



Universidade Federal de São Paulo – Campus São José dos Campos  
**Instituto de Ciência e Tecnologia**

Modelagem Computacional

Simulação 3

**Estudo da Sincronização de Neurônio Van der Pol em Rede**

DANILO AUGUSTO DIAS CARVALHO

EDUARD ERIC SCHARDIJN

RENAN ARANTES BERNARDES VIEIRA

Turma: B

Bacharelado em Ciência e Tecnologia

São José dos Campos, SP

Abril de 2012

## Objetivos

Esta simulação tem por objetivo simular uma rede com N neurônios ( $N > 100$ ) em duas situações de acoplamento:

- Redes localmente acopladas (cada neurônio deverá estar acoplado ao seu antecessor e sucessor);
- Redes Globalmente acopladas (todos neurônios deverão estar conectados entre si).

O parâmetro  $\eta$  (força de acoplamento) deverá ser estudado em ambos os tipos de acoplamentos. Com este estudo, deverá ser determinado o menor valor de  $\eta$  (neta) ao qual leva a rede à sincronização completa dos osciladores e o tempo mínimo de sincronização dado  $\eta$  arbitrário.

Por fim, o estímulo externo  $I$  inicial de cada neurônio deve ser distribuído de tal forma a terem-se neurônios ativos e em repouso no início da simulação.

## Modelo Teórico

O oscilador de Van der Pol consiste basicamente de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, com um parâmetro de amortecimento negativo associado. Este modelo pode ser aplicado para simular o potencial de ação de neurônios. O parâmetro  $p$  ( $rô$ ) se trata de um ruído associado a simulação e é tido como uma das primeiras evidências de caos determinístico. É importante salientar que osciladores de relaxamento têm diversas aplicações em outras áreas, que não a de simulação de neurônio. Em eventos que ocorram dinâmica de sistemas não lineares este tipo de oscilador pode vir a ser empregado para melhor estudo do fenômeno.

Referente as equações 1 e 2, temos os seguintes parâmetros:

$$\frac{dxi}{dt} = 3xi - xi^3 + 2 - yi + Ii + p + \eta \cdot Si$$

$$\frac{dyi}{dt} = \varepsilon \left( \alpha \left( 1 + \tanh \left( \frac{xi}{\beta} \right) \right) - yi \right)$$

Equações 1, 2 – Oscilador de Relaxamento Terman-Wang.

Onde,  $i = (0, 1, 2, \dots, n)$

- $Ii$  representa um estímulo externo no oscilador de relaxamento, referente a  $i$ ;
- $p$  ( $rô$ ) representa um ruído aleatório no sistema;
- $\varepsilon$  é um parâmetro do sistema em que  $0 < \varepsilon \ll 1$ ;

- $\alpha$  determina a duração relativa das duas fases (ativa e silenciosa);
- $\beta$  determina a declividade da sigmóide;
- $\eta$  é a força de acoplamento do sistema;
- $S_i$  denota o acoplamento de outros osciladores na rede.

Para o acoplamento global o cálculo do  $S_i$  se dá por:

$$S_i = \sum_0^n H(x_n - \theta)$$

Em que  $H(x)$  é a função heaviside dada por:

$$H(x) \begin{cases} 1, & \text{se } (x_n - \theta) \geq 0 \\ 0, & \text{se } (x_n - \theta) < 0 \end{cases}$$

Onde  $\theta$  é o limiar de ativação. Este  $S_i$  considera todos os outros neurônios na rede, com exceção de si próprio.

Para redes localmente acopladas o cálculo do  $S_i$  se dá por:

$$S_i = \sum_{i-1}^{i+1} H(x_i - \theta)$$

Em que  $H(x)$  é a função heaviside e o cálculo se dá com a somatória dos neurônios vizinhos.

## Modelagem Computacional

O código desenvolvido valeu-se da criação de uma lista duplamente encadeada circular para o caso de uma rede neural localmente acoplada<sup>[1]</sup> e uma lista circular para a rede globalmente acoplada<sup>[2]</sup>, sendo estes programas distintos.

Para ambos os casos, foi definido alguns parâmetros de teste, sem perda de generalidade, para melhor estudo das interações em geral.

Foi definida uma estrutura para alocação das variáveis referentes a uma unidade de neurônio, sendo elas  $x$ ,  $y$  as coordenadas e  $I$  para o estímulo externo. É importante salientar que os valores iniciais de cada variável da estrutura tipo neurônio foram gerados randomicamente, com intuito tornar a simulação mais real.

O método principal do código se deu pela integração das equações 1 e 2 pelo método de Euler definido da seguinte forma.

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(x_n, y_n)$$

Com  $n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$  e  $\Delta t$  sendo a distância entre os pontos na coordenada  $x$ .

O incremento neste é feito da forma:

$$x_n = x_0 + n \cdot \Delta t$$

Com este método foi possível fazer estimativas dos valores de  $\frac{dxi}{dt} = 3xi - xi^3 + 2 - yi + li + p + \eta \cdot Si$  transformando-a em  $\Delta xi = xi - 1 + (3xi - xi^3 + 2 - yi + li + p + \eta \cdot Si) \cdot \Delta t$  em que  $\Delta t$  se trata de uma constante com valor geralmente pequeno, na ordem de 0.01, por exemplo.

Analogamente para a integração numérica de  $\frac{dyi}{dt} = \varepsilon \left( \alpha \left( 1 + \tanh \left( \frac{xi}{\beta} \right) \right) - yi \right)$ , tomando o método de Euler temos  $\Delta yi = yi - 1 + \left( \varepsilon \left( \alpha \left( 1 + \tanh \left( \frac{xi}{\beta} \right) \right) - yi \right) \right) \cdot \Delta t$ .

## Código

O principal trecho do programa consiste na integração numérica pelo método de Euler. Um laço é executado até que o tempo final de simulação seja atingido. Um outro laço, percorre todos os neurônios integrando-os um a um. O ruído no sistema é gerado aleatoriamente.

```
while(tempo <= tempo_final){
    for(i = 0; i<neuronios; i++){
        ro = rand()% 1000 - 0.5;
        ro = ro/10000;
        tempo = tempo + passo;
        S = calculo_s(p->ant,p->prox); //para localmente acoplado
        S = calculo_s(p); // para globalmente acoplado
        p->x = p->x + (3*p->x - pow(p->x,3) + 2 - p->y + p->l + ro + neta*S)*passo;
        p->y = p->y + (epsilon*(alfa*(1 + tanh(p->x/beta)) - p->y))*passo;
        p = p->prox;
    }
}
```

A diferença entre as redes localmente e globalmente acopladas se dá pela chamada da função `calculo_s`<sup>[3]</sup>, em que para a rede localmente acoplada, temos a passagem de parâmetros dos nós anterior e posterior ao neurônio em questão. Para a rede globalmente acoplada, temos na passagem de parâmetro a lista, e na função `calculo_s`<sup>[4]</sup>, temos um laço que percorre toda a lista somando as interações de todos neurônios da rede no neurônio em questão. Para [3] temos:

```
int calculo_s(Plista_circ p, Plista_circ q){
    int s = 0;
    s = s + heavside(p->x) + heavside (q->x);
    return s;
}
```

