $\Leftarrow$ ":

Индукция по  $|V_1|$ .

База:  $|V_1| = 1$ , и у единственного подмножества размера 1 есть одна смежная вершина в  $V_2$  — это ребро и дает паросочетание.

Переход:

Случай 1: Пусть есть подмножество  $U_1 \subset V_1$ ,  $|U_1| = k$ , у которого ровно  $k$  смежных вершин, и пусть  $U_2 \subseteq V_2$  — смежные с ними вершины, где  $|U_2| = |U_1|$ .

В подграфе на вершинах из  $U_1$  и  $U_2$  у каждого подмножества  $U_1$  размера  $t$  есть не менее  $t$  соседей из  $V_2$ , и, следовательно, из  $U_2$ . Тогда, по предположению индукции, есть паросочетание, покрывающее  $U_1$ .

Покажем, что в подграфе на вершинах из  $V_1 \setminus U_1$  и  $V_2 \setminus U_2$  также выполняется условие теоремы, то есть у всякого подмножества  $V_1 \setminus U_1$  размера  $l$  есть не менее чем  $l$  смежных вершин в  $V_2 \setminus U_2$ .

Пусть  $W \subseteq V_1 \setminus U_1$  — любое подмножество. Тогда подмножество  $U_1 \cup W$  имеет не менее чем  $k + l$  смежных вершин по условию.

При этом у вершин из  $U_1$  всего  $k$  смежных вершин, которые также смежны с  $U_2$ , и, — следовательно, остальные  $l$  смежных вершин смежны с  $W$  и лежат вне  $U_2$ .

Следовательно, условие выполняется, и, по предположению индукции, есть паросочетание, покрывающее  $V_1 \setminus U_1$ , которое не пересекается с ранее построенным паросочетанием, покрывающим  $U_1$ .

Случай 2: У всякого подмножества  $U_1 \subset V_1$  есть не менее чем  $|U_1| + 1$  смежных вершин.

Пусть  $(v_1, v_2) \in E$  — произвольное ребро. Подграф, образованный удалением вершин  $v_1$  и  $v_2$ , продолжает удовлетворять условию теоремы, поскольку в нем у каждого подмножества  $U_1 \subseteq V_1 \setminus \{v_1\}$  остается не менее чем  $(|U_1| + 1) - 1$  смежных вершин, за возможной потерей  $v_2$ .

Следовательно, по предположению индукции, в нем есть паросочетание, покрывающее  $V_1 \setminus \{v_1\}$ . Возвращая  $v_1, v_2$  и ребро  $(v_1, v_2)$ , получаем искомое паросочетание.

## 35 Паросочетания в графах общего вида

*Замечание.* КС — компонента связности.

нечетная КС — КС с нечетным числом вершин.

Для  $U \subseteq V$  обозначим  $G \setminus U$  индуцированный подграф на  $V \setminus U$ .

**Теорема 35.1** (Теорема 2, Татт, 1947). В графе  $G = (V, E)$  есть совершенное паросочетание  $\iff \forall U \subseteq V$  подграф  $G \setminus U$  содержит не более  $|U|$  нечетных КС.

В частности, условие для  $U = \emptyset$  означает, что  $|V|$  четно.

**Доказательство.**

" $\Rightarrow$ ":

Пусть  $M \subseteq E$  — совершенное паросочетание, и пусть  $U \subseteq V$  — подмножество вершин.

Тогда в  $G \setminus U$  для всякой нечетной КС  $C \subseteq V \setminus U$  паросочетание  $M$  должно содержать хотя бы одно ребро между  $C$  и  $U$ , т.е.,  $(u_C, v_C)$ , где  $u_C \in U$  и  $v_C \in C$ .

Так как вершины  $u_C$ , выбранные для разных таких компонент  $C$ , повторяться не могут (тогда это не было бы паросочетанием), получается, что число вершин в  $U$  не может быть меньше, чем число нечетных компонент связности.

" $\Leftarrow$ ":

Пусть совершенного паросочетания нет.

Пусть  $\hat{G} = (V, \hat{E})$  граф, полученный из  $G$  добавлением максимального числа ребер, так, чтобы в нем все еще не было совершенного паросочетания, но добавление любого дополнительного ребра приводило бы к появлению такового.

Тогда достаточно построить  $U \subseteq V$ , удаление которого разбивало бы  $\hat{G}$  так, чтобы в нем оставалось более чем  $|U|$  нечетных КС — тогда и в  $G$  число нечетных КС будет не меньше (удаление одного ребра либо сохраняет нечетную КС, либо разбивает ее на две, одна из которых опять нечетная).

$U := \{v \in V \mid \deg v = |V| - 1\}$ .

**Предложение 35.1.** В  $\hat{G} \setminus U$  всякая КС — полный граф.

**Доказательство.**

Пусть есть КС  $C \subseteq V \setminus U$ , которая не является полным графом.

Т.е. существуют вершины  $v_1, v_2, v_3 \in C$ , для которых  $(v_1, v_2), (v_1, v_3) \in \hat{E}$ ,  $(v_2, v_3) \notin \hat{E}$ .

Т.к.  $v_1 \notin U$ , то  $\exists v_4 \in V : (v_1, v_4) \notin \hat{E}$ .

$\hat{G} \implies$  если добавить в него ребро  $(v_1, v_4)$ , то будет совершенное паросочетание  $M_1 \subseteq \hat{E} \cup \{(v_1, v_4)\}$ .

Но раз в  $\hat{G}$  совершенного паросочетания не было, то  $(v_1, v_4) \in M_1$ .

Аналогично при добавлении ребра  $(v_2, v_3)$  получится совершенное паросочетание  $M_2 \subseteq \hat{E} \cup \{(v_2, v_3)\}$ , где  $(v_2, v_3) \in M_2$ .

$G' := (V, M_1 \cup M_2)$  состоит из отдельных ребер из  $M_1 \cap M_2$ , а также из циклов четной длины, в которых чередуются ребра из  $M_1$  и  $M_2$ .

Ребра  $(v_1, v_4)$  и  $(v_2, v_3)$  попадут в такие циклы, поскольку каждое из них принадлежит ровно одному из двух паросочетаний.

Рассмотрим два случая.

- Если эти ребра попадают в один и тот же цикл, то его можно перестроить, задействовав одно из ребер  $(v_1, v_2)$  и  $(v_1, v_3)$  — получим совершенное паросочетание для  $\hat{G}$ .
- Если же эти ребра попадают в разные циклы, то каждом цикле можно взять другие ребра, и опять получится совершенное паросочетание для  $\hat{G}$ .

Утверждение доказано (продолжим доказывать теорему).

Итак, удалением  $U \subseteq V$  получаются КС — полные графы, из них не более  $|U|$  нечетных.

Строим совершенное паросочетание в  $\hat{G}$ : четные КС сами с собой; нечетные — соединением одной вершины с произвольной вершиной из  $U$ , остальные вершины — сами с собой; оставшиеся вершины из  $U$  — между собой.

Противоречие.

### 36 Несовершенные паросочетания

*Замечание.*  $odd(G)$  — число нечетных КС в  $G$ .

**Теорема 36.1** (Формула Бержа, 1958). Число вершин, непокрытых наибольшим паросочетанием, равно

$$\max_{U \subseteq V} (odd(G \setminus U) - |U|).$$

Эта величина иногда называется дефектом  $d(G)$  графа  $G$ .

*Замечание.*  $d(G) = 0$  соответствует теореме Татта.

**Доказательство.**

" $\geq$ ":

Аналогично доказательству простой части теоремы Татта: Пусть  $M \subseteq E$  — паросочетание, и пусть  $U \subseteq V$  — подмножество вершин, для которого достигается максимум  $(odd(G \setminus U) - |U|)$ .

В  $G \setminus U$  во всякой нечетной КС  $C \subseteq V \setminus U$  есть

- или вершина, не покрытая паросочетанием  $M$ ,
- или вершина  $v_c \in C$ , для которой паросочетание  $M$  содержит ребро  $(u_c, v_c)$ , где  $u_c \in U$ .

Вершины  $u_c$  для разных таких КС  $C$  не повторяются.

Отсюда нечетных КС, в которых есть непокрытая вершина не менее чем  $(odd(G \setminus U) - |U|)$ .

" $\leq$ ":

Пусть  $k = \max_{U \subseteq V} (odd(G \setminus U) - |U|)$ .

В граф добавляем  $k$  новых вершин  $\{v_1, \dots, v_k\}$  и соединяем ребрами со всеми вершинами из  $V$ . Покажем, что полученный граф  $G'$  удовлетворяет условию теоремы Татта.

