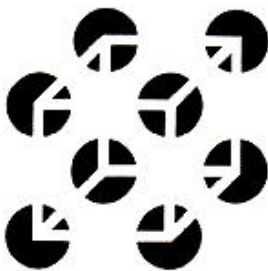


Control Automático 2

Notas de Clase



«Cubo» por M.C. Escher

Por Julio H. Braslavsky
Profesor Asociado
Automatización y Control Industrial
Universidad Nacional de Quilmes
Agosto 2001

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Introducción a Control Automático 2	1
1.1.1. Representación Externa	1
1.1.2. Representación Interna	2
1.1.3. Sistemas Estacionarios	2
1.1.4. Panorama de la Materia	2
1.2. Bibliografía y Material de Estudio	4
2. Descripción Matemática de Sistemas	7
2.1. Una taxonomía de sistemas	7
2.2. Sistemas Lineales	8
2.3. Sistemas lineales estacionarios	9
2.3.1. Representación entrada-salida	9
2.3.2. Representación en Espacio de Estados	10
2.4. Representación en diagrama de bloques	11
2.5. Linealización	11
2.6. Sistemas discretos	15
2.6.1. Descripción entrada-salida de sistemas discretos	15
2.6.2. Representación en Espacio de Estados	16
2.7. Resumen	17
2.8. Ejercicios	17
3. Herramientas de Álgebra Lineal	19
3.1. Vectores y Matrices	19
3.2. Bases y Ortonormalización	20
3.2.1. Norma de vectores	22
3.2.2. Ortonormalización	22
3.3. Ecuaciones Lineales Algebraicas	23
3.4. Transformaciones de Semejanza	25
3.5. Forma Diagonal y Forma de Jordan	26
3.5.1. Autovalores y autovectores	26
3.5.2. Forma Companion	27
3.5.3. Forma de Jordan	28
3.6. Funciones de Matrices Cuadradas	31
3.6.1. Polinomios	31

3.6.2.	Polinomio mínimo	32
3.6.3.	Evaluación de funciones matriciales	32
3.6.4.	Funciones matriciales no necesariamente polinomiales	33
3.6.5.	Series de Potencias	35
3.6.6.	Diferenciación e Integración Matricial	35
3.6.7.	La Exponencial Matricial	36
3.7.	Ecuación de Lyapunov	36
3.8.	Formas Cuadráticas	37
3.8.1.	Matrices definidas y semi-definidas positivas	38
3.9.	La Descomposición en Valores Singulares (SVD)	39
3.10.	Normas de Matrices	40
3.11.	Resumen	42
3.12.	Ejercicios	43
4.	Solución de la Ecuación de Estado y Realizaciones	45
4.1.	Introducción	45
4.2.	Solución de Ecuaciones de Estado Estacionarias	46
4.2.1.	Comportamiento asintótico de la respuesta a entrada nula	47
4.2.2.	Discretización	48
4.3.	Ecuaciones de Estado Equivalentes	50
4.3.1.	Equivalencia a estado cero	51
4.3.2.	Parámetros de Markov	52
4.4.	Formas Canónicas	52
4.4.1.	Forma canónica modal	53
4.4.2.	Forma canónica controlable	53
4.4.3.	Forma canónica del controlador	54
4.5.	Realizaciones	54
4.5.1.	Realización Mínima	58
4.5.2.	Sistemas Discretos	59
4.6.	Solución de Ecuaciones de Estado Inestacionarias	59
4.6.1.	Matriz Fundamental	60
4.6.2.	Caso Discreto	64
4.7.	Ecuaciones Inestacionarias Equivalentes	64
4.8.	Realizaciones de Sistemas Inestacionarios	66
4.9.	Resumen	67
4.10.	Ejercicios	67
5.	Estabilidad	70
5.1.	Introducción	70
5.2.	Estabilidad Externa de Sistemas Estacionarios	71
5.2.1.	Representación externa	71
5.2.2.	Caso MIMO	75
5.2.3.	Representación interna	75
5.2.4.	Caso discreto	76
5.3.	Estabilidad Interna de Sistemas Estacionarios	77
5.3.1.	Relaciones entre Estabilidad Externa e Interna	81
5.3.2.	Sistemas discretos	82
5.4.	El Teorema de Lyapunov	82

5.4.1.	Estabilidad Interna de Sistemas Discretos	84
5.5.	Estabilidad de Sistemas Inestacionarios	85
5.5.1.	Estabilidad entrada/salida	85
5.5.2.	Estabilidad interna	85
5.5.3.	Invariancia frente a transformaciones de equivalencia	87
5.6.	Resumen	88
5.7.	Ejercicios	89
6.	Controlabilidad y Observabilidad	91
6.1.	Controlabilidad	91
6.1.1.	Definiciones y tests fundamentales	91
6.1.2.	Control de mínima energía y gramiano de controlabilidad	94
6.1.3.	Tests PBH de controlabilidad	97
6.1.4.	Controlabilidad y transformaciones de semejanza	98
6.2.	Observabilidad	98
6.2.1.	Definiciones y tests fundamentales	98
6.2.2.	Gramiano de observabilidad	101
6.2.3.	Tests PBH de observabilidad	102
6.2.4.	Observabilidad y transformaciones de semejanza	102
6.3.	Descomposiciones Canónicas	104
6.4.	Condiciones en Ecuaciones en Forma Modal	110
6.5.	Ecuaciones de Estado Discretas	114
6.5.1.	Índices de Controlabilidad y Observabilidad	116
6.5.2.	Controlabilidad al Origen y Alcanzabilidad	117
6.6.	Controlabilidad, Observabilidad y Muestreo	117
6.7.	Sistemas Inestacionarios	120
6.8.	Ejercicios	123
7.	Especificaciones y Limitaciones de Diseño	125
7.1.	Sensibilidad y Robustez	125
7.1.1.	Perturbaciones	126
7.1.2.	Incertidumbre	127
7.2.	Funciones de Sensibilidad	128
7.2.1.	Funciones de transferencia en lazo cerrado	128
7.2.2.	Especificaciones de la Respuesta en Frecuencia	130
7.3.	Robustez	130
7.3.1.	Estabilidad Robusta	130
7.3.2.	Desempeño robusto	133
7.4.	Limitaciones de Diseño	133
7.4.1.	Restricciones algebraicas en $\hat{S}(s)$ y $\hat{T}(s)$	134
7.4.2.	Especificaciones de diseño en la respuesta temporal	134
7.4.3.	Restricciones en la respuesta al escalón	135
7.4.4.	Efecto de ceros y polos en el eje imaginario	139
7.5.	Resumen	142
7.6.	Ejercicios	142

8. Realimentación de Estados y Observadores	145
8.1. Realimentación de Estados	147
8.1.1. Otra receta para calcular K	151
8.2. Estabilización	151
8.3. Regulación y Seguimiento	152
8.3.1. Seguimiento Robusto: Acción Integral	155
8.4. Observadores	157
8.4.1. Una primer solución: Observador a lazo abierto	157
8.4.2. Una solución mejor: Observador a lazo cerrado	158
8.4.3. Observador de orden reducido	161
8.5. Realimentación de estados estimados	161
8.5.1. Notas Históricas	163
8.6. Realimentación de estados — caso MIMO	164
8.6.1. Diseño Cíclico	165
8.6.2. Diseño via Ecuación de Sylvester	167
8.6.3. Diseño Canónico	168
8.7. Observadores — MIMO	169
8.7.1. Observador MIMO de orden reducido	169
8.8. Consideraciones de diseño	170
8.8.1. Dificultades de la realimentación de ganancia elevada	170
8.8.2. Resumen del proceso de diseño	172
8.9. Resumen	172
8.10. Ejercicios	174
9. Introducción al Control Óptimo	176
9.1. Introducción	176
9.1.1. El Principio de Optimalidad	177
9.1.2. Nota Histórica	177
9.2. Control LQ discreto	178
9.2.1. Transición $[N - 1] \rightarrow [N]$	178
9.2.2. Transición $[N - 2] \rightarrow [N]$	180
9.2.3. Transición $[k] \rightarrow [N]$	180
9.3. Control LQ en tiempo continuo	182
9.4. Control LQ de Horizonte Infinito	183
9.5. Estimadores Óptimos	184
9.5.1. Modelos de sistemas con ruido	185
9.5.2. Filtro de Kalman discreto	185
9.6. Notas	190
9.7. Ejercicios	192
Bibliografía	193

Índice de figuras

2.1. Péndulo	7
2.2. Amplificador	7
2.3. Cohete	11
2.4. DB del sistema (2.10)	12
2.5. Trayectoria de operación y aproximación	12
2.6. Péndulo invertido.	14
3.1. Cambio de coordenadas.	22
3.2. Bola unitaria en \mathbb{R}^2 en normas 1, 2 e ∞	22
3.3. Hiper-elipsoide E en \mathbb{R}^3	40
4.1. Circuito RLC	50
5.1. Función absolutamente integrable que no tiende a 0.	72
5.2. Región de estabilidad externa para polos de sistemas continuos	74
5.3. Sistema realimentado con retardo.	75
5.4. Región de estabilidad externa para polos de sistemas discretos	77
5.5. Retrato de fase del sistema (5.4)	78
5.6. Espacio de estados (unidimensional) del sistema (5.5)	78
5.7. Relaciones entre estabilidad externa y estabilidad interna	81
5.8. Estabilidad uniforme.	86
5.9. Estabilidad exponencial uniforme.	87
6.1. Sistemas eléctricos no controlables	92
6.2. Sistema plataforma	96
6.3. Actuación y Variación de los Estados	97
6.4. Sistemas eléctricos no observables	99
6.5. Circuito RLC	103
6.6. Descomposición de Kalman	108
6.7. Circuito no controlable ni observable	109
6.8. Diagrama de Bloques	112
6.9. Estructura interna de $\frac{1}{1-\lambda_i}$	113
6.10. Sistema de tanques desconectados	119
6.11. Sistema de tanques en paralelo	120
6.12. Sistema controlable de tanques en paralelo	120
7.1. Lazo de control de un grado de libertad.	126
7.2. Incertidumbre multiplicativa	127
7.3. Lazo de control de dos grados de libertad.	129
7.4. Formas típicas para $ \hat{T}(j\omega) $ and $ \hat{S}(j\omega) $	131

7.5. Mediciones, modelo nominal e incertidumbre	132
7.6. Estabilidad robusta gráficamente	132
7.7. Desempeño robusto gráficamente	133
7.8. Especificaciones en la respuesta temporal	135
7.9. Caso manejable	138
7.10. Caso difícil	138
7.11. Péndulo invertido	139
7.12. Respuesta a lazo cerrado del péndulo invertido	140
8.1. Realimentación de estados	146
8.2. Realimentación de salida con observador	146
8.3. Respuesta sin precompensación	154
8.4. Respuesta precompensada	154
8.5. Respuesta del sistema con incertidumbre	154
8.6. Respuesta del sistema con perturbación de entrada.	154
8.7. Sistema con perturbación a la entrada	155
8.8. Esquema de seguimiento robusto	155
8.9. DB equivalente.	157
8.10. Observador en lazo abierto	158
8.11. Observador en lazo cerrado	159
8.12. Observador en lazo cerrado	159
8.13. Realimentación de estados estimados	162
8.14. \mathbb{R}^2	166
8.15. Realimentación por diseño cíclico	167
8.16. Configuración de polos Butterworth para $k = 1, 2, 3, 4$	171
8.17. Proceso de diseño	172
9.1. Posibles trayectorias de 1 al 8.	177
9.2. Evolución del estado en lazo cerrado	181
9.3. Evolución de las ganancias $K[k] = [k_1[k], k_2[k]]$	182
9.4. Dos señales ruidosas con mayor (iz.) y menor (der.) variabilidad.	187

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción a Control Automático 2

Esta asignatura es un curso avanzado en sistemas lineales y técnicas de control. Introduce la representación y el diseño de sistemas en *dominio temporal*, en contraste con las técnicas clásicas basadas en función transferencia, *dominio frecuencial*, como las vistas en Control Automático 1.

El objetivo del curso es brindar una introducción en profundidad a los conceptos fundamentales de la teoría de sistemas lineales descritos por ecuaciones en variables de estado, y a las principales técnicas de análisis y diseño de sistemas lineales de control en *variable de estado*.

Los *sistemas* a los que nos referiremos a lo largo de la materia son representaciones matemáticas de *sistemas físicos*, y el tipo de representación considerada son las ecuaciones diferenciales en *variable de estado*. Como veremos, estas representaciones matemáticas pueden clasificarse como

- representaciones externas
- representaciones internas

En general, vamos a asumir que el modelo del sistema físico está disponible. Es decir, no vamos a profundizar en la obtención de este modelo, que puede hacerse utilizando técnicas de modelado a partir de leyes físicas (como en Procesos y Máquinas), o a través de estimación paramétrica (como en Identificación).

1.1.1. Representación Externa

A partir de la propiedad de linealidad, un sistema puede describirse mediante la ecuación integral

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

La ecuación (1.1) describe la relación entre la señal de entrada u y la señal de salida y , ambas funciones, en general vectoriales, de la variable real t , el tiempo.

Este tipo de representación es *entrada-salida* o *externa*, y el sistema en sí está descrito como un *operador*, denotémoslo \mathcal{G} , que mapea la función u en y ,

$$\begin{aligned}\mathcal{G} : u &\mapsto y \\ y &= \mathcal{G}u \\ y(t) &= \int_{t_0}^t G(t, \tau)u(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Para cada posible señal de entrada u , el operador \mathcal{G} “computa” la salida y a través de la integral (1.1), que está definida por la función G , intrínseca al sistema.

1.1.2. Representación Interna

La descripción externa (1.1) vale para sistemas a *parámetros distribuidos* (como las líneas de transmisión de energía eléctrica). Cuando el sistema es a *parámetros concentrados*, entonces también puede describirse por ecuaciones del tipo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1.2)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \quad (1.3)$$

Notar que la ecuación (1.2) es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, mientras que la ecuación (1.3) es un sistema de ecuaciones algebraicas. Conforman lo que se conoce como representación *interna* de sistemas lineales.

Como el vector x se denomina el *estado* del sistema, el conjunto de ecuaciones (1.2), (1.3) se denominan ecuación en *espacio de estados*, o simplemente, ecuación de estado.

1.1.3. Sistemas Estacionarios

Si el sistema es lineal, además de ser a parámetros concentrados, *estacionario*, entonces las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) se reducen a

$$y(t) = \int_0^t G(t - \tau)u(\tau) d\tau \quad (1.4)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.5)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (1.6)$$

Para los sistemas lineales estacionarios es posible aplicar la transformada de Laplace, que es una herramienta importante en análisis y diseño (Control Automático 1). Aplicando la transformada de Laplace a (1.4) obtenemos la familiar representación

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s) \quad (1.7)$$

donde la función $\hat{G}(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$ es la *función* o *matriz transferencia* del sistema. Ambas (1.4) y (1.7) son representaciones externas; (1.4) en el *dominio temporal*, y (1.7) en el *dominio frecuencial*.

1.1.4. Panorama de la Materia

1. **Introducción**
2. **Descripción Matemática de Sistemas**
 - a) Una taxonomía de sistemas
 - b) Sistemas lineales
 - c) Sistemas lineales estacionarios
 - d) Linealización
 - e) Sistemas discretos
3. **Herramientas de Álgebra Lineal**
 - a) Vectores y matrices
 - b) Bases y ortonormalización
 - c) Ecuaciones lineales algebraicas
 - d) Transformaciones de similitud
 - e) Forma diagonal y forma de Jordan
 - f) Funciones matriciales
 - g) Ecuación de Lyapunov
 - h) Algunas fórmulas útiles
 - i) Formas cuadráticas y matrices definidas positivas
 - j) Descomposición en valores singulares
 - k) Normas de matrices
4. **Solución de la Ecuación de Estado y Realizaciones**
 - a) Solución de ecuaciones de estado estacionarias
 - b) Cambio de coordenadas
 - c) Realizaciones
 - d) Sistemas lineales inestacionarios
5. **Estabilidad**
 - a) Estabilidad entrada-salida
 - b) Estabilidad interna
 - c) Teorema de Lyapunov
 - d) Estabilidad de sistemas inestacionarios
6. **Controlabilidad y Observabilidad**
 - a) Controlabilidad
 - b) Observabilidad
 - c) Descomposiciones canónicas
 - d) Condiciones en ecuaciones en forma de Jordan
 - e) Ecuaciones de estado discretas
 - f) Controlabilidad y muestreo
 - g) Sistemas inestacionarios
7. **Especificaciones y Limitaciones de Diseño**
 - a) Funciones de sensibilidad
 - b) Especificaciones de diseño
 - c) Limitaciones en la respuesta temporal
 - d) Limitaciones en la respuesta frecuencial
8. **Realimentación de Estados y Observadores**
 - a) Realimentación de estados
 - b) Regulación y seguimiento
 - c) Observadores
 - d) Realimentación de estados estimados
 - e) Realimentación de estados — Caso MIMO
 - f) Observadores — Caso MIMO
 - g) Realimentación de estados estimados — Caso MIMO
9. **Introducción al Control Óptimo**
 - a) El principio de optimalidad
 - b) Regulador óptimo cuadrático
 - c) Estimador óptimo cuadrático
 - d) Control óptimo cuadrático Gaussiano

1.2. Bibliografía y Material de Estudio

Para los capítulos 1 a 6 y 8, el programa sigue muy de cerca el libro de texto (en inglés, sorry!)

- Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.

Para el capítulo 7 puede consultarse

- M.M. Seron, J.H. Braslavsky, G.C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Springer-Verlag, 1997.

Para el capítulo 9,

- John S. Bay. *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill, 1999.

Otros libros recomendados:

- Wilson J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, 2nd edition, 1995.
- T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- E.D. Sontag. *Mathematical control theory. Deterministic finite dimensional systems*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1998.

Capítulo 2

Descripción Matemática de Sistemas

2.1. Una taxonomía de sistemas

Uno de los problemas más simples en robótica es el control de la posición de un brazo simple de robot usando un motor colocado en la junta. Matemáticamente, este sistema no es más que un péndulo controlado por torque.

Asumiendo que la fricción es despreciable, que el brazo es rígido, y que toda la masa del brazo está concentrada en el extremo libre, aplicando las leyes de Newton, el ángulo θ respecto de la vertical está dado por la ecuación diferencial

$$m\ddot{\theta}(t) + mg \sin \theta(t) = u(t). \quad (2.1)$$

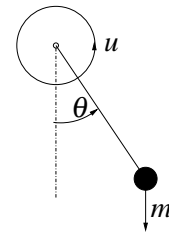


Figura 2.1: Péndulo

El brazo simple de robot es un ejemplo de lo que se llama un sistema *dinámico, causal, de tiempo continuo, finito-dimensional, no lineal y estacionario*.

Dinámico se refiere a que las variables que definen el *estado* del brazo en un instante t dado, θ y $\dot{\theta}$, no dependen en forma instantánea del torque de control u . Si por ejemplo se aplica un valor de torque constante, θ tomará un tiempo no nulo en alcanzar su valor de equilibrio.

Un sistema no dinámico es *estático*, y en él la salida depende en forma instantánea de la entrada. Un ejemplo es un amplificador electrónico donde efectos capacitivos e inductivos son despreciables. Los sistemas estáticos suelen llamarse también *sin memoria*.

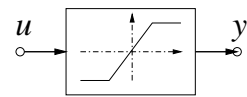


Figura 2.2: Amplificador

Un sistema es *causal* o *no anticipativo* si la salida en un instante dado depende de los valores presentes y pasados de la entrada, y no de valores futuros. Sistemas *anticipativos* o *predictivos* pueden “adivinar” entradas futuras. Ningún sistema físico real es anticipativo.

La salida actual de un sistema causal depende del pasado de la entrada. ¿Pero cuánto tiempo atrás tienen efecto valores pasados de la entrada? Estrictamente, habría que volver atrás en el tiempo hasta $-\infty$, lo que no es muy práctico. El concepto de *estado* salva este problema.

Definición 2.1 (Estado). El *estado* $x(t_0)$ de un sistema en el instante t_0 es la información en t_0 que junto con la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$ determina unívocamente la salida $y(t)$ para todo $t \geq t_0$.

El estado $x(t_0)$ resume toda la historia del sistema desde $-\infty$ hasta t_0 : conociendo el valor de ángulo θ y velocidad angular $\dot{\theta}$ en t_0 , podemos predecir la respuesta del brazo de robot a valores de torque u para todo $t \geq t_0$.

Podemos pensar que la *entrada* para $t \geq t_0$ y las *condiciones iniciales* $x(t_0)$ determinan la evolución del sistema para $t \geq t_0$

$$x(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} x(t_0) \\ u(t), t \geq t_0 \end{cases}$$

El ejemplo del brazo de robot es *finito-dimensional*, puesto que el estado $x(t)$ en un instante cualquiera de tiempo t puede ser caracterizado completamente por un número finito de parámetros (en este caso, dos: ángulo y velocidad angular).

Un ejemplo de sistema *infinito-dimensional* aparece en el problema de regulación de la temperatura del aula por medio de acondicionadores de aire. La temperatura aparece como una *distribución* en todo el volumen del aula, y su caracterización completa requiere un número *infinito* de datos (la temperatura en todos los puntos del aula).

El término *en tiempo continuo* se refiere al hecho de que la variable t es continua, en contraste al caso de un sistema definido por una *ecuación diferencia*

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[x].$$

2.2. Sistemas Lineales

Un sistema se llama lineal si cumple con el *principio de superposición*, es decir, dados dos pares de condiciones iniciales y entradas,

$$x_i(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} x_i(t_0) \\ u_i(t), t \geq t_0 \end{cases} \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (2.2)$$

tenemos que

$$x_1(t) + x_2(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} x_1(t_0) + x_2(t_0) \\ u_1(t) + u_2(t), t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\alpha x_i(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} \alpha x_i(t_0) \\ \alpha u_i(t), t \geq t_0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

La propiedad (2.3) es *de aditividad*, y la propiedad (2.4) *de homogeneidad*. La combinación de ambas es la *propiedad de superposición*. La propiedad de aditividad permite considerar la respuesta del sistema como la superposición de la respuesta a condiciones iniciales y excitación aplicadas por separado.

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} x_l(t), t \geq t_0 & \Leftarrow \begin{cases} x(t_0) \\ u(t) = 0, t \geq t_0 \end{cases} \\ x_f(t), t \geq t_0 & \Leftarrow \begin{cases} x(t_0) = 0 \\ u(t), t \geq t_0 \end{cases} \end{cases}$$

La respuesta de un sistema lineal es la superposición de su respuesta *libre* (a condiciones iniciales, sin excitación) y su respuesta *forzada* (a excitación, con condiciones iniciales nulas — *relajado*).

Los sistemas *no lineales*, como el brazo de robot, no cumplen con el principio de superposición.

2.3. Sistemas lineales estacionarios

Un sistema es *estacionario* si para cada par condiciones iniciales y entrada

$$x(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} x(t_0) \\ u(t), t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

y cada $T \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$x(t - T), t \geq t_0 + T \Leftarrow \begin{cases} x(t_0 + T) \\ u(t - T) + u_2(t), t \geq t_0 + T. \end{cases} \quad (2.6)$$

Es decir, el sistema responde da la misma respuesta, corrida en tiempo, si se le aplica la misma entrada corrida con iguales condiciones iniciales. Un sistema que no cumple esta propiedad se dice *inestacionario*.

2.3.1. Representación entrada-salida

Por superposición se deduce la representación de sistemas lineales mediante la *integral de convolución*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

donde $g(t, \tau)$ es *respuesta al impulso*: la salida del sistema a un impulso unitario $\delta(t)$ en el instante τ (Chen 1999).

La causalidad implica que

$$\text{causalidad} \Leftrightarrow g(t, \tau) = 0 \text{ para } t < \tau,$$

y como las condiciones iniciales se asumen nulas, (2.7) se reduce a

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau) u(\tau) d\tau.$$

Si el sistema tiene p entradas y q salidas, entonces hablamos de la *matriz de respuesta al impulso* $G(t, \tau) \in \mathbb{R}^{q \times p}$.

Si el sistema es estacionario entonces para cualquier T se cumple

$$g(t, \tau) = g(t + T, \tau + T) = g(t - \tau, 0).$$

Así podemos redefinir $g(t - \tau, 0)$ simplemente como $g(t - \tau)$. La representación entrada-salida del sistema se reduce a

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau.$$

La condición de causalidad para un sistema lineal estacionario se reduce a $g(t) = 0$ para $t < 0$.

2.3.2. Representación en Espacio de Estados

Todo sistema lineal finito-dimensional puede describirse mediante *ecuaciones de estado* (EE)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t).\end{aligned}$$

Para un sistema de *orden* n , el *vector de estados* es un vector $n \times 1$, es decir que tiene n variables de estado, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ para cada t . Si el sistema tiene p entradas y q salidas, entonces $u(t) \in \mathbb{R}^p$ e $y(t) \in \mathbb{R}^q$. Las matrices A, B, C, D se suelen llamar

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: *de evolución*

$C \in \mathbb{R}^{q \times n}$: *de salida*

$B \in \mathbb{R}^{n \times p}$: *de entrada*

$D \in \mathbb{R}^{q \times p}$: *de ganancia directa*

Cuando el sistema es además estacionario, entonces la representación en EE se reduce a

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Aplicando la transformada de Laplace a (2.8) obtenemos

$$\begin{aligned}s\hat{x}(s) - x(0) &= A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) &= C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s),\end{aligned}$$

de donde siguen

$$\begin{aligned}\hat{x}(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) &= C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]\hat{u}(s).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Las ecuaciones algebraicas (2.9) permiten computar $\hat{x}(s)$ y $\hat{y}(s)$ de $x(0)$ y $\hat{u}(s)$. Las transformadas inversas dan $x(t)$ e $y(t)$. Asignando $x(0) = 0$ vemos que la matriz transferencia del sistema es

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

En MATLAB las funciones `tf2ss` y `ss2tf` permiten pasar de una representación a otra.

Ejemplo 2.1. Supongamos que el brazo de robot trabaja tomando objetos de distinta masa. Entonces m varía con cada objeto y tenemos que escribir

$$m(t)\ddot{\theta}(t) + m(t)g \sin \theta(t) = u(t).$$

El sistema se convierte en *inestacionario*.

Ejemplo 2.2. Consideremos un cohete a reacción que asciende en forma vertical de la superficie de la tierra. La fuerza de propulsión es el producto $v_e u_0$, donde $v_e < 0$ es la velocidad relativa de escape de gases, y $u_0 < 0$ la velocidad de variación de masa $m(t)$, supuestas constantes. Asumiendo la aceleración de la gravedad g constante,

$$m(t)\ddot{h}(t) = -m(t)g + v_e u_0.$$

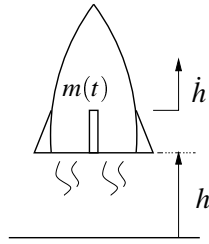


Figura 2.3: Cohete

Como $\dot{m}(t) = u_0$, entonces $m(t) = m_0 + u_0 t$. Definiendo $x_1(t) := h(t)$ y $x_2(t) := \dot{h}(t)$ y tomando como salida la altura, llegamos a la representación en EE

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g + \frac{v_e u_0}{m_0 + u_0 t} \end{bmatrix}, \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

El sistema es lineal, de dimensión 2, e inestacionario.

2.4. Representación en diagrama de bloques

El diagrama de bloques se obtiene en forma directa de las EE.

Ejemplo 2.3. El sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0,3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 5u(t)$$
(2.10)

tiene el diagrama de bloques de la Figura 2.4.

2.5. Linealización

La gran mayoría de los sistemas físicos son no lineales. Una clase importante de ellos se puede describir por las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), x(t_0), t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t), u(t), x(t_0), t), \end{aligned}$$
(2.11)

donde f y h son campos vectoriales no lineales, es decir, escrita en términos escalares, la componente i de $\dot{x}(t)$ en (2.11) es

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); x_1(t_0), \dots, x_n(t_0); t) \quad x_i(t_0) = x_{i0}.$$

Este tipo de sistemas se trata en detalle en la asignatura *Sistemas No Lineales*.

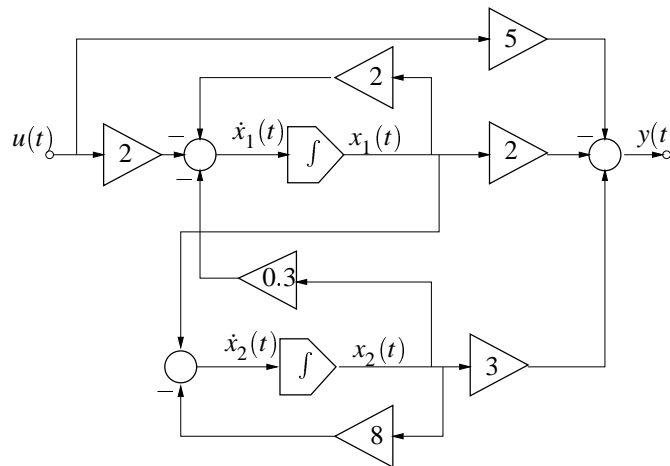


Figura 2.4: DB del sistema (2.10)

Una ecuación de estado lineal es una herramienta útil para describir sistemas como (2.11) en forma *aproximada*. El proceso de obtención de un modelo lineal a partir de uno no lineal se llama *linealización*.

La linealización se realiza alrededor de un *punto* o *trayectoria de operación*, definida por valores *nominales* $\tilde{x}(t)$, \tilde{x}_0 y $\tilde{u}(t)$ que satisfacen (2.11),

$$\tilde{x}(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} \tilde{x}(t_0) \\ \tilde{u}(t), t \geq t_0 \end{cases}$$

Nos interesa el comportamiento de la ecuación no lineal (2.11) para una entrada y estado inicial “cerca” a los valores nominales, es decir $u(t) = \tilde{u}(t) + u_\delta(t)$ y $x_0 = \tilde{x}_0 + x_{0\delta}$ para $u_\delta(t)$ y $x_{0\delta}$ suficientemente pequeños para $t \geq t_0$.

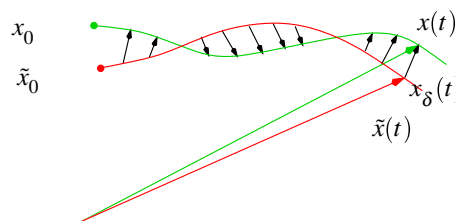


Figura 2.5: Trayectoria de operación y aproximación

Suponemos que la correspondiente solución permanece cercana a la nominal, y escribimos $x(t) = \tilde{x}(t) + x_\delta(t)$ para cada $t \geq t_0$. En términos de la ecuación de estado no lineal (2.11) tenemos

$$\dot{\tilde{x}}(t) + \dot{x}_\delta(t) = f(\tilde{x}(t) + x_\delta(t), \tilde{u}(t) + u_\delta(t), t), \quad \tilde{x}(t_0) + x_\delta(t_0) = \tilde{x}_0 + x_{0\delta}$$

Asumiendo diferenciabilidad, podemos expandir el lado derecho de esta ecuación usando series de Taylor alrededor de $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{u}(t)$, reteniendo sólo los términos de primer orden. *Notar* que la expansión es en términos de x y u ; no se hace con respecto a la tercer variable t .

Especificamos la operación para la componente i , que queda ¹

$$f_i(\tilde{x} + x_\delta, \tilde{u} + u_\delta, t) \approx f_i(\tilde{x}, \tilde{u}, t) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)x_{\delta 1} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)x_{\delta n} \\ + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)u_{\delta 1} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_m}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)u_{\delta m} \quad (2.12)$$

Repitiendo la operación para cada $i = 1, \dots, n$, y volviendo a la notación vectorial, obtenemos

$$\dot{\tilde{x}}(t) + \dot{x}_\delta(t) \approx f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)x_\delta + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)u_\delta$$

donde la notación $\frac{\partial f}{\partial x}$ representa el *Jacobiano*, o *Matriz Jacobiana*, del campo vectorial f con respecto a x ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dado que $\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)$, $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$, la relación entre $x_\delta(t)$ y $u_\delta(t)$ (el *modelo incremental*) queda aproximadamente descrito por una EE lineal *inestacionaria* de la forma

$$\dot{x}_\delta(t) = A(t)x_\delta(t) + B(t)u_\delta(t), \quad x_\delta(t_0) = x_0 - \tilde{x}_0$$

donde

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t).$$

De igual manera se expande la ecuación de salida $y(t) = h(x(t), u(t), t)$, de donde obtenemos la aproximación lineal

$$y_\delta(t) = C(t)x_\delta(t) + D(t)u_\delta(t),$$

donde $y_\delta(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$, con $\tilde{y}(t) = h(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)$ y

$$C(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t), \quad D(t) = \frac{\partial h}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t).$$

Notar que las EE obtenidas por linealización van a ser en general *inestacionarias*, aún cuando las funciones originales f y h sean estacionarias, debido a que las matrices Jacobianas se evalúan a lo largo de trayectorias y no puntos estacionarios.

Ejemplo 2.4. Consideremos el péndulo invertido sobre un carro móvil de la Figura 2.6. Las ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{y} = \frac{u + \dot{\theta}^2 ml \sin \theta - mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{-u \cos \theta - \dot{\theta}^2 ml \sin \theta \cos \theta + (m + M)g \sin \theta}{Ml + m \sin^2 \theta}.$$

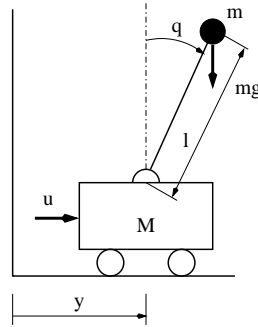


Figura 2.6: Péndulo invertido.

Definiendo $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \theta$ y $x_4 = \dot{\theta}$ vemos que el sistema tiene la forma $\dot{x} = f(x, u)$, donde $x \in \mathbb{R}^4$ y $u \in \mathbb{R}$, y f está dada como

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u + x_4^2 ml \sin x_3 - mg \sin x_3 \cos x_3}{M + m \sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{-u \cos x_3 - x_4^2 ml \sin x_3 \cos x_3 + (m + M)g \sin x_3}{Ml + m \sin^2 x_3} \end{bmatrix}$$

Como trayectoria de operación tomamos $\tilde{\theta}(t) \equiv 0$, $\tilde{u}(t) \equiv 0 \forall t$, que es fácil ver que satisface $f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \equiv 0$ (es un equilibrio). Las matrices A y B de los respectivos Jacobianos de f evaluados sobre esta trayectoria son

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.5 ((Rugh 1995)). Volvemos al cohete del Ejemplo 2.2. Las ecuaciones de movimiento eran

$$m(t)\ddot{h}(t) = -m(t)g + v_e u(t),$$

donde ahora tomamos la velocidad de cambio de masa libre $u(t) = \dot{m}(t)$ (Ejercicio 2.2). Definiendo $m(t)$ como una variable de estado más, y denotando $x_1(t) = h(t)$, $x_2(t) = \dot{h}(t)$, $x_3(t) = m(t)$, y tomando $u(t)$ como una entrada independiente llegamos al modelo no lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -g + \frac{v_e}{x_3(t)} u(t) \\ u(t) \end{bmatrix}.$$

Consideramos ahora su linealización alrededor una trayectoria nominal correspondiente a un valor constante de la entrada $u = u_0 < 0$. No es difícil calcular la trayectoria nominal explícitamente mediante integración directa, primero de $x_3(t)$, luego $x_2(t)$ y finalmente

¹Por simplicidad no escribimos la dependencia temporal de x y u .

$x_1(t)$. Haciendo las cuentas obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &= -\frac{gt^2}{2} + \frac{m_0 v_e}{u_0} \left(\left(1 + \frac{u_0 t}{m_0}\right) \log \left(1 + \frac{u_0 t}{m_0}\right) - \frac{u_0 t}{m_0} \right) \\ \tilde{x}_2(t) &= -gt + v_e \left(1 + \frac{u_0 t}{m_0}\right) \\ \tilde{x}_3(t) &= m_0 + u_0 t.\end{aligned}$$

Los Jacobianos necesarios son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -v_e u / x_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ v_e / x_3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Substituyendo los valores nominales (sólo los de $x_3(t)$ y $u(t)$ aparecen) obtenemos la EE linealizada en las variables incrementales $x_\delta(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ y $u_\delta(t) = u(t) - \tilde{u}(t)$

$$\dot{x}_\delta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-v_e u_0}{(m_0 + u_0 t)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_\delta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_e}{m_0 + u_0 t} \\ 1 \end{bmatrix} u_\delta(t).$$

Las condiciones iniciales para las variables incrementales están dadas por

$$x_\delta(0) = x(0) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 \end{bmatrix}.$$

2.6. Sistemas discretos

La mayoría de los conceptos de EE para sistemas lineales continuos puede trasladarse directamente a sistemas discretos, descritos por *ecuaciones diferencia*. En este caso la variable temporal t sólo asume valores en un conjunto *denumerable* (cuyos elementos pueden “contarse”²).

Cuando el sistema discreto se obtiene a partir de un *muestreo* de un sistema continuo, vamos a considerar sólo el caso de muestreo *regular*, donde $t = kT, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, donde T es el *período de muestreo*. En este caso denotamos las variables discretas (secuencias) como $u[k] \triangleq u(kT)$, etc.

Los conceptos de dimensión finita, causalidad, linealidad y el principio de superposición de las respuestas debido a condiciones iniciales y entradas, son exactamente como en el caso continuo.

Una salvedad: a diferencia del caso continuo, retardos puros no dan lugar a un sistema de dimensión infinita si el retardo es un múltiplo del período de muestreo T .

2.6.1. Descripción entrada-salida de sistemas discretos

Definimos la *secuencia de impulsos* $\delta[k]$ como

$$\delta[k - m] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m \\ 0 & \text{si } k \neq m \end{cases}$$

²Es decir, ponerse en correspondencia con los números naturales.

donde k y m son números enteros. Notar que en el caso discreto los impulsos son fácilmente realizables físicamente.

En un sistema lineal discreto toda secuencia de entrada $u[k]$ puede representarse mediante la serie

$$u[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\delta[k-m].$$

Si $g[k, m]$ denota la salida de una sistema discreto a una secuencia de impulsos aplicada en el instante m , entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\delta[k-m] &\rightarrow g[k, m] \\ \delta[k, m]u[m] &\rightarrow g[k, m]u[m] \quad (\text{por homogeneidad}) \\ \sum_m \delta[k, m]u[m] &\rightarrow \sum_m g[k, m]u[m] \quad (\text{por aditividad}).\end{aligned}$$

Así la salida $y[k]$ excitada por la entrada $u[k]$ puede representarse mediante la serie

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g[k, m]u[m]. \quad (2.13)$$

Si el sistema es *causal* no habrá salida antes de que la entrada se aplique, por lo que

$$\text{causalidad} \Leftrightarrow g[k, m] = 0 \text{ para } k < m.$$

Para sistemas discretos *causales* la representación (2.13) se reduce a

$$y[k] = \sum_{m=k_0}^k g[k, m]u[m],$$

y si además tenemos *estacionariedad*, entonces vale la propiedad de invariancia respecto de corrimientos en el tiempo y llegamos a la representación del sistema mediante la *convolución discreta*

$$y[k] = \sum_{m=0}^k g[k-m]u[m] = \sum_{m=0}^k g[m]u[k-m].$$

2.6.2. Representación en Espacio de Estados

Todo sistema discreto lineal finito-dimensional puede describirse mediante EE (diferencia)

$$\begin{aligned}x[k+1] &= A[k]x[k] + B[k]u[k] \\ y[k] &= C[k]x[k] + D[k]u[k],\end{aligned}$$

y en el caso estacionario

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k].\end{aligned}$$

En este caso, tiene sentido hablar de funciones transferencia *discretas*, $\hat{G}(z) = \mathcal{Z}[g[k]]$. La relación entre función transferencia discreta y representación de estados es idéntica al caso continuo,

$$\hat{G}(z) = C(zI - A)^{-1}B + D,$$

y sirven las mismas funciones de MATLAB `ss2tf` y `tf2ss`.

2.7. Resumen

- La matriz transferencia es *racional* sii el sistema es lineal, estacionario y de dimensión finita.
- Las representaciones externas asumen condiciones iniciales nulas.
- Los sistemas de dimensión infinita no pueden describirse en EE.
- Mediante linealización, puede describirse el comportamiento de un sistema no lineal en forma *aproximada* mediante un modelo en EE incremental lineal.
- La linealización se realiza alrededor de una *trayectoria de operación* nominal conocida, y los modelos incrementales obtenidos serán, en general, *inestacionarios*.
- Los sistemas discretos tienen representaciones equivalentes a las de sistemas continuos mediante *series de convolución*, funciones transferencia en transformada \mathcal{Z} , y EE diferencia.
- A diferencia del caso continuo, los retardos puros no necesariamente dan lugar a un sistema discreto distribuido.

Tipo de sistema	Representación interna	Representación externa
dim. infinita lineal		$y(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t, \tau) u(\tau) d\tau$
dim. finita, lineal	$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ $y = C(t)x + D(t)u$	$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau$
dim. inf., lineal, est.		$y(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t, \tau) u(\tau) d\tau$ $\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s)$
dim. fin., lineal, est.	$\dot{x} = Ax + Bu$ $y = Cx + Du$	$y(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t, \tau) u(\tau) d\tau$ $\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s)$

2.8. Ejercicios

Ejercicio 2.1. A partir de la definición de transformada de Laplace de $y(t)$

$$\hat{y}(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

probar que para un sistema lineal estacionario $\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s)$.

Ejercicio 2.2. ¿Cómo se modifica el sistema del cohete si la velocidad de cambio de masa u_0 es $u(t) = \dot{m}(t)$? Escribir las EE y clasificarlo.

Ejercicio 2.3. Considerar un sistema consistente en un retardo puro,

$$y(t) = u(t - T).$$

¿Es dinámico, lineal, de dimensión finita, estacionario?

Ejercicio 2.4. Introducir el sistema (2.10) en MATLAB utilizando la función `ss` y obtener la función transferencia con `ss2tf`. Explorar las herramientas `ssdata`, `tfdata`, `zpkdata` y `ltiview`.

Ejercicio 2.5. Para la ecuación diferencial

$$\ddot{y}(t) + \frac{4}{3}y^3(t) = -\frac{1}{3}u(t)$$

usar una simple identidad trigonométrica como ayuda para encontrar una solución nominal correspondiente a $\tilde{u}(t) = \sin 3t$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$. Determinar una EE linealizada que describa el comportamiento del sistema alrededor de esta trayectoria nominal.

Ejercicio 2.6. Linealizar la EE no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{x_2^2(t)} \\ \dot{x}_2(t) &= u(t)x_1(t)\end{aligned}$$

alrededor de la trayectoria nominal originada en $\tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_2(0) = 1$, y $\tilde{u}(t) = 0$.

Ejercicio 2.7. Para la EE no lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) - 2x_1(t)x_2(t) \\ -x_1(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t) + u(t) \end{bmatrix}$$

calcular las posibles soluciones constantes, a menudo denominadas *estados de equilibrio*, y las correspondientes EE linealizadas.

Ejercicio 2.8. Considerar la EE no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t)x_1(t) - x_3(t) \\ x_2(t) - 2x_3(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= x_2(t) - 2x_3(t)\end{aligned}$$

con estado inicial $\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ y entrada nominal constante $\tilde{u}(t) = 1$. Mostrar que la salida nominal es $\tilde{y}(t) = 1$. Linealizar la EE alrededor de la solución nominal. ¿Hay algo raro en este sistema?

Ejercicio 2.9. De la definición de transformada \mathcal{Z} de la secuencia $y[t]$

$$\hat{y}(z) = \mathcal{Z}[y[k]] = \sum_{k=0}^{\infty} y[k]z^{-k}$$

probar que para un sistema lineal estacionario discreto $\hat{y}(z) = \hat{g}(z)\hat{u}(z)$.

Capítulo 3

Herramientas de Álgebra Lineal

3.1. Vectores y Matrices

Los elementos básicos en teoría de sistemas lineales son vectores $n \times 1$ (columna) o $1 \times n$ (fila) y matrices $n \times m$ con elementos reales, es decir, $v \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Denotamos el elemento i del vector v como v_i , y el elemento ij de una matriz A como a_{ij} o $[A]_{ij}$.

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

En MATLAB: vectores $v = [v1;v2; \dots ;vn]$ y matrices

$$A=[a11,a12,\dots,a1m;a21,a22,\dots,a2m;\dots].^1$$

El producto de dos matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{r \times s}$ sólo está definido si $n = r$. En particular para vectores $v \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$, tenemos $vw^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Escribimos la matriz $n \times m$ con todos sus elementos cero como $0_{n \times m}$, simplemente 0 si las dimensiones (MATLAB $[n,m]=\text{size}(A)$) son claras del contexto. Para matrices cuadradas, $m = n$, la matriz nula es 0_n y la matriz identidad I_n o simplemente I (MATLAB $I=\text{eye}(n)$).

Asumimos las operaciones de suma y producto de matrices familiares. Lo interesante del producto de matrices es que en general es *no conmutativo*, es decir, AB y BA no son siempre lo mismo.

Definición 3.1 (Matriz Nilpotente). Si A es cuadrada, para cualquier entero $k \geq 0$ la potencia A^k está bien definida, con $A^0 = I$. Si existe un $k > 0$ tal que $A^k = 0$ decimos que A es *nilpotente*.

Definición 3.2 (Traza de una matriz). Para una matriz cuadrada $n \times n$, la *traza* es la suma de los elementos de su diagonal (en MATLAB $\text{trace}(A)$)

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

¹Ojo con la transpuesta en MATLAB cuando se trabaja con vectores o matrices complejos; ' representa la *transpuesta conjugada*, la transpuesta sin conjugar es . '.

Si A y B son tales que AB es cuadrada, entonces

$$\text{tr}[AB] = \text{tr}[BA].$$

Definición 3.3 (Determinante de una matriz). El *determinante* es otra familiar función escalar de una matriz cuadrada, $\det A$ (MATLAB `det(A)`). El determinante puede evaluarse recursivamente mediante la *expansión de Laplace*: Sea c_{ij} el *cofactor* del elemento a_{ij} , o sea el producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante de la submatriz $(n-1) \times (n-1)$ obtenida de eliminar en A la fila i y la columna j . Entonces para cualquier i fijo, $1 \leq i \leq n$,

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij}. \quad (3.1)$$

Esta es la expansión sobre la fila i . Una expresión análoga existe para la expansión sobre una columna j .

Vemos de (3.1) que el determinante no es más que la suma de productos de los elementos de la matriz, por lo que es una función matricial diferenciable todas las veces que uno quiera.

Si A y B son matrices $n \times n$, entonces

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(BA).$$

Definición 3.4 (Inversa de una matriz). La matriz cuadrada A tiene una inversa, A^{-1} , $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, si $\det A \neq 0$.

En MATLAB, la inversa se calcula `inv(A)`. Una fórmula común para A^{-1} se basa en los cofactores de A .

Definición 3.5 (Adjunto de una matriz). El *adjunto* de A , $\text{adj } A$, es la matriz cuyo elemento ij es el cofactor ji de A — o sea, la transpuesta de la matriz de cofactores.

Usando el adjunto, la fórmula de la inversa es

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}$$

La inversa del producto de dos matrices cuadradas no singulares cumple $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Otra fórmula muy útil en teoría de sistemas lineales es el *lema de inversión de matrices*.

Lema 3.1 (Inversión de Matrices). Dadas matrices R, S, U, V de dimensiones compatibles, donde R y S son cuadradas y no singulares, entonces

$$(R - US^{-1}V)^{-1} = R^{-1} + R^{-1}U(S - VR^{-1}U)^{-1}VR^{-1}.$$

3.2. Bases y Ortonormalización

El conjunto de todos los vectores de \mathbb{R}^n puede verse como un *espacio vectorial lineal* con las operaciones estándar de suma de vectores y producto por números reales. Las matrices $m \times n$ (o $n \times m$ si consideramos vectores *fila*) son *operadores lineales* definidos sobre estos espacios.

Definición 3.6 (Independencia lineal). Dos vectores x_1 e x_2 en \mathbb{R}^n son *linealmente independientes* (LI) si la única combinación lineal de ellos que da el vector nulo, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$, es la trivial, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Si no son *linealmente dependientes*.

El concepto se extiende a un conjunto de cualquier número de vectores. Si el conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ es linealmente dependiente, entonces existe un conjunto de escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ donde al menos *uno* es distinto de cero, digamos $\alpha_1 \neq 0$, y

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0.$$

Entonces podemos escribir x_1 como combinación lineal de los restantes vectores,

$$x_1 = -\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m).$$

Definición 3.7 (Dimensión de un espacio lineal). La *dimensión* de un espacio lineal es el máximo número de vectores LI en ese espacio; n en \mathbb{R}^n .

Definición 3.8 (Base de un espacio lineal). Un conjunto de vectores LI en \mathbb{R}^n es una *base* de \mathbb{R}^n si todo vector de \mathbb{R}^n se puede escribir como una combinación lineal única de los vectores del conjunto.

Dada una base $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ de \mathbb{R}^n , todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse en forma única como

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_n q_n \\ &= [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = Q\tilde{x}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{x} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ es la *representación* del vector x con respecto a la base (o en las *coordenadas*) $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. La matriz Q es no singular por definición, y sirve para obtener la representación de cualquier vector de \mathbb{R}^n en la base $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, $\tilde{x} = Q^{-1}x$. En particular, siempre existe la base formada por los *versores* $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$, $e_2 = [0, 1, \dots, 0]^T$, etc. En ese caso $Q = I$.

Ejemplo 3.1. Consideremos los vectores $q_1 = [3, 1]^T$ y $q_2 = [2, 2]^T$. Como son LI, forman una base en \mathbb{R}^2 . La representación del vector $x = [1, 3]^T$ en las coordenadas $\{q_1, q_2\}$ es $[-1, 2]^T$, que se obtiene de

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= [q_1 \ q_2]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

o sea que x puede escribirse como $x = -q_1 + 2q_2$.

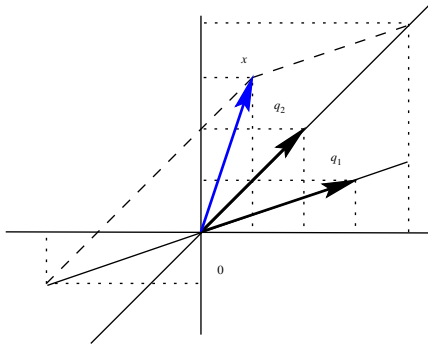
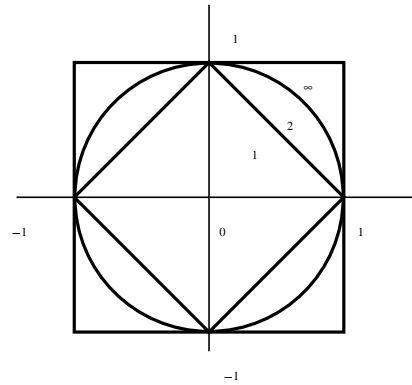


Figura 3.1: Cambio de coordenadas.

Figura 3.2: Bola unitaria en \mathbb{R}^2 en normas 1, 2 e ∞ .

3.2.1. Norma de vectores

El concepto de *norma* de un vector es una generalización de la idea de magnitud.

Definición 3.9 (Norma de un vector). La norma de un vector $x \in \mathbb{R}^n$, denotada $\|x\|$, es una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}_0^+ (los reales positivos más el 0) que cumple con las siguientes tres propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$ para todo x , y $\|x\| = 0$ si $x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, para todo escalar α .
3. $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ para todo x_1, x_2 (*desigualdad triangular*).

Dado un vector $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$, tres normas típicas en \mathbb{R}^n son

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\triangleq \sum_{i=1}^n |x_i| && \text{norma-1} \\ \|x\|_2 &\triangleq \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} && \text{norma-2 o euclídea} \\ \|x\|_\infty &\triangleq \max_i |x_i| && \text{norma-}\infty \end{aligned}$$

En MATLAB calculamos estas normas con $\text{norm}(x, 1)$, para la norma 1, $\text{norm}(x, 2) = \text{norm}(x)$, para la norma 2, y $\text{norm}(x, \infty)$ para la norma ∞ .

El conjunto de vectores de norma no mayor que la unidad, $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, se llama *bola unitaria*, que no necesariamente es una bola *esférica*; la forma de la bola unitaria depende de la norma (ver Figura 3.2). La norma 2, también llamada *euclídea*, es efectivamente la longitud del vector medida desde el origen (que no es el caso de las otras normas). A menos que aclaremos lo contrario, vamos a trabajar siempre con la norma 2.

3.2.2. Ortonormalización

Un vector x de \mathbb{R}^n está *normalizado* si $\|x\| = \sqrt{x^T x} = 1$. Dos vectores x_1 y x_2 son *ortogonales* si $x_1^T x_2 = x_2^T x_1 = 0$. Un conjunto de vectores $x_i, i = 1, 2, \dots, m$, es *ortonormal* si

$$x_i^T x_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Dado un conjunto de vectores LI $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, podemos obtener un conjunto ortonormal de vectores $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ usando el *procedimiento de ortonormalización de Schmidt*,

$$\begin{aligned} u_1 &\triangleq p_1 & q_1 &\triangleq u_1 / \|u_1\|, \\ u_2 &\triangleq p_2 - (q_1^T p_2) q_1 & q_2 &\triangleq u_2 / \|u_2\|, \\ &\vdots & &\vdots \\ u_m &\triangleq p_m - \sum_{k=1}^{m-1} (q_k^T p_m) q_k & q_m &\triangleq u_m / \|u_m\|. \end{aligned}$$

Si $Q = [q_1 q_2 \dots q_m]$ es una matriz $n \times m$, $m \leq n$, con todas sus columnas ortonormales, entonces $Q^T Q = I$. ¿Qué puede decirse entonces de QQ^T ?

3.3. Ecuaciones Lineales Algebraicas

Consideremos el conjunto de ecuaciones lineales algebraicas

$$Ax = y \quad (3.2)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $y \in \mathbb{R}^m$ son una matriz y un vector dados como datos, y $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector incógnita a resolver. Este es un problema de m ecuaciones y n incógnitas escalares, donde puede que m sea menor, igual o mayor que n . La existencia de solución dependerá de la *imagen* de A .

Definición 3.10 (Imagen y rango de una matriz). El *espacio imagen*, o simplemente *imagen*, de A es el espacio generado haciendo todas las posibles combinaciones lineales de las columnas de A . La dimensión de la imagen de A es el *rango* de A .

Definición 3.11 (Vector nulo y kernel de una matriz). Un vector x se llama *vector nulo* de A si $Ax = 0$. El espacio de todos los vectores nulos de A se llama el *kernel* o *espacio nulo* de A .

En MATLAB `orth(A)` da una base ortonormal de la imagen de A , `rank(A)` da el rango, y `null(A)` da una base ortonormal del kernel. Una relación importante que cumplen siempre la dimensión del kernel y el rango de una matriz A es la siguiente:

$$\text{dimensión de } \ker(A) = \text{número de columnas de } A - \text{rango}(A) \quad (3.3)$$

Ejemplo 3.2. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \triangleq [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4].$$

El rango de A es 2, ya que a_1 y a_2 son LI pero a_3 y a_4 son combinación lineal de a_1 y a_2 . Podemos tomar entonces el conjunto $\{a_1, a_2\}$ como una base de la imagen de A . La ecuación (3.3) implica que la dimensión del kernel de A es 2, y puede verificarse que los vectores

$$n_1 = [1 \ 1 \ -1 \ 0]^T \quad \text{y} \quad n_2 = [0 \ 2 \ 0 \ -1]^T$$

son vectores nulos de A ($An_1 = 0 = An_2$). Como n_1 y n_2 son LI, $\{n_1, n_2\}$ es una base del kernel de A .