E para [4]:

```
int calculo_s(Plista_circ p){
    int s = 0;
    Plista_circ q;
    q=p;
    do{
        s = s + heavside(p->x);
        p = p->prox;
    }
```

```

    }while(q != p);
    return s;
}

```

Ambas funções dependem da função heaviside cujo parâmetro passado é o valor de x atual. Esta função retorna um caso o valor de x atual menos o limiar seja positivo, caso contrário o valor zero é retornado.

```

int heaviside(float a){
    if(a - theta >= 0)
        return (1);
    else
        return (0);
}

```

Para o cálculo do tempo mínimo de sincronização, valeu-se da função range, em que esta recebe dois neurônios sendo estes o nó n e o nó n+1. É comparado o valor de x de cada um em relação ao outro, porém em um intervalo que é definido no início do programa. Caso todos os neurônios da lista estejam entre este intervalo, a sincronização é dita verdadeira com um erro de y%, sendo y a precisão que se deseja ter.

```

int range(float p, float q){
    float p_min, p_max;
    p_min = ajuste_min*p;
    p_max = ajuste_max*p;
    if(q >= p_min && q <= p_max)
        return (1);
    else
        return (0);
}

```

Por fim, o trecho do código abaixo é responsável pela distribuição aleatória de estímulos externos iniciais em cada neurônio. Entretanto, esta foi implementada de tal forma a aumentar as chances de determinado estímulo inicial seja ele negativo, ou positivo. Esta chance é controlada pela variável porcentagem definida no início do programa que se declarada como m, implica m% de neurônios inativos para o início do programa, e (100-m)% de neurônios ativos, ou seja, com estímulo externo positivo no início do programa.

```

    ocorrencia = rand()%100;
    if(ocorrencia > porcentagem)
        I = 0.2;
    else
        I = - 0.1;

```

Para o software Scilab, adotou-se o seguinte código:

```

m = fscanfMat('matriz.txt');
t = fscanfMat('tempo.txt');
plot (t(:,1),m(:,1),"r-");

```

```

plot (t(:,1),m(:,2),"b-");
plot (t(:,1),m(:,3),"g-");
plot (t(:,1),m(:,4),"c-");
plot (t(:,1),m(:,5),"m-");
plot (t(:,1),m(:,6),"y-");
plot (t(:,1),m(:,7),"k-");
xlabel('tempo');
ylabel('x');
title("neurônio")

```

Em que os dados são carregados e um gráfico é gerado a partir deste. Para melhor visualização das curvas, adotou-se sete cores diferentes, em que cada uma é gerada em função do tempo, para os neurônios de um a sete, na rede de  $N > 100$ .

## Simulações

Um estudo inicial foi dado com os seguintes parâmetros:

$n$	neurônios	% inativos iniciais	$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	Precisão (%)	Tempo de sincronização
1	7	10	0,02	6,0	0,1	1,5	1%	2534,55

Em que sete neurônios foram simulados em uma rede localmente acoplada, com aproximadamente 10% destes com estímulos iniciais igual a - 0,1 e os outros com estímulos iniciais iguais a 0.2. Convencionou-se os parâmetros padrões para  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$ . A precisão se refere ao intervalo em que o valor numérico de  $x$  deve ter para que seja considerado o tempo mínimo de sincronização. Este tempo foi gerado pelo programa e no gráfico 1, pode-se ter uma interpretação gráfica deste tempo. A sincronização dos sete neurônios é dita verdadeira com precisão de 1%. Por fim, um parâmetro arbitrário adotado para  $n$  foi 1.

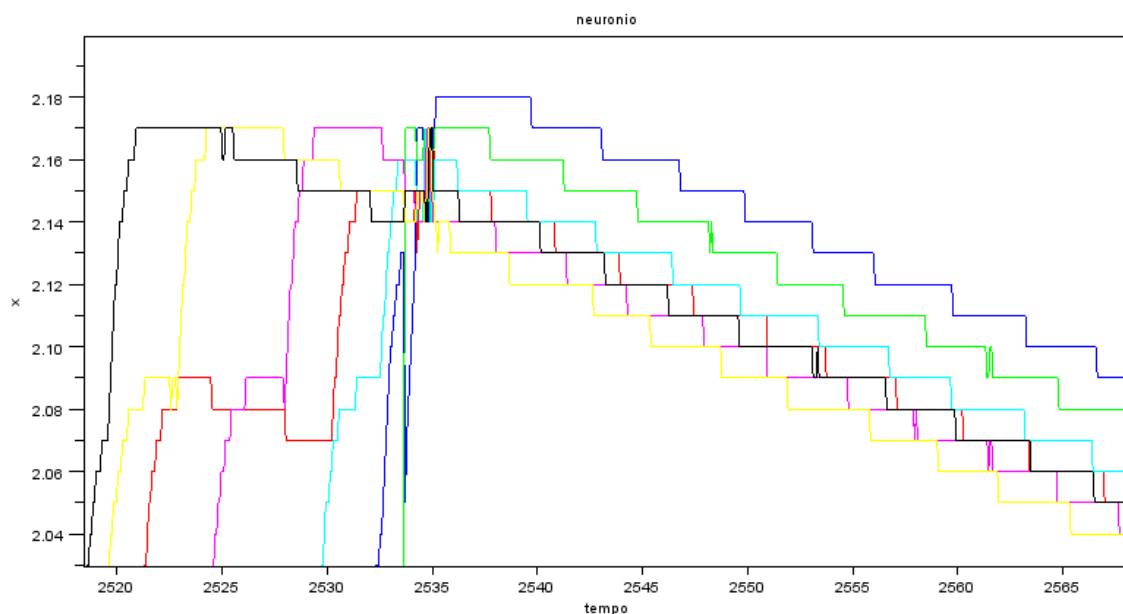


Gráfico 1 – Tempo mínimo de sincronização 2534,55.

O gráfico 2 corresponde gráfico 1, porém com este agora focado nas duas primeiras oscilações. É relevante observar como os neurônios sincronizam ao longo do tempo, dado que no início estão relativamente defasados.