Для всякого  $U' \subseteq V \cup \{v_1, \dots, v_k\}$  рассмотрим два случая:

- если не все вершины  $\{v_1, \dots, v_k\}$  попали в  $U'$ , то после удаления  $U'$  останется связный граф (т.е., не более 1 нечетной КС).

При  $|U'| = \emptyset$  получается четная КС, так как  $k$  и  $|V|$  одной четности.

- если в  $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq U'$  попали все новые вершины, то по сути из исходного графа  $G$  удаляются  $|U'| - k$  вершин.

Оценим число образующихся нечетных КС:

$$\text{odd}(G' \setminus U') - (|U'| - k) \leq k;$$

$$\text{odd}(G' \setminus U') \leq |U'|.$$

Тогда, по теореме Татта, существует совершенное паросочетание в  $G'$ . После удаления из графа дополнительных вершин останется не более чем  $k$  вершин, не покрытых этим паросочетанием.

## 37 Теорема Петерсена

**Определение 37.1.**  $k$ -регулярный граф — степень каждой вершины равна  $k$ .

**Теорема 37.1** (Петерсен, 1891). Во всяком 3-регулярном графе без мостов есть совершенное паросочетание.

**Доказательство.** Для всякого множества вершин  $U \subseteq V$  рассмотрим подграф  $G \setminus U$ , и в нем все нечетные КС  $C_1, \dots, C_k$ .

Докажем утверждение: каждая из этих КС соединена с  $U$  в исходном графе  $G$  нечетным числом ребер, и не менее чем тремя.

Так как в КС нечетное число вершин, и все они нечетной степени, сумма их степеней нечетна. Из них четное число приходится на внутренние ребра, а оставшееся нечетное число — на внешние. Поскольку каждое ребро входит в цикл (так как нет мостов), ребро не может быть единственным. Таких ребер нечетное количество, иначе сумма степеней снова будет нечетна. Значит их не менее трех. Утверждение доказано.

Сумма степеней вершин из  $|U|$  равна  $3|U|$ , и потому ребер, соединяющих  $|U|$  с нечетными компонентами связности, всего не более чем  $3|U|$ .

Так как в каждую нечетную КС идет не менее трех ребер, всего этих компонент не более чем  $|U|$ . По теореме Татта есть совершенное паросочетание.

## 38 Паросочетания с предпочтениями

**Определение 38.1.** У каждой вершины можно задать порядок на множестве инцидентных ей ребер:  $<_v \subseteq E \times E$  (предпочтения).

**Определение 38.2.** Паросочетание  $M$  называется устойчивым, если не существует  $(v_1, v_2) \in E \setminus M$ , которое удовлетворяет следующим условиям:

- ребро  $(v_1, v_2)$  у  $v_1$  стоит выше в списке предпочтений, чем его текущая пара  $(v_1, v'_2) \in M$  (либо  $v_1$  не состоит в паре);

- симметричное условие для  $v_2$ : ребро  $(v_1, v_2)$  у него стоит выше в списке предпочтений, чем его текущая пара  $(v'_1, v_2) \in M$  (либо  $v_2$  не состоит в паре)

### Примеры.

- $n$  мужчин,  $n$  женщин, полный порядок  $(K_{n,n})$
- ориентированные ребра

**Теорема 38.1** (об устойчивых браках, Гейл и Шепли, 1962). Во всяком двудольном графе  $G = (V_1, V_2, E)$ , для всяких предпочтений  $\{\leq_v\}_{v \in V_1 \cup V_2}$  существует устойчивое паросочетание.

**Доказательство.** Алгоритм, строящий такое паросочетание ( $V_1$  — юноши,  $V_2$  — невесты).

### Описание алгоритма:

Первый шаг:

- каждый юноша делает предложение первой девушке в своем списке
- каждая девушка заключает помолвку с наиболее предпочтительным женихом сделавших ей предложение

Каждый следующий шаг:

- каждый не помолвленный юноша делает предложение следующей девушке в своем списке — неважно, помолвлена она или нет.
- если девушка получает предложение от более предпочтительного жениха, чем ее текущий жених, то она расторгает текущую помолвку с наиболее предпочтительным женихом из тех, кто сделал ей предложение.

Постепенно заключаются помолвки, все более предпочтительные для невест, и все менее предпочтительные для женихов. Ни одна юноша не делает предложения одной и той же девушке дважды.

### Корректность алгоритма:

Алгоритм завершается, поскольку на каждом шаге хотя бы один юноша последовательно движется по своему списку предпочтений, общее число шагов ограничено сверху суммой длин этих списков.

### Устойчивость полученного паросочетания $M$ :

Для всякой несложившейся пары  $(v_1, v_2) \in E \setminus M$  рассмотрим следующие случаи.

- $v_1$  никогда не делал предложение  $v_2 \implies$  к моменту завершения алгоритма у него была более предпочтительная невеста, чем  $v_2$ , и, женившись на ней, менять ее на  $v_2$  он не захочет. То есть существует  $v'_2$ , такая что  $(v_1, v'_2) \in M$  и это ребро выше в предпочтении  $v_1$ , чем  $(v_1, v_2)$ .
- $v_1$  делал предложение  $v_2$ , но получил отказ  $\implies$  к этому моменту у  $v_2$  был более предпочтительный жених, которого она могла сменить только на еще более предпочтительного. То есть  $\exists v'_1$ , такой что  $(v'_1, v_2) \in M$  и это ребро выше в предпочтении  $v_2$ , чем  $(v_1, v_2)$ .
- $v_1$  делал предложение  $v_2$ , получил согласие, а потом был брошен ею  $\implies$  у  $v_2$  есть более предпочтительный жених, то есть  $\exists v'_1$ , такой что  $(v'_1, v_2) \in M$  и это ребро выше в предпочтении  $v_2$ , чем  $(v_1, v_2)$ .

## Свойства полученного устойчивого паросочетания

- для  $K_{n,n}$  образуется  $n$  пар
- оптимально для мужчин (то есть каждый мужчина женат на наиболее предпочтительной им женщине среди всех устойчивых паросочетаний)
- самое худшее для женщин (то есть каждая женщина замужем за наименее предпочтительным мужчиной среди всех устойчивых паросочетаний)

### Доказательство наличия $n$ пар.

Пусть получилось меньше  $n$  пар, тогда существует мужчина который сделал предложение всем женщинам, и женщина не получившая ни одного предложения. Противоречие.

*Замечание.* Возможная пара  $(m, w)$ :  $\exists$  стабильное паросочетание с такой парой.

*Замечание.* Наилучший возможный партнер  $w = best(m)$  для  $m$ : наиболее предпочтительный среди возможных пар  $(m, w)$ .

### Доказательство оптимальности для мужчин.

Предположим, что в паросочетании GS, выданным алгоритмом, есть мужчина, который не с наилучшей возможной партнершей. Значит, его наилучшая возможная партнерша ему отказала.

Рассмотрим первое событие  $X$ , когда мужчине отказала наилучшая возможная партнерша во время работы GS:

$w = best(m)$  отказала  $m$ , чтобы быть (или продолжать быть) с мужчиной  $m'$ , более предпочтительным, чем  $m$ .

Так как  $(m, w)$  возможная пара, то  $\exists$  стабильное паросочетание  $S'$  с такой парой.

Обозначим партнершу  $m'$  в  $S'$  за  $w' \neq w$ . Пара  $(m', w')$  — возможная.

Алгоритм GS  $\Rightarrow$  во время события  $X$

- $m'$  еще не был отвергнут  $best(m')$   $\Rightarrow$  и никем из возможных партнерш, в том числе  $w'$
- $m'$  состоит в паре с  $w$ , то есть мужчине  $m'$  отказали все женщины в его списке предпочтений выше  $w$

$\Rightarrow w'$  после  $w$  в списке предпочтений  $m'$ .

Противоречие со стабильностью  $S'$ :  $(m, w), (m', w') \in S'$ , но оба  $w$  и  $m'$  предпочитают друг друга относительно их пар в  $S'$ . Оптимальность для мужчин доказана.

### Доказательство «наихудшести» для женщин.

Пусть  $S$  — паросочетание найденное алгоритмом Гейла-Шепли. Пусть  $(m, w)$  — стабильная пара в  $S$ , но  $m$  не самый худший выбор для  $w$  среди всех стабильных паросочетаний.

Тогда существует паросочетание  $S'$ , в котором есть пара  $(m', w)$ , где  $m'$  хуже  $m$  в списке  $w$ .

Тогда существует пара  $(m, w')$ . Но по оптимальности для мужчин  $w$  оптимальнее  $w'$ . Пара  $(m, w)$  неустойчивая, значит  $S'$  — нестабильное паросочетание. Противоречие.