Hemos definido el rango de A como el número de columnas LI de A , pero como también es igual al número de filas LI de A , necesariamente tenemos la relación

$$\text{rango}(A) \leq \min(m, n).$$

Con las definiciones de rango y kernel de una matriz, volvemos al problema de obtener la solución de la ecuación algebraica (3.2). Los siguientes dos teoremas resumen todos los casos posibles.

Teorema 3.1 (Existencia de solución). Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y un vector $y \in \mathbb{R}^m$,

1. Existe una solución $x \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación $Ax = y$ sii y pertenece a la imagen de A , o sea,

$$\text{rango}(A) = \text{rango}([A \ y])$$

donde $[A \ y] \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$.

2. Existe una solución x de $Ax = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$ sii $\text{rango}(A) = m$ (A es de *rango fila pleno*).

Teorema 3.2 (Parametrización de todas la soluciones). Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y un vector $y \in \mathbb{R}^m$, sea x_p una solución de $Ax = y$ y sea $k \triangleq n - \text{rango}(A)$ la dimensión del kernel de A . Entonces

1. Si $k = 0$ (A tiene rango columna pleno), entonces la solución x_p es *única*.
2. Si $k > 0$ sea $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ una base del kernel de A . Entonces para cualquier conjunto de k números reales $\{\alpha_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ el vector

$$x = x_p + \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots + \alpha_k n_k$$

es también solución de $Ax = y$.

Ejemplo 3.3. Consideremos la ecuación $Ax = y$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Puede verse fácilmente que y está en la imagen de A y que $x_p = [0 \ -4 \ 0 \ 0]^T$ es una solución. Con la base $\{n_1, n_2\}$ del kernel de A obtenida en el Ejemplo 3.2 podemos expresar la solución general de (3.4) como

$$\begin{aligned} x &= x_p + \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde α_1 y α_2 pueden tomar cualquier valor en \mathbb{R} .

A veces podemos encontrar el problema formulado en términos de vectores fila, $x A = y$, donde x, y son $1 \times n$ y $1 \times m$. Este problema puede tratarse de igual forma al caso columna considerando el problema transpuesto equivalente $A^T x^T = y^T$.

En MATLAB la solución de $Ax = y$ puede obtenerse como $x = A \backslash y$. El símbolo \backslash denota división matricial por izquierda. Para el caso $x A = y$ usamos la división matricial por derecha $x = y / A$.

Para el caso de sistemas con matriz A cuadrada (que vamos a encontrar con frecuencia) la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas (3.2) se reduce a las condiciones dadas en el siguiente corolario.

Corolario 3.1 (Sistemas cuadrados). Sea $Ax = y$ donde A es cuadrada. Entonces

1. Si A es no singular existe una solución *única* para cada y , dada por $x = A^{-1}y$. En particular la única solución de $Ax = 0$ es $x = 0$.
2. La ecuación homogénea $Ax = 0$ tiene soluciones no nulas si A es singular. El número de soluciones LI es igual a la dimensión del kernel de A .

3.4. Transformaciones de Semejanza

Una matriz cuadrada A mapea vectores de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n ,

$$Ax = y. \quad (3.5)$$

Si representamos los vectores de \mathbb{R} con respecto a una nueva base $\{q_1, q_2, \dots, q_n\} \triangleq Q$, sabemos de § 3.2 que tenemos las relaciones $x = Q\bar{x}$ e $y = Q\bar{y}$. Así, la ecuación (3.5) puede alternativamente escribirse como

$$Ax = y \Leftrightarrow AQ\bar{x} = Q\bar{y} \Leftrightarrow (Q^{-1}AQ)\bar{x} = \bar{y}$$

La matriz $\bar{A} \triangleq (Q^{-1}AQ)$ es la representación de A con respecto a la base $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. La transformación

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ \quad A = Q\bar{A}Q^{-1}$$

se llama *transformación de semejanza*, y las matrices A y \bar{A} se dicen *semejantes*.

Recordemos que dada una base $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, todo vector x de \mathbb{R}^n puede escribirse en forma única como $x = Q\bar{x}$, donde $Q \triangleq [q_1, q_2, \dots, q_n]$, y \bar{x} es la *representación de x* en esa base. En particular, si consideramos la base canónica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (formada por los versores unitarios), entonces la columna i de una matriz A no es más que la representación del vector Ae_i con respecto a la base canónica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Escribiendo la relación $\bar{A} = Q^{-1}AQ$ de la forma

$$\begin{aligned} AQ &= Q\bar{A} \\ \Leftrightarrow A [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] &= Q [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_n] \\ \Leftrightarrow [Aq_1 \ Aq_2 \ \dots \ Aq_n] &= [Q\bar{a}_1 \ Q\bar{a}_2 \ \dots \ Q\bar{a}_n] \end{aligned}$$

concluimos que la columna i de \bar{A} es la representación de Aq_i en la base $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$.

Ejemplo 3.4. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y la base} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Calculamos

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 17 \\ 1 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Podemos comprobar, por ejemplo, que el vector, digamos $z = Aq_1 = A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ verifica la ecuación $z = Q\bar{a}_1 = Q \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, es decir que \bar{a}_1 es la representación del vector z en la base $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$.

3.5. Forma Diagonal y Forma de Jordan

3.5.1. Autovalores y autovectores

Los autovalores y autovectores de una matriz juegan un rol clave en el estudio de sistemas lineales estacionarios en ecuaciones de estado. En esta sección repasamos sus definiciones e introducimos las formas canónicas asociadas y otras que utilizaremos más adelante en el análisis de estabilidad y el cálculo de controladores por realimentación de estados para estos sistemas.



Camille Jordan (1838-1922)

Definición 3.12 (Autovalores, autovectores y espectro de una matriz cuadrada). Un número $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *autovalor* de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Av = \lambda v$. Este vector v es un *autovector* (por derecha) de A asociado al autovalor λ . El conjunto de *todos* los autovalores de una matriz A se llama el *espectro* de A .

Los autovalores de A se encuentran resolviendo la ecuación algebraica

$$(\lambda I - A)v = 0. \quad (3.6)$$

Esta es un sistema de ecuaciones lineales algebraicas, que como vimos en § 3.3, admite soluciones no nulas si la matriz $(\lambda I - A)$ es singular (es decir, tiene determinante nulo).

Definición 3.13 (Polinomio característico). El *polinomio característico* de la matriz cuadrada A es

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Notar que el polinomio $\Delta(\lambda)$ es mónico, es decir que el coeficiente del término de mayor orden es 1, de grado n , y de coeficientes reales. Para cada raíz de $\Delta(\lambda)$ la matriz $(\lambda I - A)$ es singular y, por lo tanto, la ecuación algebraica (3.6) admite al menos una solución no nula.

Concluimos que toda raíz de $\Delta(\lambda)$ es un autovalor de A ; y como $\Delta(\lambda)$ tiene grado n , la matriz A necesariamente tiene n autovalores (aunque no necesariamente todos distintos; puede haber repetidos).

En MATLAB los autovalores de la matriz A se calculan con la función $r = \text{eig}(A)$, donde $r = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ es un vector con todos los autovalores de A ; la función $\text{poly}(r)$ da el polinomio característico de A .

3.5.2. Forma Companion

En general, el cálculo del polinomio característico de una matriz requiere la expansión de $\det(\lambda I - A)$. Sin embargo, para ciertas matrices el polinomio característico es evidente. Estas son las matrices en la *forma companion*, (MATLAB $A = \text{compan}(p)$, donde p es un polinomio)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con el mismo polinomio característico $\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4$. Otro caso en que los autovalores (y el polinomio característico) son particularmente obvios es cuando la matriz A es diagonal,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Aquí los autovalores de A son directamente los elementos de su diagonal. Pero, ¿podemos siempre representar A en forma diagonal? No siempre, depende de si A tiene:

Caso 1. autovalores todos reales y distintos

Caso 2. autovalores complejos y distintos

Caso 3. autovalores repetidos

Analizamos cada caso por separado en la siguiente sección.

3.5.3. Forma de Jordan

La forma de Jordan de una matriz A es la forma *diagonal en bloques* más simple a la que puede llevarse la matriz A mediante transformaciones de semejanza. Una matriz diagonal en bloques es una matriz que tiene matrices cuadradas no nulas en la diagonal, y ceros fuera de ella, por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\alpha} & \boxed{\beta} & 0 & 0 \\ \boxed{\gamma} & \boxed{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\phi} \end{bmatrix}.$$

Vemos la forma de Jordan en los tres casos enumerados al final de la sección anterior.

Caso 1: autovalores de A todos reales y distintos

En este caso los autovectores correspondientes son LI. Usamos el conjunto de autovectores, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, como base. Sea \bar{A} la representación de A en esta base. La columna 1 de \bar{A} es la representación de $Av_1 = \lambda_1 v_1$ en la base nueva,

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

y concluimos que la columna 1 de \bar{A} es $[\lambda_1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$. La columna 2 es la representación de $Av_2 = \lambda_2 v_2$ con respecto a la base nueva, o sea $[0 \ \lambda_2 \ 0 \ \dots \ 0]^T$. Siguiendo este procedimiento, llegamos a que

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Concluimos que *toda matriz con autovalores distintos tiene una representación en forma diagonal* (es diagonalizable).

Caso 2: autovalores de A complejos y distintos

Cuando todos los autovalores son distintos, pero algunos son complejos, no podemos llevar A a una forma diagonal real (aunque si compleja). Siendo A real, los autovalores complejos aparecen siempre en pares conjugados $\lambda = \sigma \pm j\omega$, y dan lugar a pares de autovectores también complejos conjugados $v = u \pm jw$.

En este caso no se puede llevar A a una forma diagonal real, pero sí a una forma *diagonal en bloques* real. Para esto, la nueva base debe armarse con los autovectores reales, las partes reales de los autovectores complejos, y las partes imaginarias de los autovectores complejos.

Ejemplo 3.5 (Forma block-diagonal real de una matriz con autovalores complejos). Supongamos que la matriz A tiene dos autovalores reales y dos pares de autovalores complejos,

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1 + j\omega_1, \sigma_1 - j\omega_1, \sigma_2 + j\omega_2, \sigma_2 - j\omega_2\}$$

con autovectores

$$\{v_1, v_2, u_1 + jw_1, u_1 - jw_1, u_2 + jw_2, u_2 - jw_2\}.$$

Formamos entonces la base

$$\{v_1, v_2, u_1, w_1, u_2, w_2\}.$$

En esta base la matriz A tiene la representación

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & \sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Vemos que hay un bloque de 2×2 por cada par de autovalores complejos conjugados.

Caso 3: autovalores de A repetidos

Este es un caso especial. Cuando A tiene autovalores repetidos puede que no podamos llevarla a una forma diagonal. Sin embargo, siempre se puede llevar a una forma triangular o diagonal en bloques. Ilustramos el procedimiento para un caso concreto.

Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene un autovalor λ con multiplicidad n , es decir, un solo autovalor repetido n veces. Para simplificar consideremos $n = 4$. Sabemos que la matriz $(A - \lambda I)$ es singular. Ahora, caben las posibilidades de que el kernel (espacio nulo) de $(A - \lambda I)$ tenga dimensión 1, 2, 3 o 4.

Si el kernel de $(A - \lambda I)$ tiene dimensión 4, entonces sabemos, del Teorema 3.2, que hay cuatro soluciones independientes (no nulas, pues la nula es la solución particular en este caso), correspondientes a una base del kernel $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$.

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}.$$

En este caso hay 4 autovectores independientes, y A es diagonalizable usando la base $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$.

Veamos ahora el otro caso extremo, el kernel de A tiene dimensión 1. En este caso sólo podemos encontrar *una* solución independiente. Necesitamos tres vectores independientes más para armar una base. Una forma de lograrlo es usando el concepto de *autovectores generalizados*.

Definición 3.14 (Autovector generalizado). Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y λ un autovalor de A . Un vector v es un autovector generalizado de A de grado n asociado al autovalor λ si

$$(A - \lambda I)^n v = 0 \quad \text{y} \quad (A - \lambda I)^{n-1} v \neq 0$$

Si $n = 1$ el problema se reduce al caso recién visto. Para $n = 4$ definimos los vectores

$$\begin{aligned} v_4 &\triangleq v \\ v_3 &\triangleq (A - \lambda I)v_4 = (A - \lambda I)v \\ v_2 &\triangleq (A - \lambda I)v_3 = (A - \lambda I)^2 v \\ v_1 &\triangleq (A - \lambda I)v_2 = (A - \lambda I)^3 v. \end{aligned}$$

Los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 forman una *cadena de autovectores generalizados de longitud 4*, y cumplen las propiedades $(A - \lambda I)v_1 = 0$, $(A - \lambda I)^2 v_2 = 0$, $(A - \lambda I)^3 v_3 = 0$ y $(\lambda I - A)^4 v_4 = 0$. Estos vectores son LI por definición, y además cumplen con las relaciones

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ Av_2 &= v_1 + \lambda v_2 \\ Av_3 &= v_2 + \lambda v_3 \\ Av_4 &= v_3 + \lambda v_4. \end{aligned}$$

A partir de estas relaciones, la representación de A con respecto a la base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ resulta

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Es fácil chequear que las columnas de J son la representación de $Av_i, i = 1, 2, 3, 4$, en la base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Esta matriz triangular es un *bloque de Jordan de orden 4*.

Si el kernel de $(A - \lambda I)$ tiene dimensión 2, entonces hay *dos* cadenas de autovectores generalizados cuya longitudes sumadas dan 4. Pueden ser $\{v_1, v_2\}$ y $\{u_1, u_2\}$, $\{v_1\}$ y $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ y $\{u_1\}$. En este caso la base se forma con los vectores de las dos cadenas.

Igualmente, si el kernel de $(A - \lambda I)$ tiene dimensión 3, entonces hay *tres* cadenas de autovectores generalizados, etc. En el primer caso visto, en que el kernel de $(A - \lambda I)$ tiene dimensión 4, tenemos cuatro cadenas triviales de longitud 1.

En resumen, si $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tiene un autovalor λ con multiplicidad 4, existe una matriz no singular Q tal que la matriz semejante $\bar{A} = Q^{-1}AQ$ tiene una de las siguientes formas de Jordan

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

La forma general a la que podemos llevar una matriz va a ser diagonal en bloques, donde los bloques pueden ser de 1×1 para autovalores reales distintos, 2×2 para pares de autovalores complejos conjugados, y bloques de Jordan para autovalores múltiples.

La forma de Jordan puede usarse para establecer propiedades generales de matrices. Por ejemplo, $\det A = \det(Q^{-1}\bar{A}Q) = \det Q \det Q^{-1} \det \bar{A}$. Como \bar{A} es triangular, $\det \bar{A}$ es el producto de los autovalores,

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A),$$

de lo que concluimos que A es no singular sii no tiene autovalores nulos.

Terminamos esta sección con una propiedad útil de los bloques de Jordan, que es la de *nilpotencia* de la matriz $(J - \lambda I)$.

Definición 3.15 (Matriz Nilpotente). Una matriz A es *nilpotente* si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.

Por definición del bloque de Jordan J en (3.7), la matriz $(J - \lambda I)$ es nilpotente con $k = 4$, ya que

$$(J - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (J - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (J - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(J - \lambda I)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En MATLAB podemos usar $[q, d] = \text{eig}(A)$ para calcular los autovalores y la base de autovectores si A es diagonalizable. Si A no es diagonalizable, Chen (1999) menciona la función $[q, d] = \text{jordan}(A)$, que puede usarse para matrices de dimensión moderada, pero disponible solamente en las versiones de MATLAB con el `symbolic toolbox`.

3.6. Funciones de Matrices Cuadradas

3.6.1. Polinomios

Vimos que para cualquier entero $k \neq 0$ la potencia A^k está bien definida. Dado un polinomio $f(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_m$ definimos $f(A)$ como

$$f(A) = A^m + a_1A^{m-1} + \dots + a_mI.$$

Si A es diagonal en bloques, digamos $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ es fácil verificar que

$$A^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{bmatrix} \quad \text{y también} \quad f(A) = \begin{bmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{bmatrix}.$$

Dada la transformación de semejanza $\bar{A} = Q^{-1}AQ$ o $A = Q^{-1}\bar{A}Q$, como

$$A^k = (Q\bar{A}Q^{-1})^k = Q\bar{A}Q^{-1}Q\bar{A}Q^{-1} \dots = Q\bar{A}^kQ^{-1},$$

tenemos que

$$f(A) = Qf(\bar{A})Q^{-1} \quad \text{o} \quad f(\bar{A}) = Q^{-1}f(A)Q.$$

Un resultado importante en el cálculo matricial es el Teorema de Cayley-Hamilton, que establece que *toda matriz satisface su propio polinomio característico*.

Teorema 3.3 (Cayley-Hamilton). Sea $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$ el polinomio característico de A . Entonces

$$\Delta(A) = A^n + \alpha_1A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}A + \alpha_nI = 0. \quad (3.8)$$

◦

El teorema de Cayley-Hamilton implica que A^n se puede escribir como una combinación lineal de las potencias de A de 0 a $n-1$. Si multiplicamos (3.8) por A obtenemos que A^{n+1} se puede escribir como combinación lineal de $\{A, A^2, \dots, A^n\}$, que a su vez se puede escribir en términos de $\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$.

En conclusión, *todo polinomio* $f(A)$ puede expresarse, para apropiados β_i , como una combinación lineal de las potencias de A de 0 a $n-1$.

$$f(A) = \beta_0I + \beta_1A + \dots + \beta_{n-1}A^{n-1}.$$

3.6.2. Polinomio mínimo

El teorema de Cayley-Hamilton establece que toda matriz satisface su polinomio característico, es decir, si $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, entonces $\Delta(A) = 0$. Pero, ¿podrá A satisfacer un polinomio de grado menor al de $\Delta(\lambda)$? La respuesta depende de la multiplicidad de los autovalores de A . Cuando los autovalores son todos de multiplicidad 1 (todos distintos), entonces el polinomio característico es el polinomio de menor grado que A satisface (**polinomio mínimo**), o sea n en este caso.

Cuando hay autovalores con multiplicidad mayor que 1 (repetidos), el polinomio mínimo podrá ser de grado menor que n . El polinomio mínimo se puede expresar como

$$\Psi(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{\tilde{n}_i},$$

donde \tilde{n}_i es la dimensión del bloque de Jordan más grande asociado al autovalor λ_i . Como el autovalor λ_i puede tener más de un bloque de Jordan asociado, concluimos que $\tilde{n}_i \leq n$.

Ejemplo 3.6. En la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 \\ 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

El autovalor λ_1 tiene multiplicidad 3, y dos bloques de Jordan asociados: órdenes 2 y 1. El autovalor λ_2 tiene multiplicidad 1.

$$\Delta(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{n_i} = (\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_2), \quad \text{polinomio característico}$$

$$\Psi(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{\tilde{n}_i} = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2), \quad \text{polinomio mínimo.}$$

El polinomio mínimo es siempre factor del polinomio característico.

Como consecuencia del teorema de Cayley-Hamilton vimos que para todo polinomio $f(\lambda)$, el polinomio matricial $f(A)$ se puede expresar como una combinación lineal de las potencias de A , $\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$. Si el polinomio mínimo se conoce (y por lo tanto los \tilde{n}_i), en realidad $f(A)$ se puede expresar como una combinación lineal de un conjunto menor, $\{I, A, \dots, A^{\tilde{n}_i-1}\}$, que es aún mejor.

3.6.3. Evaluación de funciones matriciales

Una forma de calcular $f(A)$ (con $\Psi(\lambda)$ si se conoce, y sino con $\Delta(\lambda)$) es mediante la fórmula de división de polinomios:

$$f(\lambda) = q(\lambda)\Delta(\lambda) + h(\lambda),$$

donde $q(\lambda)$ es el *polinomio cociente* y $h(\lambda)$ el *polinomio resto*. Tenemos

$$f(A) = q(A)\Delta(A) + h(A) = q(A)0 + h(A) = h(A),$$

o sea que todo se reduce a determinar los coeficientes del polinomio $h(\lambda) = \eta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \eta_1\lambda + \eta_0$.

La división de polinomios es útil si el grado de $f(\lambda)$ no es mucho mayor que el de $\Delta(\lambda)$. De lo contrario es mejor determinar los coeficientes de $h(\lambda)$ evaluando $f(\lambda)$ en los autovalores de A y planteando un sistema de ecuaciones algebraicas.

Si los autovalores λ_i de A son todos distintos, los η_i de $h(\lambda)$ se pueden resolver del sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$f(\lambda_i) = q(\lambda_i)\Delta(\lambda_i) + h(\lambda_i) = h(\lambda_i), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Si A tiene autovalores repetidos, hay que derivar $f(\lambda) = q(\lambda)\Delta(\lambda) + h(\lambda)$ hasta obtener las ecuaciones faltantes.

Ejemplo 3.7. Queremos calcular A^{100} con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Planteamos el problema como el cálculo de $f(\lambda) = \lambda^{100}$ evaluado en A . El polinomio característico de A es $\Delta(\lambda) = (\lambda + 1)^2$. Sea $h(\lambda) = \eta_1\lambda + \eta_0$.

En el espectro de A (dos elementos iguales en este caso, $\lambda = -1$) tenemos

$$\begin{aligned} f(-1) &= h(-1) &\Rightarrow & (-1)^{100} = -\eta_1 + \eta_0 \\ f'(-1) &= h'(-1) &\Rightarrow & 100 \cdot (-1)^{99} = \eta_1, \end{aligned}$$

y así concluimos que $\eta_1 = -100$, y $\eta_0 = -99$, o sea, $h(\lambda) = -100\lambda - 99$. Finalmente,

$$\begin{aligned} A^{100} &= \eta_1 A + \eta_0 I \\ &= -100 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 99 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -99 & -100 \\ 100 & 101 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Resumimos el resultado que usamos en el ejemplo en un teorema.

Teorema 3.4 (Evaluación de una función matricial). Sean dados $f(\lambda)$ y una matriz A $n \times n$ con polinomio característico $\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, donde $\sum_{i=1}^m n_i = n$. Sea $h(\lambda) = \eta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \eta_1\lambda + \eta_0$ el polinomio de orden $n - 1$, con coeficientes η_i a determinar, tal que $f(A) = h(A)$. Entonces los coeficientes η_i pueden calcularse resolviendo el sistema de n ecuaciones algebraicas

$$f^{(k)}(\lambda_i) = h^{(k)}(\lambda_i), \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n_i - 1, \text{ y } i = 1, 2, \dots, m,$$

donde

$$f^{(k)}(\lambda_i) \triangleq \left. \frac{d^k f(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i} \quad \text{y} \quad h^{(k)}(\lambda_i) \triangleq \left. \frac{d^k h(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i}.$$

3.6.4. Funciones matriciales no necesariamente polinomiales

Dada una función $f(\lambda)$ más general, una forma de definir $f(A)$ es usando el Teorema 3.4. Es decir: calculamos el polinomio $h(\lambda)$ de orden $n - 1$ igualando $f(\lambda) = h(\lambda)$ en el espectro de A , y así definimos $f(A) = h(A)$.

Ejemplo 3.8. Queremos calcular e^{At} para $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. El polinomio característico de A es $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Sea $h(\lambda) = \eta_2\lambda^2 + \eta_1\lambda + \eta_0$. Aplicando el Teorema 3.4 tenemos que²

$$\begin{aligned} f(1) &= h(1) &\Rightarrow e^t &= \eta_2 + \eta_1 + \eta_0 \\ f'(1) &= h'(1) &\Rightarrow te^t &= 2\eta_2 + \eta_1 \\ f(2) &= h(2) &\Rightarrow e^{2t} &= 4\eta_2 + 2\eta_1 + \eta_0. \end{aligned}$$

Haciendo las cuentas obtenemos $\eta_0 = -2te^t + e^{2t}$, $\eta_1 = 3te^t + 2e^t - 2e^{2t}$, y $\eta_2 = e^{2t} - e^t - te^t$. Finalmente

$$\begin{aligned} e^{At} &= h(A) = (e^{2t} - e^t - te^t)A^2 + (3te^t + 2e^t - 2e^{2t})A + (-2te^t + e^{2t})I \\ &= \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & 0 & 2e^t - 2e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \\ e^{2t} - e^t & 0 & 2e^{2t} - e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.9. Consideremos el bloque de Jordan de orden 4

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es simplemente $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4$. Si en vez de seleccionar $h(\lambda) = \eta_3\lambda^3 + \eta_2\lambda^2 + \eta_1\lambda + \eta_0$, elegimos

$$h(\lambda) = \eta_3(\lambda - \lambda_1)^3 + \eta_2(\lambda - \lambda_1)^2 + \eta_1(\lambda - \lambda_1) + \eta_0,$$

La condición $f(\lambda) = h(\lambda)$ en el espectro de A da las expresiones

$$\eta_0 = f(\lambda_1), \quad \eta_1 = f'(\lambda_1), \quad \eta_2 = \frac{f^{(2)}(\lambda_1)}{2!}, \quad \eta_3 = \frac{f^{(3)}(\lambda_1)}{3!}.$$

La propiedad de nilpotencia de $(A - \lambda_1 I)$ cuando A es un bloque de Jordan,

$$(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (\lambda_1 I - A)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (\lambda_1 I - A)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (\lambda_1 I - A)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

en este ejemplo permite obtener la expresión general para $f(A)$

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & f^{(2)}(\lambda_1)/2! & f^{(3)}(\lambda_1)/3! \\ 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & f^{(2)}(\lambda_1)/2! \\ 0 & 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda_1) \end{bmatrix}.$$

Así, por ejemplo, para la función exponencial matricial $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, tenemos

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2! & t^3 e^{\lambda_1 t}/3! \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2! \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}.$$

²Ojo que la diferenciación en la segunda línea es con respecto a λ , no t .

3.6.5. Series de Potencias

Otra forma de definir una función matricial $f(A)$ es a través de la serie de potencias de $f(\lambda)$. Supongamos que $f(\lambda)$ se puede representar por

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \lambda^i$$

con radio de convergencia ρ . Si todos los autovalores de A tienen magnitud menor que ρ , entonces podemos definir $f(A)$ como

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i A^i. \quad (3.9)$$

Esta definición es en realidad equivalente a la anteriormente vista en el Teorema 3.4. No lo probamos, pero mostramos un caso particular.

Ejemplo 3.10. Consideremos otra vez el bloque de Jordan del Ejemplo 3.9,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Supongamos que $f(\lambda)$ tiene el siguiente desarrollo en serie de potencias alrededor de λ_1

$$f(\lambda) = f(\lambda_1) + f'(\lambda_1)(\lambda - \lambda_1) + \frac{f''(\lambda_1)}{2!}(\lambda - \lambda_1)^2 + \dots$$

Entonces

$$f(A) = f(\lambda_1)I + f'(\lambda_1)(A - \lambda_1 I) + \frac{f''(\lambda_1)}{2!}(A - \lambda_1 I)^2 + \dots$$

Por la propiedad de nilpotencia del bloque de Jordan, $(\lambda I - A)^k = 0$ para $k \geq n = 4$, la serie de potencias se reduce inmediatamente a la expresión que sacamos en el Ejemplo 3.9.

3.6.6. Diferenciación e Integración Matricial

Se define elemento a elemento,

$$\int_0^t A(\tau) d\tau, \quad \frac{d}{dt} A(t) \quad \text{son respectivamente} \quad \int_0^t a_{ij}(\tau) d\tau, \quad \frac{d}{dt} a_{ij}(t).$$

Con estas definiciones no es difícil probar que vale la propiedad

$$\frac{d}{dt} [A(t)B(t)] = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t),$$

el teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{d}{dt} \int_0^t A(\tau) d\tau = A(t),$$

y la regla de Leibniz

$$\frac{d}{dt} \int_{f(t)}^{g(t)} A(t, \tau) d\tau = A(t, g(t))\dot{g}(t) - A(t, f(t))\dot{f}(t) + \int_{f(t)}^{g(t)} \frac{\partial}{\partial t} A(t, \tau) d\tau.$$

3.6.7. La Exponencial Matricial

Una función de particular interés en este curso es e^{At} . Como la serie de Taylor $e^{At} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n t^n}{n!} + \dots$ converge para todo λ y t finitos, tenemos que

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k. \quad (3.10)$$

En MATLAB e^A se calcula con la función `expm(A)`,³ que implementa la *expansión de Padé*.

Usando (3.10) es fácil probar las siguientes dos propiedades de e^{At}

$$\begin{aligned} e^0 &= I, \\ e^{A(t_1+t_2)} &= e^{At_1} e^{At_2}, \\ (e^{At})^{-1} &= e^{-At}. \end{aligned}$$

(¿Cómo probamos la tercera?) Notar que en general $e^{(A+B)t} \neq e^{At} e^{Bt}$ (¿por qué?).

Diferenciando término a término (3.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k \\ &= A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k)!} A^k \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k)!} A^k \right) A, \end{aligned}$$

así tenemos que $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$.

3.7. Ecuación de Lyapunov

Es la siguiente ecuación matricial

$$AM + MB = C, \quad (3.11)$$

donde A y B son matrices constantes, respectivamente de dimensiones $n \times n$ y $m \times m$. Las matrices C y la *incógnita* M son $n \times m$.

La ecuación (3.11) es lineal en M y puede escribirse como sistema de ecuaciones algebraicas en la forma estándar $Ax = y$. Veámoslo para $n = 3$ y $m = 2$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

Haciendo las cuentas y expresando M y C como vectores apilando sus columnas, llegamos a

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} + b_{11} & a_{23} & 0 & b_{12} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + b_{11} & 0 & 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 & 0 & a_{11} + b_{22} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{21} & 0 & a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & b_{21} & a_{31} & a_{32} & a_{33} + b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix}$$

³Ojo no confundir con `exp(A)`, que da la matriz de las exponenciales de los elementos de A .

es decir $\mathcal{A}\vec{M} = \vec{C}$, donde \mathcal{A} es la matriz $(n \cdot m) \times (n \cdot m)$ de la ecuación anterior, y \vec{M} y \vec{C} son las matrices M y C convertidas en vectores $(n \cdot m) \times 1$.⁴

Como \mathcal{A} es cuadrada, por el Corolario 3.1, esta ecuación tiene solución única si la matriz \mathcal{A} es invertible, es decir si no tiene ningún autovalor nulo. Puede probarse que si α_i y β_j son respectivamente los autovalores de A y B , los autovalores de \mathcal{A} son $\alpha_i + \beta_j$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$. En consecuencia, la ecuación de Lyapunov tendrá solución única si no existen i, j tales que $\alpha_i + \beta_j = 0$.

En MATLAB la ecuación (3.11) se resuelve con `lyap(A, B, -C)`.

3.8. Formas Cuadráticas

Dada una matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la función escalar $x^T M x$, donde $x \in \mathbb{R}^n$, es una *forma cuadrática*. Sin pérdida de generalidad se puede tomar M como *simétrica*, $M = M^T$, ya que

$$x^T (Q + Q^T) x = 2x^T Q x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Los autovalores de una matriz simétrica *son todos reales*, ya que para todo autovalor λ con autovector v de $M = M^T$,

1. el escalar $v^* M v$ (donde v^* denota la transpuesta conjugada de v) es real (sea v real o no),

$$(v^* M v)^* = v^* M^* v = v^* M v, \quad \text{y así}$$

2. λ debe ser real, dado que

$$v^* M v = v^* \lambda v = \lambda (v^* v).$$

Toda matriz real simétrica M es diagonalizable, es decir, el orden de su mayor bloque de Jordan es 1. Si no lo fuera, es decir, si existiera un autovector generalizado v de orden mayor que 1 asociado a algún autovalor repetido λ , tendría que verificarse que

$$(\lambda I - M)^k v = 0, \quad \text{para algún } k > 1, \text{ y} \quad (3.12)$$

$$(\lambda I - M)^{k-1} v \neq 0. \quad (3.13)$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} ((\lambda I - M)^{k-1} v)^* (\lambda I - M)^{k-1} v &= v^* (\lambda I - M^*)^{k-1} (\lambda I - M)^{k-1} v \\ &= v^* (\lambda I - M)^{2k-2} v \\ &= v^* (\lambda I - M)^{k-2} (\lambda I - M)^k v \end{aligned} \quad (3.14)$$

debería ser nulo por (3.12) y no nulo por (3.13). Una contradicción que prueba que $M = M^T$ no puede tener bloques de Jordan de orden mayor que 1, y por lo tanto debe ser semejante a una matriz diagonal: existe una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular tal que $M = Q D Q^{-1}$, donde $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal.

Notar que como M es simétrica y D diagonal,

$$M = Q D Q^{-1} = (Q D Q^{-1})^T = (Q^{-1})^T D Q^T,$$

que implica que $Q^T = Q^{-1}$ y $Q Q^T = I$. Toda matriz no singular Q con esta propiedad se llama *ortogonal*, y sus columnas son vectores *ortonormales*.

⁴ \mathcal{A} puede escribirse en forma compacta como $\mathcal{A} = I_{m \times m} \otimes A + B \otimes I_{n \times n}$ (\otimes : producto de Kronecker).

Teorema 3.5. Para toda matriz real simétrica M existe una matriz ortogonal Q tal que

$$M = QDQ^T \quad \text{o} \quad D = Q^T M Q,$$

donde D es una matriz diagonal con los autovalores de M , que son todos reales, en la diagonal.

Una desigualdad importante para una matriz simétrica M es la *desigualdad de Rayleigh-Ritz*, que dice que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda_{\min} x^T x \leq x^T M x \leq \lambda_{\max} x^T x,$$

donde λ_{\min} y λ_{\max} son respectivamente el menor y mayor autovalor de M .

3.8.1. Matrices definidas y semi-definidas positivas

Definición 3.16 (Matriz definida y semi-definida positiva). Una matriz simétrica M se dice *definida positiva*, que denotamos $M > 0$, si $x^T M x > 0$ para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo. Es *semi-definida positiva*, que denotamos $M \geq 0$, si $x^T M x \geq 0$ para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo.

Si M es definida positiva, entonces $x^T M x = 0$ sii $x = 0$. Si M es semi-definida positiva, entonces existe algún x no nulo tal que $x^T M x = 0$.

Existen tests para determinar si una matriz es definida o semi-definida positiva basados en las propiedades del signo de los determinantes de diversas submatrices. Uno de estos tests se basa en los *menores principales*.

Definición 3.17 (Menores principales). Sea una matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con entradas $\{m_{ij}\}$. Entonces dados los enteros $p = 1, \dots, n$ y $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, con $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n$, definimos los *menores principales* de la matriz M como

$$M(i_1, i_2, \dots, i_p) = \det \begin{bmatrix} m_{i_1, i_1} & m_{i_1, i_2} & \cdots & m_{i_1, i_p} \\ m_{i_2, i_1} & m_{i_2, i_2} & \cdots & m_{i_2, i_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{i_p, i_1} & m_{i_p, i_2} & \cdots & m_{i_p, i_p} \end{bmatrix}.$$

Los escalares $M(1, 2, \dots, p)$, $p = 1, 2, \dots, n$, que son simplemente los determinantes de las submatrices de la esquina superior izquierda de M ,

$$\begin{aligned} M(1) &= m_{11}, & M(1, 2) &= \det \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \\ M(1, 2, 3) &= \det \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, & \cdots \end{aligned}$$

son los *primeros menores principales* de M .

Teorema 3.6 (Matriz definida (semi-definida) positiva). Una matriz simétrica M es definida positiva (semi-definida positiva) sii cualquiera de las siguientes condiciones se satisface:

1. Cada uno de sus autovalores es positivo (no negativo).
2. Todos sus *primeros menores principales* son positivos (todos su *menores principales* son no negativos).

3. Existe una matriz no singular $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (una matriz singular $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o una matriz $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $m < n$) tal que $M = N^T N$.

Una matriz simétrica M es *definida negativa* (*semi-definida negativa*) si $-M$ es definida positiva (*semi-definida positiva*).

Ejemplo 3.11. La matriz simétrica

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}$$

es definida positiva si y sólo si $m_{11} > 0$ y $m_{11}m_{22} - m_{12}^2 > 0$. Es semi-definida positiva si y sólo si $m_{11} \geq 0, m_{22} \geq 0$, y $m_{11}m_{22} - m_{12}^2 \geq 0$.

3.9. La Descomposición en Valores Singulares (SVD)

Consideremos una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y definamos $M = A^T A$. Claramente M es $n \times n$, simétrica, y semi-definida positiva. Sus autovalores λ_i son no negativos. Como

$$\det(\lambda I_m - AA^T) = \lambda^{m-n} \det(\lambda I_n - A^T A)$$

las matrices cuadradas $A^T A$ y AA^T comparten los mismos autovalores positivos y sólo difieren en el número de autovalores nulos.

Supongamos que hay r autovalores positivos de M , y sea $p = \min(m, n)$. Entonces podemos ordenar

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_p,$$

Los *valores singulares* de la matriz A son

$$\sigma_i \triangleq \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Por el Teorema 3.6, para $M = A^T A$ existe una matriz ortogonal Q tal que

$$Q^T A^T A Q = D = S^T S,$$

donde D es una matriz diagonal con los σ_i^2 en la diagonal. La matriz S es $m \times n$ con los σ_i en la diagonal.

Teorema 3.7 (Descomposición en Valores Singulares). Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, existen matrices ortonormales $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que

$$U^T A V = S \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

donde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$.

Los vectores en las columnas de $U = [u_1, \dots, u_m]$ y $V = [v_1, \dots, v_n]$ son los *vectores singulares izquierdos y derechos* respectivamente de A .

Es fácil verificar comparando las columnas de las ecuaciones $AV = US$ y $A^T U = VS^T$ que

$$\left. \begin{aligned} Av_i &= \sigma_i u_i \\ A^T u_i &= \sigma_i v_i \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, p = \min(m, n).$$

La descomposición en valores singulares (SVD)⁵ revela muchas propiedades de la matriz A . Por ejemplo, si r es el índice del valor singular positivo más pequeño, entonces

1. el rango de A es r ,
2. los vectores $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ son una base ortonormal del kernel de A ,
3. los vectores $\{u_1, \dots, u_r\}$ son una base ortonormal de la imagen de A ,
4. tenemos la representación

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T.$$

Los valores singulares representan precisamente las longitudes de los semiejes del hiper-elipsoide $E = \{Ax : \|x\| = 1\}$. La Figura 3.3 muestra el conjunto E para una matriz A con $\sigma_1 = 0,8, \sigma_2 = 0,6, \sigma_3 = 0,4$.

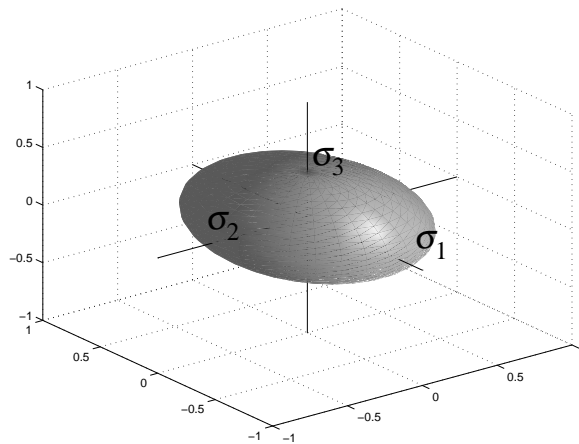


Figura 3.3: Hiper-elipsoide E en \mathbb{R}^3 .

En MATLAB la función $[U, S, V] = \text{svd}(A)$ calcula los valores y vectores singulares.

3.10. Normas de Matrices

El concepto de norma de vectores se extiende a matrices. Sea A una matriz $m \times n$. La norma de A puede definirse como

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad (3.15)$$

⁵Singular Value Decomposition.

Esta norma definida desde la norma de los vectores se llama *norma inducida*. Usando diferentes normas vectoriales (1, 2, ∞ , etc.) obtenemos diferentes normas inducidas. En este curso vamos a utilizar la norma inducida por la norma vectorial euclídea, $\|x\|_2$, que es la que se conoce como *norma espectral* de una matriz.

Otra propiedad importante de la descomposición en valores singulares de A es que la norma espectral de A está dada por su mayor valor singular,

$$\|A\| = \sigma_1.$$

Ejemplo 3.12. Si λ_1 y λ_2 son números reales, la norma espectral de

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

está dada por (3.15) como

$$\|A\| = \max_{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1} \sqrt{(\lambda_1 x_1 + x_2)^2 + \lambda_2^2 x_2^2}.$$

Para no tener que resolver un problema de optimización con restricciones, calculamos $\|A\|$ a través de σ_1 computando los autovalores de $A^T A$. El polinomio característico de $A^T A$ es

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A^T A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1^2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_1 & \lambda - \lambda_2^2 - 1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - (1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda + \lambda_1^2 \lambda_2^2. \end{aligned}$$

Las raíces de esta cuadrática están dadas por

$$\lambda = \frac{1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \pm \sqrt{(1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 \lambda_2^2}}{2}$$

El radical puede escribirse de forma que su positividad es obvia. Eligiendo el signo positivo, y después de un poco de álgebra llegamos a

$$\|A\| = \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 1} + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 1}}{2}. \quad (3.16)$$

De (3.16) se ve que

$$\|A\| = \sigma_1 \geq \frac{|\lambda_1 + \lambda_2| + |\lambda_1 - \lambda_2|}{2} = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|).$$

La propiedad de que σ_1 es mayor que la magnitud mayor de los autovalores de A es general, y más aún, para cualquier autovalor no nulo λ_i de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\sigma_p \leq |\lambda_i| \leq \sigma_1$$

La norma espectral de una matriz A en MATLAB se calcula con `norm(A)`.

Algunas propiedades útiles de la norma espectral de matrices:

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq \|A\| \|x\| \\ \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\| \\ \|AB\| &\leq \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

3.11. Resumen

En este capítulo hemos repasado

- Las definiciones básicas relativas a vectores y matrices, traza, determinante, e inversa.
- Bases y conjuntos ortonormales, independencia lineal, el concepto de norma, y el método de ortonormalización de Schmidt.
- Los resultados principales para la solución de ecuaciones lineales algebraicas, y los conceptos de imagen, rango y kernel de una matriz. En particular, la ecuación $Ax = y$
 - tiene solución sii y está en la imagen de A .
 - tiene solución única si $\ker(A) = \{0\}$ ($\dim \ker(A) = 0$).
 - tiene infinitas soluciones si $\dim \ker(A) > 0$.
- Transformaciones de semejanza de matrices, que permiten representar una matriz en diferentes coordenadas.
- Formas diagonales y de Jordan, que muestran la estructura básica de una matriz dada. No toda matriz puede diagonalizarse, pero siempre se puede obtener la forma de Jordan (diagonal en bloques).
- Funciones polinomiales de matrices y el teorema de Cayley-Hamilton, que dice que toda matriz satisface su polinomio característico.
- El *polinomio mínimo*, que es el polinomio de menor orden $\Psi(\lambda)$ tal que $\Psi(A) = 0$. Es siempre un factor del polinomio característico de la matriz (coincide con éste si A no tiene autovalores repetidos).
- Que una función de una matriz cuadrada, $f(A)$ puede definirse evaluando $f(\lambda)$ en el *espectro* de A , y por lo tanto, como una combinación lineal de $\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$ (o de $\{I, A, \dots, A^{\tilde{n}-1}\}$ donde $\tilde{n} \leq n$ es el orden del polinomio mínimo de A).
- Diferenciación e integración de matrices, definida elemento a elemento.
- La ecuación de Lyapunov $AM + MB = C$, que es una ecuación lineal algebraica matricial que tiene solución única $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sii los autovalores α_i de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y β_j de $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son tales que $\alpha_i + \beta_j \neq 0, \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$.
- Las formas cuadráticas $x^T M x$, que son funciones escalares cuadráticas en los elementos del vector x , donde M puede tomarse como simétrica (o ser reemplada por $(M + M^T)/2$).
- Que las matrices simétricas tienen siempre autovalores reales, y que son siempre diagonalizables.
- Matrices simétricas definidas, y semi-definidas positivas, que son aquellas M para las que $x^T M x$ es positiva, y no negativa, respectivamente.
- La descomposición en valores singulares de una matriz A . Los valores singulares son la raíz cuadrada de los autovalores de $A^T A$.
- La norma espectral de una matriz A , que es la inducida por la norma euclídea de vectores, y es el máximo valor singular, σ_1 de A .

3.12. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Dados los vectores $x_1 = [2 \ -3 \ 1]^T$ y $x_2 = [1 \ 1 \ 1]^T$

1. Calcular sus normas 1, 2 e ∞ .
2. Encontrar vectores ortonormales que generen el mismo subespacio.

Ejercicio 3.2. Determinar rango y bases de la imagen y el kernel para cada una de las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3.3. Dada la ecuación

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

¿Cuántas soluciones tiene? ¿Qué pasa si $y = [1 \ 1 \ 1]^T$?

Ejercicio 3.4. Dada la ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Encontrar la forma de la solución general.
2. Encontrar la solución de mínima norma euclídea.

Ejercicio 3.5. Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

encontrar las representaciones de la matriz A con respecto a las bases $\{b_1, Ab_1, A^2b_1, A^3b_1\}$ y $\{b_2, Ab_2, A^2b_2, A^3b_2\}$.

Ejercicio 3.6. Representar en forma de Jordan las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3.7. Mostrar que si λ es un autovalor de A con autovector v , entonces $f(\lambda)$ es un autovalor de $f(A)$ con autovector v .

Ejercicio 3.8. Calcular e^{At} para las matrices A_1 y A_3 del Ejercicio 3.6.

Ejercicio 3.9. Mostrar que funciones de la misma matriz conmutan: $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

Ejercicio 3.10. Probar que la transformada de Laplace de e^{At} es

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}.$$

Ejercicio 3.11. Sean todos los autovalores de A distintos, y sea q_i un autovector por derecha de A asociado a λ_i , $Aq_i = \lambda_i q_i$. Sea $Q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]$ y $P \triangleq Q^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$, donde p_i es la fila i de P . Mostrar que

1. p_i es un autovector por izquierda de A asociado a λ_i : $p_i A = \lambda_i p_i$.
2. $(sI - A)^{-1} = \sum \frac{1}{s - \lambda_i} q_i p_i$.

Ejercicio 3.12. Encontrar M solución de la ecuación de Lyapunov con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = 3$, $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. ¿Existe solución única?

Ejercicio 3.13. ¿Son las siguientes matrices definidas o semi-definidas positivas?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.14. Calcular los valores singulares de las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.15. Calcular la norma espectral de las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1-j & 0 \\ 0 & 1+j \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.16. Dada una constante $\alpha > 1$, mostrar cómo definir una matriz 2×2 A tal que los autovalores de A sean los dos $1/\alpha$ y $\|A\| \geq \alpha$.

Ejercicio 3.17. Si A es invertible probar que $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$.

Capítulo 4

Solución de la Ecuación de Estado y Realizaciones

4.1. Introducción

Vimos que los sistemas lineales pueden representarse mediante integrales de convolución y, si son de dimensión finita (a parámetros concentrados), también mediante ecuaciones de estado. En este capítulo veremos cómo encontrar soluciones de estas ecuaciones (solución de la ecuación de estado), y cómo transformar modelos en matriz transferencia a ecuaciones de estado (realización).

Veamos antes brevemente cómo calcular soluciones cuando uno tiene una descripción entrada/salida del sistema. Lamentablemente, no existe forma analítica simple de resolver la integral de convolución

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.1)$$

La forma más fácil es calcularla numéricamente en una computadora digital, para lo cual hay que aproximarla primero mediante una discretización. Una forma de discretizar (4.1) es en la forma

$$y(k\Delta) = \sum_{m=k_0}^k g(k\Delta, m\Delta)u(m\Delta)\Delta, \quad (4.2)$$

donde Δ es el *paso de integración*. La ecuación (4.2) es básicamente la ecuación de convolución discreta que discutimos en §2.6.1.

En el caso lineal y estacionario, también podemos usar la representación en dominio Laplace $\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s)$ para calcular la solución. Si el sistema es de dimensión infinita, $\hat{g}(s)$ no va a ser una función racional de s . Salvo casos especiales, resulta más fácil calcular la solución directamente en dominio temporal de una discretización del tipo (4.2).

Cuando el sistema es lineal, estacionario y de dimensión finita, entonces $\hat{g}(s)$ es una función racional de s . Si $\hat{u}(s)$ también es racional, el cálculo de $y(t)$ se reduce a calcular polos, hacer expansión en fracciones simples, y finalmente usar una tabla de transformada Laplace. En MATLAB estas operaciones pueden hacerse con las funciones `roots` y `residue`. Hay limitaciones, sin embargo, cuando existen polos repetidos, que pueden hacer que la solución sea muy sensible a errores de cómputo. En consecuencia, la transformada Laplace no es un método eficiente en computadoras digitales.

En este capítulo vemos la forma más eficiente de calcular $y(t)$: obtener primero una representación en EE de (4.1) (es decir, hacer una *realización* en EE), y luego resolver las

ecuaciones

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4.3)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \quad (4.4)$$

Consideraremos primero el caso estacionario y luego el caso inestacionario.

4.2. Solución de Ecuaciones de Estado Estacionarias

Empezamos con el caso estacionario (invariante en el tiempo), es decir: A, B, C, D constantes. Queremos determinar la solución $x(t)$ de la ecuación

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.5)$$

para un estado inicial $x(0)$ y entrada $u(t), t \geq 0$ dados. Una forma de encontrar la solución en este caso, como es simple, es “probar” con una solución candidata y ver si satisface la ecuación. Por ejemplo, para si el sistema fuera escalar,

$$\dot{x}(t) = ax(t),$$

sabemos que la solución tiene la forma $x(t) = e^{at}x(0)$. No es mala idea entonces suponer que $x(t)$ en (4.5) va a involucrar a la exponencial matricial e^{At} .

Multipliquemos entonces (por derecha) ambos lados de la ecuación (4.5) (escrita en la variable τ , que va a ser nuestra variable de integración) por la matriz $e^{-A\tau}$. De esta operación obtenemos

$$\begin{aligned} e^{-A\tau}\dot{x}(\tau) - e^{-A\tau}Ax(\tau) &= e^{-A\tau}Bu(\tau) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}(e^{-A\tau}x(\tau)) &= e^{-A\tau}Bu(\tau). \end{aligned}$$

La integración de esta última ecuación entre 0 y t da

$$e^{-A\tau}x(\tau)|_{\tau=0}^t = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau,$$

o lo que es lo mismo,

$$e^{-At}x(t) - e^0x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau.$$

Como la inversa de e^{-At} es e^{At} y $e^0 = I$, como vimos anteriormente, finalmente arribamos a que la solución de (4.5) es

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) es la solución general de la ecuación de estado (4.5). Suele referirse como la *fórmula de variación de los parámetros*. La substitución de (4.6) en la ecuación de salida (4.4) expresa $y(t)$ en la forma siguiente, que evidencia la superposición de la *respuesta a entrada nula* y la *respuesta a condiciones iniciales nulas*:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \quad (4.7)$$

Como adelantáramos en §4.1, la solución de la ecuación de estado también puede calcularse en el dominio frecuencial haciendo la transformada de Laplace de (4.3) y (4.4) y resolviendo las ecuaciones algebraicas obtenidas:

$$\begin{aligned}\hat{x}(s) &= (sI - A)^{-1} [x(0) + B\hat{u}(s)] \\ \hat{y}(s) &= C(sI - A)^{-1} [x(0) + B\hat{u}(s)] + D\hat{u}(s).\end{aligned}$$

Las fórmulas (4.6) o (4.7) requieren la exponencial matricial e^{At} . Como vimos, e^{At} puede calcularse en más de una forma, entre otras,

1. Usando el Teorema 3.4 del Capítulo 3, evaluando $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ en el espectro de A , y calculando los coeficientes del polinomio matricial $h(\lambda)$.
2. Encontrando la forma de Jordan de $A = QJQ^{-1}$, usando la fórmula explícita de e^{Jt} al final de § 3.6.4, y después haciendo $e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}$.
3. Como $\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$, calculando la inversa de $(sI - A)$ y antitransformando.

Ejemplo 4.1. Consideremos la ecuación

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Su solución está dada por la ecuación (4.6). Calculamos e^{At} por el método 3; la inversa de $sI - A$ es

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (s+2)/(s+1)^2 & -1/(s+1)^2 \\ 1/(s+1)^2 & s/(s+1)^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La matriz e^{At} es la antitransformada Laplace de $(sI - A)^{-1}$, que obtenemos expandiendo en fracciones simples y usando una tabla de transformada Laplace (o en MATLAB con el *symbolic toolbox* con la función `ilaplace`).

$$\mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{(s+2)}{(s+1)^2} & \frac{-1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, usando la fórmula de variación de los parámetros (4.6)

$$x(t) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t}x_1(0) - te^{-t}x_2(0) \\ te^{-t}x_1(0) + (1-t)e^{-t}x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \\ \int_0^t [1 - (t-\tau)]e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \end{bmatrix}.$$

4.2.1. Comportamiento asintótico de la respuesta a entrada nula

De la forma de e^{Jt} donde J está en forma de Jordan podemos deducir el comportamiento asintótico de la respuesta del sistema a condiciones iniciales. Consideremos un sistema cuya matriz $J = Q^{-1}AQ$ es

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

La respuesta a entrada nula de $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ es $x(t) = e^{At}x(0)$, donde ya conocemos la expresión en forma cerrada para e^{At}

$$e^{At} = Q \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} Q^{-1}$$

Vemos que cada elemento de e^{At} será una combinación lineal de los términos $\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$, que surgen de los autovalores de A y sus multiplicidades.

Podemos así deducir que

- Si *todos* los autovalores de A , repetidos o no, tienen parte real negativa, $\|e^{At}\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$; la respuesta de extingue.
- Si *algún* autovalor de A tiene parte real positiva, $\|e^{At}\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$; la respuesta crece en forma ilimitada.
- Si ningún autovalor de A tiene parte real positiva, y los autovalores con parte real cero son de multiplicidad 1, $\|e^{At}\| \leq \alpha$ cuando $t \rightarrow \infty$ para alguna cota $\alpha \in \mathbb{R}$; la respuesta permanece acotada.
- Si A tiene autovalores con parte real cero de multiplicidad 2 o mayor, $\|e^{At}\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$; la respuesta crece en forma ilimitada.

Estas conclusiones son válidas en general para la respuesta de un sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$.

Ejemplo 4.2 (Oscilador armónico). Para el *oscilador armónico*, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

de donde

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

La respuesta a entrada nula $x(t) = e^{At}x(0)$ será oscilatoria.

4.2.2. Discretización

Una aplicación directa de la fórmula de variación de los parámetros es la discretización de sistemas para simulación o diseño de controladores digitales. Dado que la gran mayoría de los sistemas de control se implementan en forma digital, será necesario en alguna etapa del diseño discretizar; bien el controlador en tiempo continuo diseñado en base a un modelo en tiempo continuo de la planta, o bien la planta en tiempo continuo misma a fin de realizar el diseño del controlador discreto en forma directa.

La Figura 4.1 ilustra una planta en tiempo continuo con los conversores

- *analógico/digital*, o *muestreador*, que convierte la señal medida en tiempo continuo $y(t)$ en una secuencia de valores discretos $y[k]$, aptos para ser procesados en una computadora digital; y
- *digital/analógico*, o *bloqueador*, que convierte la secuencia discreta de control $u[k]$ producida por el controlador digital en la entrada analógica $u(t)$ a la planta.

Vamos a asumir por simplicidad que ambos conversores operan en sincronismo y con un período regular T .