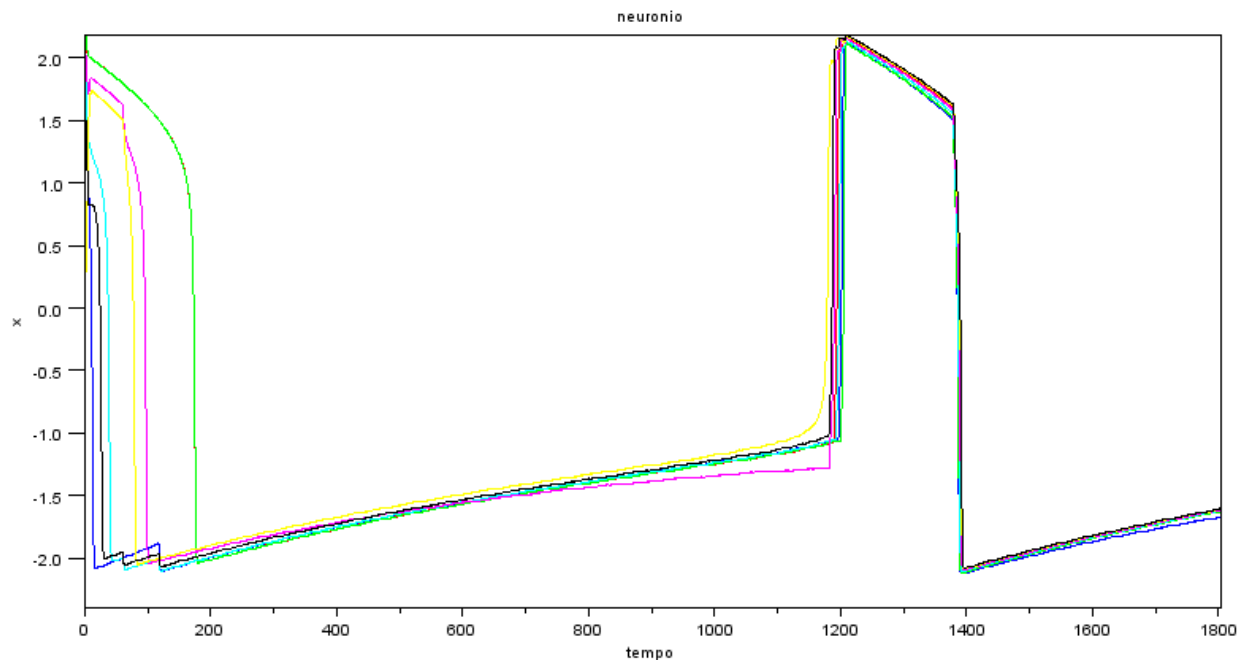


Gráfico 2 – Estudo da sincronização do gráfico 1, com tempo ampliado de 0 a 1800.

Para o gráfico 3, temos a representação da simulação total com tempo variando de 0 a 10000. Neste é possível notar um padrão de sincronização criado para estes parâmetros em específicos nestes neurônios.

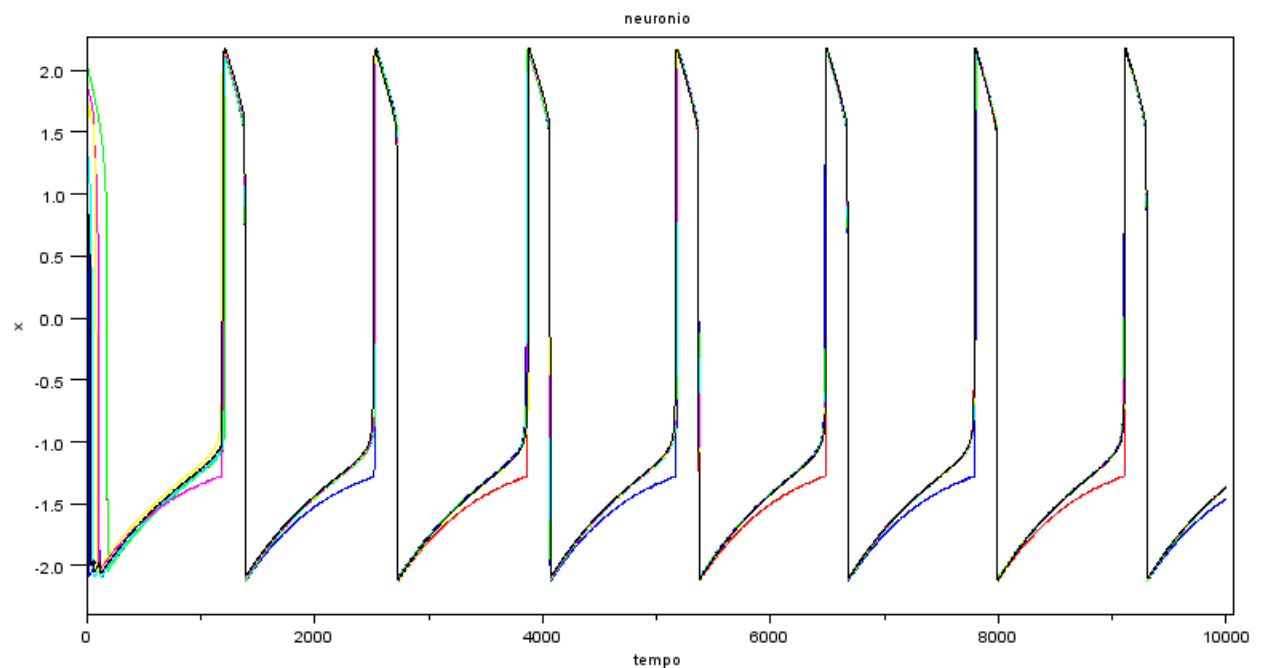


Gráfico 3 – Simulação completa com tempo de 0 a 10000.

Para uma análise mais simplificada, a simulação a partir de agora consistirá em 101 neurônios, entretanto apenas sete serão expostos no gráfico, sendo estes de cores diferentes e de números 10,20,30,...,70 para maior arbitrariedade nos resultados.

Para parâmetros idênticos ao anterior, porém com 101 neurônios, temos apenas um ciclo o que dificulta a análise referente a sincronização. Outro fator que dificulta as simulações é um tempo muito elevado o que gera uma quantidade excessiva de dados que é custosa para ser processada. Para tanto, os seguintes parâmetros foram adotados.

$\eta$	neurônios	% inativos iniciais	$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	Precisão (%)	<b>Tempo de sincronização</b>
0,1	101	10	0,4	6,0	0,1	1,5	5%	-

E para estes o gráfico 4 foi gerado. Neste não se obteve a sincronização cravada, porém observa-se um padrão de sincronização bem definido para tempo maior que cinco mil aproximadamente.

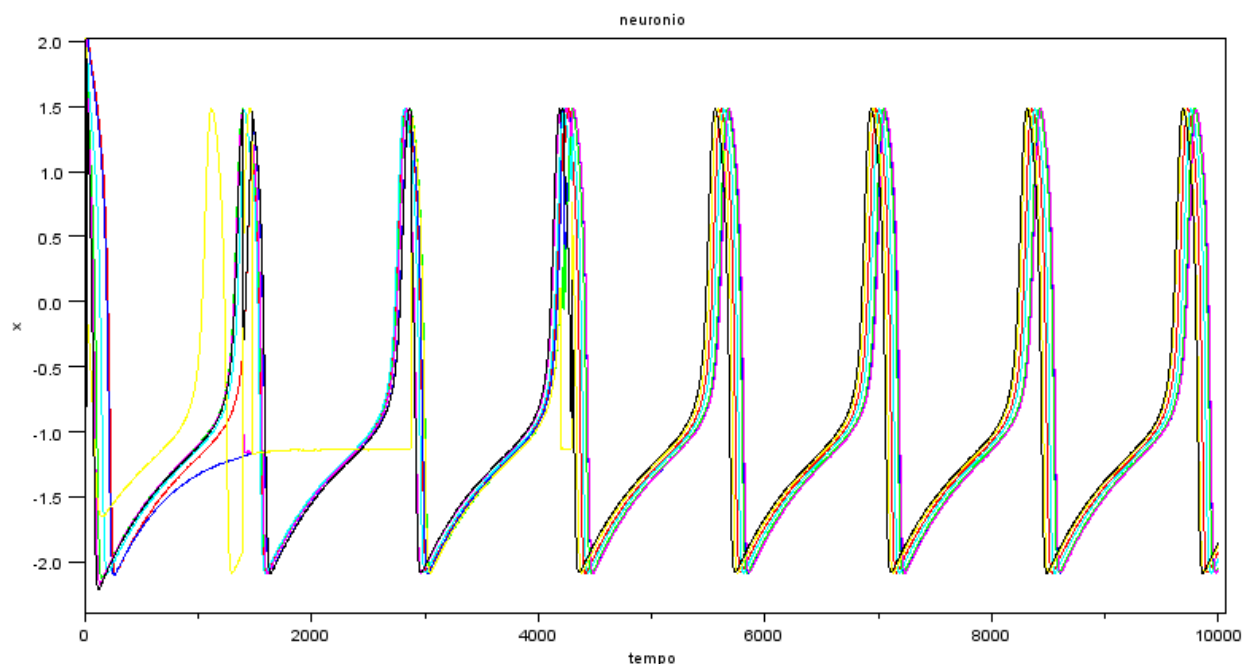


Gráfico 4 – Rede localmente acoplada com 101 neurônios.