## 39 Связность и разделяющие множества

**Определение 39.1.** Пусть  $V_1, V_2 \subseteq V(G)$ . Множество  $X \subseteq V(G)$  называется  $(V_1, V_2)$  - разделяющим, если в графе  $G \setminus X$  нет путей из  $V_1$  в  $V_2$ .

**Теорема 39.1** (Геринг, 2000). Пусть  $V_1, V_2 \subseteq V(G)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  натуральное число. Тогда верно ровно одно из двух условий:

1. В  $V(G)$  найдется подмножество  $U$ ,  $|U| < k$ , разделяющее  $V_1$  и  $V_2$ ;
2. В  $G$  найдется не менее  $k$  простых путей из  $V_1$  в  $V_2$ , попарно не имеющих общих вершин.

**Доказательство.**

Понятно, что 1 и 2 одновременно выполняться не могут:

Разделяющее множество обязано содержать хотя бы по одной вершине из каждого из путей из  $V_1$  в  $V_2$ .

Таким образом, требуется доказать не  $1 \implies 2$  — то есть, если любое  $(V_1, V_2)$  — разделяющее множество содержит  $\geq k$  вершин, то найдутся  $k$  путей из  $V_1$  в  $V_2$ .

Индукция по  $|V|$ .

База:  $|V| = 1$  очевидна.

Переход:

Будем удалять ребра до тех пор, пока любое  $(V_1, V_2)$  — разделяющее множество содержит  $\geq k$  вершин. Когда-то это закончится (если только  $|V_1 \cap V_2| < k$  — но если  $|V_1 \cap V_2| \geq k$ , то имеется  $k$  одновершинных путей из  $V_1$  в  $V_2$ ).

Итак, при удалении ребра  $xy$  образуется  $(V_1, V_2)$  — разделяющее множество  $Z$ ,  $|Z| < k$ .

Заметим, что множество  $Z \cup x$  было разделяющим и до удаления ребра  $xy$ , а тогда  $|Z| = k - 1$ ,  $|Z \cup x| = k$ .

Аналогично для  $Z \cup y$ .

Два случая:

**Случай 1:**

Одно из множеств  $Z \cup x$  и  $Z \cup y$  совпадает с  $V_1$ , а второе с  $V_2$ . В качестве  $k$  путей из  $V_1$  в  $V_2$  можно взять вершины  $Z$  и ребро  $xy$ .

**Случай 2:**

Одно из множеств  $Z \cup x$  и  $Z \cup y$  отлично и от  $V_1$ , и от  $V_2$ . Обозначим это множество  $W$ , тогда  $|W| = k$ ,  $W \neq V_1$ ,  $W \neq V_2$  и  $W - (V_1, V_2)$  — разделяющее множество в нашем графе.

Заметим, что никакой путь из  $V_1$  в  $W$  не проходит через вершины (непустого!) множества  $V_2 \setminus W$  — иначе бы  $W$  не разделяло  $V_1$  и  $V_2$ .

Выкинем из нашего графа множество вершин  $V_2 \setminus W$  — обозначим новый граф  $G_1$ .

Заметим, что любое  $(V_1, W)$  — разделяющее множество в  $G_1$  является  $(V_1, W)$  — разделяющим и в старом, поскольку то, что мы выкинули, никак не помогает добраться из  $V_1$  в  $W$ .

Следовательно, оно является и  $(V_1, V_2)$  — разделяющим, ибо любой путь из  $V_1$  в  $V_2$  заходит в  $W$ .

Поэтому в нем не менее  $k$  вершин.

Но  $|V(G_1)| < |V(G)| \implies$  по предположению индукции имеется  $k$  непересекающихся путей из  $V_1$  в  $W$ .

Аналогично, имеется  $k$  непересекающихся путей из  $W$  в  $V_2$ .

Заметим, что пути из  $V_1$  в  $W$  и из  $W$  в  $V_2$  не могут пересекаться, кроме как по общему концу в  $W$  — это бы означало, что  $W$  не разделяет  $V_1$  и  $V_2$ .

Склеим два наших набора по  $k$  путей  $\implies$  получим  $k$  непересекающихся путей из  $V_1$  в  $V_2$ .

**Теорема 39.2** (Менгер, 1927). Пусть вершины  $a$  и  $b$  связного графа  $G$  не соединены ребром. Тогда наименьшее число вершин  $(a, b)$ -разделяющего множества равно наибольшему числу непересекающихся по вершинам путей, соединяющих  $a$  и  $b$ .

В формулировке теоремы подразумевается, что разделяющее множество не содержит  $a$  и  $b$ , а пути не пересекаются по вершинам, не являющимся начальной или конечной.

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть граф  $G - a - b$  и применить теорему Геринга к множествам  $V_1, V_2$ , где  $V_1$  — множество соседей  $a$ ,  $V_2$  — множество соседей  $b$ . (а  $k$  — наименьшая мощность  $(V_1, V_2)$ -разделяющего множества).

## 40 Вершинное покрытие

**Определение 40.1.** Вершинное покрытие графа — это такое множество вершин, что каждое ребро содержит хотя бы одну из них.

**Теорема 40.1** (Кениг, 1931). Наибольшее число ребер в паросочетании двудольного графа  $G$  равно наименьшему числу вершин в вершинном покрытии графа  $G$ .

**Доказательство.** Применим теорему Геринга к графу  $G$  и множествам, состоящим из вершин одной и второй доли. Заметим, что каждый путь можно сократить только до одного ребра, так что наибольшее количество путей есть просто наибольшее паросочетание, а разделяющее множество — это в точности вершинное покрытие.



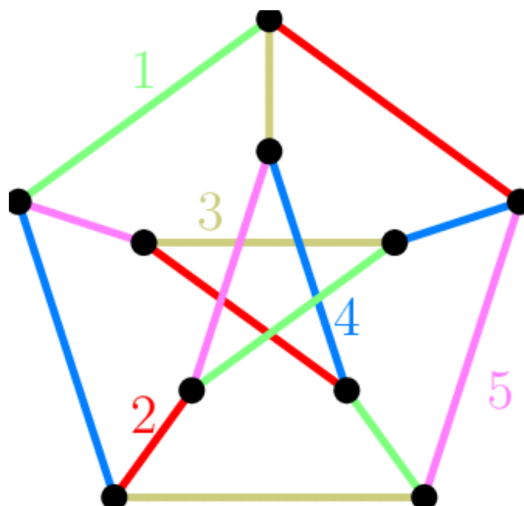
# Реберные раскраски

## 41 Реберные раскраски

$C$  — множество цветов

**Определение 41.1.** Реберная раскраска:  $c : E \rightarrow C$  (красим ребра).

**Определение 41.2.** Раскраска  $c$  правильная, если  $c(e) \neq c(e')$  для всяких смежных ребер  $e, e'$ .



Иными словами, для каждого цвета множество ребер, раскрашенных в данный цвет, это паросочетание.

**Теорема 41.1** (Кенига о раскраске ребер). В двудольном графе  $G = (V_1, V_2, E)$  существует правильная раскраска ребер в  $D$  цветов, где  $D$  — наибольшая степень вершины.

**Доказательство.**

Индукция по наименьшей степени вершины  $d$ , от больших к меньшим.

База:  $d = D$ , то есть  $D$ -регулярный граф.

Покажем, что он удовлетворяет условию теореме Холла:

- всякое множество  $U_1 \subseteq V_1$  соединено со своими соседками из  $V_2$  ровно  $D|U_1|$  ребрами
- так как у каждой соседки степень тоже  $D$ , этих соседак всего не менее чем  $\frac{D|U_1|}{D} = |U_1|$ .

По теореме Холла есть совершенное паросочетание.

Удаляем ребра паросочетания, остается  $(D - 1)$ -регулярный двудольный граф, в нем опять есть совершенное паросочетание, и.т.д.

Полученные  $D$  непересекающихся паросочетаний образуют искомую раскраску ребер  $G$ .

**Переход:**  $d < D$ . Пусть  $G = (V_1, V_2, E)$  — граф.

- Строим копию этого графа:  $G' = (V'_1, V'_2, E')$ .
- Эти два графа объединяются в граф  $G'' = (V_1 \cup V'_1, V_2 \cup V'_2, E \cup E' \cup E_0)$ ,

где  $E_0$  содержит по ребру  $(v_1, v')$  для каждой вершины  $v \in V_1 \cup V_2$  степени  $d$ .

В  $G''$  наибольшая степень вершины  $D$ , а наименьшая  $d + 1$ .