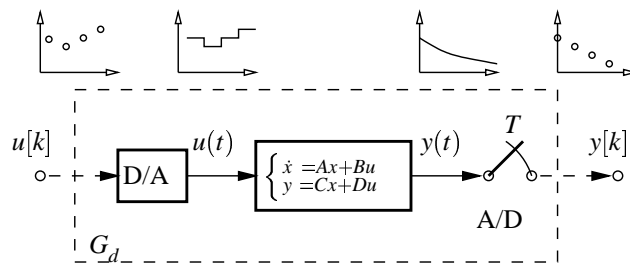


Figura 4.1: Esquema de discretización de un sistema en variables de estado

Consideremos el sistema en tiempo continuo G dado por sus EE

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t).\end{aligned}$$

Pretendemos obtener un modelo discreto G_d en EE asumiendo un *bloqueador de orden cero* (D/A) a la entrada y un *muestreador ideal* (A/D) a la salida, que son los casos más simples de estos conversores. La ley de conversión del bloqueador de orden cero es

$$u(t) = u[k], \quad \forall t \in [kT, (k+1)T),$$

mientras que la ley de conversión del muestreador ideal es

$$y[k] = y(kT).$$

Discretización simple pero inexacta

Hagamos primero un enfoque intuitivo. La forma más simple de obtener un modelo discreto de este sistema es usando la aproximación de la derivada

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+T) - x(t)}{T}$$

para obtener $x(t+T) = x(t) + Ax(t)T + Bu(t)T$. Si sólo nos interesa la evolución del sistema en los instantes $t = kT, k = 0, 1, 2, \dots$, llegamos al modelo

$$x[k+1] = (I + AT)x[k] + BTu[k]. \quad (4.8)$$

El modelo discreto (4.8) es simple de obtener, pero *inexacto* aún en los instantes de muestreo.

Discretización exacta

Podemos obtener un modelo discreto exacto del sistema continuo usando la fórmula de variación de los parámetros (4.6) que da la solución general de la EE. Para empezar, notemos que la salida del *bloqueador de orden cero* (D/A) se mantiene constante durante cada período de muestreo T hasta la próxima muestra,

$$u(t) = u(kT) \triangleq u[k] \quad \text{para } t : kT \leq t < (k+1)T.$$

Para esta entrada seccionalmente constante, evaluamos el estado del sistema continuo en el instante de muestreo $t = (k+1)T$,

$$\begin{aligned} x[k+1] &\triangleq x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{AT} \underbrace{\left(e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right)}_{x[k]} + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu[k]d\tau \\ &= e^{AT}x[k] + \left(\int_0^T e^{A\sigma}d\sigma \right) Bu[k], \end{aligned}$$

donde en la última línea usamos $\sigma = (k+1)T - \tau$. Así llegamos al modelo discreto

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k] \\ y[k] &= C_d x[k] + D_d u[k], \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde

$$\begin{aligned} A_d &\triangleq e^{AT}, & B_d &\triangleq \int_0^T e^{A\tau}d\tau B \\ C_d &\triangleq C, & D_d &\triangleq D. \end{aligned}$$

El modelo (4.9) da el valor *exacto* de las variables en $t = kT$.

Usando la igualdad $A \int_0^T e^{A\tau}d\tau = e^{AT} - I$, si A es no singular podemos computar B_d con la fórmula

$$B_d = A^{-1}(A_d - I)B.$$

Un método mejor, que vale para toda A , surge del siguiente resultado

Teorema 4.1 (Van Loan [1978]). Sean dados los enteros positivos n_1, n_2 tales que $n_1 + n_2 = n$. Si definimos la matriz triangular $n \times n$

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

donde $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ y $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, entonces para $t \geq 0$

$$e^{Ct} = \begin{bmatrix} F_1(t) & G_1(t) \\ 0 & F_2(t) \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \begin{cases} F_1(t) = e^{A_1 t} \\ F_2(t) = e^{A_2 t} \\ G_1(t) = \int_0^t e^{A_1 \tau} B_1 e^{A_2(t-\tau)} d\tau. \end{cases}$$

Aplicando el teorema para $C = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ obtenemos $A_d = F_1(T)$ y $B_d = G_1(T)$. La función MATLAB `[Ad, Bd] = c2d(A, B, T)` calcula A_d y B_d de estas expresiones.

4.3. Ecuaciones de Estado Equivalentes

La descripción en EE para un sistema dado *no es única*. Dada una representación en EE, un simple cambio de coordenadas nos lleva a una representación en EE distinta *equivalente* del mismo sistema.

Ejemplo 4.3. Sea el circuito RLC de la Figura 4.2, donde $R = 1\Omega$, $L = 1H$ y $C = 1F$. Como salida tomamos la tensión en el capacitor. Si elegimos como variables de estado la tensión

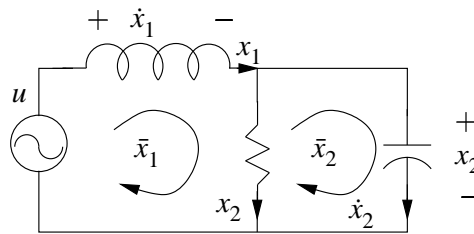


Figura 4.2: Circuito RLC

en la resistencia y la tensión en el capacitor, obtenemos la descripción en EE

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Si en cambio elegimos las corrientes de lazo \bar{x}_1 y \bar{x}_2 obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Las dos descripciones en EE valen para el mismo circuito. De hecho puede verificarse que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad \text{es decir} \quad x = P\bar{x} \quad \text{o} \quad \bar{x} = P^{-1}x.$$

La matriz P (no singular) representa un cambio de coordenadas o *transformación de equivalencia*.

Definición 4.1 (Transformación de Equivalencia). Sea $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz no singular, y sea $\bar{x} = P^{-1}x$. Entonces la EE

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t). \end{aligned}$$

donde $\bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{B} = PB$, $\bar{C} = CP^{-1}$, $\bar{D} = D$, se dice (algebraicamente) *equivalente* a la EE en x con las matrices A, B, C, D , y $x = P\bar{x}$ es una *transformación de equivalencia*.

Por lo visto en el repaso de Álgebra Lineal, las matrices A y \bar{A} son similares y comparten los mismos autovalores con la misma estructura de autovectores.¹

La función MATLAB `[Ab,Bb,Cb,Db] = ss2ss(A,B,C,D,P)` realiza transformaciones de equivalencia.

4.3.1. Equivalencia a estado cero

Dos descripciones en EE estacionarias son *equivalentes a estado cero* si tienen la misma matriz transferencia,

$$C(sI - A)^{-1}B + D = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}. \quad (4.10)$$

Usando la expansión en series²

$$(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots$$

válida para todo s que no sea un autovalor de A , podemos escribir (4.10) como

$$D + CBs^{-1} + CABs^{-2} + \dots = \bar{D} + \bar{C}\bar{B}s^{-1} + \bar{C}\bar{A}\bar{B}s^{-2} + \dots$$

Teorema 4.2 (Equivalencia a Estado Cero). Dos EE lineales y estacionarias $\{A, B, C, D\}$ y $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$ son equivalentes a estado cero si $D = \bar{D}$ y $CA^m B = \bar{C}\bar{A}^m \bar{B}$, para $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

4.3.2. Parámetros de Markov

La matriz D representa la ganancia estática directa del sistema. Cuando $D = 0$, la matriz transferencia se reduce a $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B$, que no es otra cosa que la transformada Laplace de la respuesta al impulso

$$G(t) = Ce^{At}B.$$

Los coeficientes

$$\begin{aligned} CB &= G(0) \\ CAB &= G'(0) \\ CA^2B &= G''(0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

son las derivadas de la respuesta al impulso en el origen, y se llaman *parámetros de Markov*.

En otras palabras, dos sistemas en EE son equivalentes a estado cero

\Leftrightarrow sus respuestas al impulso son idénticas.

\Leftrightarrow sus ganancias estáticas y sus parámetros de Markov son idénticos.

¹Dado que la forma de Jordan es única, salvo reordenamientos de filas y columnas.

²Surge de evaluar matricialmente la función $f(\lambda) = (1 - \lambda/s)^{-1} = 1 + \lambda/s + \lambda^2/s^2 + \lambda^3/s^3 + \dots$

Es claro que equivalencia algebraica implica equivalencia a estado cero. Pero que dos sistemas tengan la misma matriz transferencia *no* implica que tengan la misma descripción en EE.

Ejemplo 4.4 (Equivalencia algebraica \nRightarrow equivalencia a estado cero). Los sistemas

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) & \dot{x}(t) &= u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) & y(t) &= x(t). \end{aligned}$$

son equivalentes a estado cero, ya que para ambos $D = 0$ y $CB = 1$, $CA^m B = 0$ para todo $m \geq 1$, y por ende, tienen la misma función transferencia, $\hat{G}(s) = 1/s$. No son, sin embargo, algebraicamente equivalentes (tienen distinta dimensión).

4.4. Formas Canónicas

Existen formas particulares de las EE que presentan características útiles. Estas formas se llaman canónicas y discutimos tres:

- Forma canónica modal,
- Forma canónica controlable,
- Forma canónica del controlador.

4.4.1. Forma canónica modal

La forma canónica modal es aquella en la que la matriz A del sistema está en forma de Jordan. Como ya vimos, la matriz de cambio de base Q se forma apilando los autovectores y autovectores generalizados del sistema. Recordemos la salvedad cuando hay autovalores complejos $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ — naturalmente conjugados ya que A es real — con autovectores $v_{1,2} = r \pm ju$, $r, u \in \mathbb{R}^n$; En vez de apilar v_1 y v_2 en Q hay que usar r y u para obtener la forma de Jordan real con el bloque $\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$.

Ejemplo 4.5. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

tiene autovalores $\lambda_1 = 1 + j$, $\lambda_2 = 1 - j$, y $\lambda_3 = 2$, respectivamente con autovectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz de cambio de base $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la lleva a la forma de Jordan real

$$Q^{-1} * A * Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.4.2. Forma canónica controlable

Presentamos esta forma canónica para el caso de una sola entrada de control, es decir $B \in \mathbb{R}^n$. Esta forma canónica se obtiene seleccionando como matriz de cambio de base $C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$, que lleva a la matriz A a una forma *companion*,

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Obviamente se requiere que la matriz C sea no singular (lo que veremos sucede si el sistema es *controlable*).

Esta forma canónica tiene una relación uno a uno con el polinomio característico de A , $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$.

En MATLAB la función `[Ac,Bc,Cc,Dc] = canon(A,B,C,D,'modal')` genera la forma canónica modal y `canon(A,B,C,D,'companion')` la forma canónica controlable.

4.4.3. Forma canónica del controlador

Una forma canónica similar a la controlable (4.11), pero más conveniente para diseño de control, es la *del controlador*. Esta está dada por (caso SISO)

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de cambio de base es $Q = CR$, donde $C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ y

$$R = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La derivación del caso multientrada es complicada [ver Rugh, 1995, §13]; volveremos a ella en el Capítulo 6.

Ejemplo 4.6. Consideremos un sistema cuyas matrices A y B son

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz $C = [B, AB, A^2B]$ con la función MATLAB `ctrb(A,B)`, y R con el polinomio característico de A , `poly(A)`, $\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 8\lambda - 2$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 20 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 14 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde obtenemos

$$(CR)^{-1}A(CR) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \quad (CR)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.5. Realizaciones

Como vimos, todo sistema lineal estacionario (invariante en el tiempo) puede describirse por una representación entrada-salida con matriz transferencia

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s),$$

y si el sistema es de dimensión finita, también por una representación interna en EE

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Cuando tenemos las EE, $\{A, B, C, D\}$, la matriz transferencia puede calcularse en forma única como $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. El problema inverso, de obtener las EE $\{A, B, C, D\}$ de $\hat{G}(s)$, se llama problema de *realización*. Diremos que una matriz transferencia $\hat{G}(s)$ es *realizable* si existe una EE con $\{A, B, C, D\}$ tales que $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, y el cuádruplo $\{A, B, C, D\}$ se dice una *realización* de $\hat{G}(s)$.

Como vimos con el Ejemplo 4.3, si existe *una* realización, existen infinitas, ya que un simple cambio de coordenadas lleva a una descripción en EE equivalente. Más aún, dos sistemas en EE no necesariamente de la misma dimensión pueden tener la misma función transferencia.

Para analizar el problema de realizabilidad necesitamos introducir el concepto de función transferencia *propia*.

Definición 4.2 (Función transferencia propia). Una función transferencia racional (cociente de polinomios) es *propia* si el grado del polinomio numerador no supera (es menor o igual) al grado del polinomio denominador. Si el grado del numerador es estrictamente menor que el del denominador, la función se dice *estrictamente propia*.

La definición de función transferencia propia se extiende naturalmente a una *matriz* transferencia, que es (estrictamente) propia si todos sus elementos son funciones racionales (estrictamente) propias.

Teorema 4.3 (Realizabilidad). Una matriz transferencia $\hat{G}(s)$ es realizable $\Leftrightarrow \hat{G}(s)$ es una matriz racional y propia.

Demostración. (\Rightarrow) Si $\hat{G}(s)$ es realizable, entonces existen matrices $\{A, B, C, D\}$ tales que

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} C \operatorname{adj}(sI - A)B + D\end{aligned}$$

Si A es $n \times n$, $\det(sI - A)$ es un polinomio de orden n . Como cada elemento de $\operatorname{adj}(sI - A)$ es el determinante de una submatriz $(n - 1) \times (n - 1)$, $C \operatorname{adj}(sI - A)B$ es una matriz de polinomios de a lo sumo grado $n - 1$. Así $(sI - A)^{-1}B$ es racional y estrictamente propia, y si $D \neq 0$, $\hat{G}(s)$ racional y propia.

(\Leftarrow) Si que $\hat{G}(s)$ es una matriz racional propia $q \times p$ descomponemos $\hat{G}(s) = \hat{G}(\infty) + \hat{G}_{ep}(s)$, donde $\hat{G}_{ep}(s)$ es la parte estrictamente propia de $\hat{G}(s)$.

Definimos $d(s) = s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1}s + \alpha_r$ como el polinomio mónico mínimo común denominador de los elementos de $\hat{G}_{ep}(s)$. Entonces podemos expresar

$$\hat{G}_{ep}(s) = \frac{1}{d(s)} [N_1 s^{r-1} + N_2 s^{r-2} + \dots + N_{r-1}s + N_r],$$

donde las N_i son matrices constantes $q \times p$. Entonces no es difícil probar que el conjunto de EE en forma canónica del controlador

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_p \\ -\alpha_r I_p & -\alpha_{r-1} I_p & -\alpha_{r-2} I_p & \dots & -\alpha_1 I_p \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{bmatrix} u(t) \\ y &= [N_r \ N_{r-1} \ N_{r-2} \ \dots \ N_1] x(t) + \hat{G}(\infty)u(t)\end{aligned}$$

es una realización de $\hat{G}(s)$, finalizando la demostración. \square

Entonces, una matriz transferencia $\hat{G}(s)$ es realizable sii $\hat{G}(s)$ es racional y propia. En la prueba del Teorema 4.3 tenemos una forma de obtener las matrices A, B, C de la realización (D es directamente $\hat{G}(\infty)$). En el caso SISO esta forma es particularmente simple y se reduce a la *forma canónica del controlador*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.12)$$

$$y(t) = [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \beta_{n-2} \ \dots \ \beta_1] x(t) \quad (4.13)$$

correspondiente a una función transferencia $\hat{G}(s)$ dada por

$$\hat{G}(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_n}.$$

La misma función transferencia corresponde a la forma canónica alternativa del controlador

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \cdots \ \beta_{n-1} \ \beta_n] x(t).$$

En el caso SIMO (una entrada y varias salidas) la forma es también simple; la única modificación en la ecuación (4.12) es en la ecuación de salida

$$y(t) = \begin{bmatrix} \beta_{1n} & \cdots & \beta_{13} & \beta_{12} & \beta_{11} \\ \beta_{2n} & \cdots & \beta_{23} & \beta_{22} & \beta_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{pn} & \cdots & \beta_{p3} & \beta_{p2} & \beta_{p1} \end{bmatrix} x(t) \quad (4.14)$$

para $y \in \mathbb{R}^p$, que corresponde a la matriz transferencia

$$\hat{G}(s) = \frac{\begin{bmatrix} \beta_{11}s^{n-1} + \beta_{12}s^{n-2} + \cdots + \beta_{1n} \\ \beta_{21}s^{n-1} + \beta_{22}s^{n-2} + \cdots + \beta_{2n} \\ \vdots \\ \beta_{p1}s^{n-1} + \beta_{p2}s^{n-2} + \cdots + \beta_{pn} \end{bmatrix}}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n}$$

La realización SISO (4.12)-(4.13), o la SIMO (4.12)-(4.14), pueden escribirse directamente por inspección de la matriz transferencia $\hat{G}(s)$.

¿Cómo encaramos el caso MIMO? Puede considerarse como la superposición de varios SIMOs, por ejemplo dividiendo la matriz transferencia en columnas y realizando las columnas por separado (cada columna corresponde a un subsistema SIMO), como se ilustra en la Figura 4.3,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{y}_p(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) & \hat{G}_{12}(s) & \cdots & \hat{G}_{1m}(s) \\ \hat{G}_{21}(s) & \hat{G}_{22}(s) & \cdots & \hat{G}_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{G}_{p1}(s) & \hat{G}_{p2}(s) & \cdots & \hat{G}_{pm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \hat{u}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{u}_m(s) \end{bmatrix} \\ &= [\hat{G}_{C1}(s) \ \hat{G}_{C2}(s) \ \cdots \ \hat{G}_{Cm}(s)] \begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \hat{u}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{u}_m(s) \end{bmatrix} \\ &= \hat{G}_{C1}(s)\hat{u}_1(s) + \hat{G}_{C2}(s)\hat{u}_2(s) + \cdots + \hat{G}_{Cm}(s)\hat{u}_m \end{aligned}$$

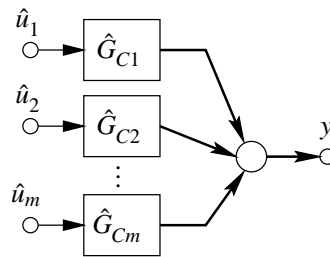


Figura 4.3: Representación de un sistema MIMO por columnas

Si A_i, B_i, C_i, D_i es la realización de la columna $\hat{G}_{Ci}(s)$, $i = 1, \dots, m$, de $\hat{G}(s)$ entonces una realización de la superposición es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$y = [C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + [D_1 \ D_2 \ \cdots \ D_m] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

De forma similar, la realización de un sistema MIMO también se puede encarar, *mutatis mutandis*, como la superposición de varios sistemas MISOs subdividiendo la matriz transferencia *por filas*.

Ejemplo 4.7. Consideramos la matriz transferencia

$$\begin{aligned} \hat{G}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{4s-10}{2s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-12}{2s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-6(s+2)}{s^2+\frac{5}{2}s+1} & \frac{3(s+2)}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Realizamos la parte estrictamente propia de (4.15) por columnas.

$$\begin{bmatrix} \frac{-6(s+2)}{s^2+\frac{5}{2}s+1} \\ \frac{1}{s^2+\frac{5}{2}s+1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_{C1} &= \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3(s+2)}{s^2+2s+4} \\ \frac{(s+1)}{s^2+2s+4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} \dot{x}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \\ y_{C1} &= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_2 \end{aligned}$$

Finalmente superponemos las realizaciones de las columnas de $\hat{G}(s)$ para obtener su realización completa.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} -12 & -6 & 6 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.5.1. Realización Mínima

Los métodos vistos para obtener una realización de una matriz transferencia (por columnas, por filas, etc.) dan en general realizaciones de distintos órdenes. Cabe preguntarse si será posible obtener una realización que tenga el menor orden posible, que implicará, en general, el modelo en EE más simple. Para toda matriz transferencia realizable existen siempre realizaciones de orden mínimo, llamadas *realizaciones mínimas*. Éstas realizaciones son no sólo equivalentes a estado cero entre sí, sino también algebraicamente equivalentes.

Las realizaciones mínimas están intrínsecamente relacionadas con las propiedades de *controlabilidad* y *observabilidad* del sistema que estudiaremos en El Capítulo 6. La función MATLAB `[Am, Bm, Cm, Dm] = minreal(A, B, C, D)` lleva una realización dada $\{A, B, C, D\}$ de $\hat{G}(s)$ a una realización mínima.

4.5.2. Sistemas Discretos

Como es fácil de ver, los conceptos y la teoría de realizaciones que vimos hasta aquí sólo dependen de las matrices $\{A, B, C, D\}$ y su relación con la matriz transferencia $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Evidentemente entonces, estos conceptos y teoría se aplican también, sin modificaciones, a sistemas de tiempo discreto.

4.6. Solución de Ecuaciones de Estado Inestacionarias

Pasemos ahora a analizar el caso inestacionario. Sea entonces el sistema inestacionario descrito por las EE

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

para el que asumimos que existe una solución única para cada condición inicial $x(t_0)$ y cada entrada de control $u(t)$. La solución de las ecuaciones (4.17) es lógicamente más difícil de obtener que en el caso estacionario, pero veremos que la experiencia obtenida va a ser de utilidad. Antes de encarar el caso más general, con entrada, tratemos solamente la respuesta a condiciones iniciales, es decir, el sistema homogéneo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (4.18)$$

Vamos a mostrar primero por qué el método aplicado para deducir la solución en el caso estacionario no sirve. Vale recordar de la teoría de ecuaciones diferenciales que una condición suficiente para la existencia y unicidad de solución de (4.18) es que la función matricial $A(t)$ sea una función continua de t . Es decir,

Para cada par $(t_0, x(t_0))$, la ecuación lineal (4.18) con $A(t)$ continua tiene una solución única y continuamente diferenciable.

En el caso estacionario $\dot{x}(t) = Ax(t)$ lo que hicimos fue extender la solución de la ecuación escalar $\dot{x}(t) = ax(t)$ para mostrar que la solución general era $x(t) = e^{At}x(0)$, usando la propiedad de conmutatividad de A con e^{At} en

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A.$$

Ahora, para el caso inestacionario sabemos que la solución de la ecuación escalar inestacionaria $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$ con condición inicial $x(0)$ es

$$x(t) = e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}x(0). \quad (4.19)$$

Sabemos además de la propiedad

$$\frac{d}{dt}e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} = a(t)e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} = e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}a(t).$$

Probemos a ver si funciona extender directamente (4.19) en forma matricial. Escribimos (4.19) en forma matricial como

$$x(t) = e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}x(0),$$

donde la exponencial matricial $e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}$ puede expresarse como

$$e^{\int_0^t A(\tau)d\tau} = I + \int_0^t A(\tau)d\tau + \frac{1}{2} \left(\int_0^t A(\tau)d\tau \right)^2 + \dots$$

La extensión de la solución escalar al caso matricial *no* es válida en el caso inestacionario pues

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{\int_0^t A(\tau)d\tau} &= A(t) + \frac{1}{2}A(t) \left(\int_0^t A(\tau)d\tau \right) + \frac{1}{2} \left(\int_0^t A(\tau)d\tau \right) A(t) + \dots \\ &\neq A(t)e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}, \end{aligned}$$

dado que para distintos tiempos t y τ las matrices $A(t)$ y $A(\tau)$ son distintas, y por ende en general no conmutan, $A(t)A(\tau) \neq A(\tau)A(t)$. Concluimos que en general, $x(t) = e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}x(0)$ *no* es una solución de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ y debemos usar otro método para derivarla. El método que usaremos requiere la introducción de la *matriz fundamental* del sistema.

4.6.1. Matriz Fundamental

Consideremos

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (4.20)$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una función continua de t . Entonces para cada condición inicial $x(t_0)$ existe una única solución $x(t)$. Si tomamos un conjunto de n condiciones iniciales $x(t_0) =$

$v_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, n$, obtendremos n soluciones $x(t; v_i)$.³ Apilemos estas n soluciones en una matriz $n \times n$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t; v_1) & x(t; v_2) & \cdots & x(t; v_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{para cada } t.$$

Dado que cada $x(t; v_i)$ es una solución de (4.20), no es difícil ver que la matriz $X(t)$ a su vez satisface la ecuación

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \quad \text{con condición inicial } X(t_0). \quad (4.21)$$

Si $X(t_0)$ es no singular (es decir, las n condiciones iniciales $x_i(t_0)$ son LI), entonces $X(t)$ se dice una *matriz fundamental* del sistema (4.20).

Ejemplo 4.8. Consideremos la ecuación homogénea

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} x(t). \quad (4.22)$$

La solución de la primer componente $\dot{x}_1(t) = 0$ es $x_1(t) = x_1(0)$; la solución de la segunda componente $\dot{x}_2(t) = tx_1(t)$ es $x_2(t) = \int_0^t \tau x_1(\tau) d\tau + x_2(0) = t^2/2 x_1(0) + x_2(0)$.

Para condiciones iniciales $x(0) = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $x(0) = v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tenemos respectivamente las soluciones

$$x(t; v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ t^2/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x(t; v_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ t^2/2 + 2 \end{bmatrix}.$$

Como los estados iniciales v_1 y v_2 son linealmente independientes,

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t^2/2 & t^2/2 + 2 \end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental de (4.22).

Obviamente, como las columnas de $X(t_0)$ se pueden elegir LI de muchas formas, la matriz fundamental $X(t)$ *no es única*. Sin embargo, una propiedad muy importante que sí tiene una matriz fundamental $X(t)$ es la siguiente.

Teorema 4.4 (No singularidad de la Matriz Fundamental). Una matriz fundamental $X(t)$ es no singular para todo t .

Demostración. Si $X(t)$ fuera singular para algún $t_1 \neq t_0$, entonces existiría un vector no nulo z tal que $X(t_1)z = 0$. Por linealidad del sistema, la función $\zeta(t) \triangleq X(t)z$ es una solución que cumple $\zeta(t) = 0$ para todo $t \geq t_1$. Como las soluciones son únicas, $\zeta(t) = 0$ para todo t (la solución nula es única), y en particular para $t = t_0$, es decir $0 = \zeta(t_0) = X(t_0)z$. Llegamos a una contradicción, pues $X(t_0)$ fue asumida no singular en t_0 . En conclusión, si $X(t)$ es una matriz fundamental, debe ser no singular para todo t . \square

Como una matriz fundamental $X(t)$ es no singular para todo t , su inversa está bien definida, y por lo tanto podemos hacer la siguiente definición, crucial para la solución de EE inestacionarias.

³La notación $x(t; v)$ representa la solución de (4.20) con condición inicial $x(t_0) = v$.

Definición 4.3 (Matriz de Transición de Estado). Sea $X(t)$ cualquier matriz fundamental de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Entonces la matriz

$$\Phi(t, t_0) \triangleq X(t)X^{-1}(t_0)$$

se llama *matriz de transición de estados* de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

En el caso estacionario ($A(t) = A$ constante), una matriz fundamental es directamente $X(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0)$, y así la matriz de transición resulta

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

Ejemplo 4.9. Para el sistema (4.22) en el ejemplo anterior obtenemos $X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} t^2/4+1 & -1/2 \\ -t^2/4 & 1/2 \end{bmatrix}$, y así

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t^2/2 & t^2/2 + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0^2/4 + 1 & -1/2 \\ -t_0^2/4 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (t^2 - t_0^2)/2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como hemos visto, el método usado en el caso estacionario no podía aplicarse para derivar la solución general de EE inestacionarias (esencialmente porque $A(t)$ no conmuta con $\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau$).

Hemos también definido

- la *matriz fundamental* $X(t)$, formada apilando n soluciones linealmente independientes del sistema $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$, y
- la *matriz de transición de estados* $\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$. En el caso estacionario la matriz de transición es simplemente $e^{A(t-t_0)}$.

En los ejercicios propuestos se pide probar que $\Phi(t, t_0)$ es la única solución de la ecuación matricial

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I, \quad (4.23)$$

y que satisface las siguientes propiedades:

$$\Phi(t, t) = I \quad (4.24)$$

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad (4.25)$$

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0). \quad (4.26)$$

Utilizaremos estas propiedades de $\Phi(t, t_0)$ para mostrar que las solución de

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \quad (4.27)$$

con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y entrada $u(t)$ está dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.28)$$

Demostración de (4.27). Tenemos que mostrar que la solución $x(t)$ en (4.28) satisface las condiciones iniciales y la ecuación diferencial de EE en (4.27). Evaluando (4.28) en $t = t_0$ y usando la propiedad (4.24) vemos que

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \Phi(t_0, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= Ix_0 + 0 = x_0. \end{aligned}$$

Usando (4.23) y la regla de Leibniz ⁴ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0)x_0 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= A(t)\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \Phi(t, t)B(t)u(t) \\ &= A(t)\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t A(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \Phi(t, t)B(t)u(t) \\ &= A(t)x(t) + B(t)u(t). \end{aligned}$$

□

La respuesta de la salida en (4.27) está dada por

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t).$$

La respuesta a entrada nula es

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0,$$

y la respuesta a condiciones iniciales nulas se puede escribir como

$$y(t) = \int_{t_0}^t (C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau)) u(\tau)d\tau, \quad (4.29)$$

que corresponde con la representación entrada-salida vista

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.30)$$

Comparando (4.29) y (4.30) concluimos que la respuesta del sistema (4.27) a un impulso aplicado en el instante τ está dada por

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau) \\ &= C(t)X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Resumiendo, la solución general de la EE en sistemas inestacionarios requiere la solución de la ecuación

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

para obtener $X(t)$, o bien la solución de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

para obtener $\Phi(t, t_0)$. Estas ecuaciones son difíciles de resolver, salvo para casos especiales. Hay dos casos especiales que pueden ser muy útiles:

⁴Ver § 3.6.6: $\frac{d}{dt} \int_{f(t)}^{g(t)} A(t, \tau)d\tau = A(t, \tau)\dot{g}(t) - A(t, \tau)\dot{f}(t) + \int_{f(t)}^{g(t)} \frac{\partial}{\partial t} A(t, \tau)d\tau$.

1. La matriz $A(t)$ es triangular; como por ejemplo en

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

En este caso podemos resolver la ecuación escalar $\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t)$ y substituir la solución en la ecuación de x_2 ,

$$\dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t).$$

2. La matriz $A(t)$ posee la propiedad conmutativa

$$A(t) \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) = \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) A(t)$$

para todo t y t_0 (como es el caso de $A(t)$ diagonal o constante). Entonces puede probarse que la solución está dada por

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^k.$$

4.6.2. Caso Discreto

La solución de las EEs inestacionarias en tiempo discreto

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A[k]x[k] + B[k]u[k] \\ y[k] &= C[k]x[k] + D[k]u[k] \end{aligned} \tag{4.32}$$

es mucho más simple que el caso en tiempo continuo. En forma similar definimos la *matriz de transición de estados discreta* como la solución de

$$\Phi[k+1, k_0] = A[k]\Phi[k, k_0], \quad \text{con } \Phi[k_0, k_0] = I, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots$$

La diferencia importante es que en el caso discreto la solución se obtiene en forma explícita como

$$\Phi[k, k_0] = A[k-1]A[k-2] \cdots A[k_0] \tag{4.33}$$

para $k > k_0$ y $\Phi[k_0, k_0] = I$.

Nota importante: Dado que la matriz fundamental en el caso en tiempo continuo es no singular para todo t , la matriz de transición de estados está definida *para todo* t , $t \geq t_0$ y $t < t_0$ (lo que implica que podemos resolver la EE en *tiempo invertido*). En el caso discreto, si la matriz A es singular la inversa de $\Phi[k, k_0]$ no está definida, por lo que la contrapartida discreta de la propiedad (4.26)

$$\Phi[k, k_0] = \Phi[k, k_1]\Phi[k_1, k_0]$$

sólo vale si $k \geq k_1 \geq k_0$.

La solución general de la EE en el caso discreto es

$$x[k] = \Phi[k, k_0]x_0 + \sum_{m=k_0}^{k-1} \Phi[k, m+1]B[m]u[m].$$

4.7. Ecuaciones Inestacionarias Equivalentes

Definición 4.4 (Equivalencia de EE Inestacionarias). Sea $P(t)$ una matriz $n \times n$ no singular y continuamente diferenciable para todo t . Sea $\bar{x} = P(t)x(t)$. Entonces la EE

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}(t)u(t) \\ y(t) &= \bar{C}(t)\bar{x}(t) + \bar{D}(t)u(t),\end{aligned}\tag{4.34}$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{A}(t) &= [P(t)A(t) + \dot{P}(t)]P^{-1}(t) & \bar{B}(t) &= P(t)B(t) \\ \bar{C}(t) &= C(t)P^{-1}(t) & \bar{D}(t) &= D(t)\end{aligned}$$

se dice (algebraicamente) *equivalente* a la EE (4.27) y $P(t)$ es una *transformación de equivalencia*.

No es difícil ver que si $X(t)$ es una matriz fundamental del sistema original (4.27), entonces $\bar{X}(t) = P(t)X(t)$ es una matriz fundamental del sistema (4.34).

Una propiedad interesante en el caso inestacionario es que es posible llevar al sistema a una forma equivalente donde $\bar{A}(t)$ sea constante.

Teorema 4.5 (Transformación a matriz de evolución estacionaria). Sea A_0 una matriz $n \times n$ constante *cualquiera*. Entonces existe una transformación de equivalencia que lleva (4.27) a (4.34) con $\bar{A}(t) = A_0$.

Demostración. Sea $X(t)$ una matriz fundamental de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, y definamos $P(t) = e^{A_0 t} X^{-1}(t)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\bar{A}(t) &= [P(t)A(t) + \dot{P}(t)]P^{-1}(t) \\ &= [e^{A_0 t} X^{-1} A(t) + A_0 e^{A_0 t} X^{-1}(t) + e^{A_0 t} \dot{X}^{-1}(t)] X(t) e^{-A_0 t}.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Como

$$\dot{X}^{-1}(t)X(t) + X^{-1}(t)\dot{X}(t) = 0,\tag{4.36}$$

que sigue de derivar $X^{-1}(t)X(t) = I$, el reemplazo de (4.36) en (4.35) muestra que

$$\bar{A}(t) = A_0 e^{A_0 t} X^{-1}(t) X(t) e^{-A_0 t} = A_0.$$

□

Es interesante notar que si A_0 se elige como la matriz nula, $A_0 = 0$, entonces $P(t) = X^{-1}$ y el sistema "barra" se reduce a

$$\bar{A}(t) = 0, \quad \bar{B}(t) = X^{-1}(t)B(t), \quad \bar{C}(t) = C(t)X(t), \quad \bar{D}(t) = D(t),$$

como se ve en la Figura 4.4. Una representación considerablemente más simple, aunque aún necesitamos conocer una matriz fundamental del sistema original para obtenerla.

Usando (4.31), es fácil verificar que la respuesta al impulso inestacionaria es invariante con respecto a transformaciones de equivalencia, como pasa en el caso estacionario. Sin embargo, y a diferencia de lo que pasaba en el caso estacionario, las propiedades de la matriz de evolución del sistema $A(t)$ pueden cambiar drásticamente con una transformación de equivalencia! Esta es una excepción donde el caso estacionario *no* es un caso particular del caso inestacionario (nunca vamos a poder transformar la matriz $A(t)$ en la matriz nula con una transformación de equivalencia estacionaria).

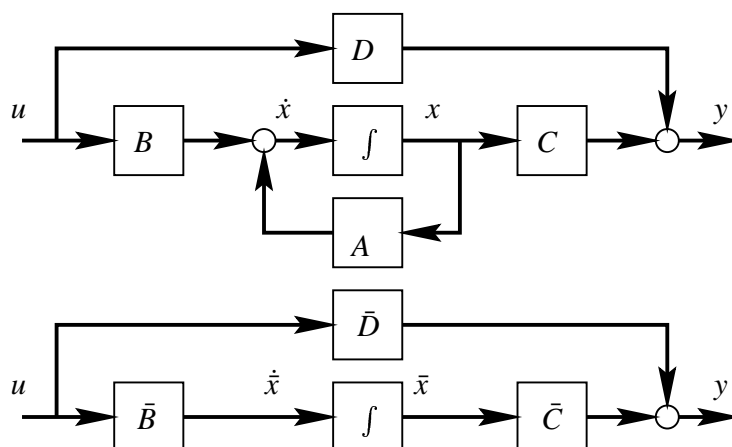


Figura 4.4: Transformación inestacionaria equivalente a un sistema con matriz de evolución nula.

4.8. Realizaciones de Sistemas Inestacionarios

En el caso inestacionario no podemos usar la transformada de Laplace para describir el comportamiento entrada-salida del sistema, por lo tanto usamos directamente la descripción en dominio temporal

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau.$$

Si el sistema es de dimensión finita tiene representación en EE. Vimos en (4.31) que de la representación en EE (4.27) la respuesta al impulso está dada por

$$G(t, \tau) = C(t)X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau), \quad \text{para } t \geq \tau, \quad (4.37)$$

donde $X(t)$ es una matriz fundamental del sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

El problema inverso se trata de obtener $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ de la respuesta al impulso $G(t, \tau)$. Así, una respuesta al impulso $G(t, \tau)$ se dice *realizable* si existen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ tales que se cumple (4.37).

Teorema 4.6 (Realizabilidad de sistemas inestacionarios). Una matriz $q \times p$ de respuesta al impulso $G(t, \tau)$ es realizable si y sólo si puede descomponerse en la forma

$$G(t, \tau) = M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t - \tau) \quad (4.38)$$

para todo $t \geq \tau$, donde M , N y D son matrices $q \times n$, $n \times p$ y $q \times p$ para algún entero n .

Demostración.

\Leftarrow) Si $G(t, \tau)$ es realizable entonces existe una realización que cumple (4.37) y $M(t) = C(t)X(t)$ y $N(\tau) = X^{-1}(\tau)B(\tau)$.

\Rightarrow) Si $G(t, \tau)$ puede descomponerse en la forma (4.38) entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= N(t)u(t) \\ y(t) &= M(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

es una realización del sistema. En efecto, si $A(t) = 0$ entonces $X(t) = I$ es una matriz fundamental y $M(t)II^{-1}N(\tau) + D(t)\delta(t - \tau) = G(t, \tau)$.

□

Ejemplo 4.10. La respuesta al impulso $G(t) = te^{\lambda t}$, o $G(t, \tau) = G(t - \tau) = (t - \tau)e^{\lambda(t - \tau)}$, puede factorizarse como

$$G(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tau e^{-\lambda t} \\ e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix}$$

y así admite la realización inestacionaria

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -te^{-\lambda t} \\ e^{-\lambda t} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \end{bmatrix} x(t). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Alternativamente, la transformada de Laplace de $G(t)$ es $\mathcal{L}[te^{\lambda t}] = \frac{1}{s^2 - 2\lambda s + \lambda^2}$, de donde obtenemos la realización estacionaria

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 2\lambda \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

4.9. Resumen

En este capítulo:

- Obtuvimos la solución general de la ecuación de estado para sistemas lineales estacionarios, conocida como *fórmula de variación de los parámetros*. Aplicamos esta fórmula para obtener la discretización exacta de un sistema con un bloqueador de orden cero a la entrada y un muestreador a la salida.
- Vimos que sistemas cuyas representaciones en EE están relacionadas a través de un cambio de coordenadas no singular son *equivalentes*. Vimos también la *equivalencia a estado cero* de EE, que implica que dos representaciones en EE tienen la misma matriz transferencia, aunque no necesariamente sean algebraicamente equivalentes. Dentro de las infinitas formas posibles para las EE a través de transformaciones de equivalencia, presentamos tres formas canónicas útiles: modal, controlable y del controlador.
- Introducimos el problema de *realización*, que consiste en obtener una descripción en EE dada una matriz transferencia racional y propia. La realización de una matriz transferencia en forma canónica del controlador es particularmente simple para los casos de una entrada, y útil además para reducir el problema de realización de una matriz transferencia con varias entradas (columnas) superponiendo las realizaciones de cada columna. Toda la teoría de realización vista se aplica sin modificaciones a sistemas en tiempo discreto.
- Estudiamos la solución de la ecuación de estados de sistemas inestacionarios. La primera conclusión notable es que el método usado para derivar la solución en el caso estacionario no sirve. En el caso inestacionario recurrimos a la *matriz fundamental*

$X(t)$, formada apilando n soluciones LI del sistema, y la *matriz de transición de estados* $\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$, que en el caso estacionario se reduce a $e^{A(t-t_0)}$. En general, el cómputo de $\Phi(t, \tau)$ es difícil salvo casos especiales como los de $A(t)$ triangular, diagonal o constante. Para sistemas inestacionarios discretos, sin embargo, $\Phi[k, k_0]$ sí se puede calcular explícitamente (la solución en tiempo discreto es válida en la dirección positiva del tiempo).

- Vimos transformaciones de equivalencia (algebraica) inestacionarias. Estas llevan el sistema a una forma con la misma descripción entrada-salida, pero en la que la matriz $A(t)$ puede tener propiedades muy distintas.
- La respuesta al impulso de un sistema inestacionario es realizable si $G(t, \tau)$ admite una factorización simple que separa la dependencia en t y τ .

4.10. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Utilizando la regla de Leibniz para derivar expresiones integrales, verificar que (4.6) satisface (4.5) con estado inicial $x(0)$.

Ejercicio 4.2. Probar que los sistemas descritos por EE equivalentes tienen la misma función transferencia.

Ejercicio 4.3. Para los siguientes casos de la matriz A ,

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

obtener una expresión de la respuesta a entrada nula, $\dot{x}(t) = Ax(t)$, y dibujar en forma cualitativa el *diagrama de fases* ($x_2(t)$ versus $x_1(t)$). ¿Cómo es la respuesta a condiciones iniciales sobre las direcciones de los autovalores de A ? Verificar los diagramas obtenidos mediante simulación numérica con un conjunto de distintas condiciones iniciales en el marco de la ventana $-2 \leq x_1(0) \leq 2$, $-2 \leq x_2(0) \leq 2$. (Los diagramas corresponden a los tipos de sistemas de segundo orden conocidos respectivamente como *nodo*, *nodo degenerado*, *foco* y *ensilladura*.)

Ejercicio 4.4. Terminar los detalles de la demostración del Teorema 4.3.

Ejercicio 4.5. Hallar una realización para la matriz transferencia

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{2s-3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{s}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4.6. Hallar una realización de cada columna de $\hat{G}(s)$ en el ejercicio anterior por separado, y después conectarlas en un solo modelo en EE. ¿Son las realizaciones obtenidas equivalentes?

Ejercicio 4.7. Hallar una realización de cada fila de $\hat{G}(s)$ en el ejercicio anterior por separado, y después conectarlas en un solo modelo en EE. ¿Cómo se compara la realización obtenida con las de los ejercicios anteriores?

Ejercicio 4.8. Probar que la matriz de transición $\Phi(t, t_0)$ satisface las siguientes propiedades

1. $\Phi(t, t_0)$ es la única solución de la ecuación diferencial matricial

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

2. $\Phi(t, t) = I,$
3. $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t),$
4. $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0).$

Ejercicio 4.9. Encontrar matrices fundamentales y de transición para los sistemas

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} x(t), \quad \text{y} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t).$$

Ejercicio 4.10. Mostrar que la matriz de transición de

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix} x(t)$$

tiene la forma

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ 0 & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

para todo t, t_0 , donde $\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{ii}(t, t_0) = A_{ii}\Phi_{ii}(t, t_0)$ para $i = 1, 2$.

Ejercicio 4.11. Llevar un sistema estacionario (A, B, C) a $(0, \bar{B}(t), \bar{C}(t))$ mediante una transformación de equivalencia inestacionaria.

Ejercicio 4.12. Encontrar una realización inestacionaria y una estacionaria de la respuesta al impulso

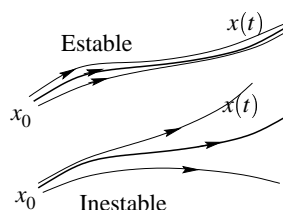
$$G(t) = t^2 e^{\lambda t}.$$

Capítulo 5

Estabilidad

5.1. Introducción

La estabilidad de un sistema puede pensarse como una continuidad en su comportamiento dinámico. Si se presenta un cambio pequeño en las entradas o condiciones iniciales, un sistema estable presentará modificaciones pequeñas en su respuesta perturbada. Por otro lado, en un sistema inestable cualquier perturbación, por pequeña que sea, llevará estados y/o salidas a crecer sin límite o hasta que el sistema se queme, se desintegre o sature. Es evidente entonces que la estabilidad es un requerimiento básico de los sistemas dinámicos destinados a realizar operaciones o procesar señales, y es lo primero que debe garantizarse en el diseño de un sistema de control.



Como la respuesta de los sistemas dinámicos lineales se descompone en la respuesta a entrada con condiciones iniciales nulas, y la respuesta a condiciones iniciales con entrada nula, podemos hablar de dos “tipos” de estabilidad:

- *Estabilidad externa, o entrada-salida*, que se refiere a la estabilidad del sistema con condiciones iniciales nulas. La estabilidad externa describe el efecto de perturbaciones en las entradas sobre el comportamiento dinámico de la salida del sistema.
- *Estabilidad interna*, que se refiere a la estabilidad del sistema autónomo (sin entradas). La estabilidad interna describe el efecto de perturbaciones en las condiciones iniciales sobre comportamiento dinámico de los estados del sistema.

Estudiaremos estos dos tipos de estabilidad por separado, para sistemas estacionarios primero, y luego para sistemas inestacionarios.

5.2. Estabilidad Externa de Sistemas Estacionarios

5.2.1. Representación externa

Sea un sistema lineal, causal y estacionario SISO descrito por la integral de convolución

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau, \quad (5.1)$$

para el cual asumimos condiciones iniciales nulas (es decir, se encuentra inicialmente *relajado*).

Vamos a estudiar la estabilidad externa del sistema (5.1) con respecto a la familia de señales de entrada *acotadas*. Una señal de entrada dada $u(t)$ se dice *acotada* si existe una constante positiva M_u tal que

$$|u(t)| \leq M_u \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Ejemplos de señales acotadas son $u(t) = \sin(\omega t)$, $u(t) = t^2 e^{-2t}$, o $u(t) = -2$.

Definición 5.1 (Estabilidad entrada-acotada/salida-acotada (BIBO)).¹ Un sistema es *estable BIBO* (entrada-acotada/salida-acotada) si toda entrada acotada produce una salida acotada.

Remarcamos que la estabilidad BIBO se refiere a una propiedad del sistema que sólo considera los efectos de la entrada sobre la salida, es decir, el *comportamiento externo* del sistema, independientemente de lo que pase con los estados. El siguiente resultado establece un test para determinar si un sistema SISO es estable BIBO.

Teorema 5.1 (Estabilidad BIBO de sistemas SISO). Un sistema SISO es estable BIBO si y sólo si su respuesta al impulso $g(t)$ es *absolutamente integrable* en el intervalo $[0, \infty)$, es decir, existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \leq M < \infty.$$

Demostración. Supongamos que $g(t)$ es absolutamente integrable. Sea $u(t)$ una entrada arbitraria acotada, es decir, $|u(t)| \leq M_u$ para todo $t \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t |g(\tau)||u(t - \tau)|d\tau \\ &\leq M_u \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \\ &\leq M_u M, \quad \Rightarrow \text{el sistema es BIBO.} \end{aligned}$$

Nos queda probar que “estabilidad BIBO” \Rightarrow “ $g(t)$ es absolutamente integrable”. Probamos en cambio la implicación equivalente “ $g(t)$ no es absolutamente integrable” \Rightarrow “no hay estabilidad BIBO”. Supongamos entonces que $g(t)$ no es absolutamente integrable, es decir que existe algún t_1 tal que

$$\int_0^{t_1} |g(\tau)|d\tau = \infty.$$

¹Bounded Input Bounded Output.

Consideremos la entrada acotada

$$u(t_1 - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(\tau) \geq 0 \\ -1 & \text{si } g(\tau) < 0. \end{cases}$$

La salida del sistema para esta entrada y $t = t_1$ es

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \int_0^{t_1} g(\tau)u(t_1 - \tau)d\tau \\ &= \int_0^{t_1} |g(\tau)|d\tau = \infty, \end{aligned}$$

Encontramos entonces una entrada acotada que produce una salida no acotada, por lo que el sistema *no* es estable BIBO si $g(t)$ no es absolutamente integrable. Este paso concluye la prueba del teorema. \square

Notar que una función absolutamente integrable no necesariamente es acotada y puede no ir a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Un ejemplo de una función que es absolutamente integrable y no va a cero cuando $t \rightarrow \infty$ es (Figura 5.1)

$$f(t - n) = \begin{cases} n + (t - n)n^4 & \text{para } n - 1/n^3 < t \leq n \\ n - (t - n)n^4 & \text{para } n < t \leq n + 1/n^3. \end{cases} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

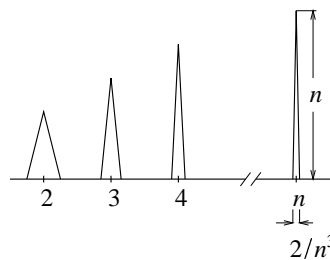


Figura 5.1: Función absolutamente integrable que no tiende a 0.

La estabilidad BIBO es la base del clásico concepto de *respuesta en régimen permanente* de un sistema lineal estacionario. Esta es la respuesta del sistema una vez extinguidos los transitorios originados en el momento que se aplica la señal de entrada.

Teorema 5.2 (Estabilidad BIBO y respuesta en régimen permanente). Si un sistema con respuesta al impulso $g(t)$ es estable BIBO, entonces cuando $t \rightarrow \infty$

1. La salida correspondiente a una entrada constante $u(t) = a$, para $t \geq 0$, tiende a la constante

$$y_{rp}(t) = \hat{g}(0)a.$$

2. La salida correspondiente a una entrada sinusoidal $u(t) = \sin \omega_0 t$, para $t \geq 0$, tiende a la senoide

$$y_{rp}(t) = |\hat{g}(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \angle \hat{g}(j\omega_0)).$$

Demostración.

1. Si $u(t) = a$ para todo $t \geq 0$, entonces

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = a \int_0^t g(\tau)d\tau$$

y así

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a \int_0^{\infty} g(\tau)d\tau = a \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau \Big|_{s=0} = a\hat{g}(0),$$

2. Si $u(t) = \sin \omega_0 t$, para $t \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau) \sin \omega_0(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau) [\sin \omega_0 t \cos \omega_0 \tau - \sin \omega_0 \tau \cos \omega_0 t] d\tau \\ &= \sin \omega_0 t \int_0^t g(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau - \cos \omega_0 t \int_0^t g(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si $g(t)$ es absolutamente integrable, entonces podemos evaluar

$$\begin{aligned} \hat{g}(j\omega) &= \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \underbrace{\int_0^{\infty} g(\tau) \cos \omega\tau d\tau}_{\text{Re } \hat{g}(j\omega)} - j \underbrace{\int_0^{\infty} g(\tau) \sin \omega\tau d\tau}_{-\text{Im } \hat{g}(j\omega)} \\ &= |\hat{g}(j\omega)|e^{-j\angle \hat{g}(j\omega)} \\ &= |\hat{g}(j\omega)| \cos \angle \hat{g}(j\omega) - j|\hat{g}(j\omega)| \sin \angle \hat{g}(j\omega). \end{aligned}$$

Finalmente de (5.2), cuando $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} y(t) &\rightarrow \sin \omega_0 t \int_0^{\infty} g(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau - \cos \omega_0 t \int_0^{\infty} g(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau \\ &= \sin \omega_0 t \text{Re } \hat{g}(j\omega_0) + \cos \omega_0 t \text{Im } \hat{g}(j\omega_0) \\ &= |\hat{g}(j\omega_0)| [\sin \omega_0 t \cos \angle \hat{g}(j\omega_0) + \cos \omega_0 t \sin \angle \hat{g}(j\omega_0)] \\ &= |\hat{g}(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \angle \hat{g}(j\omega_0)). \end{aligned}$$

□

El teorema anterior especifica la respuesta de un sistema BIBO a señales constantes y sinusoidales una vez que los transitorios se extinguen. Este resultado es la base del filtrado de señales.

El test de estabilidad BIBO del Teorema 5.1 sirve para una clase general de sistemas lineales estacionarios. Sin embargo, para utilizarlo necesitamos disponer de la respuesta al impulso del sistema para poder evaluar si es absolutamente integrable. Este puede no ser un test fácil de realizar. Si el sistema es además causal y de dimensión finita, existe un test que puede resultar mucho más aplicable.

Corolario 5.1 (Estabilidad BIBO para funciones racionales y propias). Un sistema SISO con una función transferencia racional y propia $\hat{g}(s)$ es BIBO estable si y sólo si todos los polos de $\hat{g}(s)$ tienen parte real negativa.

Demostración. Si $\hat{g}(s)$ tiene un polo en p con multiplicidad m , es claro que su expansión en fracciones simples incluirá los términos

$$\frac{1}{s-p}, \frac{1}{(s-p)^2}, \dots, \frac{1}{(s-p)^m}$$

La transformada de Laplace inversa de $\hat{g}(s)$ — la respuesta al impulso del sistema relajado — incluirá entonces combinaciones lineales de las exponenciales

$$e^{pt}, te^{pt}, t^2e^{pt}, \dots, t^{m-1}e^{pt}.$$

Es fácil chequear que todos estos términos serán absolutamente integrables si y sólo si p pertenece al semiplano (abierto, sin incluir al eje $j\omega$) izquierdo del plano complejo, lo que, usando el Teorema 5.1, concluye la prueba del corolario. \square

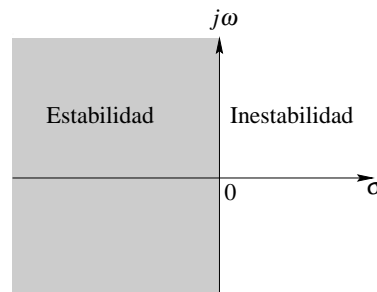


Figura 5.2: Región de estabilidad externa para polos de sistemas continuos

Este corolario da el resultado de estabilidad de sistemas lineales que se ve en teoría de control clásico (Control Automático 1); la estabilidad del sistema queda determinada por los polos de la función transferencia, siendo la región de estabilidad el semiplano izquierdo (abierto) del plano complejo (Figura 5.2). Como vemos ahora, este tipo de estabilidad sólo tiene en cuenta el comportamiento externo del sistema, ignorando el efecto de condiciones iniciales, que se asumen nulas. El resultado más general, del Teorema 5.1, nos permite analizar sistemas que no necesariamente van a tener una función transferencia racional y propia, como ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1. Sea el sistema en realimentación positiva de la Figura 5.3 que incluye un retardo unitario, $T = 1$, y una ganancia estática de valor a . El sistema es de dimensión infinita, puesto que incluye un retardo, y no tiene función transferencia racional. Cuando la entrada es un impulso, $u(t) = \delta(t)$, la salida está dada por

$$g(t) = a\delta(t-1) + a^2\delta(t-2) + a^3\delta(t-3) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a^i \delta(t-i).$$

Podemos considerar los impulsos como positivos, con lo que $|g(t)| = \sum_{i=1}^{\infty} |a|^i \delta(t-i)$, y así

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt = \sum_{i=1}^{\infty} |a|^i = \begin{cases} \infty & \text{si } |a| \geq 1 \\ \frac{|a|}{1-|a|} < \infty & \text{si } |a| < 1. \end{cases}$$

Concluimos que el sistema es BIBO estable si y sólo si $|a| < 1$.

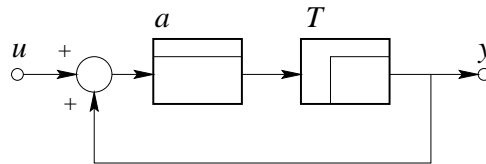


Figura 5.3: Sistema realimentado con retardo.