Para os mesmos parâmetros do gráfico 4, porém com  $\eta = 0,009$  temos uma sincronização mais rápida no oscilador. Isto pode ser evidenciado no gráfico 5. Este foi o menor  $\eta$  testado ao qual se obteve a sincronização completa do oscilador.



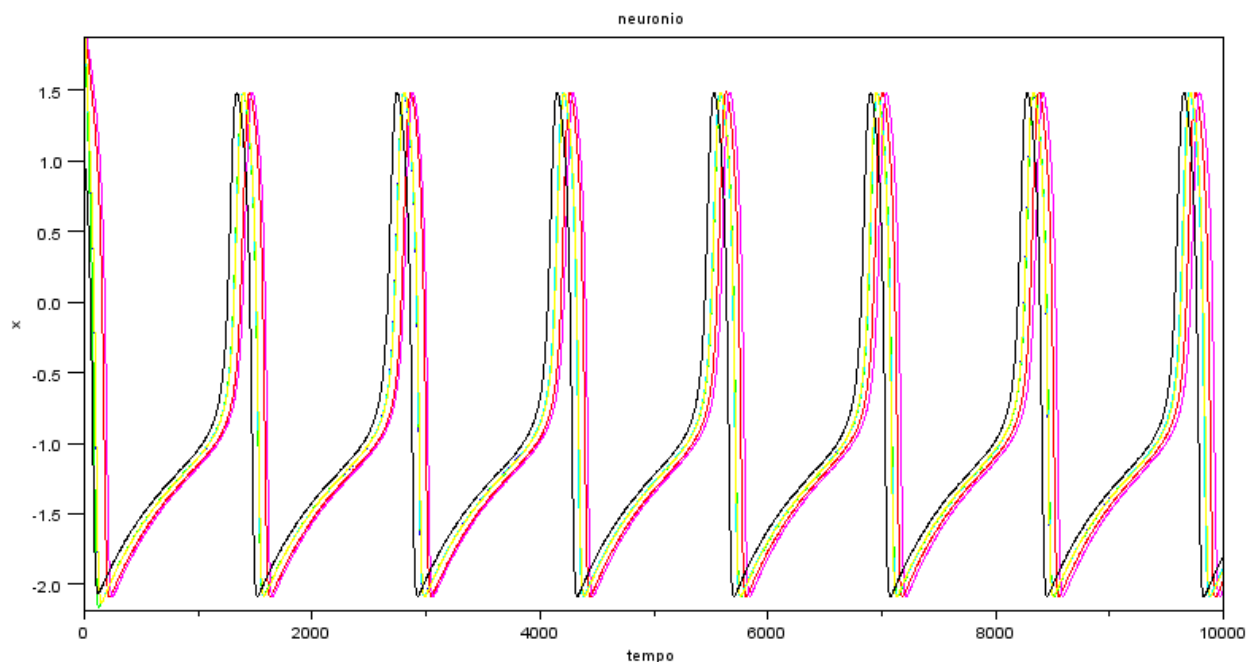


Gráfico 5 – Sincronização completa do oscilador com  $\eta = 0,009$ .

É importante salientar que esta sincronização completa se deve a valores arbitrários de neurônios específicos adotados para análise. No gráfico 6 temos a mesma simulação adotado ao gráfico 5 porém com outros neurônios, uma vez que na simulação estes contemplam 101, e na análise temos apenas 7 como objeto de estudo.

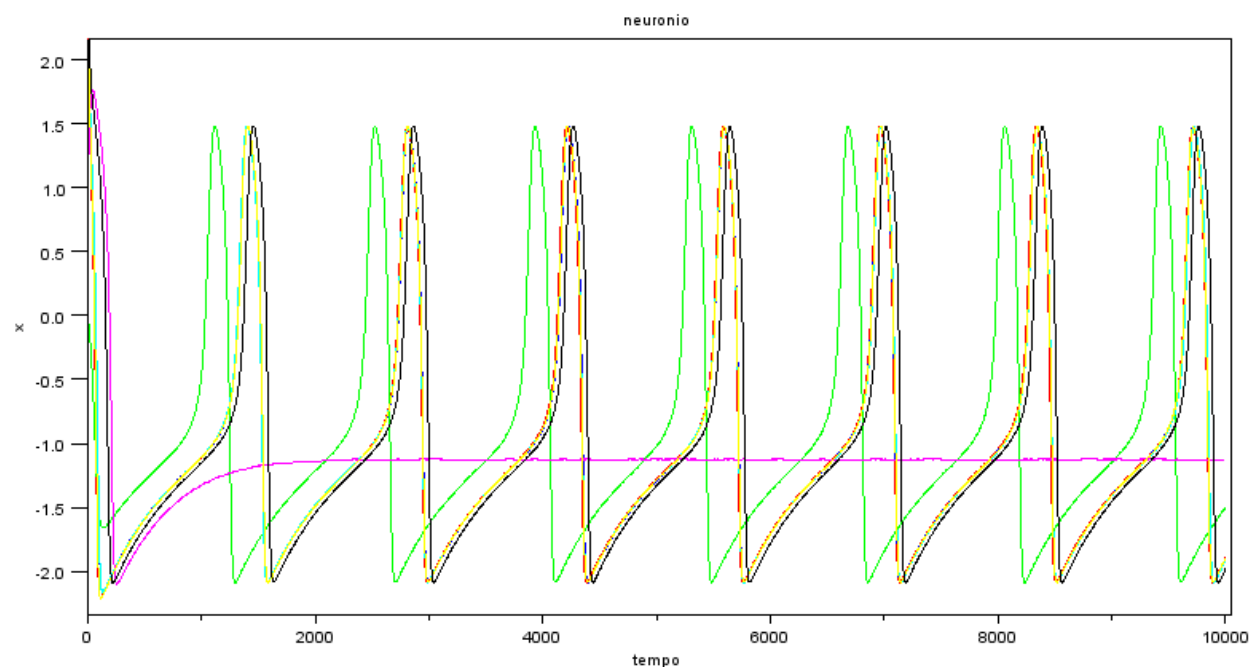


Gráfico 6 – Análise de outros neurônios na mesma simulação.

Para este gráfico temos que o neurônio representado pela cor de rosa não foi ativado por seus vizinhos. Desta forma este não entrou em sincronismo com os demais. Para melhor análise deste fenômeno adotemos.