По предположению индукции его ребра красятся.

Из его раскраски извлекается раскраска ребер  $G$ .

**Теорема 41.2** (Визинг, 1964). Во всяком графе существует правильная раскраска ребер, в  $D + 1$  цвет, где  $D$  — наибольшая степень вершины.

*Замечание.* теорема дает очень точную оценку, так как  $D$  цветов, очевидно, необходимо.

**Лемма 41.1.** Пусть  $G = (V, E)$  — граф, и пусть

- $v$  — вершина степени не более чем  $k$ ,
- степень каждого из соседей  $v$  также не превосходит  $k$
- причем степень  $k$  достигается не более чем для одного из соседей  $v$ .

Тогда если ребра графа  $G \setminus \{v\}$  можно покрасить в  $k$  цветов, то и ребра графа  $G$  можно покрасить в  $k$  цветов.

**Доказательство леммы.**

Индукция по  $k$ :

База:  $k = 1$

$v$  — изолированная вершина, или вершина, связанная ребром с другой вершиной степени 1.

Раскраска графа  $G' = G \setminus \{v\}$  в один цвет дополняется покраской дополнительного ребра в единственный цвет.

Переход:

Пусть  $m = \deg v$ ,  $u_1, \dots, u_m$  — соседи  $v$  в  $G$ :

$\deg u_1 \leq k$ , а  $\deg u_i \leq k - 1 \quad \forall i \in \{2, \dots, m\}$ .

В  $G'$ :  $\deg u_1 \leq k - 1$ , а  $\deg u_i \leq k - 2 \quad \forall i \in \{2, \dots, m\}$ .

Пусть  $c$  — раскраска ребер  $G'$  в цвета  $\{1, \dots, k\}$ .

Можем считать, что  $\deg u_1 = k$ , а  $\deg u_i = k - 1 \quad \forall i \in \{2, \dots, m\}$ .

Если какие-то степени меньше, то можно добавить в граф  $G'$  дополнительные вершины, соединить их ребрами с  $u_i$  и произвольно раскрасить эти ребра в свободные цвета.

Для цвета  $i$ :  $X_i \subseteq \{u_1, \dots, u_m\}$ : никакие инцидентные им ребра не раскрашены в цвет  $i$  в  $G'$ .

Тогда

- $u_1$  степени  $k - 1$  попадает ровно в одно из  $X_1, \dots, X_k$ ,
- $u_2, \dots, u_m$  степени  $k - 2$  попадают ровно в два из этих множеств.

Отсюда  $\sum_{i=1}^k |X_i| = 2 \deg v - 1 < 2k$ .

Пусть  $\exists i, j : |X_i| > |X_j| + 2$  (цвет  $i$  встречается реже).

Рассмотрим подграф  $G'_{i,j}$  графа  $G'$ , образованный ребрами цветов  $i$  и  $j$ .

Каждая КС в  $G'_{i,j}$  — это или простой путь, или простой цикл; в них чередуется  $i$ -ребра и  $j$ -ребра. Каждая вершина  $\notin X_i \cap X_j$ , попадет в одну из этих КС.

Тогда  $\exists$  КС, в которой больше вершин из  $X_i$ , чем из  $X_j$ .

Эта КС — простой путь, начинающийся с  $j$ -ребра в  $X_i$  и заканчивающийся или другим  $j$ -ребром в другой вершине из  $X_i$ , или за пределами  $X_i \cup X_j$ .

Переокрасим путь, поменяв местами цвета  $i$  и  $j$ .

При этом  $|X_i|$  уменьшится на 1 или на 2, а  $|X_j|$  на столько же увеличится.

Применяя такое переокрашивание необходимое число раз к наиболее редкому цвету  $i$  и наиболее частому цвету  $j$ , получим

$$||X_i| - |X_j|| \leq 2$$

для любых двух цветов.

$\sum_{i=1}^k |X_i|$  нечетно  $\implies \exists i : |X_i|$  нечетно  $\implies \exists i : |X_i| = 1$ , поскольку в противном случае все слагаемые  $\geq 2$ , и их сумма  $\geq 2k$ .

Пусть  $X_i = \{u_l\}$ , то есть ни одно из ребер  $G'$ , инцидентных  $u_l$ , не покрашено в цвет  $i$ .

Строим граф  $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ : удаляем из  $G$  ребро  $(u_l, v)$ , в также все ребра, покрашенные в  $G'$  в цвет  $i$ .

Степень  $v$  уменьшилась на единицу, и степени всех соседей  $v$  также уменьшилась на единицу  $\implies$  по предположению индукции ребра  $\tilde{G}$  раскрашиваются в  $k - 1$  цветов.

Остается вернуть все удаленные из  $G$  ребра и покрасить их в цвет  $i$ .

### Доказательство теоремы Визинга.

Пусть  $G = (V, E)$  граф, где  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , и пусть  $D = \max_i \deg v_i$ .

Пусть  $G_i$  — подграф  $G$  на вершинах  $v_1, \dots, v_i$ .

Докажем, что ребра каждого  $G_i$  можно раскрасить в  $D + 1$  цветов. Индукция по  $i$ .

База:  $G_1$  — это одинокая вершина, раскрасить можно.

Переход: если  $G_{i-1}$  можно раскрасить, то, по лемме для графа  $G_i$ , вершины  $v = v_i$  и числа  $k = D + 1$ , граф  $G_i$  тоже можно раскрасить в  $D + 1$  цветов.

Теорема Визинга  $\implies$  два класса графов:

- Класс 1: ребра красится в  $D$  цветов,
  - двудольные графы
  - почти все случайные графы
  - планарные графы при  $D \geq 7$
- Класс 2: все ребра красятся в  $D + 1$  цветов,
  - некоторые планарные графы при  $D \leq 5$

### Открытые вопросы

Планарные графы с  $D = 6$ ?

Задача проверки, имеет ли произвольный граф класс 1, является NP-полной.

Снова 1000000\$ от института Клея за решение.

# Теория Рамсея

## 42 Теория Рамсея

**Теория Рамсея:** В достаточно большой структуре, об устройстве которой ничего не предполагается, можно найти подструктуру, устроенную некоторым регулярным образом.

полный хаос невозможен

**Пример.** из шести людей всегда можно выбрать либо троих, попарно знакомых, либо троих, попарно незнакомых.

## 43 Числа Рамсея

**Обобщение:**

1. пары людей (ребра графа знакомств)  $\rightarrow$  наборы людей по  $k$  ( $k$ -гиперребра).
2. два цвета (знакомы-незнакомы)  $\rightarrow d$  цветов
3. будем искать подмножество заранее выбранной мощности, в котором все гиперребра одного цвета.

**Определение 43.1.**  $N \in \mathbb{N}$  обладает свойством Рамсея  $\mathcal{R}(k; m_1, \dots, m_d)$ , если для любой покраски всех  $k$ -элементных подмножеств  $M$ ,  $|M| = N$  в  $d$  цветов  $\{1, \dots, d\}$  найдется номер  $i$  и подмножество  $A \subseteq M$ ,  $|A| = m_i$ , такое что все  $k$ -элементные подмножества множества  $A$  покрашены в цвет  $i$ .

**Определение 43.2.** Число Рамсея  $R(k; m_1, \dots, m_d)$ : наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих свойству  $\mathcal{R}(k; m_1, \dots, m_d)$ .

**Пример.** Утверждение о шести людях:  $R(2; 3, 3) \leq 6$ . (на самом деле «=»).

**Теорема 43.1.** (Рамсея, 1930) Для любых натуральных чисел  $\{k; m_1, \dots, m_d\}$  найдется  $N \in \mathbb{N}$ , обладающее свойством  $\mathcal{R}(k; m_1, \dots, m_d)$ . Иными словами, число  $R(k; m_1, \dots, m_d)$  существует и конечно.

**Доказательство.** Отметим, что:

$$1. R(1; m_1, \dots, m_d) = \sum_{i=1}^d m_i - d + 1 \quad \forall m_1, \dots, m_d \in \mathbb{N}.$$

Действительно,  $k = 1$  — покраска элементов множества.

Отсутствие одноцветного множества  $A$  мощности  $m_i$  и цвета  $i \iff$  в цвет  $i$  покрашено не более чем  $m_i - 1$  элементов.

Это возможно для некоторого  $i \iff$  всего элементов  $\leq \sum_{i=1}^d m_i - d$ .

2. Если  $\min(m_1, \dots, m_d) < k$ , то  $R(k; m_1, \dots, m_d) = \min(m_1, \dots, m_d)$ . Так как при  $m_i < k$  любое множество мощности  $m_i$  нам подойдет в качестве  $A$ .