5.2.2. Caso MIMO

Los resultados de estabilidad BIBO para sistemas MIMO siguen de los de sistemas SISO, ya que una matriz transferencia sera BIBO estable si y sólo si cada una de sus entradas son BIBO estables. Los tests del Teorema 5.1 y el Corolario 5.1 se extienden así de forma inmediata al caso MIMO; deben realizarse sobre cada elemento de la respuesta al impulso o matriz transferencia del sistema.

5.2.3. Representación interna

En el caso causal y de dimensión finita sabemos que disponemos también de la representación en ecuaciones de estado del sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}$$

En términos de esta representación interna, la estabilidad BIBO dependerá de los autovalores de la matriz A , ya que todo polo de $\hat{G}(s)$ es necesariamente un autovalor de A , dado que

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} C \operatorname{adj}(sI - A) B + D.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si todos los autovalores de A tienen parte real negativa, todos los polos de $\hat{G}(s)$ tendrán parte real negativa, y el sistema será estable BIBO.

No obstante, *no todo autovalor de A es un polo de $\hat{G}(s)$* , ya que pueden producirse cancelaciones entre ceros y polos al computar $\hat{G}(s)$. Así, un sistema puede ser estable BIBO aunque algunos autovalores de A no tengan parte real negativa, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2. El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [-2 \quad 3] x(t) - 2u(t),\end{aligned}$$

a pesar de tener un autovalor con parte real positiva en $\lambda = 1$, es estable BIBO, dado que su función transferencia

$$\hat{g}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{2(1-s)}{(s+1)},$$

tiene un único polo en $s = -1$.

5.2.4. Caso discreto

El caso discreto es análogo al caso continuo, *mutatis mutandis*, con el sistema descrito por

$$y[k] = \sum_{m=0}^{\infty} g[k-m]u[m] = \sum_{m=0}^{\infty} g[m]u[k-m],$$

donde $g[k]$ es la secuencia respuesta a un impulso discreto aplicado en el instante $k = 0$. Resumimos los resultados principales en los siguientes teoremas.

Teorema 5.3 (Estabilidad BIBO discreta). Un sistema discreto MIMO con matriz respuesta al impulso $G[k] = [g_{ij}[k]]$ es estable BIBO si y sólo si cada $g_{ij}[k]$ es absolutamente sumable, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g[k]| \leq M < \infty.$$

Notar que en el caso de tiempo continuo las funciones absolutamente integrables pueden no ser acotadas, o no tender a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. En el caso de tiempo discreto, si $g[k]$ es absolutamente sumable entonces *debe necesariamente* ser acotada y aproximarse a 0 cuando $k \rightarrow \infty$.

Demostración. La prueba de este teorema es similar a la del Teorema 5.1. □

El resultado sobre la respuesta en régimen permanente de un sistema discreto es esencialmente idéntico al caso continuo.

Teorema 5.4 (Respuesta en régimen permanente discreta). Si un sistema discreto con respuesta al impulso $g[k]$ es estable BIBO, entonces, cuando $k \rightarrow \infty$,

1. La salida excitada por $u[k] = a$, para $k \geq 0$, tiende a $\hat{g}(1)a$.
2. La salida excitada por $u[k] = \sin \omega_0 k$, para $k \geq 0$, tiende a $|\hat{g}(e^{j\omega_0})| \sin(\omega_0 k + \angle \hat{g}(e^{j\omega_0}))$, donde $\hat{g}(z)$ es la transformada Z de $g[k]$,

$$\hat{g}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g[m]z^{-m}.$$

El siguiente corolario da un test de estabilidad externa para sistemas discretos descritos por matrices transferencia racionales y propias. La principal diferencia con el caso continuo es la región de estabilidad para los polos del sistema, que en el caso discreto es el interior del círculo unitario (Figura 5.4).

Corolario 5.2 (Estabilidad BIBO para funciones discretas racionales y propias). Un sistema discreto MIMO con matriz transferencia racional y propia $\hat{G}(z) = [\hat{g}_{ij}(z)]$ es estable BIBO si y sólo si todo polo de $\hat{g}_{ij}(z)$ tiene magnitud menor que 1.

Demostración. Si $\hat{G}(z)$ tiene un polo p_i con multiplicidad m_i , entonces su expansión en fracciones simples incluye los términos

$$\frac{1}{z - p_i}, \frac{1}{(z - p_i)^2}, \dots, \frac{1}{(z - p_i)^{m_i}}$$

por lo que la transformada Z inversa de $\hat{G}(z)$ da una respuesta al impulso $G[k]$ que incluirá los factores

$$p_i^k, kp_i^k, \dots, k^{m_i-1} p_i^k.$$

No es difícil ver que cada uno de estos términos va a ser absolutamente sumable si y sólo si $|p_i| < 1$, lo que concluye la prueba. \square

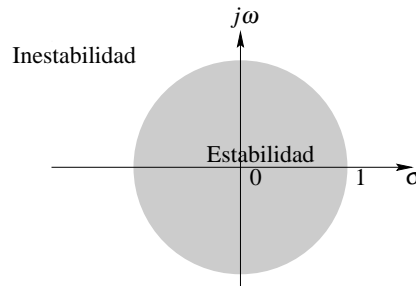


Figura 5.4: Región de estabilidad externa para polos de sistemas discretos

Ejemplo 5.3. Sea un sistema discreto estacionario con respuesta al impulso $g[k] = 1/k$, para $k \geq 1$, y $g[0] = 0$. Analizamos si $g[k]$ es absolutamente sumable,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |g[k]| &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} \right) + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty. \end{aligned}$$

La secuencia de la respuesta al impulso es acotada pero no sumable, por lo tanto el sistema no es BIBO.

5.3. Estabilidad Interna de Sistemas Estacionarios

La estabilidad BIBO se definió bajo condiciones iniciales nulas, y se refería al comportamiento *externo* del sistema, o sea, aquel observable en la relación entre salidas y entradas independientemente de estados del sistema. Ahora estudiamos la estabilidad *interna* del sistema, que se refiere al comportamiento de los estados del sistema. Consideramos la respuesta a condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y con entradas nulas, es decir,

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (5.3)$$

La estabilidad interna describe las propiedades de convergencia de las trayectorias a *puntos de operación* o de *equilibrio* del sistema.

Definición 5.2 (Punto de Equilibrio). Un punto de equilibrio x_e de un sistema en EE

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

es un vector constante tal que si $x(0) = x_e$, entonces $x(t) = x_e$ para todo $t \geq 0$.

La definición de punto de equilibrio vale para sistemas no lineales, que pueden tener varios. Para sistemas lineales, salvando los casos en que la matriz A tenga autovalores nulos, existe un solo punto de equilibrio: el origen.

Ejemplo 5.4. Consideremos el sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} x(t) \quad (5.4)$$

Este sistema tiene una matriz A con un autovalor nulo, por lo que tiene el kernel de A es no trivial. Podemos verificar que $\ker A$ está generado por el vector $x_e = [-3, 1]^T$. La dirección definida por x_e es entonces un *conjunto de equilibrios*, es decir que hay infinitos puntos de equilibrio, en particular *no aislados*. Como vemos en la Figura 5.5, cualquier condición inicial que no esté exactamente sobre la recta de equilibrios generada por el vector $[-3, 1]^T$ dará origen a una trayectoria que crecerá en forma ilimitada con t . Condiciones iniciales sobre la recta de equilibrios darán origen a trayectorias *invariantes* (el sistema no se moverá de la condición inicial).

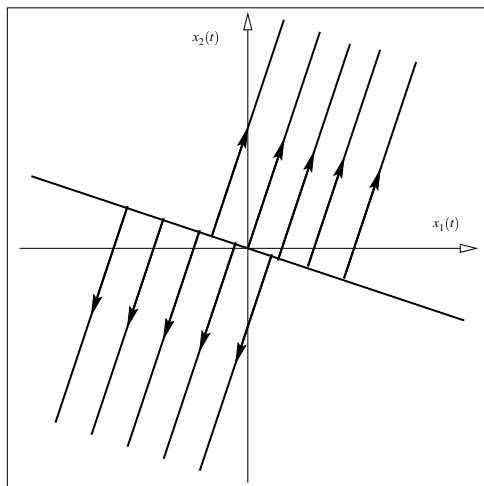


Figura 5.5: Retrato de fase del sistema (5.4)

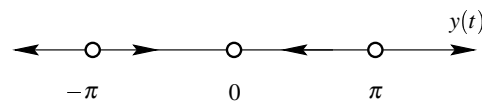


Figura 5.6: Espacio de estados (unidimensional) del sistema (5.5)

Veamos ahora el sistema discreto

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} x[k].$$

En este sistema los equilibrios están definidos por los x tales que $x[k+1] = x[k]$, es decir, $(A - I)x_e = 0$. Como la matriz $(A - I)$ es no singular, el único equilibrio posible es el origen $x_e = [0, 0]^T$.

Por último, consideremos el sistema no lineal

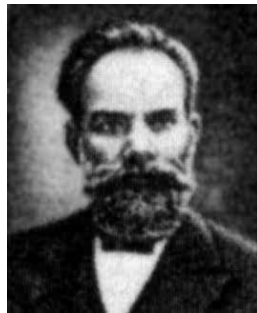
$$\dot{x}(t) = -\sin x(t). \quad (5.5)$$

Haciendo $\dot{x}(t) = -\sin x_e \equiv 0$ obtenemos $x_e = k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \dots$. Hay infinitos puntos de equilibrio, pero en este caso son *aislados* (Figura 5.6).

Para los sistemas lineales que tratamos en esta materia interesa tener un equilibrio único y estable en el origen. Éste será un equilibrio en cualquier representación en EE equivalente del sistema.

El tipo de estabilidad interna que estudiamos en esta sección recibe el nombre del científico ruso Alexander Mikhailovich Lyapunov, que realizó estudios pioneros en el tema a fines del siglo 19. Lyapunov introdujo por primera vez métodos que permiten determinar la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales sin necesidad de calcular explícitamente las soluciones.

El concepto de estabilidad introducido por Lyapunov hace hincapié en las propiedades de puntos particulares en el espacio de estados, los *puntos de equilibrio*, y se basa en una generalización matemática del concepto de “energía” de sistemas mecánicos. Los métodos de Lyapunov pueden aplicarse a sistemas no lineales e inestacionarios.

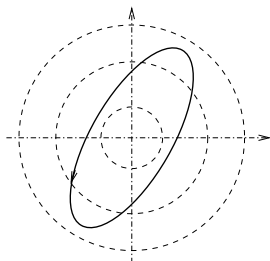


Aleksandr Lyapunov (1857-1918)

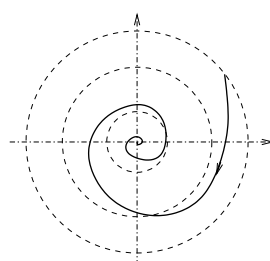
Definición 5.3 (Estabilidad en el sentido de Lyapunov). El (equilibrio del) sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es *estable en el sentido de Lyapunov*, o simplemente *estable*, si toda condición inicial finita origina una trayectoria acotada.

Definición 5.4 (Estabilidad Asintótica). El sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es *asintóticamente estable* si toda condición inicial finita origina una trayectoria acotada que además tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$.

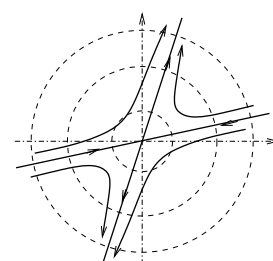
Definición 5.5 (Inestabilidad). El sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es *inestable* si no es estable.



Estabilidad Lyapunov



Estabilidad asintótica



Inestabilidad

Para sistemas del tipo (5.3) la estabilidad queda determinada por los autovalores de A .

Teorema 5.5 (Estabilidad Interna). El sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ es

1. estable en el sentido de Lyapunov si y sólo si todos los autovalores de A tienen parte real no positiva, y aquellos con parte real cero están asociados a un bloque de Jordan de orden 1 de A .
2. asintóticamente estable si y sólo si todos los autovalores de A tienen parte real negativa.

Demostración. Notamos primero que la estabilidad de una EE no será alterada por transformaciones de equivalencia algebraica, puesto que en $\bar{x}(t) = Px(t)$, donde P es una matriz no singular, si $x(t)$ es acotado también lo será $\bar{x}(t)$. Y si $x(t)$ tiene a cero, también lo hará $\bar{x}(t)$.

En el sistema transformado es $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t)$, donde $\bar{A} = PAP^{-1}$ tiene los mismos autovalores que A . Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ son los autovalores de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con multiplicidad r_i , $\sum_{i=1}^m r_i = n$.

Sea P la transformación de equivalencia que lleva el sistema a su forma canónica modal, o sea que \bar{A} es diagonal en bloques,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_m \end{bmatrix}$$

donde el bloque $J_i \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}$ es el bloque de Jordan asociado al autovalor λ_i .

La solución de $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t)$ es $\bar{x}(t) = e^{\bar{A}t}\bar{x}(0)$, donde $e^{\bar{A}t}$ también es diagonal en bloques

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{J_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{J_m t} \end{bmatrix}.$$

Como vimos, cada $e^{J_i t}$ involucra términos con las exponenciales $e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t}$, etc., dependiendo de la multiplicidad de λ_i . Es claro entonces que la respuesta del sistema sólo puede ser acotada si ningún autovalor tiene parte real positiva y todos los autovalores con parte real nula están asociados a bloques de Jordan de orden 1.

Para que el estado converja asintóticamente al origen, es necesario que todos los autovalores tengan parte real estrictamente negativa. \square

Ejemplo 5.5. Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t).$$

Tiene un autovalor doble en 0 y uno simple en -1 . Como el autovalor nulo está asociado a dos bloques de Jordan de orden 1, concluimos que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov.

El sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t),$$

sin embargo, tiene los mismos autovalores, pero esta vez el autovalor nulo está asociado a un bloque de Jordan de orden 2, y por lo tanto el sistema es inestable.

5.3.1. Relaciones entre Estabilidad Externa e Interna

La relación entre estabilidad externa y estabilidad interna puede resumirse en el diagrama de la Figura 5.7.

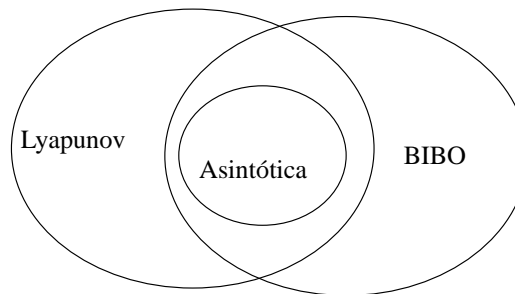


Figura 5.7: Relaciones entre estabilidad externa y estabilidad interna

Por definición, estabilidad asintótica implica estabilidad Lyapunov. Por otro lado, como todo polo de la matriz transferencia del sistema

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

debe ser un autovalor de A , estabilidad interna asintótica implica estabilidad BIBO. Sin embargo, no todo autovalor de A aparecerá como polo de $\hat{G}(s)$, ya que puede haber cancelaciones de ceros y polos. Por lo tanto, estabilidad BIBO *no implica* estabilidad interna; es decir, un sistema puede ser BIBO estable pero no Lyapunov o asintóticamente estable, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.6 (Bay [1999, p.~299]). Consideremos el sistema dado por la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = \dot{u} - u. \quad (5.6)$$

Veremos que este sistema es BIBO estable pero no asintóticamente estable. Primeramente llevamos (5.6) a una representación en espacio de estados. Asumiendo condiciones iniciales nulas (sólo para obtener la función transferencia) la transformada Laplace de (5.6) nos da

$$(s^2 + s - 2)\hat{y}(s) = (s - 1)\hat{u}(s), \quad \text{es decir,} \quad \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} \triangleq g(s) = \frac{s - 1}{s^2 + s - 2}. \quad (5.7)$$

Realizamos ahora la función transferencia $\hat{g}(s)$ de (5.7) en la forma canónica del controlador

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Los autovalores de la matriz A de (5.8) son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. Por el Teorema 5.5, el sistema no es internamente estable, ni asintóticamente, ni Lyapunov, ya que tiene un autovalor con parte real positiva.

Sin embargo, si factorizamos la función transferencia $\hat{g}(s)$ de (5.7) tenemos que

$$\hat{g}(s) = \frac{(s - 1)}{(s - 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 2},$$

por lo que la función transferencia no tiene ningún polo con parte real no negativa. Por el Corolario 5.1, el sistema es BIBO estable.

5.3.2. Sistemas discretos

Las definiciones de estabilidad en el sentido de Lyapunov y asintótica son las mismas para sistemas en tiempo discreto $x[k+1] = Ax[k]$. El Teorema 5.5 se reformula de la siguiente forma.

Teorema 5.6 (Estabilidad Lyapunov para sistemas discretos). El sistema $x[k+1] = Ax[k]$ es

1. estable en el sentido de Lyapunov si y sólo si todos los autovalores de A tienen magnitud no mayor que 1, y aquellos con magnitud igual a 1 están asociados a un bloque de Jordan de orden 1 de A .
2. asintóticamente estable si y sólo si todos los autovalores de A tienen magnitud menor que 1.

5.4. El Teorema de Lyapunov

Da una forma alternativa de chequear estabilidad asintótica de $\dot{x}(t) = Ax(t)$. La importancia de este resultado (en su forma general) es que permite estudiar la estabilidad de sistemas más generales, como por ejemplo inestacionarios o no lineales.

Definición 5.6 (Matriz Hurwitz). Diremos que una matriz A es *Hurwitz* si todos sus autovalores tienen parte real negativa.

Teorema 5.7 (Teorema de Lyapunov). La matriz A es Hurwitz si y sólo si dada cualquier matriz simétrica y definida positiva N , la ecuación de Lyapunov

$$A^T M + MA = -N \quad (5.9)$$

tiene una solución única simétrica y definida positiva M .

Demostración. (\Rightarrow) La ecuación (5.9) es un caso especial de la ecuación de Lyapunov

$$AM + MB = C$$

que viéramos en § 3.7, con $A = A^T$, $B = A$, y $C = -N$. Como A y A^T tienen los mismos autovalores, si A es Hurwitz no hay dos autovalores λ_i y λ_j tales que $\lambda_i + \lambda_j = 0$. Así, por lo visto en § 3, la ecuación de Lyapunov es no singular y tiene una solución única M para cada N .

Postulamos la siguiente candidata a solución

$$M = \int_0^\infty e^{A^T t} N e^{A t} dt. \quad (5.10)$$

Substituyendo (5.10) en (5.9) da

$$\begin{aligned} A^T M + MA &= \int_0^\infty A^T e^{A^T t} N e^{A t} dt + \int_0^\infty e^{A^T t} N e^{A t} A dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{A^T t} N e^{A t}) dt \\ &= e^{A^T t} N e^{A t} \Big|_{t=0}^\infty = 0 - N = -N, \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que $\lim_{\infty} e^{At} = 0$ puesto que A es Hurwitz. Así mostramos que en efecto M de (5.10) es solución de la ecuación de Lyapunov (5.9).

De (5.10) se ve también que si N es simétrica, también lo es M . Factoricemos $N = \bar{N}^T \bar{N}$ donde \bar{N} es una matriz no singular, y consideremos

$$x^T M x = \int_0^{\infty} x^T e^{A^T t} \bar{N}^T \bar{N} e^{At} x dt = \int_0^{\infty} \|\bar{N} e^{At} x\|_2^2 dt. \quad (5.11)$$

Como \bar{N} y e^{At} son no singulares, para cualquier x no nulo el integrando de (5.11) es positivo para cada t . Es decir, $x^T M x > 0$ para todo $x \neq 0$, y concluimos que M es definida positiva.

(\Leftarrow) Mostramos que si M y N son definidas positivas entonces A es Hurwitz. Sea λ un autovalor de A y $v \neq 0$ el autovector correspondiente, es decir, $Av = \lambda v$. Tomando la traspuesta conjugada obtenemos $v^* A^T = \lambda^* v^*$. Así, de (5.9)

$$\begin{aligned} -v^* N v &= v^* A^T M v + v^* M A v \\ &= (\lambda^* + \lambda) v^* M v = 2 \operatorname{Re} \lambda v^* M v. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Como los términos $v^* M v$ y $v^* N v$ son reales y positivos, como viéramos en el § 3, (5.12) implica que $\operatorname{Re} \lambda < 0$ y muestra que A es Hurwitz. \square

Un corolario de este resultado que nos va a ser útil más adelante es el siguiente.

Corolario 5.3. La matriz A es Hurwitz si y sólo si para cualquier matriz \bar{N} $m \times n$ con $m < n$ y la propiedad

$$\operatorname{rango} O \triangleq \operatorname{rango} \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{N} A \\ \vdots \\ \bar{N} A^{n-1} \end{bmatrix}_{nm \times n} = n,$$

la ecuación de Lyapunov

$$A^T M + M A = -\bar{N}^T \bar{N}$$

tiene una solución única simétrica y definida positiva M .

Un resultado importante que usamos en la prueba del Teorema de Lyapunov es el siguiente, que resumimos en un teorema aparte.

Teorema 5.8. Si A es Hurwitz, entonces la ecuación de Lyapunov

$$A^T M + M A = -N$$

tiene una solución única para cada N que puede ser expresada como

$$M = \int_0^{\infty} e^{A^T t} N e^{At} dt.$$

5.4.1. Estabilidad Interna de Sistemas Discretos

La contrapartida discreta de la ecuación general de Lyapunov $XM + MY = C$ vista en el Capítulo 3 es

$$M - XMY = C, \quad (5.13)$$

donde las matrices X e Y son respectivamente $n \times n$ y $m \times m$ y las matrices M y C son $n \times m$. De forma similar al caso visto, la ecuación (5.13) es una ecuación lineal en M que puede reescribirse en la forma $\mathcal{A}\vec{M} = \vec{C}$. Si λ_i es un autovalor de X y μ_j un autovalor de Y , la condición para que exista una solución única M de (5.13) es que

$$\lambda_i \mu_j \neq 1 \text{ para todo } i, j. \quad (5.14)$$

Puede verse intuitivamente como surge la condición (5.14). Sea u un autovector derecho (vector columna $n \times 1$) asociado al autovalor λ_i de X ; o sea, $Xu = \lambda_i u$. Sea v un autovector izquierdo (vector fila $1 \times m$) asociado al autovalor μ_j de Y ; o sea, $vY = \mu_j v$. Si pensamos a la ecuación (5.13) en términos de la función matricial

$$\mathcal{F}(M) \triangleq M - XMY,$$

la ecuación se reduce a $\mathcal{F}(M) = C$. Evaluando \mathcal{F} en la matriz $n \times m$ $M = uv$, tenemos que

$$\mathcal{F}(uv) = uv - XuvY = (1 - \lambda_i \mu_j)uv,$$

por lo que $1 - \lambda_i \mu_j$ son autovalores de (5.13). Si $1 - \lambda_i \mu_j \neq 0$, entonces existe una solución única de la ecuación $\mathcal{F}(M) = C$. De otro modo, pueden o no existir soluciones.

Volvemos entonces ahora a la condición de estabilidad para el sistema discreto $x[k+1] = Ax[k]$.

Teorema 5.9 (Teorema de Lyapunov Discreto). Todos los autovalores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tienen magnitud menor que 1 si y sólo si dada cualquier matriz simétrica y definida positiva N , o $N = \tilde{N}^T N$, donde $\tilde{N} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m < n$ tiene la propiedad

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{N}A \\ \vdots \\ \tilde{N}A^{n-1} \end{bmatrix}_{nm \times n} = n,$$

la ecuación de Lyapunov discreta

$$M - A^T M A = N \quad (5.15)$$

tiene una solución única simétrica y positiva definida M .

Un esquema de la demostración, que sigue pasos similares a la del caso continuo, se puede encontrar en Chen [1999, p. 136-137]. En este caso una solución explícita M está dada por el siguiente resultado.

Teorema 5.10 (Solución de la Ecuación de Lyapunov Discreta). Si todos los autovalores de la matriz A tienen magnitud menor que 1, entonces la ecuación de Lyapunov

$$M - A^T M A = N$$

tiene solución única para cada N , y la solución puede expresarse en la forma

$$M = \sum_{m=0}^{\infty} (A^T)^m N A^m. \quad (5.16)$$

Remarcamos que aún cuando A tuviera autovalores con magnitud *mayor* que 1, la ecuación de Lyapunov tiene solución si se cumple (5.14), pero no puede expresarse en la forma (5.16).

La función MATLAB `lyap` calcula la solución de la ecuación de Lyapunov continua, mientras que la función `dlyap` calcula la discreta.

5.5. Estabilidad de Sistemas Inestacionarios

5.5.1. Estabilidad entrada/salida

El concepto de estabilidad BIBO para sistemas lineales inestacionarios es el mismo que vimos en el caso estacionario; si el sistema está representado por

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau,$$

decimos que el sistema es BIBO estable si toda entrada acotada produce una salida acotada. Como antes, la condición necesaria y suficiente para estabilidad BIBO es que exista una constante finita M tal que para todo t y todo $t_0, t \geq t_0$,

$$\int_{t_0}^t \|G(t, \tau)\| d\tau \leq M.$$

5.5.2. Estabilidad interna

Como en el caso estacionario, la ecuación $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ es *estable en el sentido de Lyapunov* si toda condición inicial genera una respuesta acotada. Como la respuesta está gobernada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0),$$

concluimos que la respuesta es Lyapunov estable si y sólo si existe una constante finita M tal que para todo t y $t_0, t \geq t_0$,

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M < \infty. \quad (5.17)$$

La ecuación $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ es *asintóticamente estable* si la respuesta generada por toda condición inicial es acotada y además tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Las condiciones de estabilidad asintótica incluyen (5.17) y además

$$\|\Phi(t, t_0)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Dado que en el caso inestacionario la respuesta depende del tiempo inicial t_0 , interesa caracterizar la estabilidad del sistema de como una propiedad independiente de t_0 . Así surgen las nociones de *estabilidad uniforme* y *estabilidad asintótica uniforme*.

Definición 5.7 (Estabilidad Uniforme). La ecuación

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

es *uniformemente estable* si existe una constante finita positiva γ tal que para cualquier t_0 y x_0 la solución correspondiente satisface

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\|, \quad t \geq t_0. \quad (5.18)$$

Notar que como la ecuación (5.18) debe satisfacerse en $t = t_0$, la constante γ debe ser mayor que 1.

El adjetivo *uniforme* se refiere precisamente a que γ no debe depender de la elección del tiempo inicial, como se ilustra en la Figura 5.8.

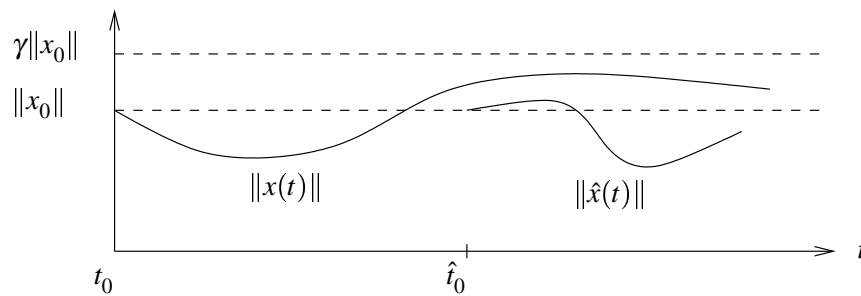


Figura 5.8: Estabilidad uniforme.

Ejemplo 5.7. La ecuación $\dot{x}(t) = (4t \sin t - 2t)x(t)$, $x(t_0) = x_0$ puede verificarse que tiene la solución

$$x(t) = e^{(4 \sin t - 4t \cos t - t^2 - 4 \sin t_0 + 4t_0 \cos t_0 + t_0^2)} x_0. \quad (5.19)$$

Es fácil ver que para un t_0 fijo, existe un γ tal que (5.19) es acotada por $\gamma||x_0||$ para todo $t \geq t_0$, dado que el término $-t^2$ domina en el exponente cuando t crece.

Sin embargo, la ecuación de estado no es uniformemente estable. Con un estado inicial x_0 fijo, consideremos la secuencia $t_0 = 2k\pi$, con $k = 0, 1, 2, \dots$, y los valores de las correspondientes soluciones evaluadas π segundos más tarde:

$$x(2(k+1)\pi) = e^{(4k+1)\pi(4-\pi)} x_0.$$

Claramente, no hay cota del factor exponencial independiente de k , o sea que γ va a depender forzosamente de k , y así del tiempo inicial t_0 .

Definición 5.8 (Estabilidad Exponencial Uniforme (EEU)). La ecuación

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.20)$$

es *uniformemente exponencialmente estable* si existen constantes finitas positivas γ, λ tales que para cualquier t_0 y x_0 la solución correspondiente satisface

$$||x(t)|| \leq \gamma e^{-\lambda(t-t_0)} ||x_0||, \quad t \geq t_0.$$

Nuevamente, $\gamma \geq 1$, y el adjetivo *uniforme* se refiere a que γ y λ son independientes de t_0 , como se ilustra en la Figura 5.9.

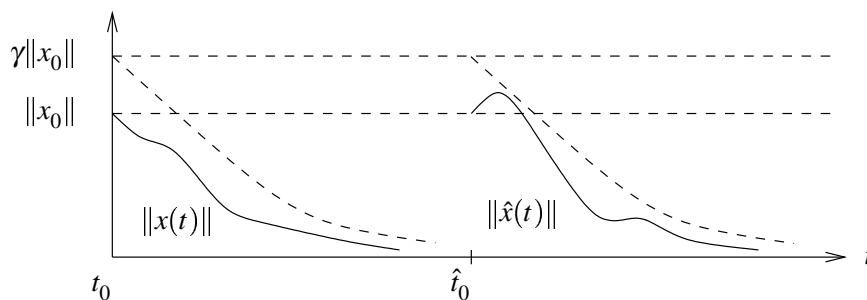


Figura 5.9: Estabilidad exponencial uniforme.

Teorema 5.11 (EEU para $A(t)$ acotada). Supongamos que existe $\alpha > 0$ tal que $\|A(t)\| \leq \alpha$ para todo t . Entonces la ecuación lineal (5.20) es uniformemente exponencialmente estable si y sólo si existe $\beta > 0$ tal que

$$\int_{\tau}^t \|\Phi(t, \sigma)\| d\sigma \leq \beta \quad \text{para todo } t, \tau, t \geq \tau.$$

Demostración. Ver Rugh [1995, p.~102-103]. □

En el caso estacionario, $A(t) = A$, la condición el teorema anterior lleva al requerimiento de que todos los autovalores de A tengan parte real negativa para que el sistema tenga EEU.

En el caso inestacionario los autovalores de $A(t)$ *no* determinan las propiedades de estabilidad del sistema, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.8. Sea el sistema inestacionario

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t). \quad (5.21)$$

El polinomio característico de $A(t)$ es

$$\det(\lambda I - A(t)) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -e^{2t} \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)^2,$$

por lo que $A(t)$ tiene dos autovalores en $\lambda = -1$ para todo t . Puede verificarse que la matriz

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

satisface la condición

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0)$$

y es por lo tanto la matriz de transición de estados del sistema (5.21). Como la entrada $a_{12}(t)$ de $A(t)$ crece en forma ilimitada con t , el sistema no puede ser asintóticamente o Lyapunov estable.

A diferencia del caso estacionario, los autovalores de $A(t)$ no son útiles para chequear estabilidad.

5.5.3. Invariancia frente a transformaciones de equivalencia

En el caso inestacionario las propiedades de estabilidad, determinadas por los autovalores de A , son invariantes frente a transformaciones de equivalencia. En el caso inestacionario sabemos que esta propiedad no se conserva, ya es posible llevar la matriz $A(t)$ a una matriz constante arbitraria \bar{A} mediante una transformación de equivalencia inestacionaria $P(t)$. No obstante, para ciertas $P(t)$, es posible hacer que las propiedades de estabilidad sean también invariantes en el caso inestacionario.

Definición 5.9 (Transformación de Lyapunov). Una matriz $n \times n$ $P(t)$ que es continuamente diferenciable e invertible en cada t se llama *transformación de Lyapunov* si existen constantes ρ y η tales que para todo t

$$\|P(t)\| \leq \rho, \quad |\det P(t)| \geq \eta. \quad (5.22)$$

Una condición equivalente a la (5.22) es la existencia de una constante ρ tal que para todo t

$$\|P(t)\| \leq \rho, \quad \|P^{-1}(t)\| \leq \rho.$$

Teorema 5.12 (Equivalencia y Estabilidad en Sistemas Inestacionarios). Supongamos que $P(t)$ es una transformación de Lyapunov. Entonces la ecuación lineal (5.20) es uniformemente (exponencialmente) estable si y sólo si la ecuación de estado

$$\dot{z}(t) = [P^{-1}(t)A(t)P(t) - P^{-1}(t)\dot{P}(t)]z(t)$$

es uniformemente (exponencialmente) estable.

5.6. Resumen

- Hemos introducido los primeros conceptos de estabilidad de sistemas estacionarios, comenzando por la estabilidad externa BIBO: entrada-acotada/salida-acotada.
- Vimos que un sistema es BIBO estable si y sólo si
 - su respuesta al impulso es absolutamente integrable (sumable, para sistemas discretos), o
 - si su función transferencia $\hat{g}(s)$ (en discreto $\hat{g}(z)$) es racional y propia, todos los polos de $\hat{g}(s)$ tienen parte real negativa (los polos de $\hat{g}(z)$ tienen magnitud menor que 1).
- Los sistemas MIMO son BIBO estables si y sólo si todos los subsistemas SISO que conectan las diferentes entradas y salidas son BIBO estables.
- La respuesta en régimen permanente de un sistema BIBO a una entrada sinusoidal de frecuencia ω_0 es sinusoidal de la misma frecuencia, y con magnitud y fase dadas por el la magnitud y fase de la función transferencia del sistema evaluada en $s = j\omega_0$ ($z = e^{j\omega_0}$ en sistemas discretos).
- Definimos estabilidad interna para un sistema con entradas nulas. Definimos *estabilidad según Lyapunov*, y *estabilidad asintótica*.
- La condición necesaria y suficiente para estabilidad según Lyapunov es que la matriz A en $\dot{x} = Ax$ no tenga autovalores con parte real positiva, y para aquellos autovalores con parte real nula, que no estén asociados a un bloque de Jordan de dimensión mayor que 1.
- La condición necesaria y suficiente para estabilidad asintótica es que todos los autovalores de A tengan parte real negativa (Hurwitz).
- Presentamos un método alternativo de chequear si la matriz A es Hurwitz (tiene todos sus autovalores con parte real negativa), mediante la existencia de solución de una ecuación de Lyapunov..
- Vimos el teorema de Lyapunov para sistemas discretos, que vincula la existencia de solución de la ecuación $M - A^T M A = N$ con la propiedad de que A tenga todos sus autovalores dentro del círculo unitario.

- Vimos las nociones de estabilidad para sistemas lineales inestacionarios, incluyendo estabilidad uniforme y estabilidad exponencial uniforme.
- Una nota importante es que los autovalores de $A(t)$ en general no determinan la estabilidad en sistemas lineales inestacionarios.

5.7. Ejercicios

Ejercicio 5.1. Probar que las funciones e^{pt} y te^{pt} son absolutamente integrables si y sólo si $p \in \mathbb{C}^-$.²

Ejercicio 5.2. Es el sistema con función transferencia $\hat{g}(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$ BIBO estable?

Ejercicio 5.3. ¿Cuáles son las respuestas en régimen permanente de un sistema con función transferencia $\hat{g}(s) = \frac{s-2}{s+1}$ excitado por $u_1(t) = 3$ y $u_2(t) = \sin 2t$ para $t \geq 0$?

Ejercicio 5.4. Probar los Teoremas 5.4 y 5.2 para sistemas discretos.

Ejercicio 5.5. Analizar la estabilidad de los siguientes sistemas

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ x[k+1] &= \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x[k] \\ x[k+] &= \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x[k]\end{aligned}$$

Ejercicio 5.6. Probar que todos los autovalores de A tienen parte real menor que $-\mu < 0$ si y sólo si para cualquier matriz simétrica y positiva definida N dada, la ecuación

$$A^T M + MA + 2\mu M = -N$$

tiene una solución única simétrica y positiva definida M .

Ejercicio 5.7. Probar que todos los autovalores de A tienen magnitud menor que ρ si y sólo si para cualquier matriz simétrica y positiva definida N dada, la ecuación

$$\rho^2 M - A^T M A = \rho^2 N$$

tiene una solución única simétrica y positiva definida M .

Ejercicio 5.8. ¿Es el sistema con respuesta al impulso $g(t, \tau) = e^{-2|t| - |\tau|}$ para $t \geq \tau$ BIBO estable? ¿Qué hay de $g(t, \tau) = e^{-(t-\tau)}$ sen $t \cos \tau$?

² $\mathbb{C}^- = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$.

Ejercicio 5.9. Es el sistema $\dot{x}(t) = 2tx(t) + u(t), y(t) = e^{-t^2}x(t)$ BIBO estable? ¿Estable en el sentido de Lyapunov? ¿Asintóticamente estable?

Ejercicio 5.10. Mostrar que la ecuación del problema anterior puede transformarse, usando $\bar{x}(t) = P(t)x(t)$ con $P(t) = e^{-t^2}$, en

$$\dot{\bar{x}}(t) = e^{-t^2}u(t), y(t) = \bar{x}(t).$$

Es el sistema transformado BIBO estable? ¿Estable en el sentido de Lyapunov? ¿Asintóticamente estable? Es $P(t)$ una transformación de Lyapunov?

Capítulo 6

Controlabilidad y Observabilidad

En este capítulo introducimos los conceptos de controlabilidad y observabilidad. Estos conceptos describen la interacción entre el mundo externo (entradas y salidas) y las variables internas del sistema (estados). La controlabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento de un sistema puede ser controlado por medio de sus entradas, mientras que la observabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento interno del sistema puede detectarse en sus salidas.

6.1. Controlabilidad

6.1.1. Definiciones y tests fundamentales

Consideremos el sistema de n estados y p entradas

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (6.1)$$

con las matrices constantes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Como la controlabilidad relaciona las entradas y los estados del sistema, la ecuación de salida es irrelevante.

Definición 6.1 (Controlabilidad). La ecuación de estados (6.1), o el par (A, B) , se dice *controlable* si para cualquier estado inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cualquier estado final $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe una entrada que transfiere el estado x de x_0 a x_1 en tiempo finito. En caso contrario, la ecuación (6.1), o el par (A, B) , se dice *no controlable*.

La controlabilidad tiene que ver con la posibilidad de llevar al sistema de cualquier estado inicial al cualquier estado final en tiempo finito, no importando qué trayectoria se siga, o qué entrada se use.

Ejemplo 6.1 (Sistemas no controlables). Consideremos el sistema eléctrico de la izquierda en la Figura 6.1. El sistema es de primer orden con variable de estado x , la tensión en el capacitor. Si la carga inicial del capacitor es nula, $x(0) = 0$, entonces $x(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ independientemente de la tensión u de entrada aplicada, debido a la simetría de la red. La ecuación que describe el sistema es no controlable. Veamos ahora el sistema de la derecha en la misma figura. Éste tiene dos variables de estado, las tensiones en los dos capacitores, x_1 y x_2 . La entrada puede llevar x_1 o x_2 a cualquier valor, pero no puede llevar x_1 y x_2 a distintos valores. Por ejemplo, si $x_1(0) = x_2(0)$ entonces $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \geq 0$ independientemente de la tensión aplicada en u . También aquí, la ecuación que describe el sistema es no controlable.

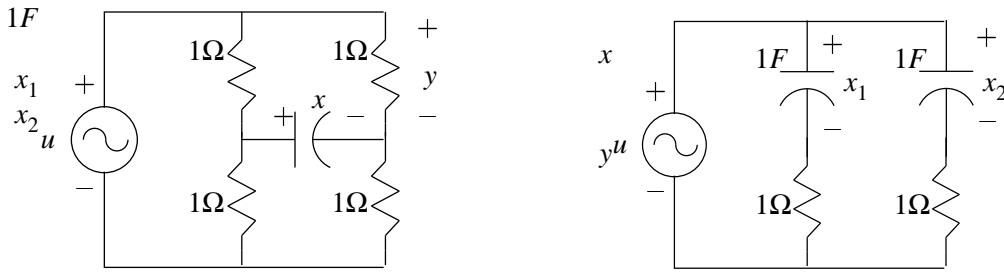


Figura 6.1: Sistemas eléctricos no controlables

Teorema 6.1 (Tests de Controlabilidad). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par (A, B) , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, es controlable.
2. La matriz de controlabilidad,

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad C \in \mathbb{R}^{n \times np}, \quad (6.2)$$

es de rango n (rango fila pleno).

3. La matriz $n \times n$

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \quad (6.3)$$

es no singular para todo $t > 0$.

Demostración.

(1 \Rightarrow 2) Consideremos dos vectores cualesquiera x_0 y $x_1 \in \mathbb{R}^n$ y un intervalo finito de tiempo t_1 cualquiera. Como el sistema es controlable, sabemos que existe alguna entrada $u(t)$ que transfiere el estado de $x(0) = x_0$ al estado final $x(t_1) = x_1$ en el tiempo t_1 . Usando la fórmula de variación de los parámetros, tenemos entonces que se satisface la ecuación

$$x_1 = x(t_1) = e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau = x_1 - e^{At_1} x_0. \quad (6.4)$$

Llamemos z al vector $z \triangleq x_1 - e^{At_1} x_0$.

Recordemos de § 3.6.4 la propiedad que dice que toda función matricial de una matriz $n \times n$ se puede expresar como un polinomio matricial de orden $n - 1$; entonces podemos escribir $e^{A(t_1-\tau)}$ como un polinomio en A (con coeficientes dependientes de τ),

$$\begin{aligned} e^{A(t_1-\tau)} &= e^{At_1} e^{-A\tau} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k(\tau) A^k \\ &= \eta_0(\tau) I + \eta_1(\tau) A + \dots + \eta_{n-1}(\tau) A^{n-1} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Reemplazando (6.5) en (6.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
 z &= \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^{t_1} [\eta_0(\tau)I + \eta_1(\tau)A + \cdots + \eta_{n-1}(\tau)A^{n-1}] B u(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^{t_1} [B\eta_0(\tau)u(\tau) + ABu(\tau)\eta_1(\tau) + \cdots + A^{n-1}B\eta_{n-1}(\tau)u(\tau)] d\tau \\
 &= \int_0^{t_1} [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \eta_0(\tau)u(\tau) \\ \eta_1(\tau)u(\tau) \\ \vdots \\ \eta_{n-1}(\tau)u(\tau) \end{bmatrix} d\tau \\
 &= [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \int_0^{t_1} \eta_0(\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_0^{t_1} \eta_1(\tau)u(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_0^{t_1} \eta_{n-1}(\tau)u(\tau)d\tau \end{bmatrix} = Cr
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

donde hemos definido como r el vector de la derecha en la línea anterior a (6.6), y C es la matriz de controlabilidad de (6.2). Así, en otras palabras, la controlabilidad del par (A, B) implica que la ecuación lineal algebraica $z = Cr$ siempre tiene solución, para z y r en \mathbb{R}^n arbitrarios. Del Teorema 3.1, sigue que esto sucede si y sólo si la matriz C es de rango fila pleno, es decir, n . Hemos mostrado que $1 \Rightarrow 2$.

(2 \Rightarrow 3) Mostramos esta implicación por contradicción. Supongamos que la matriz C tiene rango fila pleno pero que existe algún $t > 0$ tal que $W_c(t)$ es singular. Por la forma del integrando en (6.3), la matriz $W_c(t)$ es siempre semidefinida positiva, y que sea singular es equivalente a decir que existe algún vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v^T W_c(t) v = 0$, es decir,

$$\begin{aligned}
 0 &= v^T W_c(t) v \\
 &= \int_0^t v^T e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} v d\tau = \int_0^t \|v^T e^{A\tau} B\|^2 d\tau
 \end{aligned}$$

que es equivalente a decir que $v^T e^{A\tau} B = 0$ para todo $\tau \in [0, t]$. Escribiendo la exponencial $e^{A\tau}$ en forma polinomial, similar a (6.5), tenemos

$$0 = v^T e^{A\tau} B = v^T [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \eta_0(\tau)I_p \\ \eta_1(\tau)I_p \\ \vdots \\ \eta_{n-1}(\tau)I_p \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

Como $e^{A\tau} B \neq 0$ si $B \neq 0$, la única posibilidad de que se dé (6.7) para todo τ es que $v^T C = 0$, que implicaría que el rango fila de C es menor que n , lo cual es una contradicción, y prueba que $2 \Rightarrow 3$.

(3 \Rightarrow 1) Sean x_0 y x_1 dos vectores cualesquiera de \mathbb{R}^n , y $t_1 > 0$ arbitrario. Si $W_c(t)$ es no singular para cualquier $t > 0$, entonces podemos construirnos la entrada

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_1-t)} W_c^{-1}(t_1) (e^{At_1} x_0 - x_1). \tag{6.8}$$

Veamos que esta entrada transfiere el estado del sistema de x_0 a x_1 en el tiempo t_1 . Efectivamente, reemplazando $u(t)$ de (6.8) en la fórmula de variación de los parámetros para $x(t_1)$ tenemos

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{At_1}x_0 - \left(\int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^Te^{A^T(t-\tau)}d\tau \right) W_c^{-1}(t_1)(e^{At_1}x_0 - x_1) \\ &= e^{At_1}x_0 - W_c(t_1)W_c^{-1}(t_1)(e^{At_1}x_0 - x_1) = x_1. \end{aligned}$$

Como x_0 , x_1 , y $t_1 > 0$ son arbitrarios, hemos mostrado que el sistema es controlable. \square

Ejemplo 6.2. En el Ejemplo 2.4 vimos la linealización de un péndulo invertido. La ecuación de estados lineal de un péndulo dado es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] x. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Calculamos la matriz de controlabilidad

$$C = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puede mostrarse que esta matriz tiene rango 4; por lo que el sistema es controlable. Por lo tanto, si el ángulo $x_3 = \theta$ se desviara ligeramente de cero, existe un control u que lo retorna a cero en tiempo finito. De hecho, la controlabilidad nos garantiza que existe un control u capaz de llevar la posición del carro, $x_1 = y$, el ángulo $x_3 = \theta$, y sus derivadas a cero. Este hecho es consistente con la experiencia de balancear un escobillón sobre la palma de una mano.

Cabe notar que si bien esto es estrictamente cierto, en la práctica el control necesario puede ser imposible de implementar; por ejemplo si se exceden los límites admisibles de corriente del motor que mueve el carro.

6.1.2. Control de mínima energía y gramiano de controlabilidad

La ley de control $u(t)$ de (6.8) tiene una propiedad interesante: es el control que gasta *mínima energía* en llevar al sistema del estado x_0 al estado x_1 en el tiempo t_1 , en el sentido de que para otro control $\tilde{u}(t)$ que haga la misma transferencia siempre se cumple que

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \|\tilde{u}(\tau)\|^2 d\tau &\geq \int_0^{t_1} \|u(\tau)\|^2 d\tau \\ &= (x_0^T e^{A^T(t_1)} - x_1^T) W_c^{-1}(t_1) \left(\int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^Te^{A^T(t_1-\tau)}d\tau \right) W_c^{-1}(t_1)(e^{A(t_1)}x_0 - x_1) \\ &= (x_0^T e^{A^T(t_1)} - x_1^T) W_c^{-1}(t_1)(e^{A(t_1)}x_0 - x_1) \\ &= \|W_c^{-\frac{1}{2}}(t_1)(e^{A(t_1)}x_0 - x_1)\|^2. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Vemos de (6.10) que la mínima energía de control es mayor cuanto mayor sea la distancia entre x_0 y x_1 , y cuanto menor el tiempo de transferencia t_1 (ya que $W_c(t_1)$ es más cercano a ser singular).

Si la matriz A es Hurwitz, la integral $W_c(t)$ (6.3) converge para $t = \infty$. En ese caso notamos simplemente $W_c(t) = W_c$, y se llama *gramiano de controlabilidad*. Si el par (A, B) es controlable, entonces por el Teorema 6.1.2 la matriz de controlabilidad (transpuesta)

$$C^T = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A \\ \vdots \\ B^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango n . Vimos en el Teorema 5.8 en § 5.4 que esta condición, si la matriz A es Hurwitz, garantiza que W_c es la única solución, y positiva definida, de la ecuación

$$AW_c + W_c A^T = -BB^T. \quad (6.11)$$

Las funciones MATLAB $Cc=ctrb(A,B)$ y $W=gram(A,B)$ calculan respectivamente la matriz de controlabilidad C y el gramiano de controlabilidad W_c . Para saber si un sistema es controlable podemos chequear el rango de C o W_c . Para calcular el control de mínima energía (6.8) necesitamos la matriz $W_c(t_1)$, que podemos calcular usando el Teorema 4.1 (ver) implementando

$$W_c(t) = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} A & BB^T \\ 0_n & -A^T \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 0_n \\ e^{A^T t} \end{bmatrix},$$

En MATLAB:

```
O=zeros(n,n);
I=eye(n);
Wt=[I,O]*expm([A,B*B^T;O,-A^T]*t)*[O;expm(A^T*t)];
```

Ejemplo 6.3. La Figura 6.2 ilustra una plataforma de las usadas para estudiar sistemas de suspensión para automóviles. El sistema consiste de una plataforma cuyos extremos la sustentan al piso mediante sistemas independientes de resortes y amortiguadores de fricción viscosa. Asumiendo la masa de la plataforma cero, cada sistema de amortiguación en los extremos recibe la mitad de la fuerza aplicada a la plataforma. Las constantes de los resortes se asumen 1 y los coeficientes de fricción viscosa 2 y 1 respectivamente. Tomando los desplazamientos de la posición de equilibrio de los extremos de la plataforma como variables de estado, tenemos que la siguiente ecuación de estados describe este sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Si los desplazamientos iniciales son distintos de cero, y si no hay fuerza aplicada, la plataforma va a volver a su posición de equilibrio exponencialmente (los autovalores de la matriz A del sistema son $-0,5$ y -1 , por lo que el sistema es asintóticamente estable). En teoría el sistema tomaría un tiempo infinito en alcanzar su posición de equilibrio. Nos planteamos el siguiente problema: si $x_1(0) = 10$ y $x_2(0) = -1$, ¿podemos aplicar una fuerza que lleve la plataforma a su posición de equilibrio en 2 segundos? La respuesta no parece obvia pues la *misma* fuerza se aplica a los dos sistemas de amortiguación.

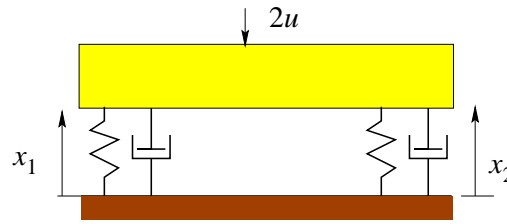


Figura 6.2: Sistema plataforma

Calculamos el rango de la matriz de controlabilidad

$$\text{rango } [B \quad AB] = \text{rango } \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2.$$

Vemos que el sistema es controlable y, para cualquier $x(0)$, existe una entrada que transfiera al sistema de $x(0)$ a su posición de equilibrio en 2 segundos. Calculamos la matriz

$$\begin{aligned} W_c(2) &= \int_0^2 \left(\begin{bmatrix} e^{-0,5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} [0,5 \quad 1] \begin{bmatrix} e^{-0,5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \right) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 0,2162 & 0,3167 \\ 0,3167 & 0,4908 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así la fuerza

$$\begin{aligned} u_2(t) &= - [0,5 \quad 1] \begin{bmatrix} e^{-0,5(2-t)} & 0 \\ 0 & e^{-(2-t)} \end{bmatrix} W_c^{-1}(2) \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= -58,82e^{0,5t} + 27,96e^t \end{aligned}$$

para $t \in [0, 2]$ lleva al estado del sistema de $x(0) = [10, -1]^T$ a $[0, 0]^T$ en 2 segundos, como se ve en la Figura 6.3.

Si recalculamos la fuerza necesaria para transferir el estado de x_0 al equilibrio pero ahora en 4 segundos, obtenemos

$$\begin{aligned} W_c(4) &= \begin{bmatrix} 0,2454 & 0,3325 \\ 0,3325 & 0,4998 \end{bmatrix} \\ u_4(t) &= -3,81e^{0,5t} + 0,69e^t \end{aligned} \tag{6.12}$$

Notar que el control que hace la misma transferencia pero en un tiempo mayor es significativamente más pequeño (usa menos energía). ¿Cuál será la fuerza necesaria si $t \rightarrow \infty$?

Ejemplo 6.4. Consideramos de nuevo el sistema plataforma de la Figura 6.2, pero esta vez asumiendo que las constantes de los resortes y los coeficientes de fricción viscosa son todos iguales a 1. La ecuación de estados del sistema deviene

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Esta vez tenemos que

$$\text{rango } \mathcal{C} = \text{rango } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

y el sistema no es controlable. Si $x_1(0) \neq x_2(0)$ no existe entrada que pueda transferir el sistema a cero en tiempo finito.

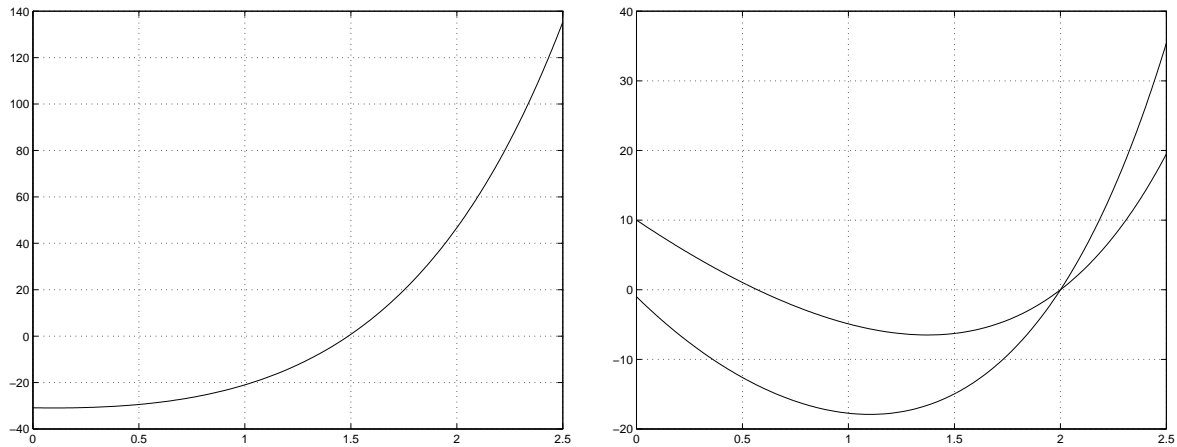


Figura 6.3: Actuación y Variación de los Estados

6.1.3. Tests PBH de controlabilidad

Los tests de Popov-Belevitch-Hautus (PBH) no son tan comunes como los presentados en el Teorema 6.1, pero tienen interpretaciones geométricas interesantes y nos van a servir para analizar controlabilidad en forma de Jordan. Hay dos tipos de tests PBH, de *autovectores*, y de *rango*.

Lema 6.1 (Test PBH de autovectores). El par (A, B) es *no* controlable si y sólo si existe un autovector izquierdo $v \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ de A , tal que

$$vB = 0.$$

Demostración.