$\eta$	neurônios	% inativos iniciais	$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	Estímulo positivo	Estímulo negativo
0,009	101	90	0,4	6,0	0,1	1,5	0,2	- 0,1

E para sete neurônios arbitrários vemos no gráfico 7 que a incidência de neurônios desativados é muito maior neste caso, pois para esta análise adotou-se aproximadamente 90% de neurônios inativos.

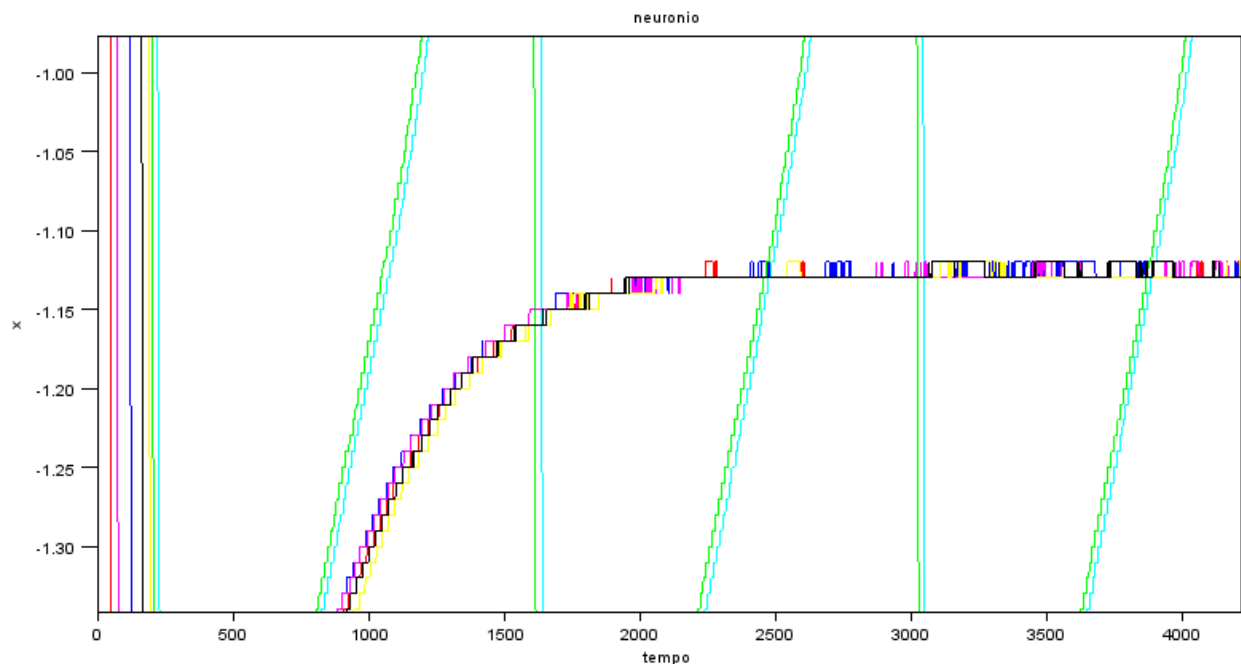


Gráfico 7 – 90% de neurônios inativos iniciais.

Para o gráfico 7 temos que para a maioria dos neurônios em análise estes estão inativos. Ao fundo temos apenas em sincronismo os neurônios representados pelas cores verde e azul.

Para finalizar o estudo da rede neural localmente acoplada consideremos a situação favorável ao oscilador em que o estímulo positivo é bem maior que o negativo. Neste caso, os neurônios que estão inativos inicialmente serão excitados pelos vizinhos. Adotemos os seguintes parâmetros e observemos o gráfico 8.

$\eta$	neurônios	% inativos iniciais	$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	Estímulo positivo	Estímulo negativo
0,1	101	10	0,4	6,0	0,1	1,5	2,0	- 0,1

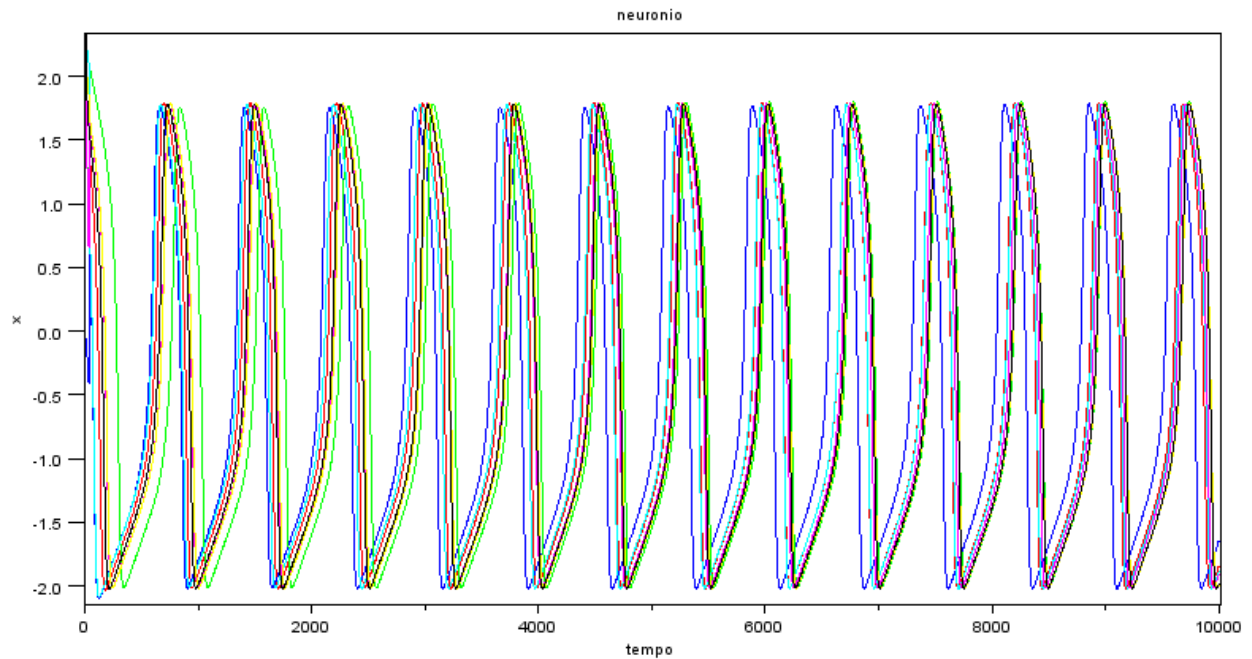


Gráfico 8 – Estudo de alto estímulo inicial.

Estudado os parâmetros relevantes para a rede localmente acoplada, segue as análises para a rede globalmente acoplada, que consiste de outro programa com pequenas modificações características da rede em questão.

Nesta rede um neurônio arbitrário sofre influência excitatória ou inibitória de todos os outros neurônios conectados a rede. Para uma primeira análise considere os seguintes parâmetros:

$\eta$	neurônios	% inativos iniciais	$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	Precisão (%)	<b><i>Tempo de sincronização</i></b>
0,1	101	10	0,02	6,0	0,1	1,5	5%	-

Em que o estímulo excitatório é  $I = 0,2$  e o inibitório  $I = -0,1$ . Esta simulação pode ser vislumbrada no gráfico 9.