Двойная индукция:

- по  $k$  (база 1.)
- по  $\sum m_i$  при фиксированном  $k$  (база 2.)

Предположим, что числа Рамсея конечны при меньших значениях  $k$  и при данном  $k$  при меньшем значении  $\sum m_i$ . Докажем, что конечно  $R(k; m_1, \dots, m_d)$ .

Если  $\min(m_1, \dots, m_d) < k$ , то доказано по 2.; пусть  $\min(m_1, \dots, m_d) \geq k$ .

Обозначим  $Q_1 = R(k; m_1 - 1, \dots, m_d)$ ; аналогично  $Q_i$

( $i = 2, \dots, d$ ).

$Q_i$  существуют и конечны по индукционному предположению.

Положим  $N = 1 + R(k - 1; Q_1, \dots, Q_d)$ .

По индукционному предположению по  $k$ ,  $N$  существует и конечно.

Докажем, что  $R(k; m_1, \dots, m_d) \leq N$ .

Рассмотрим  $N$ -элементное множество  $M$ ,  $k$ -элементные подмножества которого покрашены в цвета от 1 до  $d$ .

Зафиксируем  $a \in M$  и покрасим  $(k - 1)$ -элементные подмножества  $M \setminus a = M_1$  в  $d$  цветов: всякое  $A \subset M_1$  мощности  $(k - 1)$  красим в цвет множества  $a \cup A$  в  $M$ .

Так как  $N - 1$  выбрано со свойством  $\mathcal{R}(k - 1; Q_1, \dots, Q_d)$ , то имеется  $B \subseteq M_1$ ,  $|B| = Q_i$ , такое что все  $(k - 1)$ -элементные подмножества  $B$  имеют цвет  $i$ . Без ограничения общности  $i = 1$ . Тогда в  $B$  найдется (по определению  $Q_i$ ):

- либо подмножество мощности  $m_i$ , все  $k$ -элементные подмножества которого имеют цвет  $i$ , для некоторого  $i \in \{2, \dots, d\}$ ;
- либо подмножество мощности  $m_1 - 1$ , все  $k$ -элементные подмножества которого имеют цвет 1.

В первом случае сразу имеем то, что нужно. Во втором случае имеем то, что нужно, после добавления к найденному подмножеству мощности  $m_1 - 1$  элемента  $a$ .

Ч.т.д.

*Замечание.* Обозначим  $R(n, m) = R(2; n, m)$ .

## 44 Оценки на числа Рамсея

**Теорема 44.1.** (Верхняя оценка чисел Рамсея)

$$R(n, m) \leq C_{n+m-2}^{m-1}$$

**Доказательство.**

Из доказательства теоремы Рамсея имеем  $R(k; m_1, \dots, m_d) \leq R(k - 1; Q_1, \dots, Q_d)$

При  $k = 2, d = 2$  получаем  $R(2, m, n) \leq 1 + R(1; R(2, m - 1, n), R(2; m, n - 1)) \stackrel{\text{база 1}}{=} 1$

$$1 + R(2; m-1, n) + R(2; m, n-1) - 2 + 1.$$

Таким образом имеем  $R(n, m) \leq R(n-1, m) + R(n, m-1)$ .

По второй базе  $R(1, m) = 1$ . По индукции получаем нижнюю оценку:  
 $R(n, m) \leq R(n-1, m) + R(n, m-1) \leq C_{n+m-3}^{m-1} + C_{n+m-3}^{m-2} = C_{n+m-2}^{m-1}$ .

**Следствие.** (Верхняя оценка на диагональные числа Рамсея)

$$R(n, n) \leq (1 + o(1)) \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi n}}$$

**Доказательство.** оценка центрального биномиального коэффициента из лекции про числа Каталана.

**Теорема 44.2.** (Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея)

$$R(n, n) \geq 2^{\frac{n}{2}} \text{ при } n \geq 2$$

**Доказательство.** Случай  $n = 2$  понятен, так что пусть  $n \geq 3$ .

Пусть  $N < 2^{\frac{n}{2}}$ . Всего графов на  $N$  вершинах  $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$ .

Идея: если всего графов, содержащих клику,  $< \frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2}$  (аналогично для антиклики), то существует граф, в котором нет ни того, ни другого, то есть  $N < R(n, n)$ .

Всего графов на  $N$  вершинах, содержащих клику на данных  $n$  вершинах,  $2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}$ . Всего  $n$ -клик  $C_N^n$ .

Всего графов размера  $N$ , содержащих  $n$ -клик,

$$\leq C_N^n 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} < \frac{N^n}{n!} 2^{\frac{N(N-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}}.$$

Последнее выражение меньше  $\frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2}$ , если  $N < (n!)^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{n-1}{2} - \frac{1}{n}}$  (легко получается расписав сравнение).

Так как  $n! > 2^{\frac{n}{2}+1}$  при  $n \geq 3$ , то можно взять  $N = \lfloor 2^{\frac{n}{2}} \rfloor$ .

## Нерешенная задача

Для каких  $\lambda$  верна оценка  $R(n, n) > \lambda^{(n+o(n))}$ ?

Наши верхние и нижние оценки: подходит  $\lambda = \sqrt{2}$  и не подходит  $\lambda = 4$ .

## 45 Следствия

### В теории чисел

**Теорема 45.1** (Шур, 1917). Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то уравнение  $x + y = z$  имеет одноцветное решение.

**Доказательство.** Рассмотрим полный граф, вершины которого натуральные числа, и покрасим ребро  $(i, j)$  в тот цвет, в который покрашено число  $(j - i)$ . По теореме Рамсея в этом графе найдется одноцветный треугольник, то есть три числа  $a < b < c$  такие, что числа  $x = b - a$ ,  $y = c - b$ ,  $z = c - a$  одного цвета. Что и требовалось (достаточно даже ограниченного — но зависящего от числа цветов — отрезка натурального ряда).

## Обобщения

То же верно для сумм не только двух, но и любого конечного числа  $k$  элементов:

**Теорема 45.2** (Фолькман-Радó-Сандерс). Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то существует цвет  $i$  и  $k$  чисел  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , такие что  $\forall I \subseteq \{1, \dots, k\}$ ,  $\sum_{j \in I} x_j$  покрашены в цвет  $i$ .

Более того:

**Теорема 45.3** (Hindman, 1974). Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то существует цвет  $i$  и бесконечная возрастающая последовательность чисел  $x_1 < x_2 < \dots$ , такая что  $\forall I \subseteq \mathbb{N}$ ,  $\sum_{j \in I} x_j$  покрашены в цвет  $i$ .

## В геометрии

**Теорема 45.4** (Эрдеш, Секереш, 1935). Для любого натурального  $k$  найдется такое  $N$ , что из любых  $N$  точек на плоскости общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой) найдется  $k$ , являющихся вершинами выпуклого  $k$ -угольника.

### Доказательство.

Точки в выпуклом положении: вершины выпуклого многоугольника:

иначе — в невыпуклом положении.

Два утверждения:

- Из любых пяти точек общего положения найдутся 4 в выпуклом положении.

### Доказательство.

Если выпуклая оболочка нашей пятерки точек — это четырехугольник или пятиугольник, то все ясно, если же это треугольник  $ABC$  с точками  $D, E$  внутри, то прямая  $DE$  пересекает какие-то две стороны треугольника  $ABC$ , например,  $AB$  и  $AC$ , и тогда  $B, C, D, E$  в выпуклом положении.

- Если из  $k \geq 4$  точек любые 4 лежат в выпуклом положении, то все лежат в выпуклом положении.

### Доказательство.

в противном случае какая-то точка  $P$  попадет внутрь выпуклой оболочки остальных. Если  $A$  — вершина выпуклой оболочки, то луч  $AP$  повторно пересечет некоторую сторону  $BC$  выпуклой оболочки, и тогда  $A, B, C, P$  не будут в выпуклом положении.

Покажем, что можно взять  $N = R(4; 5, k)$ .



В самом деле, крася четверку точек в первый цвет, если она в невыпуклом положении, и во второй — если в выпуклом, мы найдем либо 5 точек, для которых все четверки первого цвета (что невозможно по 1.), либо  $k$  точек таких, что все четверки второго цвета, что нам и нужно по 2.).

# Теорема Ван-дер-Вардена

## 46 Теорема Ван-дер-Вардена

**Теорема 46.1** (Ван Дер Вардена, 1927). Пусть натуральный ряд раскрашен в конечное число цветов. Тогда в нем можно найти сколь угодно длинную конечную одноцветную арифметическую прогрессию.