(\Leftarrow) Supongamos que existe un autovector izquierdo v de A ,

$$vA = \lambda v, \quad (6.13)$$

tal que $vB = 0$. Multiplicando por derecha ambos lados de (6.13) por B obtenemos

$$vAB = \lambda vB = 0.$$

Multiplicando por derecha ambos lados de (6.13) por AB obtenemos

$$vA^2B = \lambda vAB = \lambda^2 vB = 0.$$

Así, multiplicando (6.13) por A^2B, A^3B, \dots , seguimos la secuencia hasta mostrar que

$$vC = v \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0,$$

que implica que el rango fila de la matriz de controlabilidad es menor que n , $\text{rango } C < n$. Por el Teorema 6.1, el par (A, B) es no controlable.

(\Rightarrow) Ejercicio.

□

Lema 6.2 (Test PBH de rango). El par (A, B) es controlable si y sólo si

$$\text{rango} [sI - A \quad B] = n \quad \text{para todo } s.$$

Demostración.

(\Rightarrow) Si $\text{rango}[sI - A \quad B] = n$ para todo s , no puede existir ningún vector no nulo v tal que

$$v[sI - A \quad B] = [v(sI - A) \quad vB] = 0.$$

Por lo tanto, no puede haber *ningún* vector que cumpla simultáneamente $vs = vA$ y $vB = 0$. Por el test PBH de autovectores, el sistema es controlable.

(\Leftarrow) Ejercicio.

□

6.1.4. Controlabilidad y transformaciones de semejanza

Teorema 6.2 (Invariancia de la controlabilidad respecto a cambio de coordenadas). La controlabilidad es una propiedad invariante con respecto a transformaciones de equivalencia (cambios de coordenadas).

Demostración. Consideremos el par (A, B) con matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

y su par equivalente (\bar{A}, \bar{B}) , donde $\bar{A} = PAP^{-1}$ y $\bar{B} = PB$, y P es una matriz no singular. La matriz de controlabilidad del par (\bar{A}, \bar{B}) es

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}} &= [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B}] \\ &= [PB \quad PAP^{-1}PB \quad \dots \quad PA^{n-1}P^{-1}PB] \\ &= P[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \\ &= P\mathcal{C}. \end{aligned}$$

Como P es no singular, tenemos que $\text{rango } \mathcal{C} = \text{rango } \bar{\mathcal{C}}$.

□

6.2. Observabilidad

6.2.1. Definiciones y tests fundamentales

El concepto de observabilidad es dual al de controlabilidad, e investiga la posibilidad de estimar el estado del sistema a partir del conocimiento de la salida. Consideramos el sistema lineal estacionario

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, C \in \mathbb{R}^{q \times n}, D \in \mathbb{R}^{q \times p}. \quad (6.14)$$

Definición 6.2 (Observabilidad). La ecuación de estado (6.14) es observable si para cualquier estado inicial $x(0)$ (desconocido), existe un tiempo finito t_1 tal que el conocimiento de la entrada u y la salida y sobre el intervalo $[0, t_1]$ es suficiente para determinar en forma única el estado inicial $x(0)$. En caso contrario el sistema no observable.

Ejemplo 6.5 (Sistemas no observables). En el circuito de la izquierda en la Figura 6.4, si la entrada es nula, la salida es idénticamente nula para cualquier tensión en el capacitor, debido a la simetría de las resistencias. Sabemos que la entrada y la salida son ambas nulas, pero la tensión inicial en el capacitor (el estado) puede no serlo y no podemos determinarla. Este sistema es no observable.

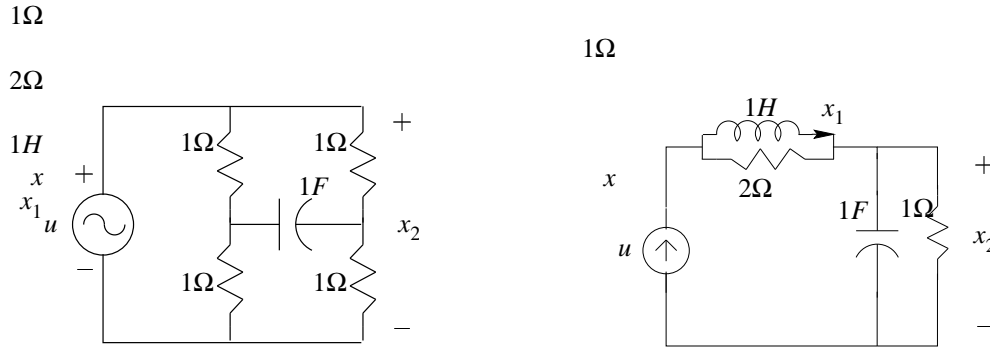


Figura 6.4: Sistemas eléctricos no observables

El circuito de la derecha en la Figura 6.4 tiene dos variables de estado, la corriente por la inductancia, x_1 , y la tensión en el capacitor x_2 . La entrada u es una fuente de corriente. Si $u = 0$ y la tensión inicial en el capacitor es nula, $x_2(0) = 0$, la salida es nula independientemente de la corriente en la inductancia, que no necesariamente es nula. El estado inicial $x_1(0)$ no puede ser determinado del conocimiento de u e y , y el sistema es no observable.

Dado un estado inicial $x(0)$ y una entrada $u(t)$, la salida del sistema está dada por la fórmula

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \quad (6.15)$$

Para estudiar observabilidad, la salida del sistema $y(t)$ y la entrada $u(t)$ se suponen conocidas, siendo el estado inicial $x(0)$ la única incógnita. Así, de (6.15) podemos escribir

$$\begin{aligned} Ce^{At}x(0) &= \bar{y}(t) \\ &\triangleq y(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde la variable $\bar{y}(t)$ es una función conocida.

Observación para un tiempo fijo ¿Cómo resolvemos (6.16) para obtener $x(0)$ de $\bar{y}(t)$? Para un tiempo t fijo, Ce^{At} es una matrix $q \times n$ real y constante, e $\bar{y}(t)$ un vector $q \times 1$ constante. Por su definición, $\bar{y}(t)$ está siempre en la imagen de Ce^{At} , por lo que siempre existe una solución $x(0)$. La cuestión es si existe una solución única.

En general, dado que hay menos variables medibles que el número de estados del sistema, tenemos que $q < n$. En este caso la matrix Ce^{At} tiene rango a lo sumo q , y por lo tanto tiene un espacio nulo no trivial. En consecuencia, según los resultados de § 3.3, si $q < n$ la solución no es única, y no podemos hallar un único valor $x(0)$ de (6.16) para un t fijo dado.

Para poder determinar $x(0)$ en forma única de (6.16) es necesario utilizar el conocimiento de $y(t)$ y $u(t)$ sobre un intervalo de tiempo de longitud no nula, como mostramos en el siguiente teorema.

Teorema 6.3 (Test W_o de observabilidad). La ecuación de estados (6.14) es observable si y sólo si la matriz $W_o(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \quad (6.17)$$

es no singular para todo $t > 0$.

Demostración. Multiplicamos por izquierda ambos lados de (6.16) por $e^{A^T t} C^T$ y luego integramos sobre $[0, t_1]$, lo que da

$$\left(\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \right) x(0) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T \bar{y}(t) dt.$$

Si $W_o(t_1)$ es no singular, entonces

$$x(0) = W_o^{-1}(t_1) \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T \bar{y}(t) dt, \quad (6.18)$$

que da una única solución $x(0)$. Así hemos mostrado que si $W_o(t)$ es no singular entonces el sistema es observable.

Para mostrar la reversa supongamos que $W_o(t_1)$ es singular. Por su definición, $W_o(t_1)$ es *semi-definida* positiva, o sea que existe un vector constante $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal que

$$\begin{aligned} v^T W_o(t_1) v &= \int_0^{t_1} v^T e^{A^T t} C^T C e^{A t} v dt \\ &= \int_0^{t_1} \|C e^{A t} v\|^2 dt = 0. \end{aligned}$$

Pero, por la propiedad de la norma, esto implica que

$$C e^{A t} v \equiv 0, \quad \text{para todo } t \in [0, t_1]. \quad (6.19)$$

Si $u(t) \equiv 0$ entonces, en particular, las condiciones iniciales $x(0) = v \neq 0$ y $x(0) = 0$ dan ambas la misma salida $y(t) = C e^{A t} x(0) \equiv 0$ y por lo tanto no pueden diferenciarse. Esto muestra que si $W_o(t)$ es singular el sistema es inobservable, completando la prueba del teorema. \square

De la definición de la matriz $W_o(t)$ vemos que la observabilidad sólo depende de las matrices A y C . Así, la observabilidad es una propiedad del par (A, C) , e independiente de las matrices B y D .

Teorema 6.4 (Dualidad entre controlabilidad y observabilidad). El par (A, C) es observable si y sólo si el par (A^T, C^T) es controlable.

Demostración. Ejercicio; es inmediata de las definiciones de $W_c(t)$ y $W_o(t)$. \square

El teorema de dualidad hace inmediata la demostración de tests de observabilidad análogos a los de controlabilidad del Teorema 6.1.

Teorema 6.5 (Tests de Observabilidad). La siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par (A, C) , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, es observable.

2. La matriz de observabilidad,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{nq \times n}, \quad (6.20)$$

es de rango n (rango columna pleno).

3. La matriz $n \times n$

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau = \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T C e^{A(t-\tau)} d\tau \quad (6.21)$$

es no singular para todo $t > 0$.

Observación a través de diferenciación Una forma alternativa de resolver (6.16) es a través de la diferenciación repetida de $\bar{y}(t)$ en $t = 0$ (que equivale a la diferenciación repetida de la entrada y la salida). Es fácil verificar que $\bar{y}(0) = Cx(0)$, $\dot{\bar{y}}(0) = CAx(0)$, \dots , $\bar{y}^{(n-1)}(0) = CA^{n-1}x(0)$, por lo que podemos escribir

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} \bar{y}(0) \\ \dot{\bar{y}}(0) \\ \vdots \\ \bar{y}^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}, \quad \text{es decir, } \mathcal{O}x(0) = \bar{y}(0). \quad (6.22)$$

Por construcción, $\bar{y}(0)$ está en la imagen de \mathcal{O} , y si el sistema es observable, el rango columna de \mathcal{O} es pleno, rango $\mathcal{O} = n$. Entonces, por el Teorema 3.2, existe una solución única del sistema de ecuaciones (6.22), dada por

$$x(0) = [\mathcal{O}^T \mathcal{O}]^{-1} \mathcal{O}^T \bar{y}(0). \quad (6.23)$$

Notar que aún seguimos necesitando conocimiento de $\bar{y}(t)$ en un entorno de $t = 0$ para poder determinar $\dot{\bar{y}}(0), \dots, \bar{y}^{(n-1)}(0)$.

Si bien es factible implementar observación mediante este método de diferenciación, en la práctica no es recomendable, ya que la medición de $y(t)$ va a incluir casi siempre ruido de alta frecuencia. La diferenciación de $\bar{y}(t)$ “amplifica” el ruido, aumentando los errores en el cálculo de $x(0)$.

Por otro lado, como la integración tiene el efecto de “filtrar” ruido de alta frecuencia, es mucho mejor implementar el cálculo de $x(0)$ a través de la fórmula (6.18).

6.2.2. Gramiano de observabilidad

Si la matriz A es Hurwitz, la integral $W_o(t)$ de (6.17) converge para $t = \infty$. En ese caso notamos simplemente $W_o(t) = W_o$, y se llama *gramiano de observabilidad*. Si el par (A, C) es observable, entonces la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango n . Vimos en el Teorema 5.8 en § 5.4 que esta condición, si la matriz A es Hurwitz, garantiza que W_o es la única solución, y positiva definida, de la ecuación

$$W_o A + A^T W_o = -C^T C. \quad (6.24)$$

Las funciones MATLAB $Ob=obsv(A, C)$ y $Wo=gram(A', C')$ calculan respectivamente la matriz de observabilidad \mathcal{O} y el gramiano de observabilidad W_o . Chequeando el rango de \mathcal{O} o W_o determinamos si un sistema es observable.

6.2.3. Tests PBH de observabilidad

La dualidad nos permite también extender los tests PBH al caso de observabilidad.

Lema 6.3 (Test PBH de autovectores). El par (A, C) es *no* observable si y sólo si existe un autovector derecho $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ de A , tal que

$$Cv = 0.$$

Lema 6.4 (Test PBH de rango). El par (A, C) es observable si y sólo si

$$\text{rango} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \text{para todo } s.$$

6.2.4. Observabilidad y transformaciones de semejanza

Teorema 6.6 (Invariancia de la observabilidad respecto a cambio de coordenadas). La observabilidad es una propiedad invariante con respecto a transformaciones de equivalencia (cambios de coordenadas).

Ejemplo 6.6 (Controlabilidad y observabilidad de un circuito RLC Bay [1999]). Analizamos controlabilidad y observabilidad del circuito RLC de la Figura 6.5. Las ecuaciones de estado usando la tensión en el capacitor v_c y la corriente en la inductancia i_L como variables de estado, la tensión de alimentación v_s como entrada, y la tensión sobre la inductancia v_x como salida, son

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v_s \\ v_x &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + v_s. \end{aligned} \quad (6.25)$$

El sistema es de segundo orden, $n = 2$, con una entrada y una salida, $p = 1 = q$.

Construimos la matriz de controlabilidad \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} + \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RLC} \end{bmatrix}.$$

El rango de \mathcal{C} puede chequearse mediante el determinante,

$$\begin{aligned} \det \mathcal{C} &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} + \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RLC} \end{bmatrix} = -\frac{1}{R^2LC^2} + \frac{2}{R^2LC^2} - \frac{1}{L^2C} \\ &= \frac{1}{R^2LC^2} - \frac{1}{L^2C}. \end{aligned}$$

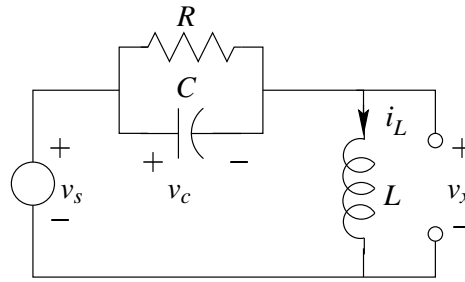


Figura 6.5: Circuito RLC

La condición para que este determinante sea cero es $\frac{1}{R^2LC^2} - \frac{1}{L^2C} = 0$, que da $R = \sqrt{L/C}$.

Por otro lado, la matriz de observabilidad \mathcal{O} es

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{RC} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix},$$

que es siempre de rango completo. En conclusión, el sistema es siempre observable, pero puede llegar a ser no controlable si $R = \sqrt{L/C}$.

Veamos cómo aparece la posibilidad de pérdida de controlabilidad desde el punto de vista externo; analizamos la función transferencia. La calculamos de (6.25) con la fórmula conocida,

$$\begin{aligned} \hat{G}(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{2}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{s(s + 2/RC) + 1/LC} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{2}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{2}{RC}s + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} -s & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{-\left(\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right)}{s^2 + \frac{2}{RC}s + \frac{1}{LC}} + 1 \\ &= \frac{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)}{s^2 + \frac{2}{RC}s + \frac{1}{LC}}. \end{aligned}$$

Calculamos la raíces del polinomio denominador (el polinomio característico de la matriz A) resolviendo la forma cuadrática, obteniendo

$$s_{1,2} = -\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{R^2C^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Vemos que ambas raíces tienen parte real negativa, por lo que podemos concluir que el sistema será asintóticamente (y por ende, BIBO) estable para todo valor de R, L y C . En particular, si $R = \sqrt{L/C}$ (valor de R para el cual el sistema deviene no controlable) tenemos

$$s_{1,2} = -\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{LC}} = -\frac{1}{RC}$$

es decir, dos raíces iguales. Para este valor de R la función transferencia queda

$$\hat{G}(s) = \frac{s \left(s + \frac{1}{RC}\right)}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)^2} = \frac{s}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)},$$

que es ahora un sistema *de primer orden*. Lo que sucede para este particular valor de R es que los elementos almacenadores de energía combinan sus efectos de tal manera que el sistema se comporta, desde el punto de vista externo, como un sistema de primer orden. La pérdida de controlabilidad y la cancelación de un par polo-cero en la función transferencia para este particular valor de R no es una coincidencia; como veremos en la sección siguiente, necesariamente debe haber cancelaciones en la función transferencia si el sistema es no controlable o no observable.

6.3. Descomposiciones Canónicas

En esta sección presentamos formas canónicas de las ecuaciones de estado que descomponen al sistema en sus partes controlables y no controlables y observables y no observables. Estas descomposiciones permiten establecer la relación entre controlabilidad y observabilidad y función transferencia, generalizando las observaciones que hicieramos en el Ejemplo 6.6. Estas descomposiciones muestran también cuándo una realización en espacio de estados es *mínima*.

Consideramos el sistema lineal y estacionario en ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, \\ C &\in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{q \times p}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Sea $\hat{x} = Px$, donde P es una matriz no singular, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces la ecuación de estados

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{aligned} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} \hat{A} &= PAP^{-1}, \hat{B} = PB, \\ \hat{C} &= CP^{-1}, \hat{D} = D, \end{aligned} \quad (6.27)$$

es equivalente a (6.26). Todas las propiedades de (6.26), incluyendo estabilidad, controlabilidad, y observabilidad, se preservan en (6.27). Además, como es fácil comprobar, tenemos que

$$\hat{C} = PC, \quad \hat{O} = OP^{-1}.$$

El siguiente resultado muestra que si el sistema (6.26) no es completamente controlable, es posible definir un sistema de orden reducido con igual función transferencia (es decir, equivalente a estado cero) y controlable.

Teorema 6.7 (Descomposición controlable/no-controlable). Sea el sistema (6.26) con matriz de controlabilidad \mathcal{C} tal que

$$\text{rango } \mathcal{C} = \text{rango} [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n_1 < n.$$

Sea la matriz $n \times n$ de cambio de coordenadas

$$P^{-1} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_{n_1} \quad \cdots \quad q_n]$$

donde las primeras n_1 columnas son n_1 columnas linealmente independientes de la matriz C , y las restantes columnas se eligen arbitrariamente de forma que P sea no singular. Entonces la transformación de equivalencia $\hat{x} = Px$ o $x = P^{-1}\hat{x}$ lleva (6.26) a la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_c & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [\hat{C}_c \quad \hat{C}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + Du, \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde $\hat{A}_c \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ y $\hat{A}_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{(n-n_1) \times (n-n_1)}$ y la ecuación de estados de orden n_1

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_c &= \hat{A}_c \hat{x}_c + \hat{B}_c u \\ \hat{y} &= \hat{C}_c \hat{x}_c + Du \end{aligned} \quad (6.29)$$

es controlable y tiene la misma función transferencia que (6.26).

Demostración. Por lo visto en § 3.4, la columna i de \hat{A} es la representación de Aq_i en la base $\{q_1, \dots, q_{n_1}, \dots, q_n\}$. Pero los vectores Aq_i , para $i = 1, 2, \dots, n_1$ son linealmente dependientes del conjunto $\{q_1, \dots, q_{n_1}\}$, y linealmente independientes del conjunto $\{q_{n_1+1}, \dots, q_n\}$. Así la matriz \hat{A} tiene la forma mostrada en (6.28).

Las columnas de \hat{B} son la representación de las columnas de B con respecto a $\{q_1, \dots, q_n\}$. Ahora, las columnas de B dependen solamente del conjunto $\{q_1, \dots, q_{n_1}\}$, así que \hat{B} tiene la forma dada en (6.28).

Si \hat{C} es la matriz de controlabilidad de (6.28), entonces $\text{rango } C = \text{rango } \hat{C} = n_1$. Es fácil verificar que

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \begin{bmatrix} \hat{B}_c & \hat{A}_c \hat{B}_c & \cdots & \hat{A}_c^{n_1} \hat{B}_c & \cdots & \hat{A}_c^{n-1} \hat{B}_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{C}_c & \hat{A}_c^{n_1} \hat{B}_c & \cdots & \hat{A}_c^{n-1} \hat{B}_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\hat{C}_c = [\hat{B}_c \quad \hat{A}_c \hat{B}_c \quad \cdots \quad \hat{A}_c^{n_1-1} \hat{B}_c]$ es la matriz de controlabilidad de (\hat{A}_c, \hat{B}_c) . Puesto que las columnas de $\hat{A}_c^k \hat{B}_c$ para $k \geq n_1$ son linealmente dependientes de las columnas de \hat{C}_c , la condición $\text{rango } C = n_1$ implica $\text{rango } \hat{C}_c = n_1$. Así, la ecuación (6.29) es controlable.

Finalmente, mostramos que (6.29) tiene la misma matriz transferencia que (6.26), que es la misma que la de (6.28), pues (6.26) y (6.28) son algebraicamente equivalentes. No es difícil verificar que

$$\begin{bmatrix} sI - \hat{A}_c & -\hat{A}_{12} \\ 0 & s(-\hat{A}_{\bar{c}}) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (sI - \hat{A}_c)^{-1} & M \\ 0 & (s(-\hat{A}_{\bar{c}}))^{-1} \end{bmatrix}$$

donde $M = (sI - \hat{A}_c)^{-1} \hat{A}_{12} (sI - \hat{A}_{\bar{c}})^{-1}$. Así, la matriz transferencia de (6.28) es

$$\begin{aligned} [\hat{C}_c \quad \hat{C}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} sI - \hat{A}_c & -\hat{A}_{12} \\ 0 & s(-\hat{A}_{\bar{c}}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} + D \\ = [\hat{C}_c \quad \hat{C}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} (sI - \hat{A}_c)^{-1} & M \\ 0 & (s(-\hat{A}_{\bar{c}}))^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} + D \\ = \hat{C}_c (sI - \hat{A}_c)^{-1} \hat{B}_c + D, \end{aligned}$$

que no es otra que la matriz transferencia de (6.29), completando la demostración. \square

En la transformación de equivalencia $\hat{x} = Px$, el espacio de estados se descompone en dos subespacios fundamentales:

- el *subespacio controlable*, generado por todos los vectores en \hat{x} de la forma $\begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ 0 \end{bmatrix}$, y
- el *subespacio no controlable*, generado por todos los vectores en \hat{x} de la forma $\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$.

Dado que (6.29) es controlable, la entrada u puede transferir el estado \hat{x}_c desde cualquier estado inicial a cualquier otro estado. Sin embargo, la entrada no puede controlar a $\hat{x}_{\bar{c}}$, porque, como se ve de (6.28), u no afecta a $\hat{x}_{\bar{c}}$ nio directamente, ni indeirectamente a través del estado \hat{x}_c . Eliminando los estado no controlables obtenemos una ecuación controlable de dimensión menor (n_1) que es equivalente a estado cero a las ecuaciones de estado originales.

La descomposición del sistema en su partes controlables y no controlables puede hacerse en MATLAB con la función `ctrbf(A, B, C)`.

Ejemplo 6.7 (Descomposición de un sistema no controlable). Consideremos el sistema de tercer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1 \quad 1] x \end{aligned} \quad (6.30)$$

Calculamos el rango de la matriz de controlabilidad del sistema,

$$\text{rango } \mathcal{C} = \text{rango} [B \quad AB \quad A^2B] = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 < 3,$$

por lo que (6.30) no es controlable. Elegimos como matriz de cambio de coordenadas las primeras dos columnas de \mathcal{C} , y la restante la elegimos linealmente independiente a estas dos,

$$P^{-1} = Q \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Haciendo $\hat{x} = Px$ obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 2 \quad \vdots \quad 1] \hat{x} \end{aligned}$$

y el sistema reducido controlable

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 2] \hat{x} \end{aligned} \quad (6.31)$$

El sistema reducido (6.31) tiene la misma matriz transferencia que (6.30),

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2-2s+1} & \frac{2}{s-1} \end{bmatrix}.$$

En forma dual obtenemos la siguiente descomposición del sistema en sus partes observables y no-observables.

Teorema 6.8 (Descomposición observable/no-observable). Sea el sistema (6.26) con matriz de observabilidad \mathcal{O} tal que

$$\text{rango } \mathcal{O} = \text{rango} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n_2 < n.$$

Sea la matriz $n \times n$ de cambio de coordenadas

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n_2} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

donde las primeras n_2 filas son n_2 filas linealmente independientes de la matriz \mathcal{O} , y las restantes filas se eligen arbitrariamente de forma que P sea no singular. Entonces la transformación de equivalencia $\hat{x} = Px$ o $x = P^{-1}\hat{x}$ lleva (6.26) a la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{\mathcal{O}} \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{\mathcal{O}} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathcal{O}} \\ \hat{x}_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{\mathcal{O}} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [\hat{C}_{\mathcal{O}} \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathcal{O}} \\ \hat{x}_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix} + Du, \end{aligned} \quad (6.32)$$

donde $\hat{A}_{\mathcal{O}} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ y $\hat{A}_{\bar{\mathcal{O}}} \in \mathbb{R}^{(n-n_2) \times (n-n_2)}$ y la ecuación de estados de orden n_2

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{\mathcal{O}} &= \hat{A}_{\mathcal{O}}\hat{x}_{\mathcal{O}} + \hat{B}_{\mathcal{O}}u \\ \hat{y} &= \hat{C}_{\mathcal{O}}\hat{x}_{\mathcal{O}} + Du \end{aligned} \quad (6.33)$$

es observable y tiene la misma función transferencia que (6.26). \square

En la transformación $\hat{x} = Px$ el espacio de estados de orden n se divide en dos subespacios. El *subespacio observable*, de orden n_2 , consiste de todos los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathcal{O}} \\ 0 \end{bmatrix};$$

el otro subespacio, de orden $n - n_2$, es el *subespacio inobservable*, que consiste de todos los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{x}_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix}.$$

El estado $\hat{x}_{\mathcal{O}}$ puede detectarse desde la salida, pero no así el $\hat{x}_{\bar{\mathcal{O}}}$, como puede verse en (6.32). Eliminando los estados inobservables obtenemos el sistema (6.33) de orden n_2 , que es equivalente a estado cero al original (tiene la misma función transferencia).

Teorema 6.9 (Descomposición de Kalman). Toda ecuación en variable de estados (6.26) puede llevarse, mediante una transformación de equivalencia, a la forma canónica

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\hat{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{c\bar{o}} & 0 & \hat{A}_{13} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{c\bar{o}} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{c\bar{o}} \\ \hat{x}_{c\bar{o}} \\ \hat{x}_{\bar{c}o} \\ \hat{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{c\bar{o}} \\ \hat{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.34)$$

$$y = [\hat{C}_{c\bar{o}} \ 0 \ \hat{C}_{\bar{c}o} \ 0] \hat{x} + Du,$$

donde

- $\hat{x}_{c\bar{o}}$: estados controlables y observables
- $\hat{x}_{c\bar{o}}$: estados controlables pero no observables
- $\hat{x}_{\bar{c}o}$: estados no controlables pero observables
- $\hat{x}_{\bar{c}\bar{o}}$: estados no controlables ni observables.

Además, la ecuación de estados (6.26) es equivalente a estado cero a la ecuación controlable y observable

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{c\bar{o}} &= \hat{A}_{c\bar{o}} \hat{x}_{c\bar{o}} + \hat{B}_{c\bar{o}} u \\ \hat{y} &= \hat{C}_{c\bar{o}} \hat{x}_{c\bar{o}} + Du \end{aligned} \quad (6.35)$$

y tiene la matriz transferencia

$$\hat{G}(s) = \hat{C}_{c\bar{o}}(sI - \hat{A}_{c\bar{o}})^{-1} \hat{B}_{c\bar{o}} + D.$$

□

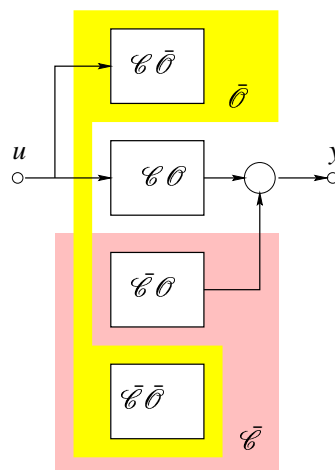


Figura 6.6: Descomposición de Kalman

Este teorema puede ilustrarse gráficamente como se muestra en la Figura 6.6. La ecuación (6.26) se descompone primero usando el Teorema 6.7 en sus partes controlables y no controlables. Luego descomponemos cada subecuación obtenida usando el Teorema 6.8 en sus partes observables y no observables.

Vemos en la Figura 6.6 que sólo la parte controlable y observable del sistema está conectada tanto a las entradas como a las salidas. Ésta es la única parte del sistema que determina la matriz transferencia, lo que muestra la razón de por qué la representación en matriz transferencia (externa) no es necesariamente equivalente a la representación en espacio de estados (interna). Los autovalores de las submatrices $\hat{A}_{\mathcal{CO}}$, $\hat{A}_{\mathcal{CO}}$, $\hat{A}_{\mathcal{CO}}$ no aparecerán como polos de la matriz transferencia.

El sistema (6.35), tomado como realización de la matriz transferencia del sistema, es una *realización mínima*, puesto que no puede obtenerse otra realización de orden menor con la misma matriz transferencia. Toda realización mínima es controlable y observable y del mismo orden. En MATLAB puede calcularse con la función `minreal`.

Ejemplo 6.8. Tomemos el circuito de la Figura 6.7. El circuito tiene cuatro almacenadores de energía, por lo que podemos esperar una realización en ecuaciones de estados de orden 4. Analicemos primero el sistema desde el punto de vista físico. Dado que la entrada es una fuente de corriente, respuestas debidas a condiciones iniciales en L_1 o C_1 no aparecerán a la salida, por lo que las variables de estado asociadas x_1 y x_2 serán no observables (no podemos determinar sus condiciones iniciales a partir de observación de la entrada y la salida). De la forma similar, la variable de estado asociada a L_2 será no controlable. Debido

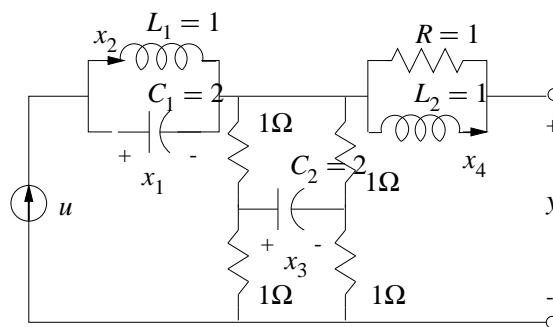


Figura 6.7: Circuito no controlable ni observable

a la simetría de los resistores de 1Ω en el puente, la variable de estado asociada al capacitor C_2 no será ni controlable ni observable. Como vemos, la tensión de salida se reduce a $y = 2(u/2) = u$. La función transferencia del sistema es entonces una ganancia estática $\hat{g}(s) = 1$.

Veamos ahora al circuito analizando sus ecuaciones de estado. Asignando las variables de estado como se indicó, el circuito puede describirse por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 0 \ 1] x + u$$

Puesto que la ecuación ya se encuentra en la forma canónica (6.28), el sistema puede redu-

cirse a la realización controlable

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} x_c + u.\end{aligned}$$

La salida es independiente de x_c ; así la ecuación puede reducirse a

$$y = u,$$

que coincide con lo que ya habíamos visto en el análisis físico del circuito.

6.4. Condiciones en Ecuaciones en Forma Modal

La controlabilidad y la observabilidad son invariantes respecto a transformaciones de equivalencia. En particular, si transformamos el sistema a su *forma canónica modal*, es decir, aquella en la que la matriz \hat{A} está en su forma de Jordan, las condiciones para chequear controlabilidad y observabilidad se vuelven bastante simples. Consideremos las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Jx + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{6.36}$$

donde la matriz J está en forma de Jordan. Para simplificar la formulación del resultado, supongamos que J tiene sólo dos autovalores distintos, λ_1 y λ_2 , y que puede escribirse en la forma

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{12} & 0 \\ 0 & 0 & J_{13} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} J_{21} & 0 \\ 0 & J_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix},\tag{6.37}$$

donde las matrices J_{11} , J_{12} y J_{13} son tres bloques de Jordan asociados al autovalor λ_1 , y las matrices J_{21} y J_{22} son dos bloques de Jordan asociados al autovalor λ_2 .

Notación: Denotamos la fila de B correspondiente a la *última fila* de J_{ij} como b_{uij} , y la columna de C correspondiente a la *primera columna* de J_{ij} como c_{pij} .

Teorema 6.10 (Descomposición en forma modal).

1. La ecuación de estados (6.36) es controlable si y sólo si los tres vectores fila $\{b_{u11}, b_{u12}, b_{u13}\}$ son linealmente independientes y los dos vectores fila $\{b_{u21}, b_{u22}\}$ son linealmente independientes.
2. La ecuación de estados (6.36) es observable si y sólo si los tres vectores columna $\{c_{p11}, c_{p12}, c_{p13}\}$ son linealmente independientes y los dos vectores columna $\{c_{p21}, c_{p22}\}$ son linealmente independientes.

Antes de probar el Teorema 6.10, discutimos sus implicaciones y lo ilustramos con un ejemplo.

Si una ecuación de estados está en forma canónica modal, entonces la controlabilidad de las variables de estado asociadas a un mismo autovalor pueden chequearse por separado de las demás variables de estado, asociadas a otros autovalores. La controlabilidad de variables de estado asociadas a un mismo autovalor dependen *solamente* de las *filas* de la matriz B correspondientes a las *últimas filas* de los bloques de Jordan asociados a ese autovalor. Todas las demás filas de B son irrelevantes a la controlabilidad de esos modos. De forma similar, esta observación se aplica a la observabilidad de los estados asociados a un mismo autovalor, con la salvedad de que son las *columnas* de C correspondientes a las *primeras columnas* de los bloques de Jordan asociados al autovalor. Ilustramos con un ejemplo.

Ejemplo 6.9 (Descomposición en forma modal). Sea el sistema en forma canónica modal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & [\lambda_1] & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (6.38)$$

La matriz J tiene dos autovalores distintos, λ_1 y λ_2 . El autovalor λ_1 tiene tres bloques de Jordan asociados, de órdenes 2, 1, 1. Las filas de B correspondientes a las últimas filas de estos bloques son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las tres filas son linealmente independientes.

Asociado con λ_2 hay sólo un bloque de Jordan, de orden 3. La fila de B correspondiente a la última fila del bloque es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

que es no nulo, y por lo tanto linealmente independiente (la única forma que un conjunto de un solo vector sea linealmente dependiente es que sea nulo). Por el Teorema 6.10 concluimos que el sistema es controlable.

Las condiciones de observabilidad para (6.38) son que las tres columnas

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

sean linealmente independientes, que lo son, y que la columna

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sea linealmente independiente, que no lo es. Concluimos que el sistema (en particular el último modo λ_2) no es observable. \square

Vamos a dar una idea de la demostración del Teorema 6.10 sobre el sistema (6.38) del ejemplo anterior. Antes de ir a la demostración, veamos qué forma tiene el diagrama de bloques del sistema (6.38). Por la simplicidad de los bloques de Jordan, la inversa $(sI - J)$ en (6.38) puede escribirse directamente (la antitransformada Laplace de e^{Jt}) como

$$(sI - J)^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_2} & \frac{1}{(s-\lambda_2)^2} & \frac{1}{(s-\lambda_2)^3} \\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_2} & \frac{1}{(s-\lambda_2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

Usando (6.39) podemos dibujar el diagrama de bloques de la Figura 6.8. Cada cadena de bloques corresponde a un bloque en (6.39); como hay cuatro bloques de Jordan, tenemos cuatro cadenas en el diagrama de bloques de la Figura 6.8.

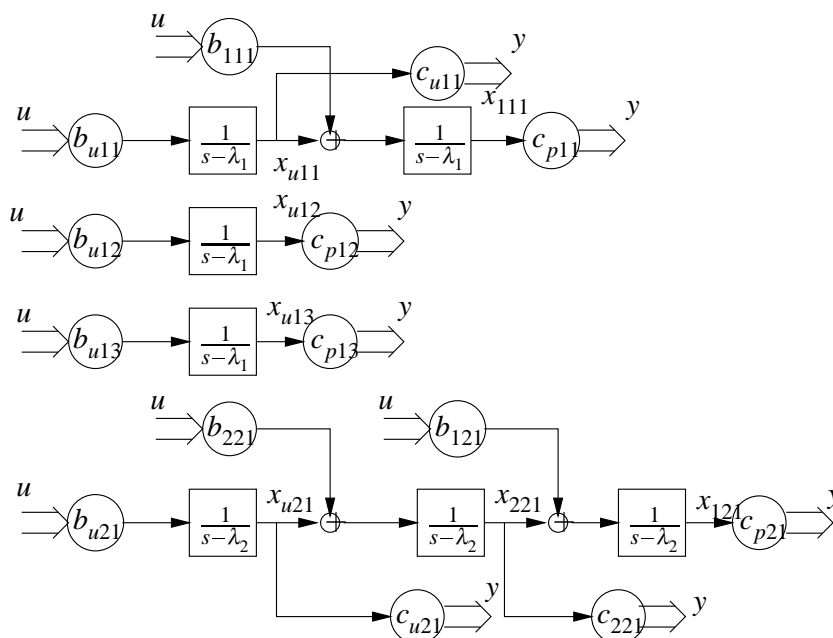


Figura 6.8: Diagrama de Bloques

La salida de cada bloque $\frac{1}{s-\lambda_i}$ puede asignarse como variable de estados, como mostramos en la Figura 6.9.

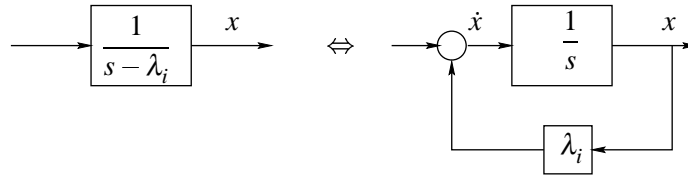


Figura 6.9: Estructura interna de $\frac{1}{s - \lambda_i}$

Consideremos la última cadena de la Figura 6.8. Si $b_{u21} = 0$, la variable de estados x_{u21} no está conectada a la entrada y por lo tanto no es controlable, independientemente de los valores de b_{221} y b_{121} . Por otro lado, si $b_{u21} \neq 0$, entonces todas las variables de estado en la cadena son controlables. Si hay dos o más cadenas asociadas con el mismo autovalor, entonces requerimos la independencia lineal de los primeros vectores ganancia de esas cadenas. Las cadenas asociadas a distintos autovalores se pueden chequear por separado. Las mismas observaciones se aplican a la observabilidad, excepto que son los vectores columna c_{pij} los que juegan el rol de los vectores fila b_{uij} .

Idea de la demostración del Teorema 6.10. Mostramos el resultado sobre el sistema (6.38) usando el Test PBH de rango 6.2, que dice que (A, B) es controlable sii la matriz $[sI - AB]$ tiene rango pleno para cada autovalor de A . O sea que tenemos

$$[sI - J \quad B] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & -1 \\ 0 & s - \lambda_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{111} \\ b_{u11} \\ b_{u12} \\ b_{u13} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s - \lambda_2 & -1 & 0 \\ 0 & s - \lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & s - \lambda_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{121} \\ b_{221} \\ b_{u21} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

La matriz J tiene dos autovalores distintos, λ_1 y λ_2 , con tres y un bloques de Jordan asociados. Evaluando $s = \lambda_1$ obtenemos

$$[\lambda_1 I - J \quad B] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{111} \\ b_{u11} \\ b_{u12} \\ b_{u13} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{121} \\ b_{221} \\ b_{u21} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

El rango de la matriz no cambia por operaciones elementales entre columnas o filas. Sumamos el producto de la segunda columna de (6.41) por b_{111} a la última columna de la matriz,

que da

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 & 0 & b_{121} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 & b_{221} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & b_{u21} \end{bmatrix}.$$

Como λ_1 y λ_2 son distintos, $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Sumamos el producto de la séptima columna por $-b_{u21}/(\lambda_1 - \lambda_2)$ a la última columna. En forma similar, usamos la sexta, y luego la quinta columna para cear los tres últimos elementos de la última columna, obteniendo

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{u13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

Es claro de (6.42) que la matriz tiene rango pleno sii las filas b_{u11} , b_{u12} y b_{u13} son linealmente independientes. Procediendo de igual forma para cada autovalor distinto podemos demostrar el teorema. \square

Ejemplo 6.10. Consideremos las ecuaciones de estado en forma modal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y &= [1 \ 0 \ 0 \ 2] x. \end{aligned}$$

Hay dos bloques de Jordan, uno de orden 3 asociado al autovalor 0, y otro de orden 1 asociado al autovalor -2 . La entrada de B correspondiente a la última fila del primer bloque de Jordan es 0; la ecuación de estado no es controlable. Las dos entradas de C correspondientes a las primeras columnas de los dos bloques de Jordan son no nulas; el sistema es observable.

6.5. Ecuaciones de Estado Discretas

Los conceptos y tests de controlabilidad y observabilidad para sistemas en tiempo discreto son análogos a los de tiempo continuo. Existen sin embargo dos diferencias importantes:

1. Si un sistema en tiempo continuo es controlable, existe una entrada que transfiere el estado del sistema entre dos estados cualesquiera en un intervalo de tiempo finito arbitrario, no importa cuan pequeño este intervalo de tiempo sea. En el caso de tiempo discreto, este intervalo de tiempo *no* es arbitrario; existe un *tiempo mínimo* μ , tal que toda transferencia de estados debe necesariamente hacerse en un tiempo mayor o igual a μ .

2. Para sistemas en tiempo continuo, si se puede llevar el estado al origen desde cualquier otro estado, siempre se puede hacer lo contrario: llevar el estado desde el origen a cualquier otro estado. En sistemas discretos esto no se cumple si la matriz A es singular.

Volveremos estas dos diferencias con un poco más de detalle en un momento. Resumimos primero las definiciones y principales tests de controlabilidad y observabilidad para sistemas en tiempo discreto.

Consideramos el sistema

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k], \end{aligned} \quad (6.43)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$.

Definición 6.3 (Controlabilidad de sistemas en tiempo discreto). La ecuación de estados en tiempo discreto (6.43), o el par (A, B) , se dice *controlable* si para cualquier estado inicial $x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cualquier estado final $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe una secuencia de entrada de longitud finita que transfiere el estado x de x_0 a x_1 . En caso contrario, la ecuación (6.1), o el par (A, B) , se dice *no controlable*.

Teorema 6.11 (Tests de Controlabilidad). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par (A, B) , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, es controlable.
2. La *matriz de controlabilidad*,

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}^{n \times np}, \quad (6.44)$$

es de rango n (rango fila pleno).

3. La matriz $n \times n$

$$W_{dc}[n-1] = \sum_{m=0}^{n-1} (A)^m B B^T (A^T)^m \quad (6.45)$$

es no singular.

4. La matriz $[A - \lambda I \ B] \in \mathbb{R}^{n \times (n+p)}$ tiene rango fila pleno para cada autovalor λ de A .

Definición 6.4 (Observabilidad de sistemas en tiempo discreto). La ecuación de estado (6.43) es observable si para cualquier estado inicial $x[0]$ (desconocido), existe número entero $k_1 > 0$ tal que el conocimiento de la entrada u y la salida y desde $k = 0$ a k_1 es suficiente para determinar en forma única el estado inicial $x[0]$. En caso contrario el sistema no observable.

Teorema 6.12 (Tests de Observabilidad). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par (A, C) , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, es observable.
2. La *matriz de observabilidad*,

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad O \in \mathbb{R}^{nq \times n}, \quad (6.46)$$

es de rango n (rango columna pleno).

3. La matriz $n \times n$

$$W_{do}[n-1] = \sum_{m=0}^{n-1} (A^T)^m C^T C (A)^m \quad (6.47)$$

es no singular.

4. La matriz $\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+q) \times n}$ tiene rango columna pleno para cada autovalor λ de A .

6.5.1. Índices de Controlabilidad y Observabilidad

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tales que el par (A, B) es controlable. En consecuencia, la matriz $\mathcal{C} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ tiene rango n . Claramente, “sobran” columnas en \mathcal{C} , ya que hay np ; esto se debe a que hay más de una entrada y por lo tanto B tiene p columnas. Surge entonces la cuestión de si todas las columnas de B son necesarias, o bien, si todas aportan a la controlabilidad del sistema. Esta cuestión nos lleva al concepto de *índices de controlabilidad*, que en el caso de tiempo discreto tiene una interpretación física importante.

Para introducir los índices de controlabilidad del par (A, B) , veamos una forma eficiente y natural de seleccionar n columnas linealmente independientes de la matriz \mathcal{C} . Si $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]$, escribimos \mathcal{C} en forma explícita como

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_p & : & Ab_1 & \dots & Ab_p & : & \dots & : & A^{n-1}b_1 & \dots & A^{n-1}b_p \end{bmatrix}$$

Busquemos columnas LI en \mathcal{C} de izquierda a derecha. Por construcción, si durante la búsqueda $A^i b_m$ resultara LD de las columnas a su izquierda, todas las columnas asociadas a b_m que siguen en \mathcal{C} (o sea, $A^{i+1}b_m, A^{i+2}b_m$, etc.) serán también LD de las columnas de \mathcal{C} ya seleccionadas. Sea μ_m el número de columnas LI en \mathcal{C} aportadas por la columna b_m de B ; es decir, las columnas

$$b_m, Ab_m, \dots, A^{\mu_m-1}b_m$$

son LI en \mathcal{C} y $A^{\mu_m+i}b_m$ es LD para $i = 0, 1, \dots$. Si \mathcal{C} tiene rango n , necesariamente debe cumplirse que

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p = n.$$

Definición 6.5 (Índices de Controlabilidad). Los números $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ son los *índices de controlabilidad* asociados al par (A, B) . El número

$$\mu = \max(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$$

es el *índice de controlabilidad* asociado al par (A, B) .

No es difícil comprobar que los índices de controlabilidad son invariantes frente a reordenamientos de las columnas de B o frente a cambios de coordenadas.

Para sistemas en tiempo discreto, el índice de controlabilidad μ representa el tiempo mínimo en que se puede realizar cualquier transferencia de estados en un sistema controlable. No es posible transferir cualquier estado a otro con una secuencia de control de longitud menor a μ .

Una definición dual, los *índices de observabilidad*, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$, surge de seleccionar las columnas LI en la matriz de observabilidad \mathcal{O} asociadas a las filas de \mathcal{C} . Sea ν_m el número de filas LI en \mathcal{O} asociadas a la fila c_m de \mathcal{C} . Se cumple que

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_q = n.$$

Definición 6.6 (Índices de Observabilidad). Los números $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q\}$ son los *índices de observabilidad* asociados al par (A, C) . El número

$$\nu = \max(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q)$$

es el *índice de observabilidad* asociado al par (A, C) .

Como puede esperarse, los índices de observabilidad son también invariantes respecto a reordenamientos de las filas de C y respecto a cambio de coordenadas. En sistemas discretos, el índice de observabilidad ν asociado al par (A, C) representa la longitud más corta de secuencias de entradas y salidas necesarias para determinar en forma unívoca el estado inicial del sistema.

Los tests de controlabilidad y observabilidad en formas canónicas y modal de sistemas en tiempo discreto son exactamente iguales a los de sistemas en tiempo continuo.

6.5.2. Controlabilidad al Origen y Alcanzabilidad

Existen en realidad tres definiciones aceptadas para controlabilidad, asociadas con la posibilidad de

1. transferir cualquier estado a cualquier estado (la que hemos presentado)
2. transferir cualquier estado al origen, llamada *controlabilidad al origen*, y
3. transferir el estado desde el origen a cualquier estado, llamada *controlabilidad desde el origen*, o *alcanzabilidad*.

Para sistemas lineales, estacionarios, y en tiempo continuo, las tres definiciones son equivalentes — por eso vimos sólo la primera. Para sistemas lineales, estacionarios, y en tiempo discreto, si la matriz A es no singular, de nuevo, las tres definiciones son equivalentes. Sin embargo, si A es singular, el sistema puede ser no controlable según 1, pero controlable según 2. Por ejemplo, tomemos el sistema

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u[k]. \quad (6.48)$$

La matriz de controlabilidad

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene rango 1, por lo que (6.48) es no controlable. Sin embargo, para cualquier $x[0] = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, la entrada $u[0] = 2\alpha + \beta$ transfiere $x[0]$ a $x[1] = 0$, en un paso. Notar que A en (6.48) es singular.

6.6. Controlabilidad, Observabilidad y Muestreo

La mayoría de los sistemas de control se implementan en forma digital, para lo cual casi siempre se necesita disponer de un modelo en tiempo discreto del sistema. En §4.2.2 vimos una forma de obtener un modelo en EE discreto exacto en los instantes de muestreo.

Cabe entonces preguntarse si las propiedades de controlabilidad y observabilidad se conservarán en el modelo discretizado. En esta sección vemos una condición suficiente para que esto suceda.

Sea el sistema en tiempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{6.49}$$

Si la entrada es seccionalmente constante a intervalos regulares T ,

$$u(t) = u(kT) \triangleq u[k], \quad \text{para } t \in [kT, (k+1)T),$$

entonces, como vimos en §4.2.2, el estado en el instante $(k+1)T$ puede expresarse como

$$\begin{aligned}x[k+1] &\triangleq x((k+1)T) = A_d x[k] + B_d u[k], \\ y[k] &= Cx[k]\end{aligned}\tag{6.50}$$

donde

$$A_d \triangleq e^{AT}, \quad B_d \triangleq \left(\int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B.\tag{6.51}$$

Si el sistema en tiempo continuo (6.49) es controlable (observable), la controlabilidad (observabilidad) del sistema discretizado (6.50), (6.51) depende del período de muestreo T y de los autovalores λ_i de la matriz A .

Teorema 6.13 (Muestreo no patológico). Supongamos que el sistema (6.49) es controlable (observable). El sistema discretizado (6.50), (6.51) con período de muestreo T es controlable (observable) si, dados dos autovalores cualesquiera λ_i, λ_j de A tales que $\text{Re}[\lambda_i - \lambda_j] = 0$, se satisface la condición de muestreo no patológico

$$\text{Im}[\lambda_i - \lambda_j] \neq \frac{2\pi m}{T}, \quad \text{con } m = 1, 2, \dots\tag{6.52}$$

Si el sistema (6.49) es de una entrada, la condición (6.52) es también necesaria para controlabilidad (observabilidad) del sistema (6.50), (6.51).

El teorema da una condición suficiente para garantizar que el sistema discretizado sea controlable (observable) si el continuo lo es. Esta condición sólo afecta a autovalores complejos conjugados de A ; si A sólo tiene autovalores reales, entonces el sistema discretizado es siempre controlable (observable) para todo $T > 0$ si el sistema continuo lo es. Si A tiene autovalores complejos conjugados $\alpha \pm j\beta$, entonces si el período de muestreo T es tal que *no* sea múltiplo de π/β , el sistema discreto es controlable (observable) si el continuo lo es. Si $T = m\pi/\beta$ para algún entero m , entonces el sistema discreto puede no ser controlable (observable).

Ejemplo 6.11. Consideremos el sistema de una entrada

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

y supongamos que la matriz $C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ es invertible (o sea, el sistema es controlable). La condición de controlabilidad para el sistema discretizado es que la matriz

$$C_d = \begin{bmatrix} \underbrace{\int_0^T e^{A\tau} d\tau B}_{B_d} & \underbrace{e^{AT} \int_0^T e^{A\tau} d\tau B}_{A_d B_d} & \dots & \underbrace{e^{(n-1)AT} \int_0^T e^{A\tau} d\tau B}_{A_d^{n-1} B_d} \end{bmatrix}\tag{6.53}$$

sea invertible. Es claro que si existieran dos números enteros q y r tales que $e^{qAT} = e^{rAT}$, entonces (6.53) no podrá ser invertible. Por ejemplo, tomemos

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Obtenemos el sistema discreto

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix} u[k] \quad (6.54)$$

Puede comprobarse fácilmente que si $T = m\pi$, con $m = 1, 2, \dots$, entonces el sistema discreto (6.54) será no controlable. si agregamos la salida

$$y(t) = [1 \ 0] x(t),$$

para los mismos valores de T se pierde observabilidad en el sistema discretizado.

Ejemplo 6.12. Consideremos el sistema hidráulico de la Figura 6.10. Es obvio que $u(t)$ no puede afectar a $x_2(t)$, por lo que es intuitivamente evidente que el sistema es no controlable. Un modelo en EE linealizado de este sistema, con parámetros unitarios [Rugh, 1995,

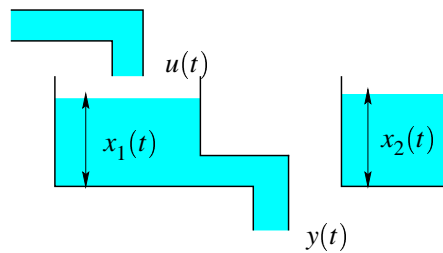


Figura 6.10: Sistema de tanques desconectados

Ejemplo 6.18], es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] x(t) \end{aligned}$$

y muestra que es no controlable (está en forma canónica modal).

Ejemplo 6.13. El sistema hidráulico de la Figura 6.11 no es tan obvio como el de la Figura 6.10, aunque puede verse que $x_1(t)$ y $x_3(t)$ no pueden ser afectadas en forma independiente por $u(t)$. La ecuación de estados linealizada, con parámetros unitarios, es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \ 1 \ 0] x(t) \end{aligned}$$

y da la matriz de controlabilidad

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

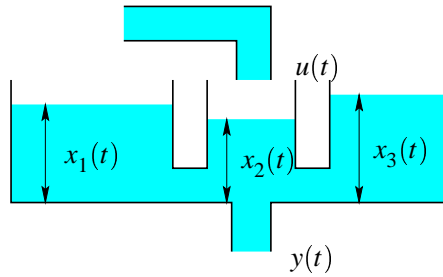


Figura 6.11: Sistema de tanques en paralelo

que tiene rango 2.

Por otro lado, si la entrada se aplicara en el primer tanque, como se muestra en la Figura 6.12, el sistema se vuelve controlable; la matriz de controlabilidad con $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ deviene

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que tiene rango 3.

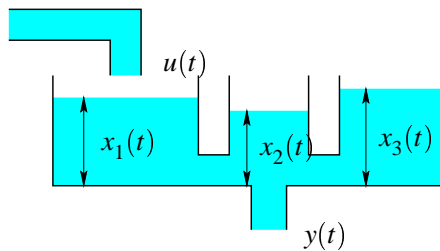


Figura 6.12: Sistema controlable de tanques en paralelo

6.7. Sistemas Inestacionarios

Consideramos el sistema de n estados, p entradas y q salidas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x. \end{aligned} \tag{6.55}$$

La ecuación de estados (6.55) es controlable en t_0 si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que para cualquier $x(t_0) = x_0$ y cualquier x_1 , existe una entrada que transfiere x_0 a x_1 en tiempo t_1 . De lo contrario el sistema es no controlable en t_0 .

Para sistemas estacionarios, si la ecuación de estados es controlable, entonces es controlable en todo t_0 y para cualquier $t_1 > t_0$. En el caso inestacionario la especificación de t_0 y t_1 es crucial.

Teorema 6.14 (Controlabilidad de sistemas inestacionarios). El par $(A(t), B(t))$ es controlable en un tiempo t_0 si y sólo si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que la matriz

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau, \quad W_c(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (6.56)$$

donde $\Phi(t, \tau)$ es la matriz de transición de estados de $\dot{x} = A(t)x$, es no singular.

Para aplicar el Teorema 6.14 necesitamos la matriz de transición de estados $\Phi(t, \tau)$, que podemos no conocer. Es deseable entonces tener algún test de controlabilidad que no dependa del conocimiento de $\Phi(t, \tau)$. Esto es posible si pedimos más condiciones en las matrices $A(t)$ y $B(t)$.