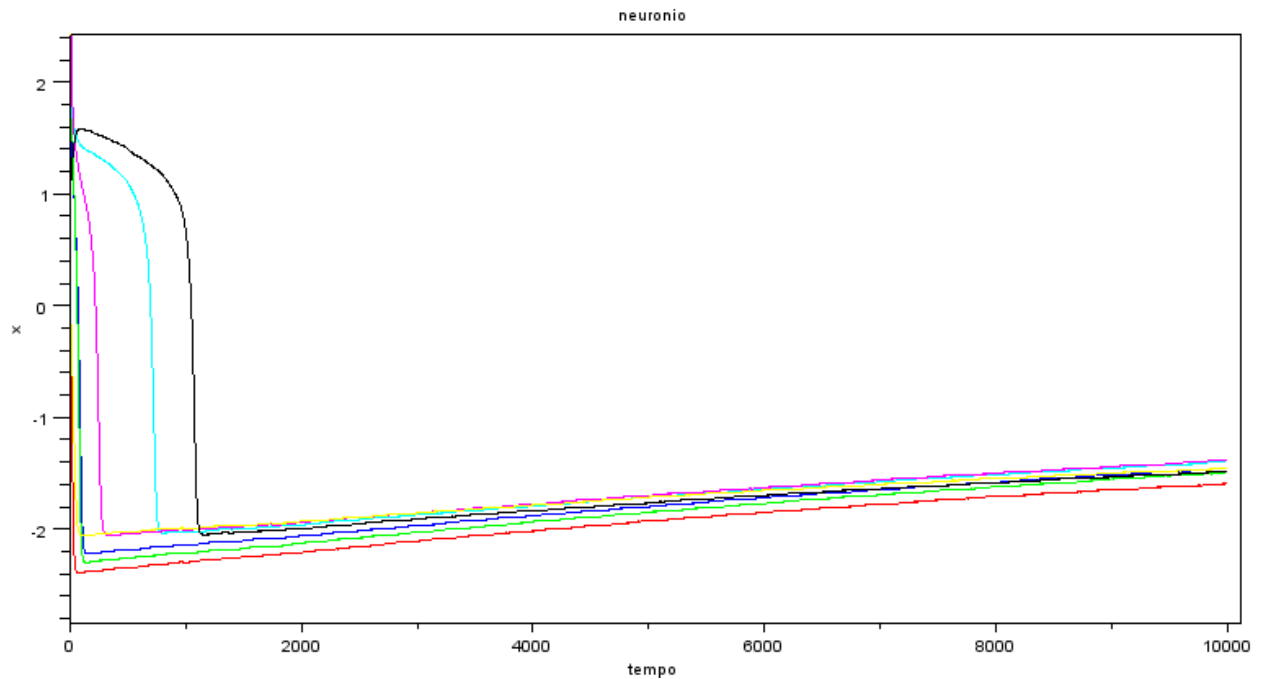


Gráfico 9 – Simulação dos parâmetros adotados como padrão.

Faz-se necessário a mudança nestes parâmetros para uma melhor análise do oscilador. Foram realizadas sucessivas simulações para estimar o menor valor da força de acoplamento ao qual o oscilador sincroniza globalmente. Os seguintes parâmetros consistem em um bom objeto de estudo desta interação. Para tanto consideremos:

$\eta$	neurônios	% inativos iniciais	$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	Precisão (%)	<b>Tempo de sincronização</b>
?	101	10	0,2	6,0	0,1	1,5	5%	-

Em que o estímulo excitatório é  $I = 2,0$  e o inibitório  $I = -0,1$ .

Para  $\eta = 0.009$  não temos a sincronização global de todos os osciladores. Isto é evidenciado pelo programa, pois este não imprime o tempo mínimo de sincronização, o que implica que em nenhum momento de 0 a 10000, todos neurônios estiveram com valores de  $x$  próximos com precisão de 5%. A simulação resultou no gráfico 10.

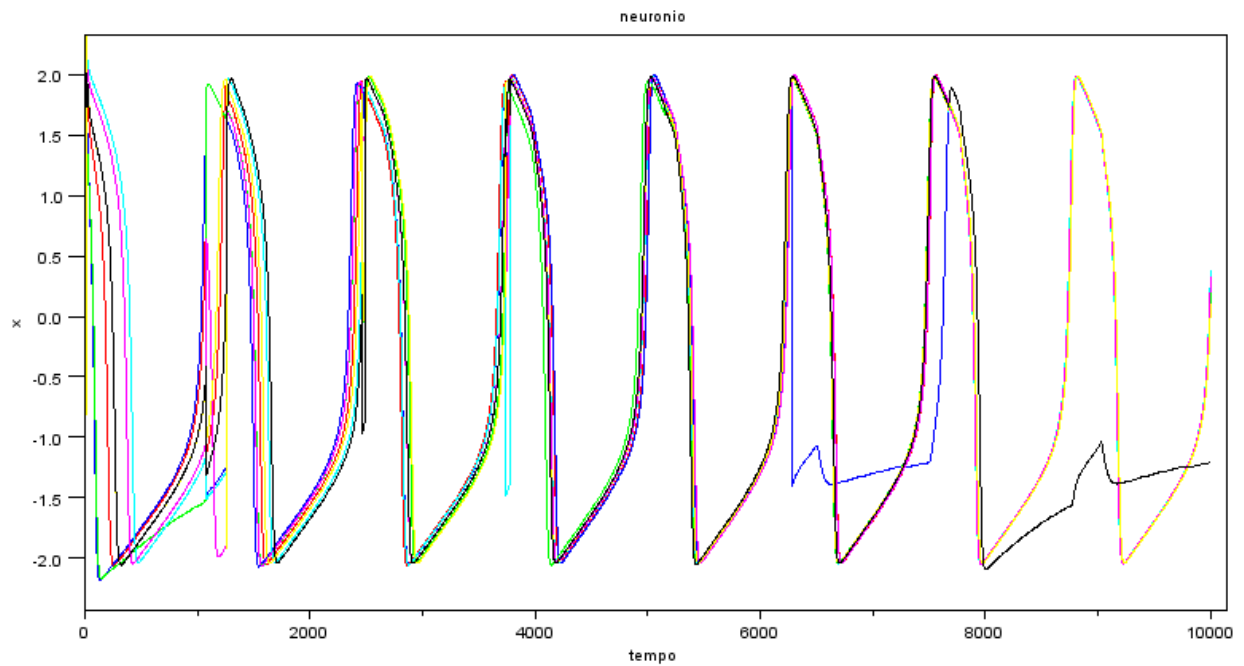


Gráfico 10 – Estudo de  $\eta = 0.009$  para a rede globalmente acoplada.

Para  $\eta = 0.011$  temos a sincronização completa com tempo mínimo de 7696.30 e o seu gráfico é ilustrado no gráfico 11.