Более формально:

Для любых  $k, c \in \mathbb{N}$  существует  $W \in \mathbb{N}$ , такое что для любой раскраски  $\chi : \{1, \dots, W\} \rightarrow \{1, \dots, c\}$  существуют  $a, d \in \mathbb{N}$ , такие что

$$\chi(a) = \chi(a + d) = \chi(a + 2d) = \dots = \chi(a + (k - 1)d).$$

**Определение 46.1.** Числом Ван дер Вардена  $W(k, c)$  называется наименьшее число  $W$  удовлетворяющее теореме Ван дер Вардена с параметрами  $(k, c)$ .

На самом деле, утверждение верно для всякого цвета положительной плотности:

**Теорема 46.2** (Семереди). Для любой плотности  $\delta \in (0, 1)$  и для любого  $k \in \mathbb{N}$  имеется число  $N(k, \delta)$  такое, что любое подмножество  $A \subseteq \{1, \dots, N\}$  мощности  $\delta N$  содержит арифметическую прогрессию длины  $k$  для любого  $N > N(k, \delta)$

**Доказательство.** Без доказательства.

## 47 Малые значения параметров и база индукции

*Замечание.* а.п. — арифметическая прогрессия

$k$ -а.п. — арифметическая прогрессия длины  $k$

- $c = 1 : W(k, 1) = k$ , так как последовательность  $1, \dots, n$  дает а.п.
- $k = 1 : W(1, c) = 1$ , так как 1-а.п. есть любой элемент.
- $k = 2 : W(2, c) = c + 1$ , так как любые два числа формируют 2-а.п.

## 48 VDW(3, 2)

Непосредственной проверкой можно убедиться, что  $W(3, 2) = 9$ .

Но мы докажем худшую оценку(325) — зато продемонстрируем общую идею доказательства.

Обозначим наши два цвета  $R, B$  и рассмотрим произвольную раскраску  $\chi : \{1, \dots, W\} \rightarrow \{R, B\}$ .

Рассмотрим разбиение  $\{1, \dots, W\}$  на блоки длины 5 — можем считать, что  $W$  делится на 5.

$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}, \dots, \{W - 4, W - 3, W - 2, W - 1, W\}$

### Внутри блока:

**Утверждение 48.1.** Внутри блока  $B_i$ : есть арифметическая прогрессия, в которой первые два элемента окрашены одинаково:

Пусть  $B$  — блок из пяти элементов. Существуют  $a, d, d \neq 0$ , такие что:

$$a, a + d, a + 2d \in B$$

и

$$\chi(a) = \chi(a + d).$$

### Раскраска блоков

Ключевая идея: рассмотреть 32-раскраску блоков 5-ми цветов.

**Лемма 48.1.** Пусть  $W \geq 5 \cdot 33 = 165$ . Тогда существует два одинаково раскрашенных блока  $B_i$  и  $B_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 33$ .

**Теорема 48.1.** Пусть  $W \geq 5 \cdot (33 \cdot 2) - 1 = 5 \cdot 65 = 325$ . Пусть  $\chi : \{1, \dots, W\} \rightarrow \{R, B\}$  — 2-раскраска  $\{1, \dots, W\}$ . Тогда существуют  $a, d \in \mathbb{N}$ , такие что

$$\chi(a) = \chi(a + d) = \chi(a + 2d)$$

### Доказательство.

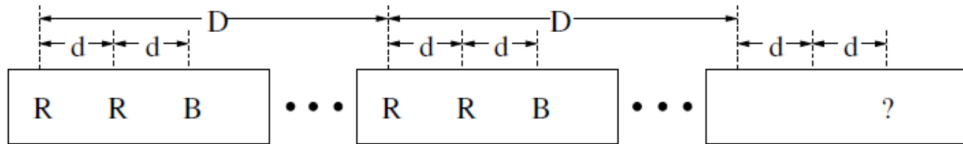
Рассмотрим  $\{1, \dots, W\}$  как 65 блоков длины 5.

По лемме существует два одинаково раскрашенных блока  $B_i$  и  $B_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 33$ .

По утверждению 48.1, внутри  $B_i$  существуют  $a, d$ , такие что  $\chi(a) = \chi(a + d)$ .

Пусть  $B_i$  и  $B_j$  на расстоянии  $D$ . Так как они одинаково окрашены, то

- $\chi(a) = \chi(a + d) = \chi(a + D) = \chi(a + D + d) = R$ .
- $\chi(a + 2d) = \chi(a + D + 2d) = B$ .
- $a + 2D + 2d \leq W$ .



Если  $\chi(a + 2D + 2d) = B$ , то

$$\chi(a + 2d) = \chi(a + D + 2d) = \chi(a + 2D + 2d) = B$$

Если  $\chi(a + 2D + 2d) = R$ , то

$$\chi(a) = \chi(a + D + d) = \chi(a + 2D + 2d) = R$$

В любом случае получили одноцветную а.п.

## 49 VDW(3, 3)

Известно, что  $W(3, 3) = 27$ .

Но мы снова докажем худшую оценку.

Обозначим наши цвета  $R, B, G$  и рассмотрим произвольную раскраску  $\chi : \{1, \dots, W\} \rightarrow \{R, B, G\}$ .

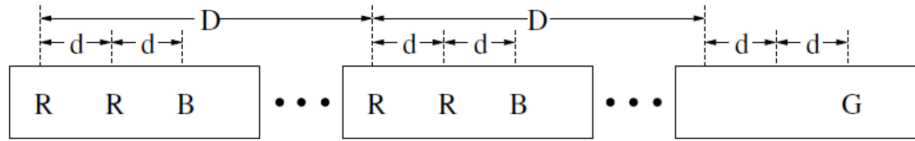
Рассмотрим разбиение  $\{1, \dots, W\}$  на блоки длины 7 — можем считать, что  $W$  делится на 7.

$$\{1, 2, \dots, 7\}, \{8, \dots, 14\}, \dots, \{W-6, \dots, W\}.$$

Внутри блока  $B_i$  длины 7 есть арифметическая прогрессия, в которой первые два элемента окрашены одинаково.

Аналогично предыдущему случаю, получаем что существует  $U$  и  $a, d, D$ , такие что:

- $\chi(a) = \chi(a + d) = \chi(a + D) = \chi(a + D + d) = R$ .
- $\chi(a + 2d) = \chi(a + D + 2d) = B$ .
- $a + 2D + 2d \leq U$ .



Если  $\chi(a + 2D + 2d) = B$ , то

$$\chi(a + 2d) = \chi(a + D + 2d) = \chi(a + 2D + 2d) = B.$$

Если  $\chi(a + 2D + 2d) = R$ , то

$$\chi(a) = \chi(a + D + d) = \chi(a + 2D + 2d) = R.$$

В этом случае получаем  $\chi(a + 2D + 2d) = G$ .

Доказали лемму:

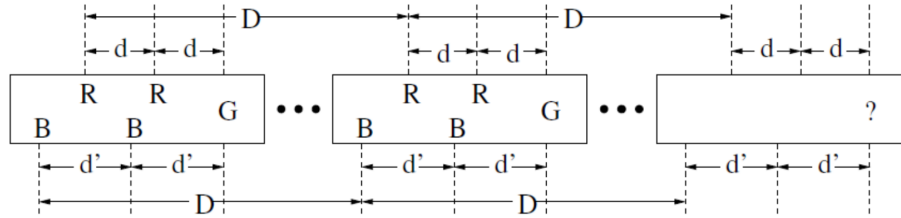
**Лемма 49.1.** Существует  $U$ , такое что с точностью до переобозначения цветов, для всех 3-раскрасок  $\{1, \dots, U\}$  выполняется одно из следующих условий:

1. Существует одноцветная 3-а.п.
2. Существует две 3-а.п., такие что:
  - Одна окрашена RRG,
  - Одна окрашена BBG,
  - У них общая третья точка.

Рассмотрим разбиение  $\{1, \dots, W\}$  на блоки длины  $U$ .

Ключевая идея: рассмотреть разбиение на блоки, которые в свою очередь разбиты на более мелкие блоки.

Рассмотрим  $3^{|U|}$ -раскраску  $\{1, \dots, W\}$ , и возьмем  $W$  достаточно большим, чтобы существовало два одинаково раскрашенных блока  $B_i$  и  $B_j$  и третий блок  $B_k$ , формирующий с ними а.п. из блоков.



Какой бы цвет мы не выбрали, найдется а.п.

**Упражнение.** Константы и формулировка  $\text{VDW}(3, 3)$

*Замечание.* Аналогично можно доказать  $\text{VDW}(3, c)$

## 50 $\text{VDW}(4, 2)$

Известно, что  $W(4, 2) = 35$ .