Supongamos que $A(t)$ y $B(t)$ son continuamente diferenciables $(n-1)$ veces. Definimos entonces la siguiente secuencia de matrices

$$\begin{aligned} M_0(t) &= B(t) \\ M_{m+1}(t) &= -A(t)M_m(t) + \frac{d}{dt}M_m(t), \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Teorema 6.15 (Condición suficiente para controlabilidad de sistemas inestacionarios). Sean $A(t)$ y $B(t)$ continuamente diferenciables $(n-1)$ veces. Entonces el par $(A(t), B(t))$ es controlable en un tiempo t_0 si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que

$$\text{rango} [M_0(t_1) \ M_1(t_1) \ \dots \ M_{n-1}(t_1)] = n. \quad (6.58)$$

Demostración. Mostramos que si vale (6.58) entonces la matriz $W_c(t_0, t)$ es no singular para todo $t \geq t_1$, con lo cual se cumple la condición del Teorema 6.14. Supongamos que $W_c(t_0, t)$ es singular, es decir que es semidefinida positiva para algún $t_2 \geq t_1$. Entonces existe un vector constante $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} v^T W_c(t_0, t_2) v &= \int_{t_0}^{t_2} v^T \Phi(t_2, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_2, \tau) v d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_2} \|B^T(\tau) \Phi^T(t_2, \tau) v\|^2 d\tau = 0, \end{aligned} \quad (6.59)$$

lo cual implica que

$$B^T(\tau) \Phi^T(t_2, \tau) v \equiv 0, \quad \text{o bien, } v^T \Phi(t_2, \tau) B(\tau) \equiv 0 \text{ para todo } \tau \in [t_0, t_2]. \quad (6.60)$$

Notemos que, por su definición en (6.57), $M_0(t)$ verifica

$$\Phi(t_2, t) B(t) = \Phi(t_2, t) M_0(t).$$

Usando la propiedad

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t_2, t) = -\Phi(t_2, t) A(t)$$

vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(t_2, t) B(t)) &= \Phi(t_2, t) \left(-A(t) M_0(t) + \frac{d}{dt} M_0(t) \right) \\ &= \Phi(t_2, t) M_1(t). \end{aligned}$$

Siguiendo con la diferenciación, podemos mostrar que

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} \Phi(t_2, t) B(t) = \Phi(t_2, t) M_m(t). \quad (6.61)$$

Volviendo a (6.59), diferenciamos $v^T \Phi(t_2, \tau) B(\tau) \equiv 0$ con respecto a τ , y usando (6.61), obtenemos

$$v^T \Phi(t_2, \tau) M_m(\tau) \equiv 0, \quad \text{para } m = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6.62)$$

y para todo $\tau \in [t_0, t_2]$, en particular en $\tau = t_1$. Podemos reescribir (6.62) evaluada en $\tau = t_1$ como

$$v^T \Phi(t_2, t_1) [M_0(t_1) \ M_1(t_1) \ \dots \ M_{n-1}(t_1)] = 0. \quad (6.63)$$

Como $\Phi(t_2, t_1)$ es no singular, $v^T \Phi(t_2, t_1) \neq 0$. Así (6.63) contradice (6.58), lo cual demuestra el teorema. \square

Ejemplo 6.14. Consideremos el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & -t & t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Como $A(t)$ y $B(t)$ son continuamente diferenciables todas las veces que se quiera, calculamos

$$\begin{aligned} M_0(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ M_1(t) &= -A(t)M_0(t) + \frac{d}{dt}M_0(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} \\ M_2(t) &= -A(t)M_1(t) + \frac{d}{dt}M_1(t) = \begin{bmatrix} -t \\ t^2 \\ t^2 - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

El determinante de la matriz

$$[M_0 \ M_1 \ M_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -t \\ 1 & 0 & t^2 \\ 1 & -t & t^2 - 1 \end{bmatrix}$$

es $t^2 + 1$, que es distinto de cero para todo t . Así el sistema es controlable en todo t . \square

Vayamos ahora a la observabilidad de sistemas inestacionarios. La ecuación de estados (6.55) es observable en t_0 si existe un tiempo finito t_1 tal que para cualquier estado $x(t_0) = x_0$ el conocimiento de la entrada y la salida sobre el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es suficiente para determinar unicamente el estado inicial x_0 . De lo contrario el sistema es no observable en t_0 .

Teorema 6.16 (Observabilidad de sistemas inestacionarios). El par $(A(t), C(t))$ es observable en un tiempo t_0 si y sólo si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que la matriz

$$W_o(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau, \quad W_o(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (6.64)$$

donde $\Phi(t, \tau)$ es la matriz de transición de estados de $\dot{x} = A(t)x$, es no singular.

La siguiente es una condición suficiente para observabilidad que prescinde del conocimiento de la matriz de transición de estados $\Phi(t, \tau)$.

Teorema 6.17 (Condición suficiente para observabilidad de sistemas inestacionarios). Sean $A(t)$ y $C(t)$ continuamente diferenciables $(n - 1)$ veces. Entonces el par $(A(t), C(t))$ es observable en un tiempo t_0 si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n, \quad (6.65)$$

donde

$$N_0 = C(t) \\ N_{m+1} = N_m(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_m(t), \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Nota: La dualidad entre controlabilidad y observabilidad que tenemos en sistemas lineales estacionarios (Teorema 6.4) *no* se aplica a sistemas inestacionarios. Debe usarse la siguiente forma alterada.

Teorema 6.18 (Dualidad controlabilidad-observabilidad en sistemas inestacionarios). El par $(A(t), B(t))$ es controlable en t_0 si y sólo si el par $(-A^T(t), B^T(t))$ es observable en t_0 .

Demostración. Ejercicio. □

6.8. Ejercicios

Ejercicio 6.1. Terminar la prueba del Lema 6.1.

Ejercicio 6.2. Terminar la prueba del Lema 6.2.

Ejercicio 6.3. Determinar si cada uno de los siguientes sistemas es controlable y/o observable

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u[k] \\ y[k] &= [5 \quad 1] x[k] \end{aligned} \quad (a)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u \quad (b)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1] \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1] x \end{aligned} \quad (d)$$

Ejercicio 6.4. ¿Para qué valores de α la EE

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

es controlable? ¿Y observable?

Ejercicio 6.5. Es cierto que el rango de $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ es igual al rango de $[AB \ A^2B \ \dots \ A^nB]$? Sino, ¿bajo qué condiciones es verdad?

Ejercicio 6.6. Reducir la ecuación de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 1] x(t)\end{aligned}$$

a una EE controlable. ¿Es la ecuación reducida observable?

Ejercicio 6.7. Reducir la EE

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] x(t)\end{aligned}$$

a una EE controlable y observable.

Ejercicio 6.8. ¿Es la ecuación siguiente en forma de Jordan controlable y observable?

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).\end{aligned}$$

Ejercicio 6.9. Chequear controlabilidad y observabilidad de los siguientes sistemas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \ 1] x\end{aligned}\tag{a}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \ e^{-t}] x\end{aligned}\tag{b}$$

Ejercicio 6.10. Probar el Teorema 6.18.

Capítulo 7

Especificaciones y Limitaciones de Diseño

El objetivo de este capítulo es presentar conceptos generales (no solamente conectados con el enfoque en variable de estados) relativos al desempeño del sistema de control, es decir, al comportamiento deseado del sistema más allá de los requerimientos básicos de estabilidad. Este desempeño generalmente se refiere a la forma en que el sistema responde a ciertas señales en el lazo de control, por ejemplo:

- respuesta rápida y con una ganancia determinada a las señales de referencia (escalones, rampas, sinusoides de baja frecuencia),
- rechazo, o respuesta despreciable, a señales espúreas (perturbaciones de entrada, ruido de medición).

El desempeño especificado para un sistema, cuando el sistema se representa mediante un modelo matemático, se llama *nominal*. En la realidad, en general, el desempeño del sistema real diferirá del nominal, ya que es imposible obtener un modelo matemático que describa con absoluta precisión al sistema físico real. Cuando el controlador diseñado para el sistema nominal conserva su desempeño sobre el sistema real, se dice que es *robusto*. Desempeño y robustez son las características principales en un sistema de control.

En este capítulo introducimos las *funciones de sensibilidad*, que permiten cuantificar en forma precisa el desempeño y la robustez de sistemas de control. Como aplicación, veremos cómo cuantificar limitaciones fundamentales en la respuesta temporal al escalón de un sistema de control simple.

Como referencias generales a los temas de este capítulo pueden consultarse Goodwin et al. [2000, §5] para las definiciones de funciones de sensibilidad y arquitecturas de realimentación, Doyle et al. [1992] y Sánchez Peña [1992] para los resultados relativos a robustez, y Seron et al. [1997, §1] para los resultados relativos a limitaciones en la respuesta al escalón.

7.1. Sensibilidad y Robustez

Uno de los esquemas de control más simples es el lazo en realimentación de la Figura 7.1.

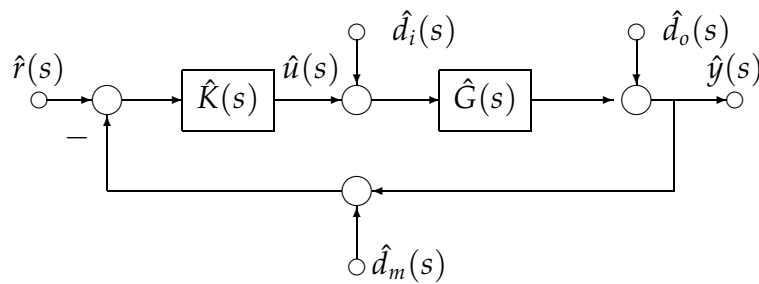


Figura 7.1: Lazo de control de un grado de libertad.

En el lazo de la Figura 7.1 las señales representan

$\hat{y}(s)$: salida	$\hat{r}(s)$: referencia
$\hat{u}(s)$: control	$\hat{d}_i(s)$: perturbación de entrada
$\hat{d}_o(s)$: perturbación de salida	$\hat{d}_m(s)$: perturbación de medición

La implementación práctica de un sistema de control se ve afectada en su desempeño de dos principales fuentes de error:

1. señales espúreas (perturbaciones) en el lazo de control,
2. incertidumbre en el modelo de la planta $\hat{G}(s)$.

Un buen diseño de control debe tolerar satisfactoriamente tanto perturbaciones como incertidumbres en el modelado. La especificación de las propiedades del sistema de control con respecto a rechazo de perturbaciones e incertidumbre definen los objetivos de *desempeño* (en inglés: performance) del diseño.

7.1.1. Perturbaciones

Las señales espúreas representan perturbaciones que bajo condiciones ideales deberían ser nulas, pero que están presentes, en mayor o menor medida en todo sistema real.

Ejemplo 7.1. El control de corriente de armadura de un motor de corriente continua se suele implementar mediante inversores que trabajan por modulación de ancho de pulso (PWM: pulse width modulation), $i(t)$. La componente continua de la señal, $i_0(t)$, es el control efectivo; las armónicas representan una perturbación de entrada $d_i(t)$, $i(t) = i_0(t) + d_i(t)$ (Figura 7.2).

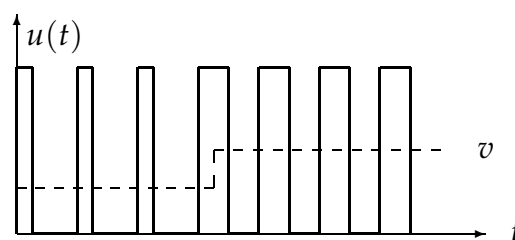


Figura 7.2: Actuador PWM

Definición 7.1 (Sensibilidad). Cuando un sistema de control retiene su desempeño nominal frente a perturbaciones se dice que tiene *buenas propiedades de rechazo*, o *baja sensibilidad*, a perturbaciones.

7.1.2. Incertidumbre

La incertidumbre en el modelado surge de que es imposible conocer con exactitud el modelo de un sistema. Así, el modelo con el que se diseña el controlador (nominal) es una aproximación al verdadero sistema sobre el cual este actuará. Por ejemplo, si diseñamos un controlador basados en el modelo linealizado alrededor de un punto de operación nominal de un sistema no lineal, las alinealidades se presentarán como incertidumbres de modelado.

Ejemplo 7.2. Sea el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + x^3(t) + u(t) \\ &= (1 + x^2(t))x(t) + u(t).\end{aligned}$$

El modelo linealizado alrededor del origen es $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$, y así el control $u(t) = -2x(t)$ estabiliza asintóticamente el sistema linealizado. Sin embargo, este control aplicado al sistema real da el lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + x^3(t) \\ &= -(1 - x^2(t))x(t).\end{aligned}$$

que sólo alcanza estabilidad asintótica para un conjunto acotado de condiciones iniciales: $\{x : |x| < 1\}$.

Para tener en cuenta la incertidumbre del modelo en el diseño del controlador es necesario contar con una representación de la incertidumbre con alguna cota conocida. Por ejemplo, es habitual representar la incertidumbre con un modelo lineal *multiplicativo* (Figura)

$$\hat{G}(s) = \hat{G}_0(s) (I + \Delta(s)), \quad (7.1)$$

donde $\hat{G}(s)$ representa la función transferencia real, $\hat{G}_0(s)$ la función transferencia nominal (el modelo utilizado para diseño), y $\Delta(s)$ una función transferencia desconocida salvo por alguna cota del tipo $\|\Delta(j\omega)\| \leq \alpha(\omega)$, con $\alpha(\omega)$ conocida.

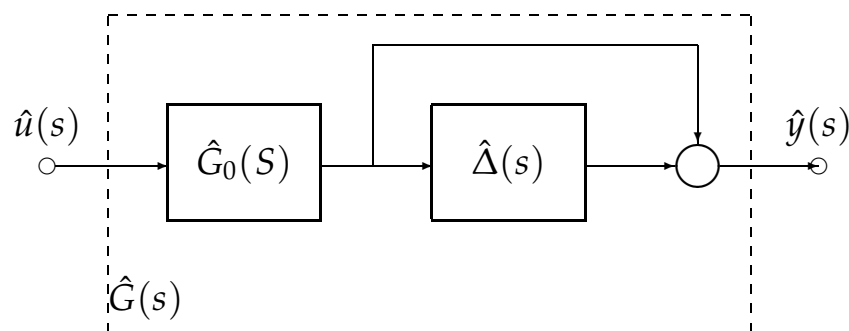


Figura 7.3: Incertidumbre multiplicativa

Ejemplo 7.3. Supongamos que tenemos el sistema

$$\hat{G}(s) = \frac{K}{\tau s + 1},$$

donde existe incertidumbre en la posición del polo, $\tau = \tau_0 + \delta\tau$, donde τ_0 es el valor nominal. La representación de esta incertidumbre en el modelo multiplicativo (7.1) es

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= \frac{K}{(\tau_0 + \delta\tau)s + 1} \\ &= \frac{K}{\tau_0 s + 1} \left(\frac{\tau_0 s + 1}{\tau_0 s + \delta\tau s + 1} \right) \\ &= \frac{K}{\tau_0 s + 1} \left(1 - \frac{\delta\tau s}{\tau_0 s + \delta\tau s + 1} \right) \\ &= \hat{G}_0(s)(1 + \Delta(s)).\end{aligned}$$

Definición 7.2 (Robustez). Un sistema de control que retiene sus propiedades de estabilidad y desempeño frente a incertidumbres de modelo en la planta se dice *robusto*.

No siempre es posible alcanzar buen rechazo de perturbaciones conjuntamente con robustez, y así deben adoptarse *soluciones de compromiso* en el diseño. Para alcanzar soluciones de compromiso adecuadas a las condiciones de perturbaciones e incertidumbre existentes en el sistema considerado, es útil disponer de indicadores que de alguna forma “midan” las propiedades de sensibilidad y robustez de un controlador dado. Dos indicadores tradicionalmente utilizados son las *funciones de sensibilidad del lazo*.

7.2. Funciones de Sensibilidad

7.2.1. Funciones de transferencia en lazo cerrado

Volvamos al sistema de control de la Figura 7.1, que supondremos SISO por simplicidad. La respuesta del sistema a condiciones iniciales nulas está dada por

$$\begin{aligned}\hat{y}(s) &= \hat{G}(s)\hat{u}(s) + \hat{d}_o(s) + \hat{G}(s)\hat{d}_i(s) \\ \hat{u}(s) &= \hat{K}(s)\hat{r}(s) - \hat{K}(s)\hat{y}(s) - \hat{K}(s)\hat{d}_m(s), \\ &= \hat{K}(s) \left[\hat{r}(s) - \hat{d}_m(s) - \hat{G}(s)\hat{u}(s) - \hat{d}_o(s) - \hat{G}(s)\hat{d}_i(s) \right],\end{aligned}$$

de donde resolvemos

$$\begin{aligned}\hat{u}(s) &= \frac{\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \left[\hat{r}(s) - \hat{d}_m(s) - \hat{d}_o(s) - \hat{G}(s)\hat{d}_i(s) \right] \\ \hat{y}(s) &= \frac{1}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \left[\hat{G}(s)\hat{K}(s) \left(\hat{r}(s) - \hat{d}_m(s) \right) + \hat{d}_o(s) + \hat{G}(s)\hat{d}_i(s) \right].\end{aligned}$$

La arquitectura del esquema de la Figura 7.1 se llama “de un grado de libertad”. Este nombre refleja el hecho de que sólo existe un grado de libertad para definir las funciones transferencias de lazo cerrado que mapean $\hat{r}(s)$ y $\hat{d}_m(s)$ a $\hat{y}(s)$, y $\hat{d}_i(s)$ y $\hat{d}_o(s)$ a $\hat{y}(s)$.

Así, si $\hat{K}(s)$ se diseña para obtener una particular respuesta a la señal de referencia,

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)},$$

se induce al mismo tiempo una única respuesta a la perturbación de salida,

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{d}_o(s)} = \frac{1}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}.$$

A menudo, es deseable ajustar las respuestas a referencia y perturbaciones en forma independiente. Esto puede lograrse con una arquitectura de *dos grados de libertad*, como la de la Figura 7.4. La salida en este caso esta dada por

$$\hat{y}(s) = \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)\hat{H}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{r}(s) + \frac{1}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_o(s) + \frac{\hat{G}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_i(s) - \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_m(s).$$

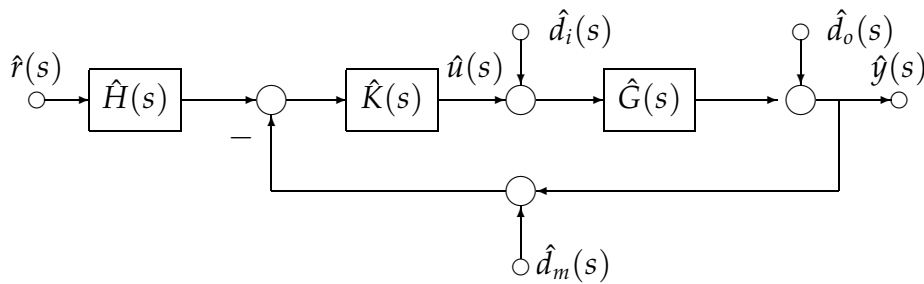


Figura 7.4: Lazo de control de dos grados de libertad.

Ahora $\hat{K}(s)$ puede usarse para ajustar la respuesta a la perturbación (que tiene la misma transferencia que en la arquitectura de un grado de libertad), y $\hat{H}(s)$ puede usarse para ajustar la respuesta a la referencia independientemente, dada por

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)\hat{H}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}.$$

No obstante, notar que aún en la arquitectura de dos grados de libertad quedan funciones transferencias cuya dinámica no puede ajustarse independientemente; el controlador $\hat{K}(s)$ puede usarse para ajustar la respuesta a *una* perturbación $\hat{d}_i(s)$, $\hat{d}_o(s)$ o $\hat{d}_m(s)$, pero una vez elegido, las restantes respuestas quedan determinadas.

La salida del controlador en el esquema de la Figura 7.4 está dada por

$$\hat{u}(s) = \frac{\hat{K}(s)\hat{H}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{r}(s) - \frac{\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_o(s) - \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_i(s) - \frac{\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)}\hat{d}_m(s).$$

La respuesta a lazo cerrado del sistema de la Figura 7.4 está entonces gobernada por cuatro funciones transferencia, colectivamente llamadas *funciones de sensibilidad*,

$$\hat{T}(s) \triangleq \frac{\hat{G}(s)\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \quad \hat{S}(s) \triangleq \frac{1}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \quad (7.2)$$

$$\hat{S}_i(s) \triangleq \frac{\hat{G}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \quad \hat{S}_u(s) \triangleq \frac{\hat{K}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{K}(s)} \quad (7.3)$$

e individualmente

$\hat{T}(s)$: Sensibilidad complementaria

$\hat{S}(s)$: Sensibilidad

$\hat{S}_i(s)$: Sensibilidad de entrada

$\hat{S}_u(s)$: Sensibilidad de control

Las funciones de sensibilidad están algebraicamente relacionadas, y estas relaciones son unas de las manifestaciones de las restricciones inherentes al lazo de control en realimentación. No es difícil ver que

$$\begin{aligned}\hat{S}(s) + \hat{T}(s) &= 1 \\ \hat{S}_i(s) &= \hat{S}(s)\hat{G}(s) = \frac{\hat{T}(s)}{\hat{K}(s)} \\ \hat{S}_u(s) &= \hat{S}(s)\hat{K}(s) = \frac{\hat{T}(s)}{\hat{G}(s)}.\end{aligned}$$

7.2.2. Especificaciones de la Respuesta en Frecuencia

En resumen, las funciones de sensibilidad permiten definir la respuesta *en régimen permanente* del sistema a las señales más típicas en el lazo de control. Así, podemos especificar la respuesta del sistema especificando ganancia, ceros y polos de $\hat{S}(s)$ y $\hat{T}(s)$.

Claramente, como el requerimiento básico para la existencia de respuesta en régimen permanente es la estabilidad BIBO, tenemos que la primera especificación para $\hat{S}(s)$ y $\hat{T}(s)$ es que deben tener todos sus polos con parte real negativa.

La distribución de ceros y polos de $\hat{S}(s)$ y $\hat{T}(s)$ puede asignarse de forma de satisfacer otros requerimientos de desempeño. Por ejemplo, como normalmente la señal de referencia $\hat{r}(j\omega)$ posee un espectro de bajas frecuencias, $\hat{T}(j\omega)$ se especifica como filtro pasa-bajos, y así rechazar al mismo tiempo el ruido de medición, normalmente de alta frecuencia.

La Figura 7.5 muestra especificaciones típicas de la respuesta en frecuencia para $\hat{T}(j\omega)$ y $\hat{S}(j\omega)$ (recordemos que $\hat{T}(s)$ y $\hat{S}(s)$ no pueden elegirse en forma independiente ya que $\hat{T}(s) + \hat{S}(s) = 1 \forall s \in \mathbb{C}$). Es decir,

$$\begin{aligned}|\hat{S}(j\omega)| &\ll 1, & \forall \omega \in [0, \omega_1], \\ |\hat{T}(j\omega)| &\ll 1, & \forall \omega \in [\omega_2, \infty),\end{aligned}$$

para un ciertos ω_1, ω_2 tales que $\omega_2 > \omega_1$.

7.3. Robustez

7.3.1. Estabilidad Robusta

Además de especificar la respuesta del sistema a señales, las funciones $\hat{T}(j\omega)$ y $\hat{S}(j\omega)$ sirven para especificar las propiedades de robustez del sistema.

Supongamos que representamos la incertidumbre en el modelo $\Delta(s)$ con estructura multiplicativa

$$\hat{G}(s) = \hat{G}_0(s)(1 + \hat{\Delta}(s)), \quad (7.4)$$

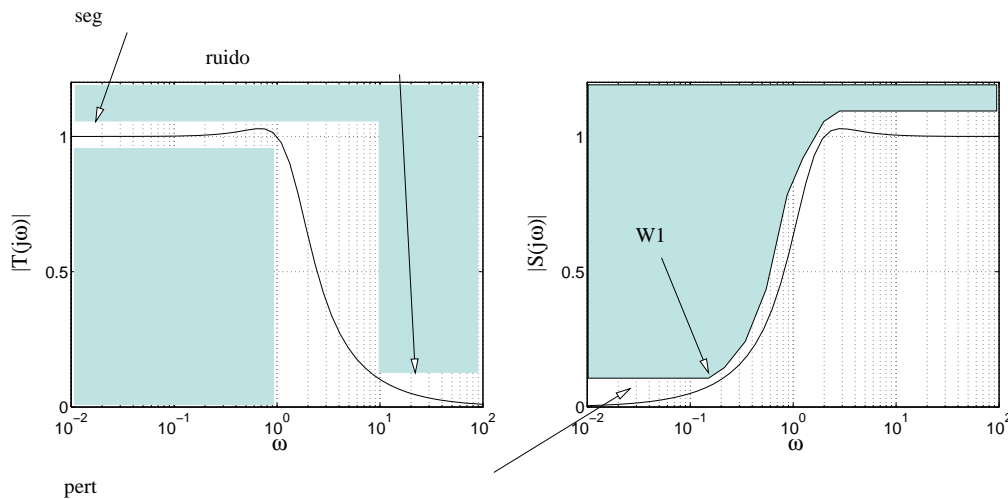


Figura 7.5: Formas típicas para $|\hat{T}(j\omega)|$ and $|\hat{S}(j\omega)|$.

y que se conoce la cota de incertidumbre

$$|\hat{\Delta}(j\omega)| \leq W_2(\omega). \quad (7.5)$$

Típicamente, $W_2(\omega)$ es una función creciente de la frecuencia ω (el modelo es más incierto a frecuencias mayores). ¿Cómo se obtiene la cota $W_2(\omega)$ en la práctica? El siguiente ejemplo ilustra una forma.

Ejemplo 7.4 (Incertidumbre de modelado). Supongamos que la planta es estable y se obtuvo su función transferencia nominal $\hat{G}_0(s)$ mediante experimentos de respuesta en frecuencia: La magnitud y fase de la salida se miden para m sinusoides de referencia de distintas frecuencias $\omega_i, i = 1, \dots, m$. El experimento se repitió n veces.

Denotamos el par (magnitud, fase) para la frecuencia ω_i y el experimento k como (M_{ik}, ϕ_{ik}) . El modelo nominal se puede obtener ajustando $\hat{G}_0(j\omega)$ a estas mediciones, por ejemplo, minimizando el error cuadrático medio total (típico en *Identificación de Sistemas*).

Una vez obtenida la función transferencia nominal $\hat{G}_0(s)$, se puede obtener $W_2(\omega)$ eligiéndola de forma tal que

$$\left| \frac{M_{ik}e^{j\phi_{ik}}}{\hat{G}_0(j\omega_i)} - 1 \right| \leq W_2(\omega), \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n.$$

Existen distintos criterios para ajustar $W_2(\omega)$. La Figura 7.6 muestra los resultados de un experimento real en un sistema intercambiador de calor experimental ($n = 3$).

El siguiente es un importante resultado que da condiciones necesarias y suficientes para estabilidad robusta con incertidumbre multiplicativa en los lazos de control de la Figura 7.1, 7.4.

Teorema 7.1 (Estabilidad robusta con incertidumbre multiplicativa). Sea la planta nominal $\hat{G}_0(s)$ con incertidumbre de modelo $\hat{\Delta}(s)$ estable y dada por (7.4) y (7.5). Entonces, si los lazos de control de la Figura 7.1, 7.4 son estables con la planta nominal $\hat{G}_0(s)$, serán estables con la planta real $\hat{G}(s)$ si y sólo si

$$|\hat{T}_0(j\omega)| < \frac{1}{W_2(\omega)} \Leftrightarrow |W_2(\omega)\hat{T}(j\omega)| < 1, \quad \text{para todo } \omega, \quad (7.6)$$

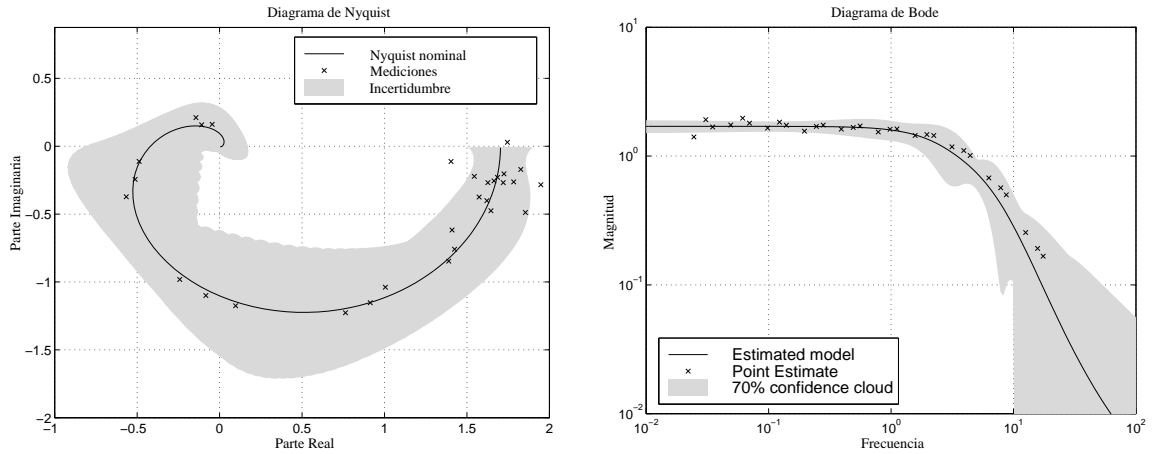


Figura 7.6: Mediciones, modelo nominal e incertidumbre

donde $\hat{T}_0(j\omega)$ es la sensibilidad complementaria nominal (de (7.2) con $\hat{G}(s) = \hat{G}_0(s)$).

Demostración. Ver por ejemplo Sánchez Peña [1992, §2] o Doyle et al. [1992, §4]. \square

Este resultado nos dice que si existe mucha incertidumbre de modelo a una determinada frecuencia, $\hat{T}_0(s)$ debe diseñarse (a través de $\hat{K}(s)$) para tener valores bajos a esa frecuencia, o la estabilidad nominal del sistema puede llegar a perderse en la planta real. La condición de estabilidad robusta (7.6) tiene la siguiente interpretación gráfica: Puesto que

$$\begin{aligned} |\hat{T}(j\omega)| < \frac{1}{W_2(\omega)} &\Leftrightarrow \left| \frac{W_2(\omega)\hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)}{1 + \hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)} \right| < 1, \quad \forall \omega \\ &\Leftrightarrow |W_2(\omega)\hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)| < |1 + \hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)|, \quad \forall \omega, \end{aligned}$$

entonces, para cada frecuencia ω el punto crítico -1 se encuentra fuera del disco de centro $\hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)$ y radio $|W_2(\omega)\hat{K}(j\omega)\hat{G}_0(j\omega)|$.

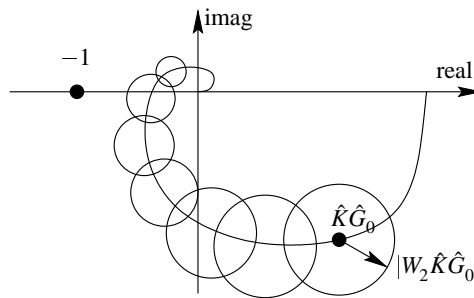


Figura 7.7: Estabilidad robusta gráficamente

7.3.2. Desempeño robusto

El desempeño *nominal* del sistema puede especificarse definiendo la forma de $|\hat{S}(j\omega)|$ con una función de peso dada $W_1(\omega)$ requiriendo que

$$|\hat{S}(j\omega)| < \frac{1}{W_1(\omega)} \Leftrightarrow |W_1(\omega)\hat{S}(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega. \quad (7.7)$$

Si (7.7) se preserva de la planta nominal a la planta real, y además se preserva la estabilidad, decimos que el sistema tiene desempeño robusto.

El desempeño robusto, como intuitivamente puede esperarse, requiere la estabilidad robusta (7.6) como condición necesaria. El siguiente resultado establece una condición necesaria y suficiente para el desempeño robusto de los sistemas de la Figura 7.1, 7.4.

Teorema 7.2 (Desempeño robusto con incertidumbre multiplicativa). Sea la planta nominal $\hat{G}_0(s)$ con incertidumbre de modelo $\hat{\Delta}(s)$ estable y dada por (7.4) y (7.5). Entonces, si los lazos de control de la Figura 7.1, 7.4 son estables, y se cumple (7.7) con la planta nominal $\hat{G}_0(s)$, el sistema tiene desempeño robusto si y sólo si

$$|W_1(\omega)\hat{S}_0(j\omega)| + |W_2(\omega)\hat{T}_0(j\omega)| < 1, \quad \text{para todo } \omega, \quad (7.8)$$

donde $\hat{S}_0(j\omega)$ y $\hat{T}_0(j\omega)$ son la sensibilidad y sensibilidad complementaria nominales (de (7.2) con $\hat{G}(s) = \hat{G}_0(s)$).

Demostración. Ver Sánchez Peña [1992, §2] o Doyle et al. [1992, §4]. \square

La condición de desempeño robusto también admite una buena interpretación gráfica:

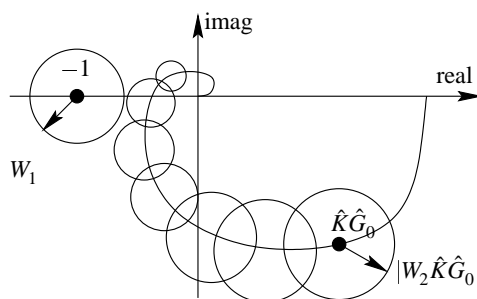


Figura 7.8: Desempeño robusto gráficamente

7.4. Limitaciones de Diseño

Como conclusión de las secciones anteriores, se pueden especificar las propiedades del sistema de control a lazo cerrado, desempeño y robustez, especificando la forma de las respuestas en frecuencia $\hat{S}(j\omega)$ y $\hat{T}(j\omega)$. Estas especificaciones se hacen en función de lo que se pretende del sistema dentro del particular problema de control considerado.

Sin embargo, no hay libertad absoluta para elegir $\hat{S}(s)$ y $\hat{T}(s)$. Como veremos en esta sección, hay factores inherentes al problema de control que limitan el desempeño y/o la robustez alcanzables por el sistema.

7.4.1. Restricciones algebraicas en $\hat{S}(s)$ y $\hat{T}(s)$

Existen restricciones en los valores que pueden tomar $\hat{S}(s)$ y $\hat{T}(s)$ para ciertos valores de $s \in \mathbb{C}$. Estas restricciones se trasladan a su vez como restricciones sobre los valores en el eje $j\omega$, $\hat{S}(j\omega)$ y $\hat{T}(j\omega)$.

La restricción más obvia es la relación de complementariedad

$$\hat{S}(s) + \hat{T}(s) = 1 \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Otras restricciones surgen en los polos y polos a lazo abierto debido al requerimiento de estabilidad del lazo cerrado.

Lema 7.1 (Restricciones de Interpolación). Si el sistema a lazo abierto $\hat{L}(s)$ no tiene cancelaciones polo-cero inestables, entonces, para cualquier control que estabilice al sistema a lazo cerrado, $\hat{S}(s)$ y $\hat{T}(s)$ deben satisfacer las siguientes condiciones

1. si p es un polo inestable de $\hat{L}(s)$ ($\text{Re } p \geq 0$)

$$\hat{S}(p) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{T}(p) = 1.$$

2. si q es un cero de fase no mínima de $\hat{L}(s)$ ($\text{Re } q \geq 0$)

$$\hat{S}(q) = 1 \quad \text{y} \quad \hat{T}(q) = 0.$$

Demostración. Por el requerimiento de estabilidad del lazo cerrado, polos y polos con parte real positiva de la planta o el controlador no pueden cancelarse, por lo que permanecerán en $\hat{L}(s)$. Las condiciones de interpolación siguen directamente de las definiciones de $\hat{S}(s)$ y $\hat{T}(s)$. \square

Sea cual fuera el controlador elegido, las funciones de sensibilidad deberán satisfacer estas restricciones en los polos y polos de parte real no negativa del lazo abierto.

7.4.2. Especificaciones de diseño en la respuesta temporal

Alternativamente a la especificación de la respuesta en frecuencia, la especificación del desempeño del sistema a lazo cerrado suele hacerse sobre la respuesta temporal del sistema. La especificación de la respuesta temporal es más directa respecto de lo que se pretende del sistema, pero entonces es más difícil traducir estas especificaciones a condiciones para las funciones transferencia del lazo cerrado.

Los parámetros típicos para la respuesta al escalón son

- sobrevalor y_{sob}
- subvalor y_{sub}
- tiempo de crecimiento t_c
- tiempo de establecimiento t_e

Definimos los parámetros de la respuesta al escalón sobre el sistema de la Figura 7.1, y definimos el *error de seguimiento* $e(t) = r(t) - y(t)$.

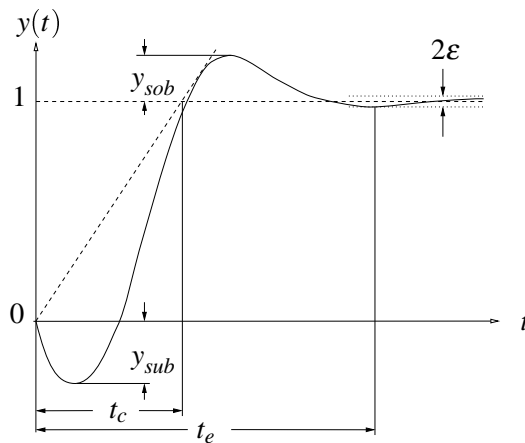


Figura 7.9: Especificaciones en la respuesta temporal

sobrealor: es el máximo valor en que la respuesta del sistema excede su valor de régimen permanente,

$$y_{sob} \triangleq \max_t \{-e(t)\}.$$

subvalor: es máximo pico negativo de la salida del sistema,

$$y_{sub} \triangleq \max_t \{-y(t)\}.$$

tiempo de crecimiento: cuantifica aproximadamente el tiempo mínimo que toma la salida en alcanzar el nuevo punto de operación,

$$t_c \triangleq \max_{\delta} \{\delta : y(t) \leq t/\delta \text{ para todo } t \text{ en el intervalo } [0, \delta]\}$$

tiempo de establecimiento: cuantifica el tiempo que tardan los transitorios en decaer permanentemente por debajo de un determinado nivel ε , usualmente entre el 1 y 10 % del valor de régimen permanente,

$$t_e \triangleq \min_{\delta} \{\delta : |e(t)| \leq \varepsilon \text{ para todo } t \text{ en el intervalo } [\delta, \infty)\}$$

7.4.3. Restricciones en la respuesta al escalón

Como vimos, los polos y ceros en el semiplano derecho del plano complejo imponen restricciones algebraicas en las funciones de sensibilidad del sistema, no importa cual sea el controlador usado. Veremos ahora cómo estas restricciones algebraicas se traducen en restricciones en el desempeño alcanzable en la respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado.

Usaremos el siguiente resultado preliminar, que surge de la definición de transformada Laplace.

Lema 7.2. Sea $\hat{h}(s)$ una función transferencia estrictamente propia cuyos polos se encuentran en el semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s \leq -\alpha\}$, para algún número real finito $\alpha > 0$. Sea $h(t)$

la antitransformada Laplace de $\hat{h}(s)$. Entonces para cualquier número $s_0 \in \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > -\alpha\}$

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t} h(t) dt = \lim_{s \rightarrow s_0} \hat{h}(s).$$

Demostración. De la definición de la Transformada de Laplace, para todo s en la *región de convergencia de la transformada*, $\operatorname{Re} s > -\alpha$, se cumple que

$$\hat{h}(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt.$$

Como s_0 está en la región de convergencia, queda probado el resultado. \square

La salida y el error de seguimiento en la respuesta al escalón del sistema de la Figura 7.1 satisfacen las siguientes condiciones integrales.

Teorema 7.3 (Polos inestables). Supongamos que el sistema a lazo abierto $\hat{L}(s)$ tiene un polo en p , con $\operatorname{Re} p > 0$. Entonces si el lazo cerrado es asintóticamente estable

$$\int_0^\infty e^{-pt} e(t) dt = 0 \quad (7.9)$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} y(t) dt = \frac{1}{p} \quad (7.10)$$

Demostración. Al ser el sistema asintóticamente estable es BIBO, y entonces el error $e(t)$ producido por una entrada acotada es acotado, digamos $|e(t)| \leq M, \forall t$. Así, la transformada de Laplace del error, $\hat{e}(s)$ no tendrá singularidades en $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$. En efecto,

$$\begin{aligned} |\hat{e}(s)| &\leq \int_0^\infty |e^{-st} e(t)| dt \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} s t} dt = \frac{M}{\operatorname{Re} s} < \infty \quad \text{para todo } s : \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

Entonces, por el Lema 7.2, la ecuación (7.9) sigue de

$$\int_0^\infty e^{-pt} e(t) dt = \hat{e}(p) = \frac{\hat{S}(p)}{p} = 0,$$

donde usamos la relación $\hat{e}(s) = \hat{S}(s)\hat{r}(s)$, el hecho de que la referencia es un escalón, $\hat{r}(s) = 1/s$, y la restricción de interpolación de $\hat{S}(s)$ en los polos inestables de $\hat{L}(s)$.

La ecuación (7.10) sigue de (7.9) y el hecho de que $r(t) = 1$ para todo t ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} y(t) dt &= \int_0^\infty e^{-pt} (r(t) - e(t)) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

\square

Un resultado dual existe para plantas con ceros de fase no mínima.

Teorema 7.4 (Ceros de fase no mínima). Supongamos que el sistema a lazo abierto $\hat{L}(s)$ tiene un cero en q , con $\text{Re } q > 0$. Entonces si el lazo cerrado es estable

$$\int_0^\infty e^{-qt} e(t) dt = \frac{1}{q} \quad (7.11)$$

$$\int_0^\infty e^{-qt} y(t) dt = 0. \quad (7.12)$$

Demostración. Ejercicio. □

Estos teoremas muestran que si la planta tiene ceros o polos en el semiplano derecho del plano complejo, entonces el error y la salida a una entrada escalón deben satisfacer relaciones integrales *independientemente* del controlador usado para estabilizar el sistema. Damos ahora interpretaciones de diseño de estas integrales en términos de los parámetros de la respuesta al escalón.

Corolario 7.1 (Polos inestables reales y sobrevalor). Si la planta tiene un polo inestable real en $p > 0$, su respuesta al escalón tiene forzosamente sobrevalor. Más aún, si t_c es el tiempo de crecimiento del sistema a lazo cerrado, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} y_{sob} &\geq \frac{(pt_c - 1)e^{pt_c} + 1}{pt_c} \\ &\geq \frac{pt_c}{2}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Demostración. Necesariamente el error deberá cambiar de signo para que la integral (7.9) sea nula — a menos que sea idénticamente nulo. Así, la salida deberá superar a la referencia en algún momento $\Leftrightarrow \exists$ sobrevalor.

De la definición de t_c tenemos que $y(t) \leq t/t_c$ para $t \leq t_c$, o sea que $e(t) \geq 1 - t/t_c$. Usando esta cota en la integral (7.9) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{t_c} e^{-pt} e(t) dt + \int_{t_r}^\infty e^{-pt} e(t) dt \geq \int_0^{t_c} e^{-pt} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) dt + \int_{t_r}^\infty e^{-pt} e(t) dt \\ &\Leftrightarrow \int_{t_r}^\infty e^{-pt} (-e(t)) dt \geq \int_0^{t_c} e^{-pt} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) dt. \end{aligned} \quad (7.14)$$

De (7.14) y la definición de sobrevalor tenemos que

$$\begin{aligned} y_{sob} \frac{e^{-pt_c}}{p} &= y_{sob} \int_{t_r}^\infty e^{-pt} dt \geq \int_{t_r}^\infty e^{-pt} (-e(t)) dt \\ &\geq \int_0^{t_c} e^{-pt} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) dt = \frac{(pt_c - 1) + e^{-pt_c}}{p^2 t_c}, \end{aligned}$$

de donde surge (7.13). □

Sigue del Corolario 7.1 que si la planta tiene un polo inestable:

- necesariamente hay sobrevalor en la respuesta al escalón
- el sobrevalor será mayor cuanto mayor sea el tiempo de respuesta del lazo cerrado.

Los polos inestables demandarán acción de control rápida para un mejor desempeño (menor sobrevalor). Cuanto mayores (más rápidos) sean los polos inestables, mayor será esta demanda.

Ejemplo 7.5. Supongamos que nuestra planta a lazo abierto tiene un polo en $p = 2$. Entonces tenemos que la cota en sobrevalor en la respuesta al escalón del lazo cerrado (estable) es

$$y_{sob} \geq t_c.$$

Si diseñamos el controlador para obtener un tiempo de crecimiento $t_r = 1s$, el sobrevalor será mayor al 100%! Para una respuesta razonable deberíamos elegir al menos $t_c \leq 0,2s$.

Corolario 7.2 (Ceros de fase no mínima y subvalor). Si la planta tiene un cero de fase no mínima real en $q > 0$, su respuesta al escalón tiene forzosamente subvalor. Más aún, si t_e es el tiempo de establecimiento a un nivel ε del sistema a lazo cerrado, entonces se cumple que

$$y_{sub} \geq \frac{1 - \varepsilon}{e^{qt_e} - 1}.$$

Demostración. Similar a la del Corolario 7.1. Ejercicio. □

La interpretación del Corolario 7.2 es que si la planta tiene un cero real de fase no mínima,

- necesariamente hay subvalor en la respuesta al escalón
- el pico del subvalor será mayor cuanto menor sea el tiempo de establecimiento del lazo cerrado.

Los ceros de fase no mínima demandarán acción de control lenta para un mejor desempeño (menor subvalor). Cuanto menores (más lentos) sean los ceros de fase no mínima, mayor será esta demanda.

En conclusión podemos extraer las siguientes reglas prácticas de diseño básicas para evitar sobrevalor o subvalor excesivos:

1. El polo dominante a lazo cerrado deber mayor (en magnitud) que cualquier polo inestable a lazo abierto del sistema.
2. El polo dominante a lazo cerrado deber menor (en magnitud) que el menor cero no mínima fase del sistema.

Vemos que entre las plantas inestables y no mínima fase, aquellas que posean polos a lazo abierto a la derecha de sus ceros en \mathbb{C}^+ serán más “difíciles”, ya que no podremos satisfacer ambas reglas simultáneamente, y habrá un compromiso inevitable entre reducir sobrevalor o subvalor.

El siguiente resultado considera este caso.

Corolario 7.3 (Plantas inestables y no mínima fase). Consideremos el esquema de control de un grado de libertad con realimentación unitaria. Supongamos que $\hat{L}(s) = \hat{K}(s)\hat{G}(s)$ tiene un cero real $q > 0$ y un polo real $p > 0$, con $p \neq q$. Entonces

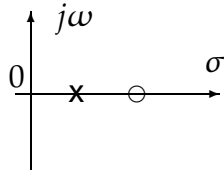


Figura 7.10: Caso manejable

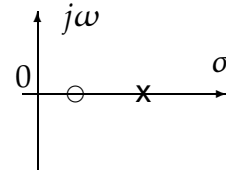


Figura 7.11: Caso difícil

1. si $p < q$ el sobrevalor satisface

$$y_{sob} \geq \frac{p}{q - p}, \quad (7.15)$$

2. si $q < p$ el subvalor satisface

$$y_{sub} \geq \frac{q}{p - q}. \quad (7.16)$$

Demostración. Para el caso 1, combinando las relaciones integrales de los Teoremas 7.3 y 7.4 sobre polos inestables y ceros de fase no mínima obtenemos

$$\int_0^\infty (e^{-pt} - e^{-qt})(-e(t))dt = \frac{1}{q}.$$

De la definición de sobrevalor entonces sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &\leq y_{sob} \int_0^\infty (e^{-pt} - e^{-qt})dt \\ &= y_{sob} \frac{q - p}{pq}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Finalmente, la relación (7.15) sale inmediatamente de (7.17) pues $q > p$. De la misma manera se prueba 2 usando las restantes relaciones integrales y usando el hecho de que $p > q$. \square

Ejemplo 7.6.

Consideremos el sistema de péndulo invertido de la Figura 7.12. El modelo linealizado alrededor del origen de este sistema tiene la siguiente función transferencia entre la fuerza u y la posición del carro y :

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{(s - q)(s + q)}{M(s^2(s - p)(s + p))}$$

donde $q = \sqrt{g/\ell}$ y $p = q\sqrt{1 + m/M}$. Vemos que el sistema satisface las condiciones del corolario anterior. Si normalizamos para que $q = 1$ y consideramos $m = M$, obtenemos que $p = \sqrt{2}$. Entonces el corolario anterior predice un subvalor superior a 2 en la respuesta al escalón! La Figura 7.13 muestra los resultados de simulaciones del lazo cerrado controlado con distintas velocidades de respuesta.

Vemos que el subvalor es en todos los casos mucho mayor que la cota inferior de 2.

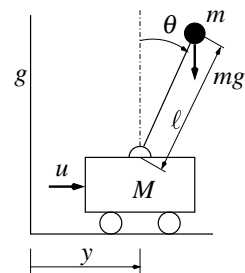


Figura 7.12: Péndulo invertido

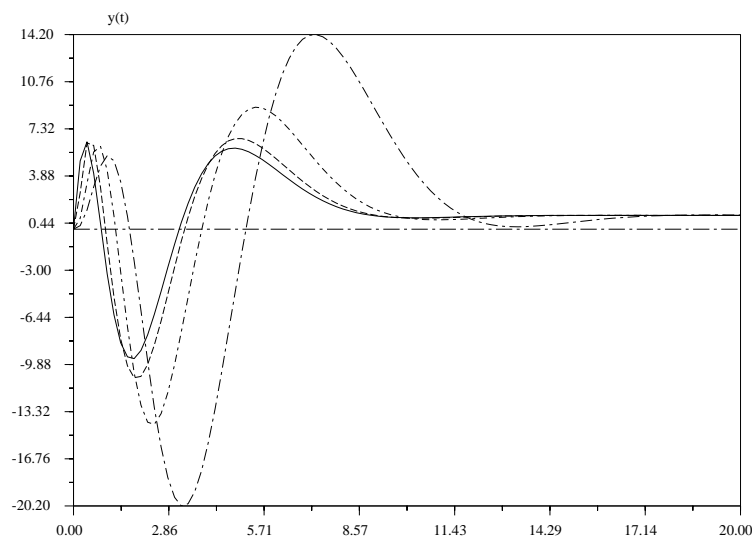


Figura 7.13: Respuesta a lazo cerrado del péndulo invertido

7.5. Resumen

La implementación práctica de un sistema de control está afectado de perturbaciones e incertidumbres de modelado que afectarán su desempeño, apartándolo de las especificaciones idealizadas en la etapa de diseño. Algunas de estas perturbaciones e incertidumbres pueden tenerse en cuenta de cierta forma en el diseño si se lleva a cabo un diseño robusto.

Distinguimos las propiedades de robustez en

1. Estabilidad robusta: el sistema real preserva las características de estabilidad (Lyapunov, BIBO, etc.) del sistema nominal.¹
2. Desempeño robusto: el sistema real preserva las características de respuesta a referencias y rechazo de perturbaciones del sistema nominal.

El análisis de las propiedades de robustez y rechazo de perturbaciones

- Estabilidad nominal
- Desempeño nominal
- Estabilidad robusta
- Desempeño robusto

del sistema de control puede hacerse a priori, sin embargo, mediante las *funciones de sensibilidad*, que capturan funciones transferencia cruciales en el lazo de control.

Los ceros y polos a lazo abierto en el semiplano derecho \mathbb{C}^+ imponen restricciones fundamentales en la respuesta del sistema. Estas restricciones valen para todo controlador estabilizante.

¹En lo que sigue, con “estabilidad” nos referiremos a estabilidad interna asintótica.

compromiso velocidad/sobrevalor si la planta tiene un polo real inestable, necesariamente existirá sobrevalor en la respuesta al escalón. Cuanto más *lento* se diseñe el lazo cerrado, *mayor será el sobrevalor*.

compromiso velocidad/subvalor si la planta tiene un cero real no mínima fase, necesariamente existirá subvalor en la respuesta al escalón. Cuanto más *rápido* se diseñe el lazo cerrado, *mayor será el subvalor*.

Estos compromisos indican que para un desempeño aceptable, los polos inestables requieren un lazo cerrado rápido, mientras que los ceros no mínima fase uno lento.

7.6. Ejercicios

Ejercicio 7.1. Considerar el control en realimentación de una planta con modelo $\hat{G}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$. Suponiendo que el controlador es tal que la sensibilidad complementaria es

$$\hat{T}(s) = \frac{4}{(s+2)^2},$$

1. calcular la función transferencia del controlador $\hat{K}(s)$,
2. si la referencia es un escalón, calcular la respuesta en régimen permanente de la señal de entrada de la planta.
3. calcular el máximo error instantáneo en la salida siguiendo a esta referencia.

Ejercicio 7.2. El modelo nominal de una planta es un doble integrador $\hat{G}_0(s) = 1/s^2$. Un modelo más detallado (que tomamos como la planta “real”) incluye un retardo, de forma que $\hat{G}(s) = e^{-\tau s}/s^2$, y sólo se sabe que τ pertenece al intervalo $[0, 0,1]$. Expresar esta incertidumbre como multiplicativa y obtener una función $W_2(\omega)$ tal que

$$\left| \frac{\hat{G}(j\omega)}{\hat{G}_0(j\omega)} - 1 \right| \leq W_2(\omega), \quad \forall \omega, \tau.$$

Ejercicio 7.3. La función transferencia de una planta está dada por

$$\hat{G}_0(s) = \frac{k}{s-2},$$

donde la ganancia k es incierta pero se sabe que pertenece al intervalo $[0, 1, 10]$. Representar la familia de plantas posibles con un modelo de incertidumbre multiplicativa, eligiendo una planta nominal y una función peso $W_2(\omega)$ tales que

$$\left| \frac{\hat{G}(j\omega)}{\hat{G}_0(j\omega)} - 1 \right| \leq W_2(\omega), \quad \forall \omega, k.$$

Ejercicio 7.4. Para el modelo nominal de un doble integrador $\hat{G}_0(s) = 1/s^2$, el requerimiento de desempeño es que la salida de la planta siga referencias en el intervalo de frecuencias $[0, 1]$. La función peso de desempeño $W_1(\omega)$ puede elegirse como la magnitud de un filtro pasa-bajos de magnitud constante en este rango de frecuencias, y que decae a frecuencias

mayores, como por ejemplo un filtro Butterworth. Elegir un filtro Butterworth de tercer orden para $W_1(\omega)$ con frecuencia de corte 1rad/s . Tomar el peso $W_2(\omega)$ como

$$W_2(\omega) = \left| \frac{j\omega}{0,1j\omega + 1} \right|.$$

1. Diseñar un controlador propio $\hat{K}(s)$ para obtener estabilidad nominal del lazo de control.
2. Chequear la condición de estabilidad robusta $|W_2(\omega)\hat{T}_0(j\omega)| < 1$. Si no se satisface, rediseñar $\hat{K}(s)$ hasta conseguirlo. No es necesario obtener buen desempeño.
3. Si la condición de estabilidad robusta se satisface, el *mínimo nivel de desempeño robusto* α es el valor

$$\alpha \triangleq \sup_{\omega} \left| \frac{W_1(\omega)\hat{S}_0(j\omega)}{1 - |W_2(\omega)\hat{T}_0(j\omega)|} \right|.$$

¿Cuál es el valor de α alcanzado por el controlador elegido?

Ejercicio 7.5. Obtener los parámetros de la respuesta al escalón de

$$\hat{G}(s) = \frac{(\frac{s}{3} - 1)(s - 1)}{(\frac{s}{4} + 1)(s^2 + s + 1)}$$

Ejercicio 7.6. Probar el Teorema 7.4 y el Corolario 7.2.