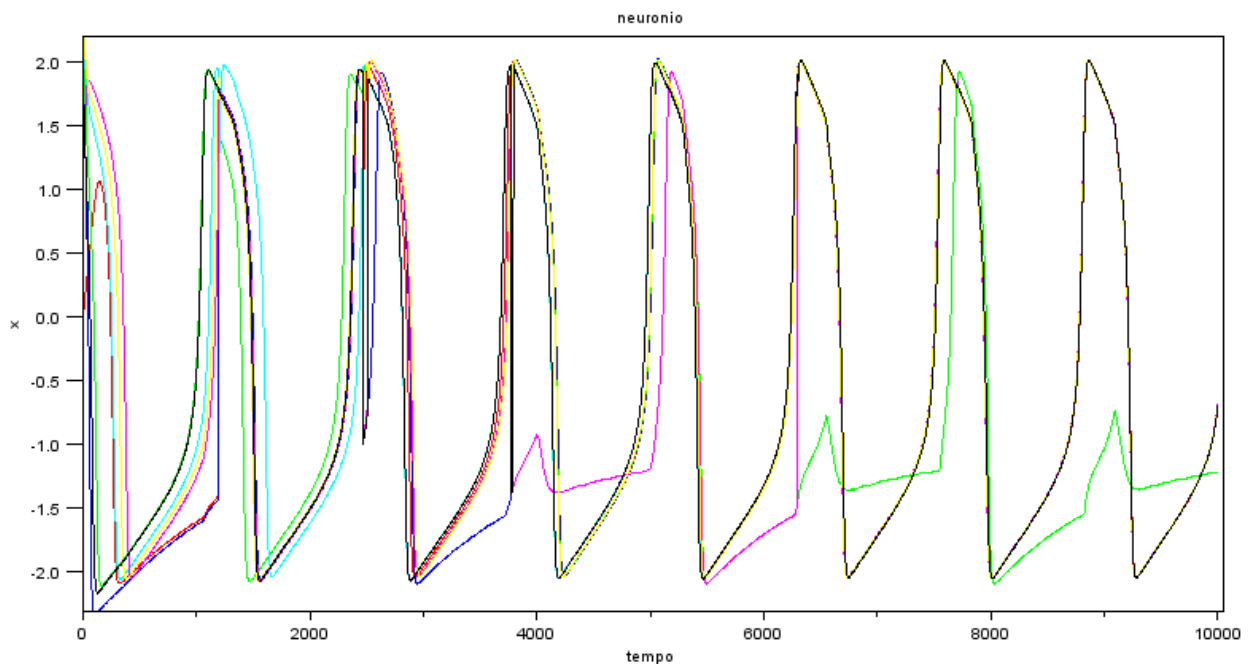
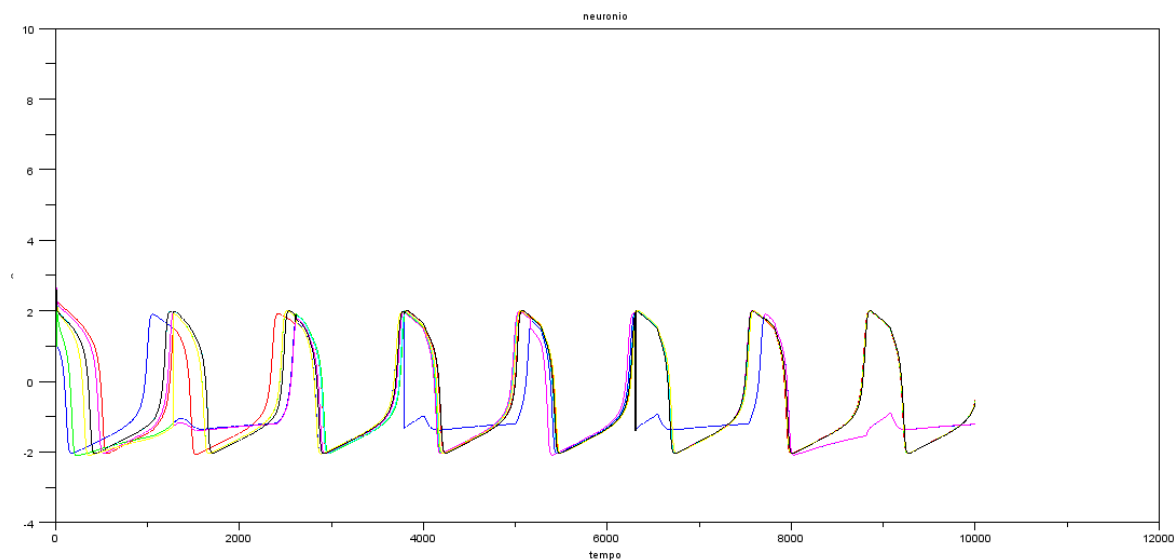


Gráfico 11 - Estudo de  $\eta = 0.011$  para a rede globalmente acoplada.

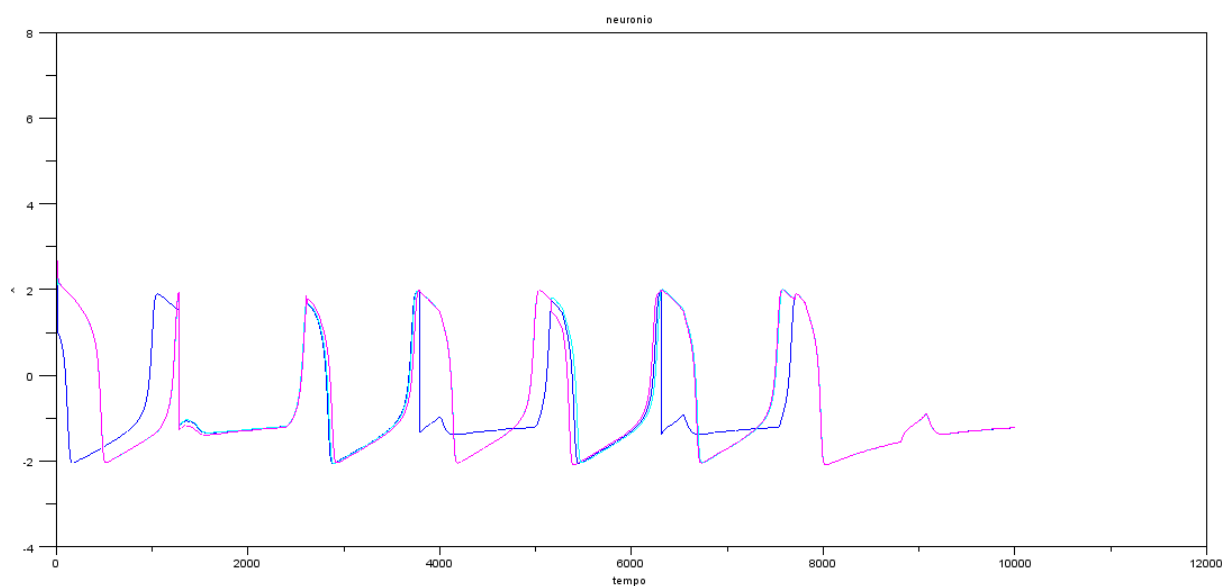
Este fato nos indica que o menor valor de  $\eta$  para que haja uma sincronização global é o valor de  $\eta = 0.01$ , pois para  $\eta$  menor (gráfico 10), não temos a sincronização global.

Adotemos os mesmos parâmetros de simulação, porém agora com  $\eta = 0.01$ . Com este obtemos um tempo mínimo de sincronização de 7694.33 e esta simulação é expressa no gráfico 12, para sete neurônios arbitrários.