Но мы снова докажем худшую оценку.

Обозначим наши цвета  $R, B$  и рассмотрим произвольную раскраску  $\chi : \{1, \dots, W\} \rightarrow \{R, B\}$ .

Рассмотрим разбиение  $\{1, \dots, W\}$  на блоки длины  $2W(3, 2)$  — можем считать, что  $W$  делится на  $2W(3, 2)$ .

$\{1, 2, \dots, 2W(3, 2)\}, \{2W(3, 2) + 1, \dots, 4W(3, 2)\}, \{4W(3, 2), \dots\}, \dots$

Для доказательства  $\text{VDW}(4, 2)$  мы будем использовать  $\text{VDW}(3, c)$  для достаточно больших значений  $c$ .

Ключевая идея: для доказательства  $\text{VDW}(k, 2)$  использовать  $\text{VDW}(k-1, c)$  для достаточно больших значений  $c$  (двойная индукция).

Аналогично предыдущим случаям получаем

**Лемма 50.1.** Пусть  $c \in N$ . Рассмотрим  $\chi : \{1, \dots, 2W(3, c)\} \rightarrow \{1, \dots, c\}$ . Тогда существуют  $a, d \in N$ , такие что:

- $\chi(a) = \chi(a + d) = \chi(a + 2d)$ ,
- $a + 3d \in \{1, \dots, 2W(3, c)\}$ .

**Теорема 50.1.** Пусть  $W \geq 2W(3, 2) \cdot 2W(3, 2^{2W(3, 2)})$ . Пусть  $\chi : \{1, \dots, W\} \rightarrow \{R, B\}$  — 2-раскраска  $\{1, \dots, W\}$ . Тогда существуют  $a, d \in N$ , такие что:

$$\chi(a) = \chi(a + d) = \chi(a + 2d) = \chi(a + 3d).$$

**Доказательство.**

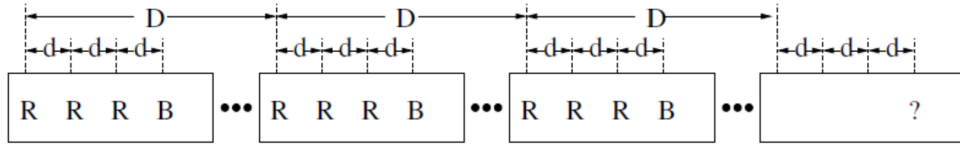
Рассмотрим  $\{1, \dots, W\}$  как  $2W(3, 2^{2W(3,2)})$  блоков длины  $2W(3, 2)$ .

Рассмотрим 2-раскраску  $\{1, \dots, W\}$  как  $2^{2W(3,2)}$ -раскраску блоков.

Будем использовать  $\text{VDW}(3, 2^{2W(3,2)})$  для блочной раскраски и  $\text{VDW}(3, 2)$  для раскраски всякого блока.

По лемме, применяемой к раскраске блоков и к раскраске самого блока, и из соображений симметрии, получаем:

- $\chi(a) = \chi(a + d) = \chi(a + 2d) = R$ ,
- $\chi(a + D) = \chi(a + D + d) = \chi(a + D + 2d) = R$ ,
- $\chi(a + 2D) = \chi(a + 2D + d) = \chi(a + 2D + 2d) = R$ .
- $\chi(a + 3d) = \chi(a + D + 3d) = \chi(a + 2D + 3d) = B$ .
- $a + 3D + 3d \leq W$ .



Если  $\chi(a + 3D + 3d) = B$ , то

$$\chi(a + 3d) = \chi(a + D + 3d) = \chi(a + 2D + 3d) = \chi(a + 3D + 3d) = B.$$

Если  $\chi(a + 3D + 3d) = R$ , то

$$\chi(a + 3d) = \chi(a) = \chi(a + D + d) = \chi(a + 2D + 2d) = \chi(a + 3D + 3d) = R.$$

В любом случае получили одноцветную 4-а.п.

## 51 Доказательство теоремы

**Лемма 51.1.** Зафиксируем  $k, c \in \mathbb{N}$  с  $k \geq 3$ . Предположим, что  $\forall c'$  верна  $\text{VDW}(k - 1, c')$ . Тогда  $\forall r : \exists U = U(r)$ , такое что для любой  $c$ -раскраски  $\chi : \{1, \dots, |U|\} \rightarrow \{1, \dots, c\}$  верно одно из следующих утверждений:

1.  $\exists a, d$ , такие что  $\chi(a) = \chi(a + d) = \dots = \chi(a + (k - 1)d)$ .

2.  $\exists a, d_1, \dots, d_r$ , такие что:

$$\begin{aligned}\chi(a + d_1) &= \chi(a + 2d_1) = \dots = \chi(a + (k-1)d_1) \\ \chi(a + d_2) &= \chi(a + 2d_2) = \dots = \chi(a + (k-1)d_2) \\ &\vdots \\ \chi(a + d_r) &= \chi(a + 2d_r) = \dots = \chi(a + (k-1)d_r)\end{aligned}$$

и  $\forall i \neq j : \chi(a + d_i) \neq \chi(a + d_j)$ .

Неформально: в  $c$ -раскраске достаточно большого начального отрезка  $\mathbb{N}$  найдется либо одноцветная  $k$ -а.п., либо сколь угодно большое число одноцветных  $(k-1)$ -а.п. с общим началом. При  $c+1$  штук прогрессий второе невозможно, то есть верно первое.

### Доказательство.

$U(r) : \min U$ , такое что лемма верна (минимальная длина блока для леммы, где существует  $(k-1)$ -а.п. для  $r$  цветов, и есть общий элемент)

Покажем верхнюю границу на  $U(r) \implies U(r)$  существует.

База:  $r = 1$ .

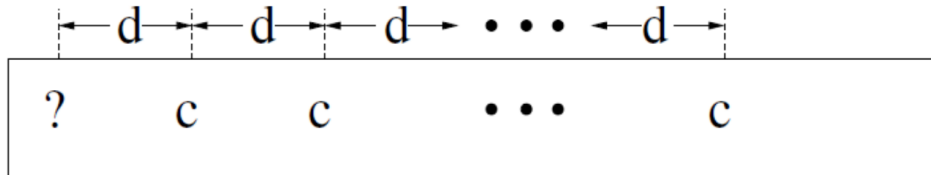
Покажем, что  $U(1) \leq 2W(k-1, c)$ .

Пусть  $\chi : \{1, \dots, 2W(k-1, c)\} \rightarrow \{1, \dots, c\}$ .

Применим  $\text{VDW}(k-1, c)$  ко второй половине  $\{1, \dots, U(1)\}$ , чтобы получить  $a, d \in N$ , такие что

$$\chi(a + d) = \chi(a + 2d) = \dots = \chi(a + (k-1)d)$$

и  $a \in \{1, \dots, U(1)\}$ .



- Если  $\chi(a) = \chi(a + d)$ , то  $a, a + d, \dots, a + (k-1)d$  является одноцветной  $k$ -а.п., то есть выполняется первое утверждение.
- Если  $\chi(a) \neq \chi(a + d)$ , то выполняется второе утверждение.

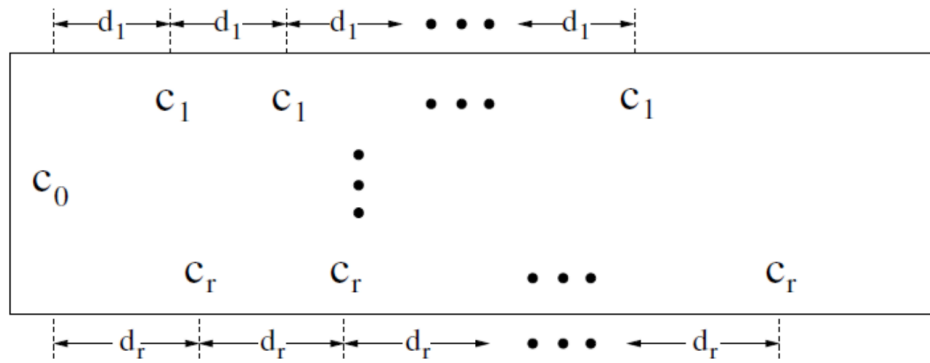
Переход: Пусть  $U(r)$  существует. Докажем, что  $U(r+1) \leq 2U(r) \cdot W(k-1, c^{U(r)})$ .

Пусть  $\chi : \{1, \dots, U\} \rightarrow \{1, \dots, c\}$

Рассмотрим  $\{1, \dots, U\}$  как  $U(r) \cdot W(k-1, c^{U(r)})$  чисел, за которыми следуют  $W(k-1, c^{U(r)})$  блоков размера  $U(r)$ .