Ejercicio 7.7. Dado el sistema

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{(2s - 1)}$$

diseñar un controlador PI, $\hat{K}(s) = k_1 + \frac{k_2}{s}$, para obtener error estático nulo y un tiempo de crecimiento $t_c \geq 1\text{s}$. Estimar el sobrevalor en la respuesta usando (7.13). ¿Cuál es el sobrevalor efectivo en el sistema?

Ejercicio 7.8. El modelo nominal de una planta es

$$\hat{G}(s) = \frac{5(s - 1)}{(s + 1)(s - 5)}.$$

Esta planta debe controlarse con un lazo en realimentación de un grado de libertad.

1. Determinar las restricciones en la respuesta al escalón.
2. ¿Por qué es el control de esta planta especialmente difícil? Discutir.

Ejercicio 7.9. Considerar la planta dada por

$$\hat{G}(s) = \frac{s - z_p}{s(s - p_p)}.$$

1. Obtener expresiones para los parámetros k_c, z_c, p_c del controlador

$$\hat{K}(s) = k_c \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

de forma tal que los polos de lazo cerrado estén todos en $s = -1$.

2. Tabular los parámetros del controlador y cotas para el sobrevalor y el subvalor² de la respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado para los siguientes casos:

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
z_p	0.5	0.5	0.2
p_p	-0.5	0.2	0.5
k_c			
z_c			
p_c			
$y_{sob} \geq$			
$y_{sub} \geq$			

3. Con los valores calculados simular el sistema a lazo cerrado y medir los valores efectivos de sobrevalor y subvalor obtenidos. Comparar con las cotas teóricas.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
$y_{sob} =$			
$y_{sub} =$			

²Tomar un tiempo de establecimiento t_e al $\varepsilon = 3\%$ de aproximadamente $t_e = 7s$.

Capítulo 8

Realimentación de Estados y Observadores

La teoría de sistemas lineales que vimos da la base para la *teoría de control lineal*. En este capítulo introducimos los conceptos y técnicas de control en sistemas descritos por variables de estado. Sólo consideraremos sistemas estacionarios.

La teoría de control lineal involucra la modificación del comportamiento de un sistema de m entradas, p salidas y n estados

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{8.1}$$

que llamamos *la planta o ecuación de estados en lazo abierto*, mediante la aplicación de una realimentación lineal de estados de la forma

$$u(t) = Nr(t) - Kx(t),\tag{8.2}$$

donde $r(t)$ es el nuevo nombre para la señal de entrada. La matriz K es la *ganancia de realimentación de estados* y N la *ganancia de precompensación*.

La substitución de (8.2) en (8.1) da la *ecuación de estados en lazo cerrado*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + BNr(t) \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{8.3}$$

Es obvio que el sistema a lazo cerrado también es lineal y estacionario. La Figura 8.1 representa el esquema de control por realimentación de estados para un sistema SISO. El control es *estático*, pues u depende sólo de valores presentes de los estados x y la referencia r . Cuando los estados del sistema no pueden medirse, se recurre a *estimarlos* mediante un *observador de estados*, que reconstruye x a partir de mediciones de y y u . La combinación de un observador y realimentación de estados es un controlador *dinámico* por realimentación de salida, esquematizado en la Figura 8.2.

En este capítulo veremos

- técnicas de diseño de K para
 - estabilización (ubicación de polos),
 - esquemas de regulación y seguimiento (desempeño y robustez),

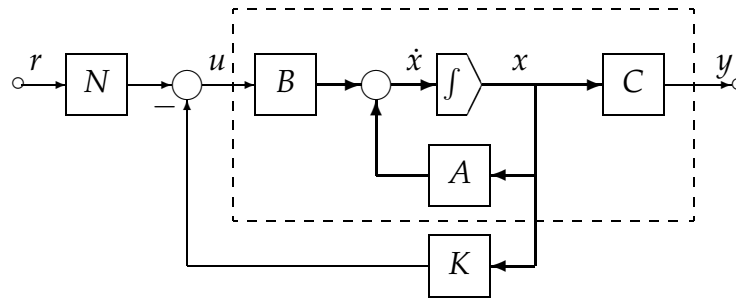


Figura 8.1: Realimentación de estados

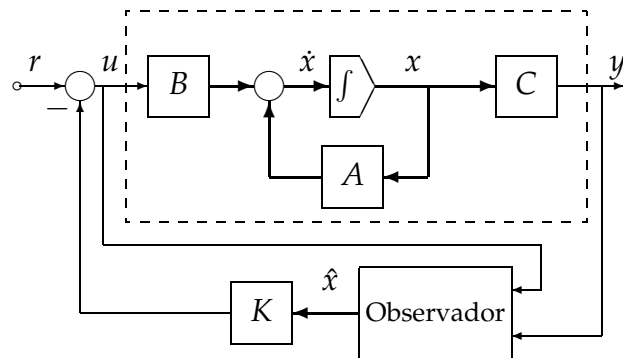


Figura 8.2: Realimentación de salida con observador

- técnicas de diseño de observadores.

La meta a alcanzar:

saber diseñar un sistema de control lineal por realimentación de salida (vía realimentación de estados + observador) para satisfacer especificaciones deseadas de estabilidad, desempeño y robustez.

En la primera mitad del capítulo introducimos las técnicas para sistemas SISO. En la segunda, presentamos una técnica para sistemas MIMO. Veremos otra técnica (óptima) para sistemas MIMO en el capítulo que sigue.

8.1. Realimentación de Estados

Comenzamos con sistemas SISO y el esquema de control de la Figura 8.1, suponiendo por el momento el precompensador $N = 1$ para simplificar la notación.

Una propiedad de sistemas lineales esencial en la realimentación de estados es la de *controlabilidad*. Nuestra primer observación importante es que

La controlabilidad de un sistema es invariante con respecto a realimentación de estados.

Teorema 8.1 (Invariancia de la controlabilidad respecto a realimentación). El par $(A - BK, B)$, para cualquier vector $K^{1 \times n}$, es controlable si y sólo si el par (A, B) es controlable.

Demostración. La matriz de controlabilidad del sistema a lazo abierto (8.1) es

$$\mathcal{C} = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B],$$

y la matriz de controlabilidad del sistema a lazo cerrado (8.3) es

$$\mathcal{C}_K = [B, (A - BK)B, (A - BK)^2B, \dots, (A - BK)^{n-1}B].$$

No es difícil chequear que \mathcal{C} y \mathcal{C}_K están relacionadas de la forma

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{C} \begin{bmatrix} 1 & -KB & -K(A - BK)B & \dots & -K(A - BK)^{n-2}B \\ 0 & 1 & -KB & \dots & -K(A - BK)^{n-3}B \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -K(A - BK)^{n-4}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Notar que como K es $1 \times n$ y B es $n \times 1$, todas las entradas de la matriz que multiplica a \mathcal{C} son escalares. Como esta matriz es no singular, el rango de \mathcal{C} es igual al rango de \mathcal{C}_K . Así (8.1) es controlable si y sólo si (8.3) es controlable. \square

Aunque la controlabilidad es invariante con respecto a la realimentación de estados, la observabilidad no lo es, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.1. El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (8.4)$$

es controlable y observable, ya que las matrices de controlabilidad $\mathcal{C} = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, y observabilidad $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{C}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, son no singulares.

El control por realimentación de estados $u(t) = r(t) - [3 \ 1]x(t)$ en (8.4) lleva al sistema a lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned} \quad (8.5)$$

La matriz de controlabilidad de (8.5) es $\mathcal{C}_K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, que es no singular y comprueba que el sistema realimentado es controlable. Sin embargo, la matriz de observabilidad de (8.5) es $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, que es singular, por lo que el sistema con esta realimentación *no* es observable.

La observabilidad de un sistema *no* es invariante con respecto a realimentación de estados.

El siguiente ejemplo ilustra lo que puede conseguirse con realimentación.

Ejemplo 8.2. La planta

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

tiene una matriz de evolución con polinomio característico

$$\Delta(s) = (s - 1)^2 - 9 = s^2 - 2s - 8 = (s - 4)(s + 2),$$

y, como se ve, autovalores 4 y -2 , por lo que es inestable. Consideremos un control $u = r - [k_1 \ k_2]x$. El sistema a lazo cerrado queda

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r \\ &= \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 3 - k_2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r.\end{aligned}$$

La nueva matriz de evolución tiene el polinomio característico

$$\begin{aligned}\Delta_K(s) &= (s - 1 + k_1)(s - 1) - 3(3 - k_2) \\ &= s^2 + (k_1 - 2)s + (3k_2 - k_1 - 8).\end{aligned}$$

Está claro que las raíces de $\Delta_K(s)$ o, equivalentemente, los autovalores del sistema a lazo cerrado pueden ubicarse en cualquier posición mediante una elección adecuada de k_1 y k_2 .

Por ejemplo, si los dos autovalores se ubican en $-1 \pm j2$, el polinomio característico deseado es $(s + 1 - j2)(s + 1 + j2) = s^2 + 2s + 5$. Igualando $k_1 - 1 = 2$ y $3k_2 - k_1 - 8 = 5$ da $k_1 = 4$ y $k_2 = 17/3$. Así la ganancia de realimentación $K = [4 \ 17/3]$ moverá los autovalores de 4, -2 a $-1 \pm j2$.

El ejemplo muestra que la realimentación de estados permite ubicar los autovalores del sistema realimentado en cualquier posición, y que la ganancia de realimentación K puede calcularse por substitución directa. Sin embargo, el método del ejemplo no es práctico para mayores dimensiones. Más aún, no queda claro que rol jugó la controlabilidad en esta asignación de autovalores. Para formular un resultado general de ubicación de autovalores recurrimos a la *forma canónica del controlador*, vista en el Capítulo 4: Si $C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ es no singular, el sistema (8.1) puede llevarse a la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \beta_{n-2} \ \cdots \ \beta_1] \bar{x}(t),\end{aligned}\tag{8.6}$$

mediante el cambio de coordenadas $\bar{x} = Px$, donde

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\tag{8.7}$$

La función transferencia $\hat{G}(s)$ queda dada por

$$\hat{G}(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \cdots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n}.\tag{8.8}$$

Teorema 8.2 (Asignación de autovalores). Si la EE (8.1) es controlable, entonces mediante la realimentación de estados $u = r - Kx$, donde K es un vector real constante $1 \times n$, los autovalores de $A - BK$ pueden ser asignados arbitrariamente, siempre que los autovalores complejos conjugados se asignen en pares.

Demostración. Si (8.1) es controlable puede llevarse a la forma (8.6). Denotemos con \bar{A} y \bar{B} las matrices en (8.6). Así tenemos que $\bar{A} = PAP^{-1}$ y $\bar{B} = PB$. Puede verse también que

$$\bar{C} \triangleq [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = P[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = PC, \quad (8.9)$$

por lo que $P^{-1} = C\bar{C}^{-1}$ y la matriz de la extrema derecha en (8.7) es \bar{C} .

La substitución de $\bar{x} = Px$ en la realimentación de estados da

$$u = r - Kx = r - KP^{-1}\bar{x} \triangleq r - \bar{K}\bar{x},$$

donde $\bar{K} = KP^{-1}$. Puesto que $\bar{A} - \bar{B}\bar{K} = P(A - BK)P^{-1}$, vemos que $A - BK$ y $\bar{A} - \bar{B}\bar{K}$ tienen los mismos autovalores.

Ahora, de cualquier conjunto de n autovalores deseados podemos formar el polinomio característico deseado

$$\Delta_K(s) = s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_n. \quad (8.10)$$

Si elegimos $\bar{K} = [\bar{\alpha}_n - \alpha_n, \dots, \bar{\alpha}_2 - \alpha_2, \bar{\alpha}_1 - \alpha_1]$, la ecuación de estado de lazo cerrado de viene (en las nuevas coordenadas)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\bar{\alpha}_n & -\bar{\alpha}_{n-1} & -\bar{\alpha}_{n-2} & \cdots & -\bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \beta_{n-2} \ \cdots \ \beta_1] \bar{x}(t). \end{aligned}$$

Por estar en forma companion, el polinomio característico de $(\bar{A} - \bar{B}\bar{K})$, y consecuentemente el de $(A - BK)$, es (8.10). Así el sistema realimentado tiene los autovalores deseados.

Finalmente, la ganancia de realimentación en las coordenadas originales es, usando (8.9),

$$K = \bar{K}P = \bar{K}\bar{C}C^{-1}.$$

□

En lazo cerrado, la función transferencia del sistema cambia de (8.8) a

$$\hat{G}_K(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_n}{s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \bar{\alpha}_2 s^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_n}, \quad (8.11)$$

lo que muestra que si bien hemos movido los polos del sistema, sus ceros han quedado invariantes. Esta es una propiedad general:

La realimentación de estados puede mover los polos de una planta pero no tiene ningún efecto sobre los ceros.

Esta propiedad explica por qué la realimentación de estados puede alterar la propiedad de observabilidad, ya que uno o más polos pueden ubicarse mediante realimentación para cancelar ceros del sistema, lo que vuelve esos modos *inobservables*.

Resumimos los pasos para calcular K en el siguiente procedimiento:

Procedimiento para asignación de autovalores (via forma canónica)

1. Obtener los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ del polinomio característico $\Delta(s)$ del sistema a lazo abierto.
2. Formar las matrices de controlabilidad $\mathcal{C} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ y

$$\bar{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

3. Elegir los coeficientes $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n$ del polinomio característico deseado $\Delta_K(s)$ y determinar la ganancia de realimentación en coordenadas de \bar{x}

$$\bar{K} = [\bar{\alpha}_n - \alpha_n, \dots, \bar{\alpha}_2 - \alpha_2, \dots, \bar{\alpha}_1 - \alpha_1].$$

4. Determinar la ganancia de realimentación en coordenadas originales

$$K = \bar{K}\bar{\mathcal{C}}^{-1}.$$

8.1.1. Otra receta para calcular K

Un método alternativo para calcular K involucra la solución de una ecuación de Lyapunov (mediante la función MATLAB `lyap`, por ejemplo). Este método, sin embargo, tiene la restricción de que los autovalores deseados no pueden ser ninguno de los autovalores de A . Una ventaja del método es que se extiende directamente al caso MIMO.

Procedimiento para asignación de autovalores (via Lyapunov)

Considerar un par (A, B) controlable, donde A es $n \times n$ y B $n \times 1$. Encontrar un vector real $1 \times n$ K tal que $(A - BK)$ tenga cualquier conjunto de autovalores deseados que no contenga autovalores de A .

1. Elegir una matriz $n \times n$ cualquiera F que tenga los autovalores deseados.
2. Elegir un vector $1 \times n$ cualquiera \bar{K} tal que (F, \bar{K}) sea observable.
3. Calcular solución única T de la ecuación de Lyapunov $AT - TF = B\bar{K}$.
4. Calcular la ganancia de realimentación $K = \bar{K}T^{-1}$.

Convenientemente, MATLAB tiene la función `K = place(A, B, P)` que calcula K para ubicar los autovalores en los valores dados en el vector P . *Restricción:* no permite repetir autovalores.

8.2. Estabilización

Si una ecuación de estado es controlable, sus autovalores pueden asignarse arbitrariamente mediante realimentación de estados. Veamos qué se puede hacer cuando la ecuación de estado *no* es controlable.

Toda ecuación de estado incontrolable puede llevarse a la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (8.12)$$

donde (\bar{A}_c, \bar{B}_c) es controlable. Como la matriz de evolución en (8.12) es block triangular, los autovalores de la matriz en las coordenadas originales son la unión de los autovalores de \bar{A}_c y $\bar{A}_{\bar{c}}$. La realimentación de estados

$$u = r - Kx = r - \bar{K}\bar{x} = r - \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

lleva al sistema a lazo cerrado

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{B}_c K_1 & \bar{A}_{12} - \bar{B}_c \bar{K}_2 \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} r. \quad (8.13)$$

Vemos de (8.13) que los autovalores de $\bar{A}_{\bar{c}}$ no son afectados por la realimentación, y por lo tanto *no pueden modificarse*. Por lo tanto, la condición de controlabilidad de (A, B) no sólo es suficiente sino también necesaria para asignar *todos* los autovalores de $(A - BK)$ en posiciones deseadas.

Definición 8.1 (Estabilizabilidad). El sistema (8.12) es *estabilizable* si $\bar{A}_{\bar{c}}$ es Hurwitz¹ y el par (\bar{A}_c, \bar{B}_c) es controlable.

La propiedad de estabilizabilidad es una condición más débil que la de controlabilidad para alcanzar estabilidad a lazo cerrado. Es equivalente a pedir que *los autovalores no controlables sean estables*.

8.3. Regulación y Seguimiento

El *problema de regulación* se da cuando la referencia es nula $r = 0$; se pretende básicamente que el sistema sea asintóticamente estable y que la respuesta a condiciones iniciales producidas por perturbaciones tienda a cero.

El *problema de seguimiento* (o del *servomecanismo*) se da cuando se pretende que la salida reproduzca asintóticamente (que tienda a) la referencia $r(t)$. Es común que la referencia sea un valor constante $r(t) = a, \forall t \geq 0$. El problema de regulación es un caso particular del de seguimiento con $a = 0$.

Si el sistema es controlable, sabemos que podemos asignar los autovalores del lazo cerrado calculando K para obtener la matriz de evolución $A - BK$. La respuesta del sistema realimentado entonces está dada por

$$y(t) = Ce^{(A-BK)t}x(0) + C \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)} Br(\tau) d\tau.$$

¹Tiene todos sus autovalores con parte real negativa.

Así, el problema de regulación ($r(t) \equiv 0$) queda resuelto si K se calcula para que $A - BK$ sea Hurwitz, ya que entonces

$$y(t) = Ce^{(A-BK)t}x(0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{para toda condición inicial } x(0).$$

Para el problema de seguimiento de referencia constante $r(t) = a \neq 0$, además de que $A - BK$ sea Hurwitz, requerimos una condición en la *ganancia de precompensación* N , para que $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{Ce^{(A-BK)t}x(0)}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0} + NC \left(\int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)} B d\tau \right) a \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a \\ \Leftrightarrow N \int_0^\infty Ce^{(A-BK)\sigma} B d\sigma &= 1 \\ \Leftrightarrow NC(sI - A + BK)^{-1}B \Big|_{s=0} &= 1 \\ \Leftrightarrow N &= -\frac{1}{C(A - BK)^{-1}B}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Como $C(sI - A + BK)^{-1}B$ es la función transferencia a lazo cerrado

$$\hat{G}_K(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n}{s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_n}$$

la condición (8.14) es equivalente a $N = \bar{\alpha}_n / \beta_n$. Obviamente, es condición necesaria que $\beta_n \neq 0$.

Regulación: Es necesario que (A, B) sea controlable. Se requiere entonces

- diseñar K para que todos los autovalores de $A - BK$ tengan parte real negativa.

Seguimiento de referencias constantes: Necesitamos (A, B) controlable y $\beta_n = \lim_{s \rightarrow 0} C(sI - A)^{-1}B \neq 0$. Se requiere entonces

- diseñar K para que todos los autovalores de $A - BK$ tengan parte real negativa,
- diseñar $N = -1/C(A - BK)^{-1}B$.

La condición de controlabilidad del par (A, B) puede relajarse a la de *estabilizabilidad*. La restricción estará en que no habrá entonces control total de la velocidad de convergencia del error. Si hubiera modos no controlables muy cercanos al eje $j\omega$, la respuesta podría ser demasiado lenta u oscilatoria para considerar la regulación y seguimiento satisfactorios.

Ejemplo 8.3 (Seguimiento de referencia constante). En el Ejemplo 8.2 calculamos la ganancia de realimentación $K = [4, 17/3]$ que asigna los autovalores a lazo cerrado del sistema

$$\dot{x}(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] \right) x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$$

en $-1 \pm j2$. Supongamos que el sistema tiene la salida $y(t) = [1, 0]x(t)$, que se pretende que siga asintóticamente referencias constantes. La función transferencia del sistema a lazo cerrado resulta

$$\hat{G}_K(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 2s + 5}$$

Como $\hat{G}_K(0) = -1/5 \neq 1$, $y(t)$ tenderá a $-a/5$ para una referencia constante $r(t) = a$. Incorporamos precompensación rediseñando $u(t) = Nr(t) - Kx(t)$, con

$$N = -5.$$

La Figuras 8.3 y 8.4 muestran la respuesta del sistema a lazo cerrado a un escalón unitario en $r(t)$ sin y con precompensación. La función transferencia del sistema a lazo cerrado con precompensador resulta

$$\hat{G}_K(s) = \frac{-5s + 5}{s^2 + 2s + 5}, \quad \hat{G}_K(0) = 1 \Rightarrow y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a.$$

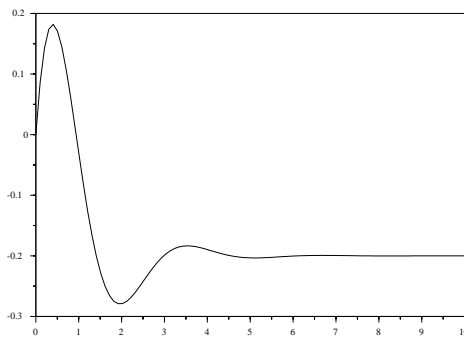


Figura 8.3: Respuesta sin precompensación

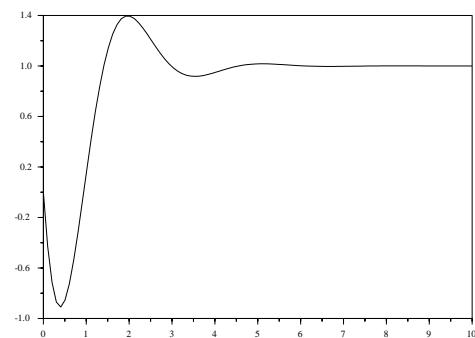


Figura 8.4: Respuesta precompensada

Ejemplo 8.4 (Efecto de incertidumbres en el modelo). Retomemos el sistema anterior, pero supongamos que existe un error en el modelo usado para el diseño de control y la planta real tiene una matriz de evolución

$$A = A_0 + A_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

La transferencia desde w a y no estará precompensada, y por lo tanto se originará un error estático proporcional al valor de $\beta_n w / \tilde{\alpha}_n$. Otra vez, se conserva la estabilidad pero se pierde el seguimiento. es decir que los autovalores a lazo abierto están en $[4, 464, -2, 464]$, en vez de $[4, -2]$. La función transferencia del sistema real compensado con la ganancias K y N calculadas en base al modelo nominal es ahora

$$\tilde{G}_K(s) = \frac{-5s + 5}{s^2 + 2s + 8,0833}$$

y, aunque la estabilidad se ha conservado, la propiedad de seguimiento se ha perdido. Este esquema de control no tiene desempeño robusto; requiere conocer la planta con exactitud.

Ejemplo 8.5 (Efecto de perturbaciones a la entrada de la planta). Sea ahora el mismo sistema, con el modelo correcto, pero con una perturbación constante $w = 0,5$ a la entrada de la planta, como se muestra en la Figura 8.7. La Figura 8.6 muestra la respuesta del sistema perturbado.

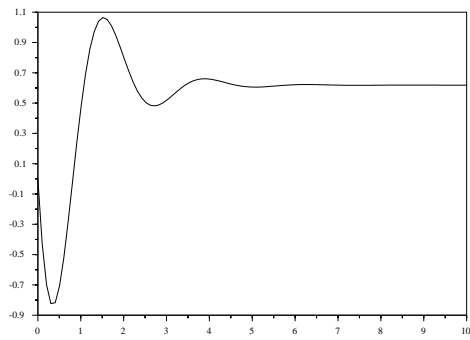


Figura 8.5: Respuesta del sistema con incertidumbre

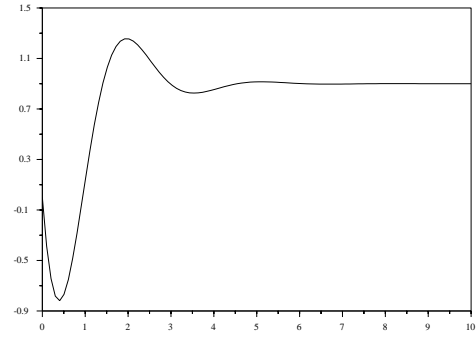


Figura 8.6: Respuesta del sistema con perturbación de entrada.

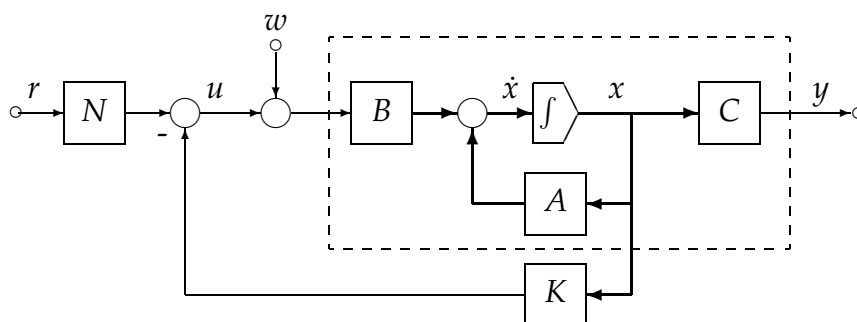


Figura 8.7: Sistema con perturbación a la entrada

8.3.1. Seguimiento Robusto: Acción Integral

Introducimos un esquema robusto de seguimiento de referencias constantes con propiedades de rechazo de perturbaciones de entrada constantes. El esquema se basa en *aumentar* la planta agregando un nuevo estado x_i que *integra el error de seguimiento*,

$$\dot{x}_i = r - y = r - Cx,$$

como se muestra en la Figura 8.8.

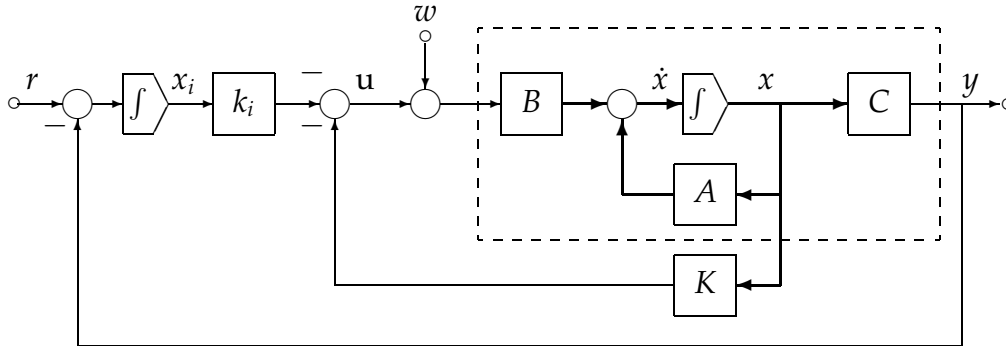


Figura 8.8: Esquema de seguimiento robusto

La EE del sistema original con perturbación de entrada es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Bw \\ y &= Cx.\end{aligned}$$

de modo que el sistema aumentado a lazo abierto queda

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} (u + w) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y &= [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

La realimentación de estados $u = -[K \ k_i] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$ da el sistema a lazo cerrado de la Figura 8.8

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK & -Bk_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y &= [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{8.15}$$

La idea entonces es diseñar $[K, k_i]$ para que la matriz de evolución $\begin{bmatrix} A - BK & -Bk_i \\ -C & 0 \end{bmatrix}$ en (8.15) sea Hurwitz. En particular, la estabilización de x_i implícitamente produce el seguimiento deseado, ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_i(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r.$$

Cabe preguntarse si el sistema aumentado será controlable...

Teorema 8.3 (Controlabilidad de la planta aumentada con un integrador). Si (A, B) es controlable y si $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B$ no tiene ceros en $s = 0$, los autovalores de la matriz de evolución aumentada $\begin{bmatrix} A-BK & -Bk_i \\ -C & 0 \end{bmatrix}$ en (8.15) pueden asignarse arbitrariamente seleccionando la matriz de realimentación $[K, k_i]$.

Demostración. Ver Chen [1999, p. 244-245]. \square

En términos de polos y ceros: si la planta tuviera un cero en $s = 0$, su conexión en cascada con el integrador de x_i produciría una cancelación polo-cero inestable y haría que la planta aumentada sea no controlable.

Propiedades de seguimiento y rechazo de perturbaciones. Intercambiando el orden de los sumadores donde entran w y $-Kx$ en la Figura 8.8 obtenemos el diagrama de bloques de la Figura 8.9, donde

$$\hat{G}(s) = \frac{\bar{N}(s)}{\bar{D}(s)} \triangleq C(sI - A + BK)^{-1}B,$$

con $\bar{D}(s) = \det(sI - A + BK)$. La respuesta del sistema en dominio s es entonces:

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= \frac{\frac{k_i \bar{N}(s)}{s \bar{D}(s)}}{1 + \frac{k_i \bar{N}(s)}{s \bar{D}(s)}} \hat{r}(s) + \frac{\frac{\bar{N}(s)}{\bar{D}(s)}}{1 + \frac{k_i \bar{N}(s)}{s \bar{D}(s)}} \hat{w}(s) \\ &= \frac{k_i \bar{N}(s)}{s \bar{D}(s) + k_i \bar{N}(s)} \hat{r}(s) + \frac{s \bar{N}(s)}{s \bar{D}(s) + k_i \bar{N}(s)} \hat{w}(s). \end{aligned}$$

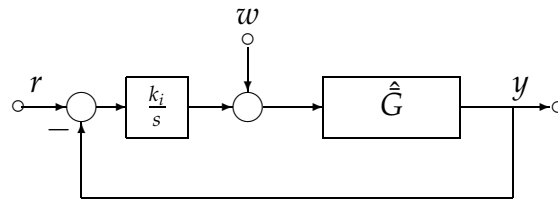


Figura 8.9: DB equivalente.

Si la referencia y la perturbación de entrada son constantes, $r(t) = a$, $w(t) = b$, entonces $\hat{r}(s) = a/s$ y $\hat{w}(s) = b/s$, y la salida del sistema a lazo cerrado es

$$\hat{y}(s) = \frac{k_i \bar{N}(s)}{s \bar{D}(s) + k_i \bar{N}(s)} \frac{a}{s} + \frac{\bar{N}(s)}{s \bar{D}(s) + k_i \bar{N}(s)} b.$$

Finalmente, usando el Teorema del valor final, válido pues el lazo cerrado es estable, y la hipótesis de que $\bar{N}(0) \neq 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{y}(s) \\ &= \frac{k_i \bar{N}(0)}{0 \cdot \bar{D}(0) + k_i \bar{N}(0)} a + \frac{0 \cdot \bar{N}(0)}{0 \cdot \bar{D}(0) + k_i \bar{N}(0)} b \\ &= 1 \cdot a + 0 \cdot b = a. \end{aligned}$$

El sistema rechazará perturbaciones constantes y seguirá referencias constantes — ambas de valor no necesariamente conocido — aún frente a incertidumbres de modelado de la planta, siempre que el lazo cerrado permanezca estable.

8.4. Observadores

El control con realimentación de estados asume la disponibilidad de las variables de estado. Este puede no ser el caso en la práctica, ya sea porque ciertos estados no son medibles, o es muy difícil o muy caro medirlos. Para implementar una realimentación de estados, entonces, debemos diseñar un dispositivo dinámico, llamado *observador* o *estimador de estados*, cuya salida sea una estima del vector de estados. En esta sección introducimos observadores de *orden completo*, donde el observador tiene el mismo orden que la planta — es decir, estimamos *todo* el vector de estados. Denotamos con $\hat{x}(t)$ a la estima de $x(t)$.

Consideramos entonces el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{8.16}$$

donde A , B y C son conocidas, y la entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ son medibles, aunque no el estado $x(t)$. El problema es estimar $x(t)$ de esta información.

8.4.1. Una primer solución: Observador a lazo abierto

Conociendo A y B , podemos *duplicar* la ecuación de estados original construyendo el sistema

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t).\tag{8.17}$$

Este sistema podría construirse en forma electrónica con amplificadores operacionales, o, discretizado, mediante un programa en una computadora y una placa de entradas/salidas, como podría ser un PLC moderno.

Esta duplicación es un *observador a lazo abierto* (Figura 8.10). Si los sistemas (8.16) y (8.17) tuvieran las mismas condiciones iniciales, entonces para toda entrada $u(t)$ tendríamos que $\hat{x}(t) = x(t)$, $\forall t \geq 0$.

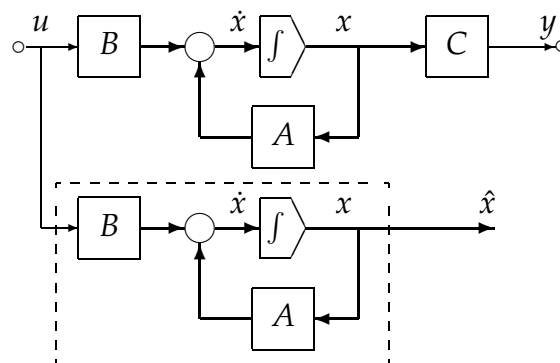


Figura 8.10: Observador en lazo abierto

El problema se reduce entonces a estimar el estado inicial. Si el sistema es observable, su estado inicial $x(0)$ puede computarse a partir de $u(t)$ e $y(t)$ sobre cualquier intervalo, digamos $[0, t_1]$. Con $x(0)$ calculamos $x(t_2)$, $t_2 \geq t_1$, y así poniendo $\hat{x}(t_2) = x(t_2)$ y obtenemos $\hat{x}(t) = x(t) \forall t \geq t_2$.

En conclusión: si el sistema es observable podemos usar un observador en lazo abierto para estimar el vector de estados. Sin embargo, el observador en lazo abierto tiene las siguientes importantes desventajas:

1. Hay que calcular el estado inicial cada vez que usemos el estimador.
2. Si la matriz A tuviera autovalores con parte real positiva, entonces la menor diferencia entre $x(t_0)$ y $\hat{x}(t_0)$ para algún t_0 haría que el error de estimación $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$ crezca con el tiempo.

8.4.2. Una solución mejor: Observador a lazo cerrado

Notemos que aunque ambas $u(t)$ e $y(t)$ están disponibles, sólo hemos usado la información de $u(t)$ para construir el observador a lazo abierto. Usamos entonces $y(t)$ para mejorar el diseño anterior introduciendo una corrección proporcional al error de estimación en la salida

$$\tilde{y}(t) = C(x(t) - \hat{x}(t)).$$

Inyectamos en el diseño anterior la señal de corrección $L(y(t) - C\hat{x}(t))$, donde L es una

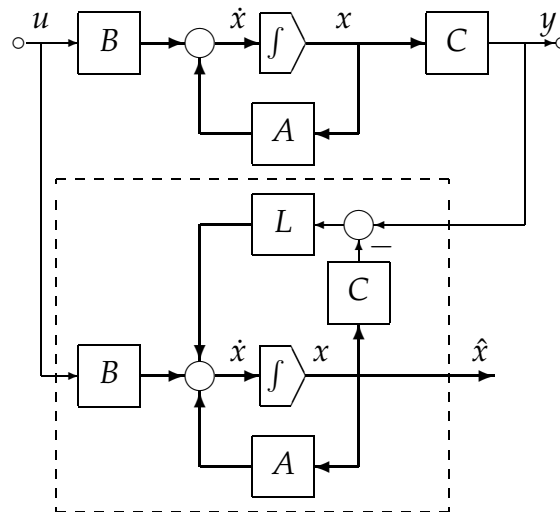


Figura 8.11: Observador en lazo cerrado

matriz $n \times 1$ de ganancia constante. Así, si no hay error, no se hace corrección, pero si hay error, un diseño apropiado de L podrá hacer que el error de estimación tienda asintóticamente a cero. El esquema obtenido (Figura 8.11) se llama *observador a lazo cerrado*, *observador asintótico*, o simplemente *observador*. La Figura 8.12 muestra el mismo esquema en forma simplificada.

De la Figura 8.11, las ecuaciones del observador son

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t).\end{aligned}\tag{8.18}$$

Definamos el error de estimación

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

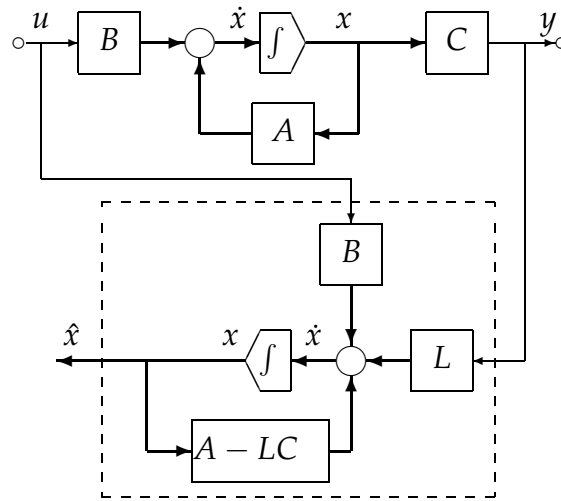


Figura 8.12: Observador en lazo cerrado

Veamos qué condiciones debe cumplir L para que $\tilde{x}(t)$ tienda asintóticamente a cero. Derivando $\tilde{x}(t)$ y substituyendo (8.16) y (8.18), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\
 &= Ax(t) + Bu(t) - (A - LC)\hat{x}(t) - Bu(t) - LCx(t) \\
 &= (A - LC)x(t) - (A - LC)\hat{x}(t) \\
 &= (A - LC)\tilde{x}(t).
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

La ecuación (8.19) gobierna la dinámica del error de estimación. Si todos los autovalores de $(A - LC)$ se pudieran asignar de forma que tengan parte real menor que, digamos, $-\sigma$, con $\sigma > 0$, entonces el error de estimación en todos los estados decrecería a una velocidad mayor o igual a $e^{-\sigma t}$. Así, aunque hubiera un error grande en los estados iniciales, el estado estimado $\hat{x}(t)$ podrá aproximarse al estado real $x(t)$ rápidamente.

Teorema 8.4 (Asignación de Autovalores en Observadores). Dado el par (A, C) , todos los autovalores de $(A - LC)$ pueden asignarse arbitrariamente seleccionando un vector real L si y sólo si (A, C) es observable.

Demostración. Recurriendo a la dualidad control/observación, el par (A, C) es observable si y sólo si (A^T, C^T) es controlable. Si (A^T, C^T) es controlable todos los autovalores de $(A^T - C^T K)$ pueden asignarse arbitrariamente mediante una elección adecuada de K . La transpuesta de $(A^T - C^T K)$ es $(A - K^T C)$ y por lo tanto $L = K^T$. \square

Así, los mismos procedimientos usados para calcular la matriz de realimentación de estados K sirven para calcular la matriz L del observador. Resumimos el procedimiento dual al de la ecuación de Sylvester. Consideramos el sistema n -dimensional SISO

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
 y(t) &= Cx(t).
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

Procedimiento de diseño de observador

1. Elegir una matriz Hurwitz $n \times n$ cualquiera F que no tenga autovalores en común con los de A .
2. Elegir un vector $n \times 1$ cualquiera L tal que (F, L) sea controlable.
3. Calcular la solución única T , no singular, de la ecuación de Sylvester $TA - FT = LC$.
4. Entonces la ecuación de estados

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + TBu(t) + Ly(t) \quad (8.21)$$

$$\hat{x}(t) = T^{-1}z(t)$$

genera una estima asintótica de $x(t)$.

Definamos el error como $\tilde{x} = z - Tx$. Así, de $TA = FT + LC$ obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{z}(t) - T\dot{x}(t) = Fz(t) + TBu(t) + LCx(t) - TA x(t) - TBu(t) \\ &= Fz(t) + LCx(t) - (FT + LC)x(t) = F(z - Tx(t)) = F\tilde{x}(t). \end{aligned}$$

Como F es Hurwitz, el error debe tender asintóticamente a cero.

8.4.3. Observador de orden reducido

Si el par (A, C) es observable, usando la matriz no singular

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

como cambio de base llevamos la matriz A a una forma companion donde

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \mathcal{O}A\mathcal{O}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= C\mathcal{O}^{-1} = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]. \end{aligned} \quad (8.22)$$

En estas coordenadas la salida queda como el primer estado, y así, no es necesario construir un observador para estimar todo el estado, sino solamente los $n - 1$ restantes. Este observador es *de orden reducido*.

Procedimiento de diseño de observador de orden reducido

1. Elegir una matriz Hurwitz $(n - 1) \times (n - 1)$ cualquiera F que no tenga autovalores en común con los de A .
2. Elegir un vector $(n - 1) \times 1$ cualquiera L tal que (F, L) sea controlable.
3. Calcular la solución única T , no singular, de la ecuación de Sylvester $TA - FT = LC$. Notar que T es una matriz $(n - 1) \times n$.
4. Entonces la ecuación de estados de orden $n - 1$

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + TBu(t) + Ly(t)$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

genera una estima asintótica de $x(t)$.

El diseño de observadores via la resolución de la ecuación de Sylvester es conveniente porque el mismo procedimiento sirve para observadores completos y reducidos y, como veremos, también para sistemas MIMO.

8.5. Realimentación de estados estimados

Consideremos nuevamente la planta

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}$$

Si (A, B) es controlable, la realimentación de estados $u = r - Kx$ asignará los autovalores de $(A - BK)$ en cualquier posición deseada. Si las variables de estado no están disponibles para la realimentación pero (A, C) es observable, podemos construir un observador de orden completo o reducido con autovalores arbitrarios. Discutimos aquí sólo el caso de observador completo

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t).$$

La estima $\hat{x}(t)$ se aproximará asintóticamente a $x(t)$ a una velocidad determinada por la elección de L .

Como $\hat{x}(t)$ converge a $x(t)$, es natural aplicar la realimentación de estados a la estima $\hat{x}(t)$

$$u(t) = r(t) - K\hat{x}(t),$$

como se muestra en la Figura 8.13. La conexión controlador-observador, es efectivamente un controlador dinámico que realimenta la salida.

Tres dudas básicas surgen frente a la conexión controlador-observador:

1. Los autovalores de $A - BK$ se obtienen de $u = r - Kx$. ¿Seguiremos teniendo los mismos autovalores con $u = r - K\hat{x}$?
2. ¿Afectará la conexión a los autovalores del observador?

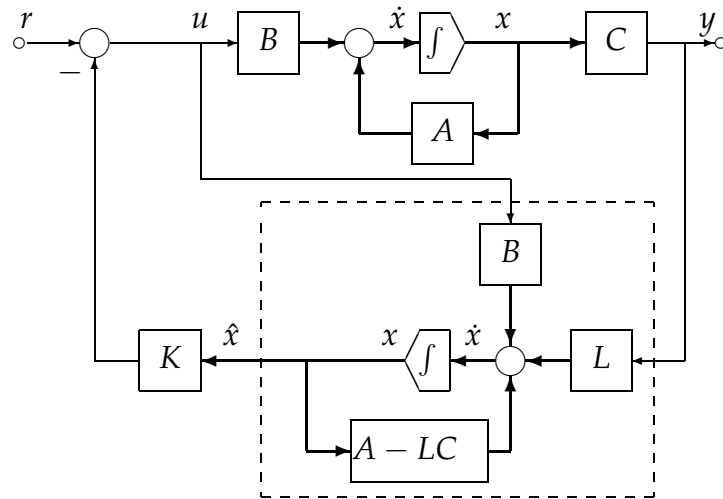


Figura 8.13: Realimentación de estados estimados

3. ¿Cuál será el efecto del observador en la función transferencia a lazo cerrado?

Para contestar a estas preguntas recurrimos a las EE que describe el sistema completo (juntando las del sistema y las del observador y con $u = r - K\hat{x}$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}.$$

Consideremos la transformación de equivalencia

$$\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \triangleq P \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}. \quad (8.23)$$

Notemos que $P^{-1} = P$. La transformación (8.23) lleva al sistema controlador-observador a la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}.$$

Como la matriz de evolución es block-triangular, los autovalores del sistema completo son la unión de los autovalores de $A - BK$ y $A - LC$. Esto implica que el estimador no afecta la realimentación de estados original; tampoco son afectados los autovalores del observador por la realimentación de estados.

Propiedad de separación de control y observación: Los diseños del control por realimentación de estados y el observador pueden realizarse en forma independiente.

Finalmente, notemos que la EE

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

evidencia los modos controlables y los no controlables. Así, vemos que los modos del error de estimación $\tilde{x}(t)$ son no controlables, por lo que no aparecerán en la función transferencia del sistema completo, que queda determinada por la ecuación de estados de orden reducido

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + Br, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad \text{es decir: } \hat{G}(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B.$$

8.5.1. Notas Históricas



R.E. Kalman (1930-)

Rudolph E. Kalman, considerado uno de los investigadores más influyentes en teoría de control, fue el líder en el desarrollo de una teoría rigurosa de sistemas de control durante los años 1960's. Sus contribuciones incluyen las nociones de variable de estados, controlabilidad, observabilidad, control por realimentación de estados, y el principio de superposición de control y observación.

Durante 1960-1961, desarrolló, junto a Richard Bucy, el estimador óptimo hoy conocido como "filtro de Kalman", ampliamente usado en sistemas de navegación, radares, y sonares, y también en campos tan diversos como procesamiento de datos sísmicos, plantas nucleares, instrumentación y econometría.

Nacido en Budapest, Hungría, Kalman estudió en el MIT, y recibió su doctorado de la Columbia University (1957). Hoy es profesor emérito de estudios de postgrado de la University of Florida, y ad personam chair del Swiss Federal Institute of Technology en Zurich, Suiza.²



D.G. Luenberger

El concepto de observadores puede atribuirse a David G. Luenberger, que lo desarrolló como resultado de su tesis doctoral (Stanford University, 1963). Su trabajo incluía los aspectos básicos de observadores, incluyendo observadores de orden reducido y transformaciones canónicas.

Actualmente, David Luenberger es profesor en el departamento de sistemas económicos, de ingeniería e investigación operacional de la Universidad de Stanford.

8.6. Realimentación de estados — caso MIMO

Si el sistema considerado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

²Nota histórica extraída de un artículo de Eduardo Sontag en el SIAM News, 6/94.

tiene p entradas, la ganancia de realimentación de estados K en $u = -Kx$ tiene $p \times n$ elementos; es decir, hay un “exceso” de grados de libertad, ya que en principio sólo necesitamos n ganancias para asignar n autovalores a lazo cerrado del sistema.

En el caso de una sola entrada, existe una única solución K para una dada configuración de autovalores a lazo cerrado elegida. En el caso multi-entrada la ganancia K que da los autovalores a lazo cerrado elegidos *no es única* ¿Cuál elegir entonces? Este “exceso” de grados de libertad puede llegar a ser un problema si no está claro como aprovecharlo. Existen varias formas de atacar el problema de elección de K en el caso multi-entrada, entre ellas:

1. *Diseño cíclico*. Reduce el problema a uno de una entrada y aplica las técnicas conocidas.
2. *Diseño vía ecuación de Sylvester*. Extiende el método de la ecuación de Sylvester a multi-entrada.
3. *Diseño canónico*. Extiende la fórmula de Bass-Gura usando la forma canónica multi-entrada del controlador.
4. *Diseño óptimo*. Calcula la matriz K en forma óptima.

Desarrollaremos los tres primeros. El diseño óptimo, que es una forma sistemática de utilizar todos los grados de libertad disponibles, lo trataremos en el capítulo siguiente.

MATLAB la función $K = \text{place}(A, B, P)$ es válida en el caso multi-entrada, y permite asignar los autovalores especificados en P , inclusive repitiendo autovalores un número máximo de veces igual al número de entradas.

Antes de entrar en los métodos de diseño, vale remarcar que los resultados de controlabilidad y asignabilidad de autovalores se extienden al caso multivariable. Los resumimos en los siguiente teoremas; las pruebas siguen de cerca el caso SISO y no las repetimos.

Teorema 8.5 (Controlabilidad y realimentación — MIMO). El par $(A - BK, B)$, para cualquier matriz real $p \times n$ K , es controlable si y sólo si (A, B) es controlable.

Teorema 8.6 (Asignabilidad de autovalores — MIMO). Todos los autovalores de $(A - BK)$ pueden asignarse arbitrariamente (siempre y cuando los autovalores complejos conjugados se asignen en pares) eligiendo la matriz constante real K si y sólo si (A, B) es controlable.

8.6.1. Diseño Cíclico

En este método transformamos el problema multi-entrada en uno de una entrada y después aplicamos los métodos de asignación de autovalores del caso SISO.

Definición 8.2 (Matriz Cíclica). Una matriz A se dice cíclica si su polinomio característico es igual a su polinomio mínimo.

Recordemos:

- Toda matriz A satisface su polinomio característico $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$, por el Teorema de Cayley-Hamilton.

- El polinomio mínimo de una matriz A es el polinomio de mínimo orden $\Psi(\lambda)$ para el que $\Psi(A) = 0$.
- El polinomio mínimo de una matriz A es igual al característico si y sólo si hay un y sólo un bloque de Jordan asociado a cada autovalor distinto de A .

Ejemplo 8.6.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

La matriz A_1 es cíclica: λ_1 tiene sólo un bloque de Jordan de orden 1 y λ_2 sólo uno de orden 3. La matriz A_2 *no* es cíclica: λ_1 tiene un bloque de Jordan de orden 1 pero λ_2 tiene dos, uno de orden 2 y uno de orden 1.

Teorema 8.7 (Controlabilidad con p entradas \Rightarrow controlabilidad con 1 entrada). Si el sistema de orden n con p entradas (A, B) es controlable y si A es cíclica, entonces para casi cualquier vector $p \times 1$ V , el sistema de 1 entrada (A, BV) es controlable.

No probamos formalmente este resultado pero mostramos su validez intuitivamente. Como la controlabilidad es invariante bajo transformación de coordenadas, asumimos A en forma de Jordan. Para ver la idea básica consideremos el ejemplo siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad BV = B \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ \alpha \\ * \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (8.24)$$

Hay sólo un bloque de Jordan asociado a cada autovalor; por lo tanto A es cíclica. La condición para que (A, B) sea controlable en estas coordenadas es que la tercera y última fila de B sean distintas de cero.

Las condiciones necesarias y suficientes para que el par de una entrada (A, BV) sea controlable son $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ en (8.24). Como

$$\alpha = v_1 + 2v_2, \text{ y } \beta = v_1$$

entonces α o β es cero si y sólo si $v_1 = 0$ o $v_1/v_2 = -2$. Así, cualquier V que no tenga $v_1 = 0$ o $v_1 = -2v_2$ va a hacer (A, BV) controlable.

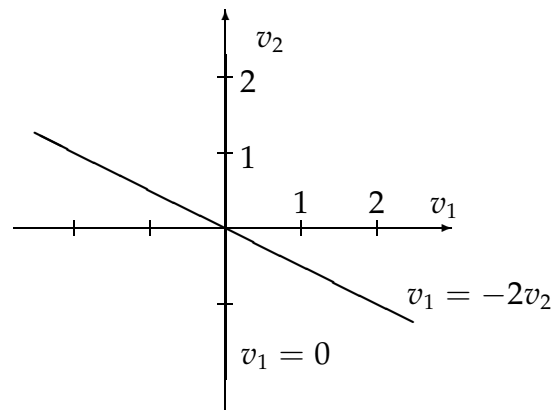
El vector $V \in \mathbb{R}^2$ puede asumir cualquier valor en \mathbb{R}^2 que no esté en la unión de las dos líneas mostradas en la Figura 8.14. La probabilidad de que un V elegido aleatoriamente caiga sobre estas líneas es nula, y por lo tanto, *para casi todo* V el par (A, BV) será controlable.

La condición de que A sea cíclica es esencial. Por ejemplo, el par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es controlable, puesto que las filas 2 y 3 de B son linealmente independientes. Sin embargo, no hay ningún V tal que (A, BV) sea controlable (dos bloques de Jordan asociados al mismo autovalor y una sola entrada).

Si todos los autovalores de A son distintos, entonces hay sólo un bloque de Jordan asociado a cada uno, y por lo tanto la matriz es cíclica.

Figura 8.14: \mathbb{R}^2

Teorema 8.8 (Cíclica por realimentación). Si (A, B) es controlable, entonces para casi toda matriz $p \times n$ real constante K , la matriz $(A - BK)$ tiene autovalores distintos y, por lo tanto, es cíclica.

No es difícil ver que la probabilidad de que, eligiendo K al azar, los autovalores de A y $(A - BK)$ coincidan es nula. Este resultado, junto con el anterior, nos da el procedimiento para asignar los autovalores de $(A - BK)$ en los lugares deseados.

Procedimiento de asignación de autovalores por diseño cíclico

1. Si A no es cíclica, introducir $u = w - K_1 x$ tal que $\bar{A} \triangleq A - BK_1$ sea cíclica. Como (A, B) es controlable, también lo es (\bar{A}, B) .
2. Elegir una $V \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ tal que (\bar{A}, BV) sea controlable.
3. Introducir $w = r - VK_2 x$, donde $K_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ sea tal que los autovalores de $\bar{A} - BVK_2$ sean los deseados.
4. La realimentación final es $u = r - (K_1 + VK_2)x$.

En MATLAB, partiendo de matrices A, B y autovalores a lazo cerrado deseados en el vector P :

```
>> (n,p) = size(B);
>> K1 = rand(p,n);
>> V = rand(p,1);
>> K2 = place(A-B*K1, BV, P);
>> K = K1 + V*K2;
```

8.6.2. Diseño via Ecuación de Sylvester

El método de diseño via la solución de una ecuación de Sylvester se extiende al caso multi-entrada. Sea un sistema controlable de orden n y p entradas (A, B) . El problema es encontrar una matriz $p \times n$ real constante K tal que $(A - BK)$ tenga cualquier conjunto de autovalores deseados siempre que no contenga ningún autovalor de A .

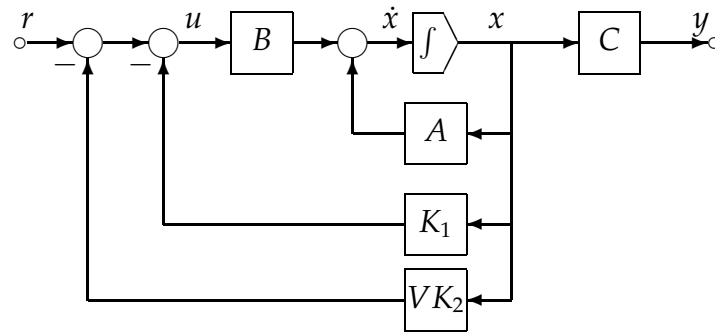


Figura 8.15: Realimentación por diseño cíclico

Procedimiento de asignación de autovalores por diseño vía ecuación de Sylvester

1. Elegir una matriz $n \times n$ F con el conjunto de autovalores deseados — que no contenga ninguno de A .
2. Elegir una matriz $p \times n$ arbitraria \bar{K} tal que (F, \bar{K}) sea observable.
3. Hallar la única solución T en la ecuación de Sylvester $AT - TF = B\bar{K}$.
4. Si T es singular, elegir una \bar{K} distinta y repetir el proceso. Si T es no singular, $K = \bar{K}T^{-1}$, y $(A - BK)$ tiene el conjunto de autovalores deseados.

Si T es no singular, la ecuación de Sylvester y $KT = \bar{K}$ implican

$$(A - BK)T = TF \quad \text{o} \quad A - BK = TFT^{-1}$$

y así $A - BK$ y F son similares y tienen los mismos autovalores. A diferencia del caso SISO, donde T es siempre no singular, en el caso MIMO T puede ser singular aún cuando (A, B) es controlable y (F, \bar{K}) observable.

8.6.3. Diseño Canónico

Este diseño extiende a MIMO el procedimiento que seguimos para derivar la fórmula de Bass-Gura en SISO. La derivación es complicada, pero como realmente muestra la esencia de la realimentación de estados, lo presentamos para un ejemplo.