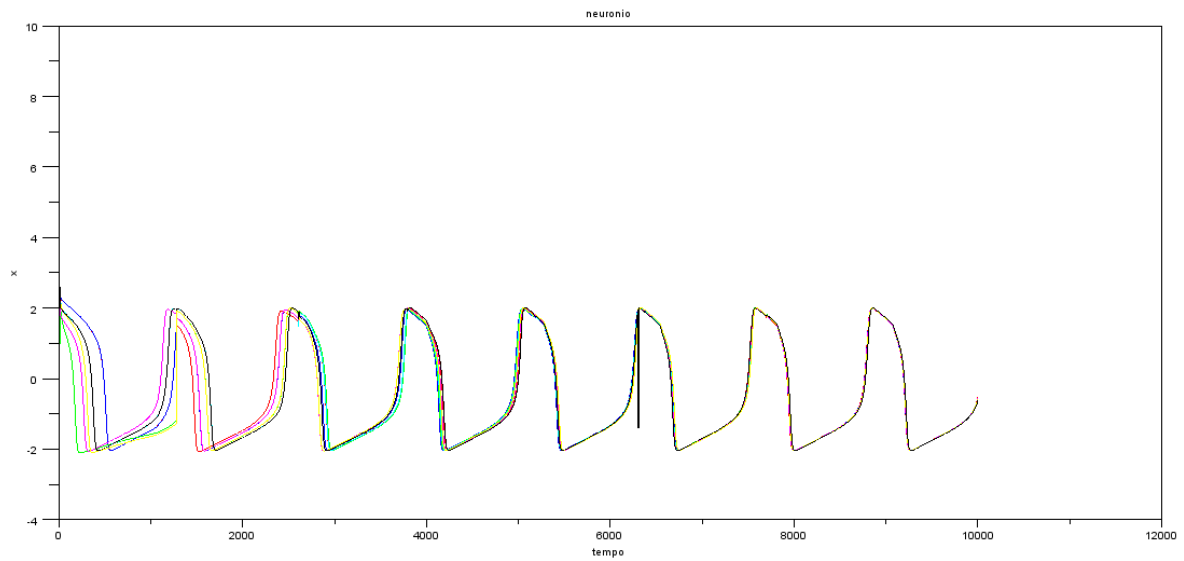
*Gráfico 12 - Estudo de  $\eta = 0.01$  para a rede globalmente acoplada.*

Ao analisar este gráfico percebe-se dois tipos distintos de sincronização. O primeiro padrão é mostrado no gráfico 13 em que se adotou neurônios com padrão semelhante. É importante salientar que nas simulações feitas este tipo de padrão foi evidenciado com menor ocorrência.



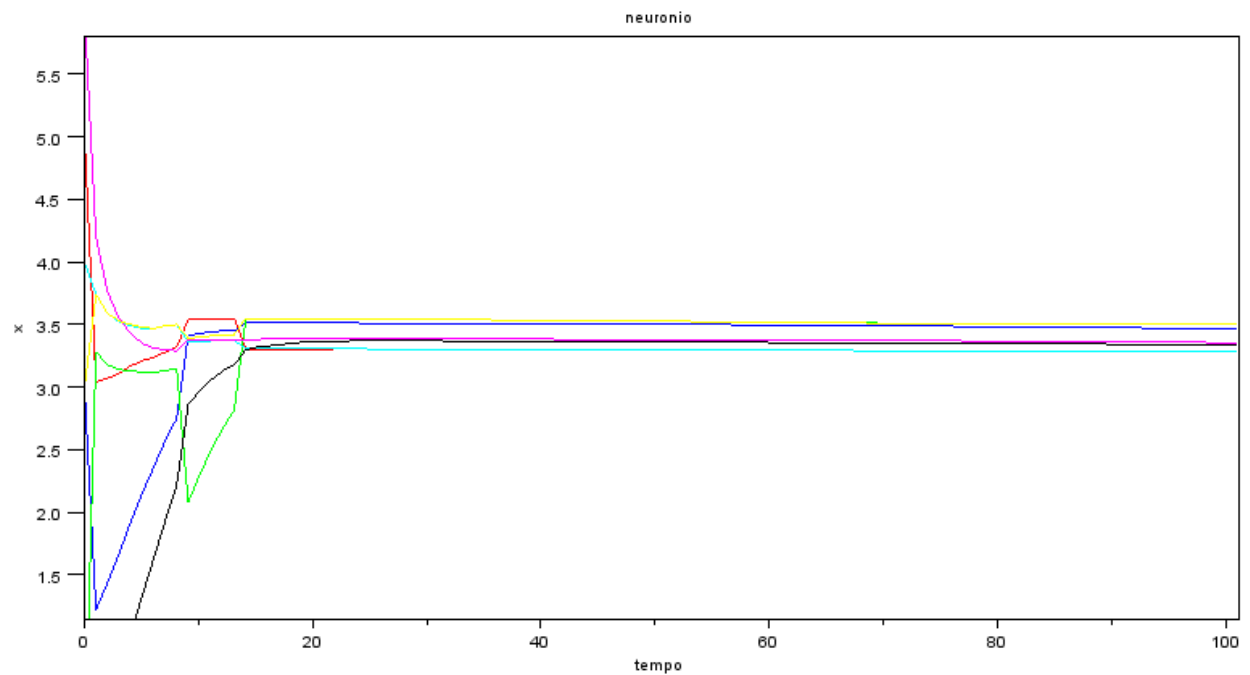
*Gráfico 13 – Padrão de sincronização de menor ocorrência.*

A análise do outro padrão é evidenciada no gráfico 14 o qual ocorre em maior proporção entre os neurônios.



*Gráfico 14 – Padrão de sincronização de maior ocorrência.*

Para um  $\eta=0,3$  (considerado alto para este tipo de rede) a interação entre os neurônios é muito intensa a ponto de haver uma inibição na ativação dos osciladores. Situação explicitada no gráfico 15.



*Gráfico 15 – Estudo de  $\eta=0,3$ .*

## **Conclusão**

Considerando o estudo do presente relatório e suas simulações concluiu-se que dentro das limitações (interações seriais entre os neurônios, modelo simplificado, arbitrariedade de neurônios estudados e restrição a quantidade de dados), para a rede globalmente acoplada o valor de  $\tau$  que se determinou empiricamente foi o de 0,01. Tal análise está limitada na definição do que é se ter a sincronização da rede, dado que um estudo dos padrões de sincronização dos neurônios pode-se dar de diferentes formas. Este fato foi evidenciado através da obtenção de diferentes padrões de sincronização.

O método para o cálculo de tempo de mínimo de sincronização implementado não abrange os diferentes tipos de padrões de sincronização, apenas indica o tempo aos quais todos os neurônios da rede estão com valores de  $x$  muito próximos. Este fato implica que em simulações que aparentemente não se houve sincronização, devido a não sinalização pelo programa do tempo mínimo, de fato há, porém com sincronizações que não cravadas, mas que tenham um padrão em si com relação aos neurônios da rede.

Em suma, este estudo possibilitou a análise qualitativa referente à interação em redes acopladas que ocorrem de maneira não trivial. Foi possível entender como a variação de determinados parâmetros influenciam na sincronização da rede e nos remeteu ao estudo da dinâmica deste sistema na forma de seus gráficos de oscilação com diferentes tipos de sincronização observados.