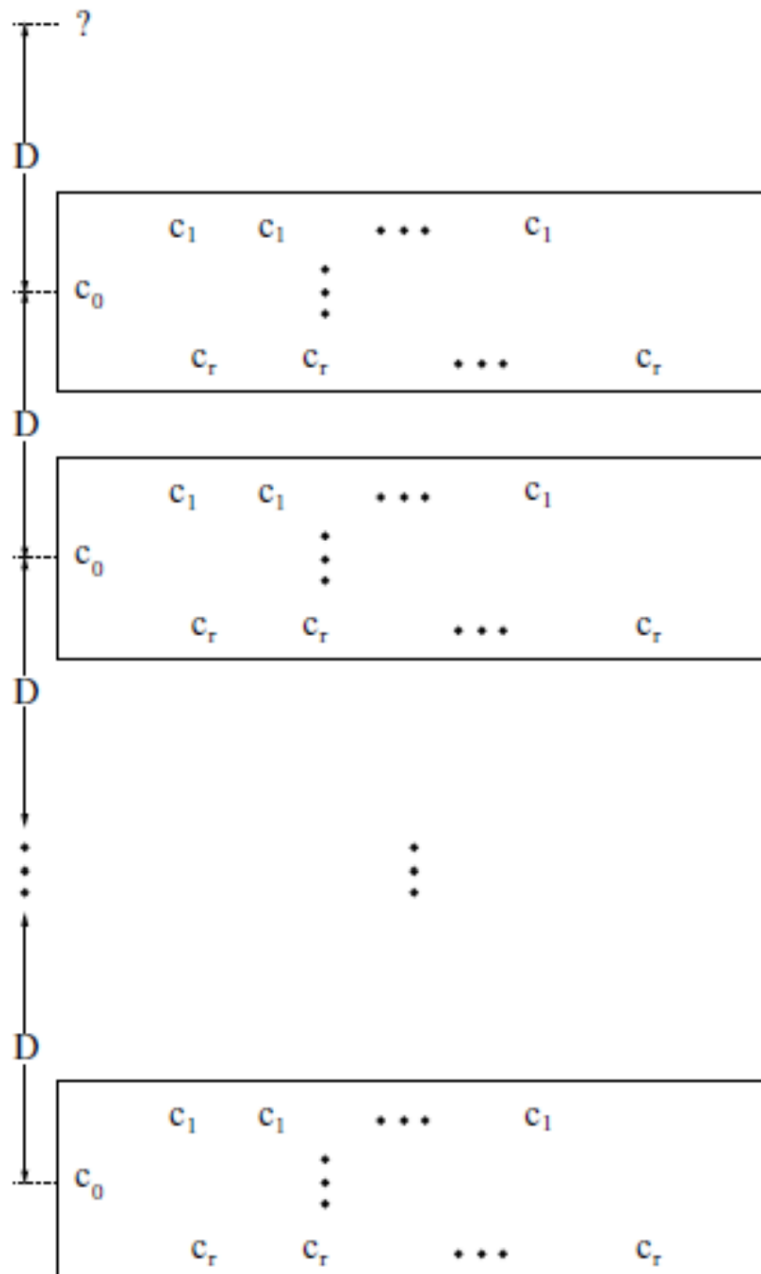
Обозначим эти блоки  $B_1, B_2, \dots, B_{W(k-1, c^{U(r)})}$ .

Один блок:



Рассматриваем  $c$ -раскраску второй половины  $\{1, \dots, U\}$  как  $c^{U(r)}$ -раскраску блоков (обозначим ее  $\chi^*$ ).

По определению  $W(k-1, c^{U(r)})$  получаем одноцветную  $(k-1)$ -а.п. блоков.





Отсюда получаем  $A, D'$ , такие что

$$\chi^*(B_A + D') = \chi^*(B_A + D') = \dots = \chi^*(B_A + (k-2)D')$$

Длина блока  $B_A$  равна  $U(r) \implies$  применяем предположение индукции.

Если верно первое утверждение, то имеем одноцветную  $k$ -а.п. и все доказано.

Если верно второе утверждение, то имеем  $a', d_1, d_2, d_r$ , с  $a' \in B_A$  и

$$\begin{aligned} \{a' + d_1, a' + 2d_1, \dots, a' + (k-1)d_1\} &\subseteq B_A \\ \{a' + d_2, a' + 2d_2, \dots, a' + (k-1)d_2\} &\subseteq B_A \\ &\vdots \\ \{a' + d_r, a' + 2d_r, \dots, a' + (k-1)d_r\} &\subseteq B_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(a' + d_1) &= \chi(a' + 2d_1) = \dots = \chi(a' + (k-1)d_1) \\ \chi(a' + d_2) &= \chi(a' + 2d_2) = \dots = \chi(a' + (k-1)d_2) \\ &\vdots \\ \chi(a' + d_r) &= \chi(a' + 2d_r) = \dots = \chi(a' + (k-1)d_r) \end{aligned}$$

Где  $\chi(a' + d_i)$  имеют разные цвета, отличные от  $a'$  (иначе уже есть одноцветная  $k$ -а.п.).

Так как блоки рассматриваем как точки на расстоянии  $D'$ , и каждый блок длины  $U(r)$ , то соответствующие элементы в блоках на расстоянии  $D = D' \cdot U(r)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \chi(a' + d_1) &= \chi(a' + D + d_1) = \dots = \chi(a' + (k-2)D + d_1) \\ \chi(a' + d_2) &= \chi(a' + D + d_2) = \dots = \chi(a' + (k-2)D + d_2) \\ &\vdots \\ \chi(a' + d_r) &= \chi(a' + D + d_r) = \dots = \chi(a' + (k-2)D + d_r) \end{aligned}$$

До сих пор все было внутри второй половины  $\{1, \dots, U\}$ . Так как

$$a' > \frac{1}{2}U = U(r) \cdot W(k-1, c^{U(r)})$$

и

$$D \leq \frac{1}{k-1}U(r)W(k-1, c^{U(r)}) \leq U(r)W(k-1, c^{U(r)}),$$

то получаем  $a = a' - D > 0 \implies a \in \{1, \dots, U\}$ .  $a$  будет новым общим началом а.п.

$$\begin{aligned}
\chi(a + D + d_1) &= \chi(a + 2(D + d_1)) = \cdots = \chi(a + (k - 1)(D + d_1)) \\
\chi(a + D + d_2) &= \chi(a + 2(D + d_2)) = \cdots = \chi(a + (k - 1)(D + d_2)) \\
&\vdots \\
\chi(a + D + d_r) &= \chi(a + 2(D + d_r)) = \cdots = \chi(a + (k - 1)(D + d_r))
\end{aligned}$$

где цвета всех прогрессий различны.

Нам нужна  $(r + 1)$ -ая прогрессия.

Рассмотрим  $\{a + D, a + 2D, \dots, a + (k - 1)d\}$ .

Все эти точки одноцветны (так как внутри одинаково окрашенных блоков).

И так как  $\forall i : \chi(a') \neq \chi(a' + d_i)$ , то цвет новой прогрессии отличается от  $r$  предыдущих.

То есть имеем  $r + 1$  одноцветных  $(k - 1)$ -а.п., все разных цветов, с общим продолжением  $a$ . Новые параметры  $a, D + d_1, \dots, D + d_r, D$ .

### Доказательство теоремы Ван-дер-Вардена.

Индукция по  $k$ .

**База:**  $W(1, c) = 1$ .

**Индукция:** Предположим, что верно  $VDW(k - 1, c)$ .

По лемме при  $r = c$  в любой  $c$ -раскраске  $\{1, \dots, U(c)\}$  либо есть одноцветная  $k$ -а.п., либо есть  $c$  одноцветных  $(k - 1)$ -а.п., которые все раскрашены разными цветами, и число  $a$ , которое окрашено в цвет, отличный от цветов а.п.

Так как всего имеется только  $c$  цветов, то мы должны получить одноцветную  $k$ -а.п. Отсюда  $W(k, c) \leq U(c)$  и, следовательно, оно существует.

### Верхние границы на числа Ван дер Вардена

То, что получается из доказательства — аккермановская функция.

**Упражнение.** Получить в явном виде оценки из доказательства теоремы.

**Теорема 51.1** (Gowers, 2001).

$$W(k, c) \leq 2^{2^{c^{2^{k+9}}}}.$$

*Замечание.* Грэхэм: 1000\$ за доказательство  $W(k, 2) \leq 2^{k^2}$ .