La idea es llevar al sistema a la forma canónica multientrada del controlador. Supongamos que tenemos un sistema de orden 6, 2 entradas y 2 salidas, es decir, $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $B \in \mathbb{R}^{6 \times 2}$, y $C \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$.

Primero buscamos columnas linealmente independientes en

$$C = [B, AB, \dots, A^5B]$$

en orden de izquierda a derecha. Supongamos que los índices de controlabilidad son $\mu_1 = 4$ y $\mu_2 = 2$.³

³Es decir, en las n columnas LI de C hay 4 de la entrada 1, y 2 de la entrada 2.

Entonces existe una matriz no singular P tal que el cambio de coordenadas $\bar{x} = Px$ transformará el sistema a la forma canónica multi-entrada del controlador

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -\alpha_{111} & -\alpha_{112} & -\alpha_{113} & -\alpha_{114} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\alpha_{121} & -\alpha_{122} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} -\alpha_{211} & -\alpha_{212} & -\alpha_{213} & -\alpha_{214} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\alpha_{221} & -\alpha_{222} \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_{111} & \beta_{112} & \beta_{113} & \beta_{114} & \beta_{121} & \beta_{122} \\ \beta_{211} & \beta_{212} & \beta_{213} & \beta_{214} & \beta_{221} & \beta_{222} \end{bmatrix} \bar{x}$$

Ahora, de cualquier conjunto de 6 autovalores deseados podemos formar el polinomio

$$\Delta_K(s) = (s^4 + \bar{\alpha}_{111}s^3 + \bar{\alpha}_{112}s^2 + \bar{\alpha}_{113}s + \bar{\alpha}_{114})(s^2 + \bar{\alpha}_{221}s + \bar{\alpha}_{222}).$$

Eligiendo \bar{K} como

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{111} - \alpha_{111} & \bar{\alpha}_{112} - \alpha_{112} & \bar{\alpha}_{113} - \alpha_{113} & \bar{\alpha}_{114} - \alpha_{114} & -\alpha_{121} & -\alpha_{122} \\ \bar{\alpha}_{211} - \alpha_{211} & \bar{\alpha}_{212} - \alpha_{212} & \bar{\alpha}_{213} - \alpha_{213} & \bar{\alpha}_{214} - \alpha_{214} & \bar{\alpha}_{221} - \alpha_{221} & \bar{\alpha}_{222} - \alpha_{222} \end{bmatrix}$$

se puede verificar fácilmente que

$$\bar{A} - \bar{B}\bar{K} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -\bar{\alpha}_{111} & -\bar{\alpha}_{112} & -\bar{\alpha}_{113} & -\bar{\alpha}_{114} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} -\bar{\alpha}_{211} & -\bar{\alpha}_{212} & -\bar{\alpha}_{213} & -\bar{\alpha}_{214} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\bar{\alpha}_{221} & -\bar{\alpha}_{222} \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Como $(\bar{A} - \bar{B}\bar{K})$ es triangular en bloques, para cualesquiera $\bar{\alpha}_{21i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, su polinomio característico es igual al producto de los polinomios característicos de los bloques diagonales de órdenes 4 y 2. Como estos bloques están en forma companion, el polinomio característico de $(\bar{A} - \bar{B}\bar{K})$ es igual al deseado. Finalmente $K = \bar{K}P$ ubica los autovalores de $A - BK$ en las posiciones deseadas.

8.7. Observadores — MIMO

Todo lo que discutimos sobre observadores en el caso SISO vale para el caso MIMO; para el sistema de n estados, p entradas y q salidas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

el problema de observación consiste en usar la entrada u y la salida medida y para obtener una estima asintótica \hat{x} del estado del sistema x . Como en el caso SISO, el observador está dado por las ecuaciones

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly.$$

Este es un observador de orden completo. Definiendo el error de estimación como en el caso SISO,

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t),$$

llegamos a que la dinámica del error está dada por

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}.$$

Si el par (A, C) es observable, entonces los autovalores de $(A - LC)$ pueden asignarse arbitrariamente por medio de una elección adecuada de L . Así, la velocidad de convergencia de la estima \hat{x} al estado actual x puede hacerse tan rápida como se quiera.⁴

Los mismos métodos vistos para calcular K y asignar los autovalores de $A - BK$ pueden usarse para calcular L y asignar los autovalores de $A - LC$. Por ejemplo, en MATLAB, dados los autovalores deseados en el vector P , usamos

```
>> L = place(A', C', P)';
```

8.7.1. Observador MIMO de orden reducido

Presentamos el procedimiento de Chen [1999] via ecuación de Sylvester.

Procedimiento de diseño de observador MIMO de orden reducido

Sea el par (A, C) observable, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Asumimos que el rango de C es q (es decir, todas las salidas son l.i.).

1. Elegir una matriz Hurwitz cualquiera $F \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$ que no tenga autovalores en común con los de A .
2. Elegir una matriz cualquiera $L \in \mathbb{R}^{(n-q) \times q}$ tal que (F, L) sea controlable.
3. Calcular la solución única $T \in \mathbb{R}^{(n-q) \times n}$ de la ecuación $TA - FT = LC$.
4. Si la matriz $P = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es singular, volver al paso 2 y repetir el proceso. Si P es no singular, entonces la EE

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + TBu(t) + Ly(t)$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

genera una estima asintótica de $x(t)$.

8.8. Consideraciones de diseño

Sabiendo ya cómo asignar autovalores a lazo cerrado por realimentación de estados, y cómo diseñar un observador en caso de que no todos los estados sean medibles, resta decidir dónde colocar estos autovalores. Damos ahora algunas pautas a tener en cuenta en esta elección. Recordemos que dado el polinomio característico deseado

$$\Delta_K(s) = s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_n 1.$$

⁴Sin embargo, esto no necesariamente implica que el error pueda reducirse arbitrariamente. Puede mostrarse que ceros y polos de la planta con parte real positiva imponen una limitación a la mínima "energía" del error, $\int_0^\infty \tilde{x}^T(t) \tilde{x}(t) dt$, lográble eligiendo L . Hay casos en que no puede reducirse a cero.

la fórmula de Bass-Gura daba la ganancia de realimentación (SISO)

$$K = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_n - \alpha_n \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \\ \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} C^{-1}, \quad (8.25)$$

donde $C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ es la matriz de controlabilidad del sistema.

Notamos de (8.25) que K será mayor en magnitud (norma):

- cuanto más se desplacen los autovalores respecto de las posiciones de lazo abierto (mayores diferencias entre α_i y $\bar{\alpha}_i$),
- cuanto más cerca de ser singular esté C (cuanto menos controlable sea el sistema, mayor esfuerzo llevará controlarlo).

8.8.1. Dificultades de la realimentación de ganancia elevada

Si se desea estabilizar el sistema, habrá necesariamente que mover autovalores al lado izquierdo del plano complejo. Sin embargo, moverlos excesivamente a la izquierda implicará usar una K elevada. Una K elevada tenderá a hacer saturar los actuadores, trayendo efectos indeseados en el desempeño del sistema.

Es claro que si bien la estabilidad es un punto esencial en el diseño, no es el único; existen también requerimientos de velocidad de respuesta, sobrevalor, etc. Como discutíamos anteriormente, la velocidad del sistema queda definida por su “ancho de banda”, definido como la frecuencia a partir de la cual la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema comienza a decaer significativamente (3 dB).

En términos de autovalores, el ancho de banda queda determinado por los *autovalores dominantes*, es decir, aquellos cuya parte real es más cercana al origen (los de transitorios de decaimiento más lento). Así, el mover los autovalores excesivamente a la izquierda implica también un lazo cerrado de gran ancho de banda, que puede amplificar incertidumbres en el modelo y perturbaciones de alta frecuencia. Remarcamos que además, si los autovalores a lazo cerrado se sitúan a distancias desparejas del origen, el esfuerzo de control no será eficientemente distribuido, lo que implica desperdicio de energía.

Resumiendo, para una elección razonable de los autovalores:

- Elegir el ancho de banda suficientemente grande como para alcanzar los requerimientos de velocidad de respuesta deseados.
- No excederse en el ancho de banda — ojo a los efectos de ceros de fase no mínima (subvalor excesivo), y el ruido y la incertidumbre de modelado en alta frecuencia.
- Ubicar los autovalores a distancias aproximadamente uniformes del origen para un uso eficiente del esfuerzo de control.

Una configuración de autovalores común que satisface estos lineamientos es la de *Butterworth*, originaria de teoría de filtrado. La configuración Butterworth se define por 2

parámetros: la frecuencia de corte ω_0 y el orden k . La ubicación de los autovalores queda definida por las raíces de la ecuación

$$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{2k} = (-1)^{k+1}.$$

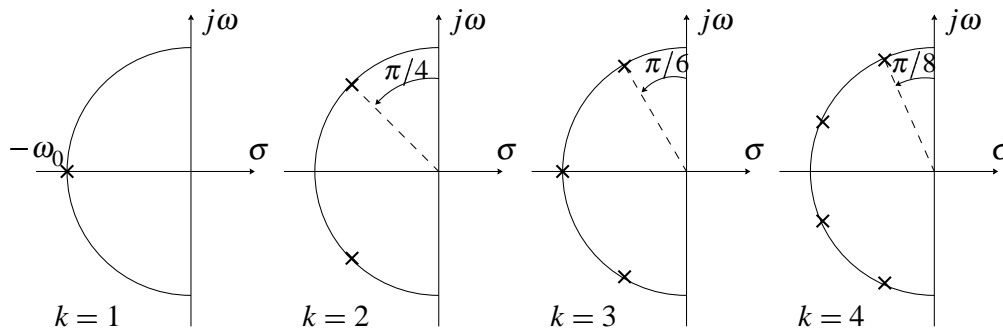


Figura 8.16: Configuración de polos Butterworth para $k = 1, 2, 3, 4$.

Los polinomios cuyos ceros tienen la configuración Butterworth son los *polinomios de Butterworth*. Los primeros 4 son:

$$B_1(s) = s + 1$$

$$B_2(s) = s^2 + \sqrt{2}s + 1$$

$$B_3(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

$$B_4(s) = s^4 + 2,613s^3 + (2 + \sqrt{2})s^2 + 2,613s + 1.$$

Los filtros de Butterworth, cuyos denominadores son los polinomios de Butterworth, se pueden calcular en MATLAB con la función

```
>> [Num,Den] = butter(N,W0,'s')
```

Como veremos en detalle en el último capítulo, la configuración Butterworth tiene propiedades de optimalidad.

8.8.2. Resumen del proceso de diseño

8.9. Resumen

Vimos dos métodos para calcular la ganancia de realimentación de estados K para asignar los autovalores de la matriz de evolución $A - BK$ del lazo cerrado en las raíces de un polinomio característico deseado:

$$\Delta_K(s) = s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_n 1.$$

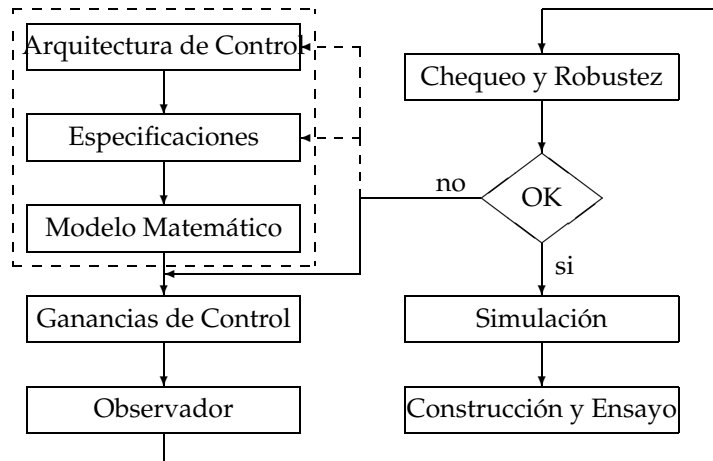


Figura 8.17: Proceso de diseño

El primer método usa la fórmula

$$K = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_n - \alpha_n \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \\ \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} C^{-1}$$

que se conoce como *Fórmula de Bass-Gura*, donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son los coeficientes del polinomio característico de A , y $C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ es la matriz de controlabilidad del sistema a lazo abierto.

Funciones útiles en MATLAB

- `pol=poly(A)` calcula los coeficientes `pol=[1, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$]` del polinomio característico de la matriz A .
- `CC=ctrb(A,B)` calcula la matriz de controlabilidad C .
- `lop=flipr(pol)` invierte el orden de los coeficientes en el vector `pol`; o sea `lop=[$\alpha_n, \dots, \alpha_1, 1$]`.
- `R=hankel(flipr(pol(1:n-1)))` arma la matriz

$$R = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La siguiente secuencia en MATLAB calcula K en la fórmula de Bass-Gura, de A , B y `polK=[1, $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n$]` (polinomio deseado):


```
>> pol = poly(A);
>> n = length(pol);
>> R = hankel(fliplr(pol(1:n-1)));
>> K = fliplr(polK(2:n-1) - pol(2:n-1))*inv(R)*inv(ctrb(A,B));
```

El segundo método resuelve la ecuación de Lyapunov generalizada (también llamada *de Sylvester*)

$$AT - TF = B\bar{K},$$

donde F es una matriz cualquiera con los autovalores a lazo cerrado deseados (distintos de los de A) y \bar{K} un vector fila arbitrario tal que (F, \bar{K}) sea observable. Entonces

$$K = \bar{K}T^{-1}.$$

En MATLAB

```
>> T = lyap(A, -F, -B*Kbar);
>> K = Kbar*inv(T);
```

Tarea de estudio Ver la justificación del segundo método en Chen [1999, §8.2.1, páginas 239-41].

8.10. Ejercicios

Ejercicio 8.1. Calcular un control por realimentación de estados $u = r - Kx$ para estabilizar el sistema del péndulo invertido dado por las EE

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x$$

ubicando los autovalores del lazo cerrado en $-1,5 \pm j0,5$ y $-1 \pm j$. Utilizar los dos procedimientos dados y comparar las ganancias de realimentación obtenidas.

Simular la respuesta del sistema realimentado a un escalón unitario en la referencia. Calcular la cota inferior teórica para el subvalor en la respuesta y comparar con los valores observados en la simulación. ¿Cuál es el compromiso de diseño si se quisiera hacer la respuesta a lazo cerrado más rápida?

¿Cómo se altera la respuesta si se recalcula una K para ubicar uno de los autovalores a lazo cerrado sobre el cero estable del sistema?

Ejercicio 8.2. Rediseñar el controlador para el sistema del Ejemplo 8.3 incorporando acción integral según el esquema de la Figura 8.8. Verificar por simulación las propiedades de robustez y rechazo de perturbaciones del lazo cerrado introduciendo incertidumbres de modelado y perturbaciones de entrada.

Ejercicio 8.3. ¿Es posible cambiar la función de transferencia a lazo abierto

$$\hat{G}(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)} \quad \text{a la de lazo cerrado} \quad \hat{G}_k(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$$

mediante realimentación de estados? ¿Será el sistema resultante BIBO estable? ¿Y asintóticamente estable? ¿Qué puede decirse para

$$\hat{G}(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)} \quad \text{al lazo cerrado} \quad \hat{G}_k(s) = \frac{1}{(s+3)}?$$

Ejercicio 8.4. Encontrar la ganancia K en $u = r - Kx$ para asignar en -1 y -2 los autovalores a lazo cerrado del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1] x. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.5. Diseñar un observador de orden completo y uno de orden reducido para estimar los estados del sistema del Ejercicio 8.4. Elegir los autovalores de los estimadores dentro del conjunto $\{-3, -2 \pm j2\}$.

Ejercicio 8.6. Calcular la función transferencia de r a y del sistema a lazo cerrado del Ejercicio 8.4. Repetir el cálculo si la realimentación se aplica al estado estimado con el observador de orden completo diseñado en el Ejercicio 8.5. Repetir pero ahora con la estima obtenida del observador de orden reducido. ¿Son las tres funciones transferencia la misma?

Ejercicio 8.7. Considerar el diseño del control de posición del motor de corriente continua del ejemplo tutorial en Matlab.

1. Implementar el sistema con controlador en SIMULINK. Simular la respuesta a un escalón en r , y a un escalón de torque de perturbación aplicado 0,1 segundos más tarde.
2. Diseñar un observador de orden reducido. Asignar los autovalores del observador de modo que no afecten la respuesta especificada para el sistema.
3. Incorporar el observador al modelo SIMULINK y aumentar el valor del momento de inercia del motor en un 20 %. Repetir el ensayo de respuesta a un escalón de la referencia y perturbación de torque. ¿Se conserva el desempeño? ¿Cuál es la máxima perturbación admisible?

Ejercicio 8.8. Para el sistema dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

encontrar 2 matrices K tales que los autovalores de $A - BK$ sean $-4 \pm j3$ y $-5 \pm j4$.

Capítulo 9

Introducción al Control Óptimo

9.1. Introducción

El método de diseño combinado de observador y realimentación de estados que vimos en el capítulo pasado es una herramienta fundamental en el control de sistemas en variable de estados. Sin embargo, no es siempre el método más *útil*; tres dificultades obvias:

1. La traducción de especificaciones de diseño a ubicación de polos no es directa, especialmente en sistemas complejos; ¿cuál es la mejor configuración de polos para especificaciones dadas?
2. Las ganancias de realimentación en sistemas MIMO no son únicas; ¿cuál es la mejor ganancia para una configuración de polos dada?
3. Los autovalores del observador deben elegirse más rápidos que los del controlador, pero, ¿tenemos algún criterio adicional para preferir una configuración a otra?

Los métodos que introduciremos en este capítulo dan respuestas a éstas preguntas. Veremos que las ganancias de realimentación de estados y del observador pueden elegirse de forma que minimicen un criterio de optimización dado.

El criterio particular que veremos es un funcional cuadrático del estado y la entrada de control,

$$J(x(t), u(t)) = \int_t^T [x^T(\tau)Qx(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau)] d\tau,$$

donde Q y R son matrices constantes (aunque no necesariamente) semi-definida y definida positivas respectivamente.

El control que se obtiene de minimizar este criterio es *lineal*. Como el criterio se basa en funcionales cuadráticos, el método se conoce como *lineal-cuadrático* (LQ: linear-quadratic), del que se obtiene el *regulador lineal cuadrático* (LQR).

Criterios similares de optimización se siguen para el diseño de observadores, sólo que el funcional depende del error de estimación, y se basa en una caracterización estadística de los ruidos que afectan al sistema. Este estimador óptimo lineal-cuadrático se conoce como el *filtro de Kalman*.

Cuando se combinan la ganancia de realimentación de estados LQ con el filtro de Kalman, obtenemos lo que se conoce como un *controlador lineal-cuadrático-gaussiano* (LQG). (Lo de gaussiano viene de la caracterización estadística del ruido empleada.)

Como material de estudio para este capítulo recomendamos Bay [1999, Capítulo 11] y Friedland [1986, Capítulos 9, 10 y 11].

9.1.1. El Principio de Optimalidad

Para entender la idea de criterio de optimización en variable de estados, la introduciremos con sistemas de tiempo discreto, que son más simples.

El estado de un sistema discreto describe una trayectoria haciendo transiciones discretas de un estado a otro bajo el efecto de una entrada también aplicada en tiempo discreto.

Cuando se asocia un criterio de optimización al sistema, cada transición de estado tiene asociado un *costo* o *penalidad*. Por ejemplo, pueden penalizarse las transiciones de estado que se alejan demasiado del estado final deseado, o las acciones de control de valores demasiado elevados. A medida que el sistema evoluciona de estado en estado, los costos se suman hasta acumular un costo total asociado a la trayectoria.

Ilustramos el concepto con el grafo de la Figura 9.1, que representa 8 estados de un sistema discreto con sus transiciones posibles. El estado inicial es el 1, y el final el 8. El sistema pasa de un estado a otro en cada tiempo k determinado por la entrada $u[k]$ y las ecuaciones $x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$.

Las transiciones posibles se representan por los arcos que conectan el estado inicial al final a través de los estados intermedios. El costo asociado a cada transición se representa con la letra J ; por ejemplo, el costo de moverse del estado 3 al 5 es J_{35} .

Asumiendo que los costos se acumulan en forma aditiva, vemos que la trayectoria marcada en rojo, por ejemplo, tiene un costo total $J_{13} + J_{35} + J_{56} + J_{68}$.

Como hay varias rutas alternativas del estado 1 al 8, el costo total dependerá de la trayectoria elegida. La señal de control $u^*[k]$ que determina la trayectoria de menor costo es la *estrategia óptima*. Como ya veremos, en sistemas de tiempo continuo, la acumulación de costos se representa mediante integración, en vez de suma.

La herramienta matemática que usaremos para determinar la estrategia óptima es el *principio de optimalidad de Bellman*.

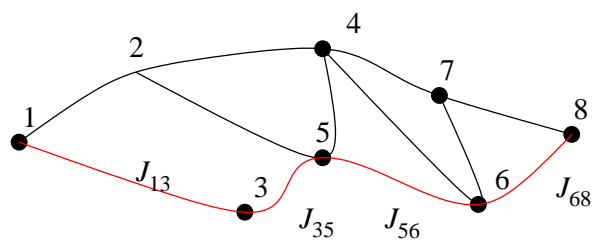


Figura 9.1: Posibles trayectorias de 1 al 8.

En cualquier punto intermedio x_i en una trayectoria óptima entre x_0 y x_f , la estrategia desde x_i al punto final x_f debe ser en sí una estrategia óptima.

Este obvio principio nos permitirá resolver en forma cerrada nuestros problemas de control óptimo. También se usa en el cómputo recursivo de las soluciones óptimas en un procedimiento llamado *programación dinámica*.

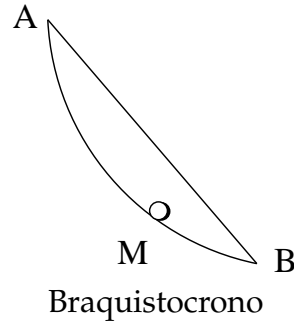
9.1.2. Nota Histórica

El nacimiento del control óptimo se atribuye al problema del *braquistocrono*, propuesto por el matemático suizo Johann Bernoulli en 1696. El problema consistía en determinar

cuál, entre todas las trayectorias posibles, era la que llevaba a una partícula (sin rozamiento) en el menor tiempo posible, desde un punto A a un punto B en el mismo plano vertical, sujeta sólo a la acción de la gravedad.



Johann Bernoulli (1667-1748)



Una formulación matemática moderna del problema del braquistocrono es la siguiente: encontrar la señal control $\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ que lleve al sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= u(t)\sqrt{y(t)} \\ \dot{y}(t) &= v(t)\sqrt{y(t)}\end{aligned}$$

desde el punto $\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ al punto $\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ en mínimo tiempo, sujeto a la restricción $u^2 + v^2 = 1$. Típico problema de control óptimo.

9.2. Control LQ discreto

Consideremos el sistema en tiempo discreto definido por¹

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p. \quad (9.1)$$

El problema de control que queremos resolver es: Encontrar la secuencia de control u_k que lleve al sistema (9.1) de la condición inicial $x_i = x_0$ al estado final $x_N = x_f$, minimizando el funcional cuadrático

$$J_{i,N} = \frac{1}{2}x_N^T S x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k. \quad (9.2)$$

El funcional (9.2) puede interpretarse como el costo total de la transición de x_i a x_N y, en particular, el término $x_N^T S x_N$ penaliza el error en alcanzar el estado final deseado.

Las matrices de peso S , Q y R pueden seleccionarse para penalizar ciertos estados/entradas más que otros. Como veremos, las matrices S y Q deben ser semi-definidas positivas, y la R definida positiva.

¹Para abreviar las expresiones, cambiamos la habitual notación discreta $x[k]$ a x_k .

9.2.1. Transición $[N - 1] \rightarrow [N]$

Para encontrar el control a aplicar al sistema de forma que se minimice (9.2), supongamos que estamos en el paso $N - 1$ de la trayectoria óptima. Así, el costo (9.2) de la transición de $N - 1$ a N es

$$J_{N-1,N} = \frac{1}{2} (x_N^T S x_N + x_{N-1}^T Q x_{N-1} + u_{N-1}^T R u_{N-1}) \quad (9.3)$$

Usando (9.1), sustituimos x_N como una función de u_{N-1} , lo que da

$$J_{N-1,N} = \frac{1}{2} \left((Ax_{N-1} + Bu_{N-1})^T S (Ax_{N-1} + Bu_{N-1}) + x_{N-1}^T Q x_{N-1} + u_{N-1}^T R u_{N-1} \right).$$

Como J es cuadrático en u , podemos minimizarlo diferenciando

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_{N-1}} \\ &= B^T S (Ax_{N-1} + Bu_{N-1}) + Ru_{N-1} \\ &= (R + B^T S B) u_{N-1} + B^T S A x_{N-1}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

De (9.4) obtenemos el último elemento de la secuencia de control óptima

$$u_{N-1}^* = -(R + B^T S B)^{-1} B^T S A x_{N-1}, \quad (9.5)$$

que resulta ser un *mínimo*, ya que

$$\frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_{N-1}^2} = R + B^T S B > 0.$$

Como vemos, (9.5) es un control lineal por realimentación de estados de la forma habitual

$$u_{N-1}^* = -K_{N-1} x_{N-1},$$

donde

$$K_{N-1} \triangleq (R + B^T S B)^{-1} B^T S A. \quad (9.6)$$

El valor del costo mínimo $J_{N-1,N}^*$ obtenido con u_{N-1}^* es

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}^* &= \frac{1}{2} \left((Ax_{N-1} - BK_{N-1}x_{N-1})^T S (Ax_{N-1} - BK_{N-1}x_{N-1}) + x_{N-1}^T Q x_{N-1} + x_{N-1}^T K_{N-1}^T R K_{N-1} x_{N-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} x_{N-1}^T \left((A - BK_{N-1})^T S (A - BK_{N-1}) + Q + K_{N-1}^T R K_{N-1} \right) x_{N-1} \\ &\triangleq \frac{1}{2} x_{N-1}^T S_{N-1} x_{N-1}, \end{aligned} \quad (9.7)$$

donde definimos $S_{N-1} \triangleq (A - BK_{N-1})^T S (A - BK_{N-1}) + Q + K_{N-1}^T R K_{N-1}$. La elección de la notación S_{N-1} en (9.7) surge de que si estamos en el paso final N , no hay ninguna acción de control que tomar y $J_{N,N} = J_{N,N}^* = \frac{1}{2} x_N^T S x_N$, es decir,

$$\begin{aligned} S_N &= S \\ K_N &= (R + B^T S_N B)^{-1} B^T S_N A \\ S_{N-1} &= (A - BK_{N-1})^T S_N (A - BK_{N-1}) + Q + K_{N-1}^T R K_{N-1}. \end{aligned}$$

9.2.2. Transición $[N - 2] \rightarrow [N]$

Tomamos otro paso para atrás en el cómputo del control óptimo y consideremos ahora que estamos en el paso $N - 2$. Notemos primero de (9.2) que

$$J_{N-2,N} = J_{N-2,N-1} + J_{N-1,N}.$$

Por lo tanto, para calcular la estrategia óptima para ir del estado en $N - 2$ al estado final en N , usamos el *principio de optimalidad* para deducir que

$$J_{N-2,N}^* = J_{N-2,N-1} + J_{N-1,N}^*,$$

y así reducimos el problema al de calcular la estrategia óptima para ir de $N - 2$ a $N - 1$ (la de $N - 1$ a N ya la obtuvimos). Así, ahora el paso $N - 1$ es el “final”, y podemos usar la misma ecuación (9.3) pero con $N - 1$ en vez de N , y $N - 2$ en vez de $N - 1$. Obtenemos

$$J_{N-2,N-1} = \frac{1}{2} (x_{N-1}^T S_{N-1} x_{N-1} + x_{N-2}^T Q x_{N-2} + u_{N-2}^T R u_{N-2})$$

Igual que antes, podemos minimizar $J_{N-2,N-1}$ sobre todos los posibles u_{N-2} , y es fácil ver que las expresiones son las mismas pero con $N - 1$ en vez de N , y $N - 2$ en vez de $N - 1$,

$$u_{N-2}^* = -K_{N-2} x_{N-2},$$

donde

$$K_{N-2} \triangleq (R + B^T S_{N-1} B)^{-1} B^T S_{N-1} A.$$

9.2.3. Transición $[k] \rightarrow [N]$

Retrocediendo en los pasos $N - 2, N - 3, \dots, k$, se generan las siguientes expresiones recursivas para el control óptimo

$$u_k^* = -K_k x_k \quad (9.8)$$

$$K_k = (R + B^T S_{k+1} B)^{-1} B^T S_{k+1} A \quad (9.9)$$

$$S_k = (A - B K_k)^T S_{k+1} (A - B K_k) + Q + K_k^T R K_k. \quad (9.10)$$

Notar que la ecuación en diferencias (9.10) de S_k se resuelve *para atrás*, comenzando en $S_N = S$. El costo óptimo de k a N es $J_{k,N}^* = \frac{1}{2} x_k^T S_k x_k$.

El conjunto de ecuaciones (9.8), (9.9) y (9.10) representa el controlador LQ completo para el sistema discreto (9.1), que resulta, en general, *inestacionario*. La ecuación en diferencias (9.10) se conoce como la *ecuación matricial en diferencias de Riccati*. El hecho de que se resuelva *para atrás* en el tiempo le da a K_k la peculiaridad de que los transitorios aparecen al final del intervalo $[k, T]$, en vez de al principio.

Ejemplo 9.1 (Control LQ en tiempo discreto). Simulamos el sistema

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

con el controlador LQ óptimo que minimiza el costo

$$J = \frac{1}{2} x_{10}^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} x_{10} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^9 x_k^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} x_k + 2u_k^2.$$

Las siguientes líneas de código MATLAB computan K_k y x_k en lazo cerrado.

```

% Costo
Q=[2 0;0 0.1];R=2;S=diag([5,5]);
k=10;
% Sistema
A=[2 1;-1 1];B=[0;1];x0=[2;-3];
% Solucion de la ecuacion de Riccati
while k>=1
    K(k,:)=inv(R+B'*S*B)*B'*S*A;
    S=(A-B*K(k,:))'*S*(A-B*K(k,:))+Q+K(k,:)'*R*K(k,:);
    k=k-1;
end
% Simulacion del sistema realimentado
x(:,1)=x0;
for k=1:10
    x(:,k+1) = A*x(:,k)-B*K(k,:)*x(:,k);
end

```

La matriz de realimentación K_k debe calcularse en tiempo invertido y almacenarse para ser aplicada posteriormente al sistema en tiempo normal.

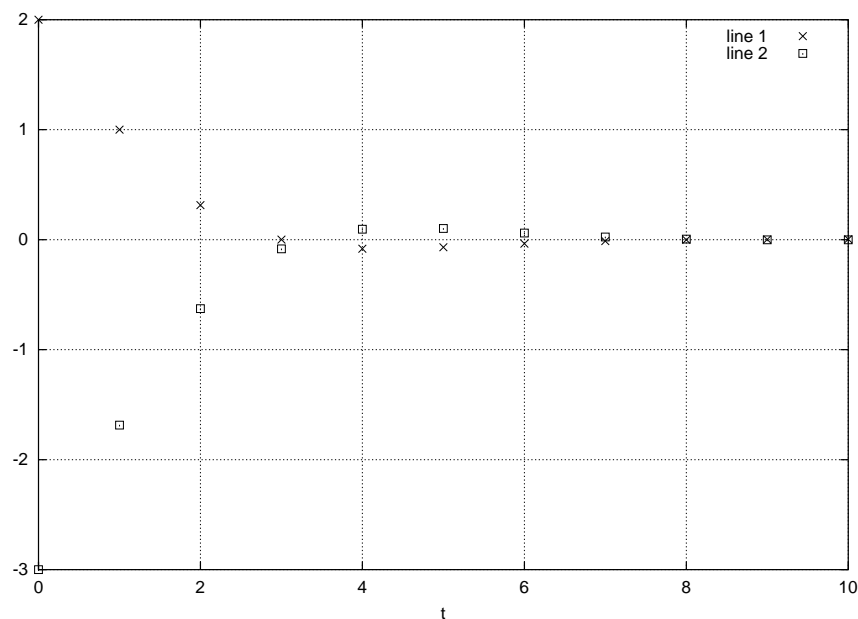


Figura 9.2: Evolución del estado en lazo cerrado: line 1: $x_1[k]$, line 2: $x_2[k]$

Aunque la planta a lazo abierto es inestable (autovalores en $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$), vemos que el estado es estabilizado asintóticamente por u_k^* . Notar que la planta a lazo cerrado es inestacionaria, ya que el control lo es.

La Figura 9.2 muestra la evolución de las ganancias de control. Podemos comprobar que sus valores cambian más sobre el *final* del intervalo, más que al comienzo, donde permanecen casi constantes.

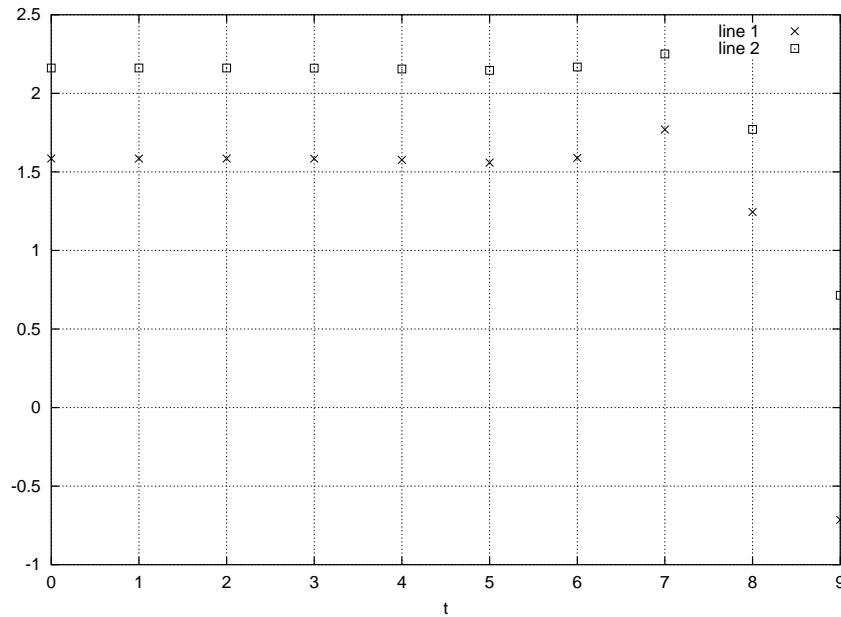


Figura 9.3: Evolución de las ganancias $K[k] = [k_1[k], k_2[k]]$ (line 1 y line 2).

9.3. Control LQ en tiempo continuo

La deducción del control óptimo LQ para el sistema en tiempo continuo,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (9.11)$$

sigue los mismos pasos que el de tiempo discreto, sólo que las “transiciones” se reducen a “incrementos” infinitesimales. El costo es ahora

$$J(x(t_0), u(t_0), t_0) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt.$$

Haciendo tender los incrementos a cero se obtienen los equivalentes de tiempo continuo de las ecuaciones (9.8), (9.9) y (9.10), que definen el control óptimo LQ en este caso (ver detalles en Bay [1999, §11.1.2]),

$$u^*(t) = -K(t)x(t) \quad (9.12)$$

$$K(t) = R^{-1}B^T P(t)x(t) \quad (9.13)$$

$$\dot{P}(t) = P(t)BR^{-1}B^T P(t) - Q - P(t)A - A^T P(t). \quad (9.14)$$

La ecuación (9.14) es la famosa *ecuación diferencial matricial de Riccati*, que, como en el caso discreto, también debe resolverse *hacia atrás* en el tiempo, con condiciones “iniciales” $P(t_f) = S$. Como en el caso discreto:

- El control óptimo LQ es una realimentación lineal de estados, aunque inestacionaria.
- Los “transitorios” en $P(t)$ y $K(t)$ ocurrirán sobre el final del intervalo $[t_0, t_f]$.

Pero, la ecuación diferencial (9.14) es en general de difícil solución. Aún, haciéndolo numéricamente, ¿cómo pueden guardarse los (infinitos) valores de $P(t)$ calculados en tiempo invertido para ser aplicados luego al sistema? Esta dificultad lleva a buscar una solución óptima *estacionaria*, $K(t) = K$, que surge de considerar el caso de *horizonte infinito* $t_f \rightarrow \infty$.

9.4. Control LQ de Horizonte Infinito

La Figura 9.3 del ejemplo sugiere que si hacemos tender el tiempo final a ∞ las soluciones de la ecuación de Riccati permanecerían constantes en el valor del instante inicial. Bajo esta suposición, $P(t)$ es constante y $\dot{P}(t) = 0$, que lleva la ecuación (9.14) a la forma que se conoce como la *ecuación algebraica de Riccati* (ARE)²

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0, \quad (\text{CARE})$$

con el correspondiente control óptimo LQ (ahora estacionario)

$$u^*(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T Px(t). \quad (9.15)$$

En el caso discreto tenemos $S_k = S, \forall k$, que da, de (9.10), (9.9)

$$\begin{aligned} S &= A^T S A - A^T S B (R + B^T S B)^{-1} B^T S A + Q \\ K &= (R + B^T S B)^{-1} B^T S A. \end{aligned} \quad (\text{DARE})$$

La ecuación (DARE) es la *ecuación algebraica discreta de Riccati*.

En rigor, sin embargo, no sabemos aún si estas soluciones constantes de “régimen permanente” resuelven los correspondientes problemas óptimos de horizonte infinito. Analizamos este punto a continuación.

Solución del problema de horizonte infinito. Queremos controlar el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

con una realimentación estática de estados $u(t) = -Kx(t)$ tal que se minimice el funcional de costo

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt.$$

Con la realimentación, el sistema a lazo cerrado queda

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (9.16)$$

incurriendo en un costo

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + x^T(t)K^T R K x(t))dt.$$

Como sabemos que la solución de (9.16) es $x(t) = e^{(A-BK)t}x_0$, la reemplazamos en la expresión del costo, y obtenemos

$$\begin{aligned} J &= x_0^T \left(\int_0^\infty e^{(A-BK)^T t} (Q + K^T R K) e^{(A-BK)t} dt \right) x_0 \\ &\triangleq x_0^T P x_0, \end{aligned} \quad (9.17)$$

donde hemos definido la matriz $P \triangleq \int_0^\infty e^{(A-BK)^T t} (Q + K^T R K) e^{(A-BK)t} dt$.

²Algebraic Riccati Equation.

Recordando el *Teorema de Lyapunov*, que viéramos en §5.4, sabemos que el sistema $\dot{x} = (A - BK)x$ es asintóticamente estable si y sólo si la matriz P definida en (9.17) es la única solución definida positiva de la ecuación de Lyapunov

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + K^T R K = 0. \quad (9.18)$$

Por lo tanto, para *cualquier* ganancia K que estabilice asintóticamente el sistema, la matriz P solución de (9.18) dará un costo finito.

Supongamos que consideramos en particular la ganancia $K = R^{-1} B^T P$, correspondiente al candidato a control óptimo LQ (9.15). Substituyendo esta K en (9.18) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (A - BR^{-1}B^T P)^T P + P(A - BR^{-1}B^T P) + Q + PBR^{-1}B^T P \\ &= A^T P - PBR^{-1}B^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q + PBR^{-1}B^T P \\ &= A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P, \end{aligned}$$

que es exactamente la ecuación algebraica de Riccati (CARE). Por lo tanto, la solución del problema de control óptimo LQ con horizonte infinito está dado por la solución de la ecuación (CARE), cuando ésta existe. El mismo resultado vale en el caso discreto.

Esto no quiere decir que las soluciones de las ecuaciones (CARE) o (DARE) serán únicas. Si existe una solución única que estabilice al sistema, entonces es la óptima. Cabe entonces la pregunta: ¿Cuándo existirá una solución de las ecuaciones algebraicas de Riccati, y bajo qué condiciones será única? La respuesta la dan los siguientes resultados:

Teorema 9.1. Si (A, B) es estabilizable, entonces, independientemente del peso S , existe una solución estática finita $P(S)$ de la ecuación diferencial (diferencia) de Riccati (9.14) ((9.10)). Esta solución será también una solución de la ecuación *algebraica* de Riccati correspondiente, y será la solución óptima en el caso de horizonte infinito.

Teorema 9.2. Si la matriz de peso Q puede factorizarse en la forma $Q = T^T T$, entonces la solución estática $P(S)$ de la ecuación diferencial (diferencia) de Riccati es la única solución definida positiva de la correspondiente ecuación algebraica si y sólo si (A, T) es detectable.

En conclusión, si (A, B) es estabilizable y (A, T) detectable, existe una solución única de (CARE) ((DARE)) que da la ganancia óptima de realimentación. Con MATLAB, K se puede calcular con $K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ (continuo) y $K = \text{dlqr}(A, B, Q, R)$ (discreto).

9.5. Estimadores Óptimos

Uno de los factores más importantes en el desempeño de sistemas de control, a menudo no tenido en cuenta, es el efecto de perturbaciones y ruido. Todos los sistemas están sujetos a ruido, sea en la forma de

- alinealidades de entrada no modeladas,
- dinámica no modelada, o
- señales de entrada no deseadas.

En esta sección trataremos algunos modelos simples de ruido y determinaremos formas de tenerlos en cuenta en el diseño de observadores y realimentación de estados.

Consideraremos primero ruido perturbando la observación del estado de un sistema. Con un modelo en ecuaciones de estado *que incluye ruido*, generaremos el mejor observador posible, es decir, el que mejor rechaza el efecto del ruido. Estos observadores suelen llamarse *estimadores*, y el particular que desarrollaremos es el estimador conocido como el *filtro de Kalman*.

9.5.1. Modelos de sistemas con ruido

Consideramos el sistema en tiempo discreto

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gv_k \\y_k &= Cx_k + w_k.\end{aligned}\tag{9.19}$$

Las nuevas señales de entrada v_k y w_k que aparecen en este modelo son *procesos aleatorios*, consistentes en ruido blanco estacionario, con media cero, y no correlacionados entre sí. Esto quiere decir que tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}E[v_k^T v_k] &= V & E[w_k^T w_k] &= W \\E[v_k^T v_j] &= 0, & E[w_k^T w_j] &= 0, \quad \text{cuando } k \neq j \\E[v_k] &= 0 & E[w_k] &= 0 \\E[v_j^T w_k] &= 0, \quad \text{para todo } j, k.\end{aligned}$$

La función $E[\cdot]$ denota la *media estadística* [para una breve introducción a procesos aleatorios ver por ejemplo Friedland, 1986, §10].

Consideraremos además que el estado inicial x_0 del sistema (9.19) es en también una variable aleatoria — ya que raramente podemos conocerlo con exactitud. Consideramos que es ruido blanco, con varianza

$$E[(x_0 - E[x_0])(x_0 - E[x_0])^T] \triangleq S_0.$$

Asumimos que x_0 no está correlacionado con v_k y w_k .

La entrada v_k se llama *ruido de planta*, o de *proceso*, y la entrada w_k , que actúa a la salida, *ruido de medición*. El ruido de planta modela el efecto de entradas ruidosas que actúan en los estados mismos, mientras que el ruido de medición modela efectos tales como ruido en los sensores. La entrada u_k es la habitual entrada de control, considerada determinística.

9.5.2. Filtro de Kalman discreto

Reconsideramos nuestra derivación anterior del observador, esta vez tomando en cuenta los efectos de ruido en la selección de la matriz de ganancia L . Esta matriz deberá elegirse de forma de dar la mejor estima del estado del sistema rechazando al mismo tiempo cualquier influencia de los ruidos v_k y w_k . La elección que haremos define el observador óptimo conocido como *filtro de Kalman*.

Hay varias formas de derivar el filtro de Kalman. Vamos a presentar una variante basada en un observador modificado, llamado *observador actual*, que permite una simplificación en las derivaciones (por alternativas ver, por ejemplo, Goodwin et al. [2000, §22], Friedland [1986], o Goodwin and Sin [1984]).

Observador actual

Recordemos las ecuaciones del observador de orden completo, en este caso, discreto,

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k).$$

Suponiendo por el momento que no hay ruidos ($v_k = 0 = w_k$), modificamos el observador con una ligera variante: separamos el proceso de observación en dos etapas:

1. *predicción* del estado estimado en $k + 1$ en base a datos en k (estima anterior + entrada actual),

$$\check{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k \quad (9.20)$$

2. *corrección* de la estima en $k + 1$ con los datos medidos en $k + 1$.

$$\hat{x}_{k+1} = \check{x}_{k+1} + L(y_{k+1} - C\check{x}_{k+1}) \quad (9.21)$$

La diferencia con el observador convencional es que ahora corregimos la estima con la medición “actual” ($y_{k+1} - \check{y}_{k+1}$) en vez de utilizar la medición “vieja” ($y_k - \hat{y}_k$). Este observador modificado se conoce como *observador actual* Bay [1999].

De (9.20) y (9.21), las ecuaciones del observador actual son

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_{k+1} - C(A\hat{x}_k + Bu_k)) \\ &= (A - LCA)\hat{x}_k + (B - LCB)u_k + Ly_{k+1}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

El observador actual será conveniente para derivar el filtro de Kalman discreto, pues permite considerar los efectos de los ruidos v_k y w_k por separado.

Notar que la ecuación del observador (9.22) difiere significativamente de la que presentamos anteriormente con sistemas continuos:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t).$$

Para el observador actual la dinámica del error está dada por

$$\tilde{x}_{k+1} = (A - LCA)\tilde{x}_k,$$

por lo que los autovalores para el observador son los de la matriz $(A - LCA)$, en vez de los de $(A - LC)$ como vimos antes. En este caso, la observabilidad del par (A, C) no garantiza que se puedan asignar los autovalores de $(A - LCA)$ arbitrariamente. Sin embargo, si la matriz A es de rango completo, el rango de CA es el mismo que el de C , y podemos considerar $\bar{C} \triangleq CA$ como una nueva matriz de salida y asignar los autovalores de $(A - L\bar{C})$ como de costumbre.

Estructura del observador

Siguiendo a Bay [1999, §11], usamos la variante del *observador actual* para derivar el filtro de Kalman. La mejor *predicción* del estado que podemos hacer cuando hay ruido es el *valor esperado*

$$\begin{aligned} \check{x}_{k+1} &= E[A\hat{x}_k + Bu_k + Gv_k] \\ &= A\hat{x}_k + Bu_k, \quad \text{dado que } E[v_k] = 0. \end{aligned}$$

Ésta suele denominarse la *estima a priori*, porque se hace antes de medir la salida (o sea que no tiene corrección). Una vez disponible la salida en el instante $k + 1$, terminamos de armar el observador actualizando la estima obteniendo la, a menudo llamada, *estima a posteriori*:

$$\hat{x}_{k+1} = \check{x}_{k+1} + L_{k+1}[y_{k+1} - C\check{x}_{k+1}]. \quad (9.23)$$

Notar que usamos una ganancia de observación L variante en el tiempo, lo que, como veremos, es necesario. En observadores determinísticos, L se seleccionaba para asignar la dinámica del error de estimación. En este caso, además, trataremos de minimizar el efecto de los ruidos.

Criterio de optimización

El filtro de Kalman es óptimo en el sentido de que da la mejor estima del estado y al mismo tiempo minimiza el efecto de los ruidos. Su derivación surge de minimizar el error de estimación *a posteriori*

$$e_k = x_k - \hat{x}_k.$$

Como e_k está afectado por ruido, y por lo tanto depende de variables aleatorias, su valor en un instante dado puede no ser representativo de las bondades de la estimación. Buscamos entonces tratar de minimizar su valor “en promedio” para todo el conjunto de ruidos posibles. Definimos entonces la *covarianza a posteriori*

$$S_k \triangleq E[e_k e_k^T].$$

Cuanto menor sea la norma de la matriz S_k , menor será la variabilidad del error de estimación debida a ruidos, y mejor el rechazo de éstos.

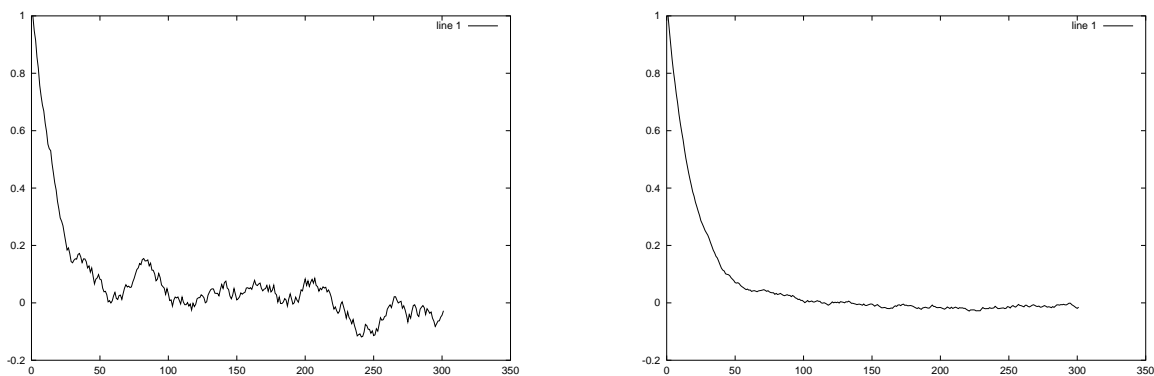


Figura 9.4: Dos señales ruidosas con mayor (iz.) y menor (der.) variabilidad.

Pretendemos determinar L_{k+1} para minimizar la variabilidad del error de estimación.

$$\begin{aligned} \min_{L_{k+1}} \|E[e_{k+1}]\|^2 &= \min_{L_{k+1}} E[e_{k+1}^T e_{k+1}] \\ &= \min_{L_{k+1}} E[\text{tr}(e_{k+1} e_{k+1}^T)] \\ &= \min_{L_{k+1}} \text{tr} E[e_{k+1} e_{k+1}^T] = \min_{L_{k+1}} \text{tr} S_{k+1}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Para obtener una expresión para S_{k+1} , derivamos la dinámica del error:

$$\begin{aligned}
e_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} \\
&= Ax_k + Bu_k + Gv_k - A\hat{x}_k - Bu_k - L_{k+1}[Cx_{k+1} + w_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}] \\
&= Ax_k - A\hat{x}_k + Gv_k - L_{k+1}[C(Ax_k + Bu_k + Gv_k) + w_{k+1} - C(A\hat{x}_k + Bu_k)] \\
&= [A - L_{k+1}CA]e_k + [G - L_{k+1}CG]v_k - L_{k+1}w_{k+1} \\
&= [I - L_{k+1}C][Ae_k + Gv_k] - L_{k+1}w_{k+1}.
\end{aligned}$$

Usando esta expresión de e_{k+1} obtenemos

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= E \left[\left[(I - L_{k+1}C)(Ae_k + Gv_k) - L_{k+1}w_{k+1} \right] \left[(I - L_{k+1}C)(Ae_k + Gv_k) - L_{k+1}w_{k+1} \right]^T \right] \\
&= E \left[(I - L_{k+1}C)(Ae_k + Gv_k)(Ae_k + Gv_k)^T (I - L_{k+1}C)^T \right. \\
&\quad \left. - 2L_{k+1}w_{k+1} [e_k^T A^T + v_k^T G^T] (I - L_{k+1}C)^T + L_{k+1}w_{k+1} w_{k+1}^T L_{k+1}^T \right]. \tag{9.25}
\end{aligned}$$

De las hipótesis sobre las propiedades estadísticas de los ruidos vistas en § 9.5.1, tenemos que

$$E[v_k^T v_k] = V, \quad E[w_{k+1}^T w_{k+1}] = W, \quad E[w_{k+1} v_k^T] = 0. \tag{9.26}$$

Además, no es difícil ver que

$$\begin{aligned}
E[w_{k+1} e_k^T] &= E[w_{k+1} (x_k - \hat{x}_k)^T] \\
&= E[w_{k+1} x_k^T] - E[w_{k+1} \hat{x}_k^T] = 0, \tag{9.27}
\end{aligned}$$

ya que x_k y \hat{x}_k no están correlacionadas con w_{k+1} . Y por otro lado,

$$\begin{aligned}
E[v_k e_k^T] &= E[v_k (x_k - \hat{x}_k)^T] \\
&= E[v_k x_k^T] - E[v_k \hat{x}_k^T] = 0, \tag{9.28}
\end{aligned}$$

ya que x_k y \hat{x}_k tampoco están correlacionadas con v_k .³ Usando (9.26), (9.27) y (9.28) en (9.25), llegamos a la expresión

$$S_{k+1} = [I - L_{k+1}C]^T [AS_k A^T + GVG^T] [I - L_{k+1}C]^T + L_{k+1}WL_{k+1}^T \tag{9.29}$$

La expresión recursiva (9.29) representa la dinámica de la covarianza del error de estimación. Esta expresión, sin embargo, no es enteramente útil, pues todavía no conocemos L_{k+1} , que determinaremos en lo que sigue.

Determinación de la ganancia de observación óptima

Para determinar el valor de la ganancia L_{k+1} que minimiza el criterio de optimización (9.24), expandimos $\text{tr } S_{k+1}$ de (9.29) en

$$\begin{aligned}
\text{tr } S_{k+1} &= \text{tr}[AS_k A^T] + \text{tr}[GVG^T] + \text{tr}[L_{k+1}C[AS_k A^T + GVG^T]C^T L_{k+1}^T] \\
&\quad - 2 \text{tr}[L_{k+1}C[AS_k A^T + GVG^T]] + \text{tr}[L_{k+1}WL_{k+1}^T]. \tag{9.30}
\end{aligned}$$

³Aunque sí lo están x_{k+1} y v_k , dado que $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gv_k$.

Ahora derivamos (9.30) con respecto a L_{k+1} . Los dos primeros términos dan cero, pues no dependen de L_{k+1} . Para los siguientes términos usamos las siguientes propiedades de la derivada de la traza de una matriz [ver Bay, 1999, Apéndice A],

$$\frac{\partial}{\partial X} \text{tr}[XYX^T] = 2XY, \quad \frac{\partial}{\partial X} \text{tr}[YXZ] = Y^T Z^T.$$

Así obtenemos de (9.30)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial L_{k+1}} \text{tr} S_{k+1} \\ &= 2L_{k+1}C[AS_kA^T + GVG^T]C^T - 2[AS_kA^T + GVG^T]C^T + 2L_{k+1}W, \end{aligned}$$

que tiene como solución

$$L_{k+1} = [AS_kA^T + GVG^T]C^T \left[C[AS_kA^T + GVG^T]C^T + W \right]^{-1} \quad (9.31)$$

Esta es la ganancia óptima para el estimador dado por la ecuación (9.23), y se conoce como la *ganancia de Kalman*. Como supusimos, es inestacionaria, ya que depende de S_k , que se obtiene resolviendo la ecuación en diferencias (9.29).

Procedimiento para computar el filtro de Kalman discreto

Resumimos los pasos necesarios para programar el filtro de Kalman. Partimos del conocimiento de las propiedades estadísticas, valor esperado y varianza, de los ruidos v_k y w_k , y la condición inicial x_0 .

1. Calculamos la estima *a priori* del estado (predicción)

$$\check{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k \quad (9.32)$$

inicializada con la estima inicial $x_{k_0} = E[x_0]$.

2. Calculamos la ganancia de Kalman de (9.31),

$$L_{k+1} = [AS_kA^T + GVG^T]C^T \left[C[AS_kA^T + GVG^T]C^T + W \right]^{-1}, \quad (9.33)$$

que inicializamos con la covarianza original $S_{k_0} = E[x_0x_0^T] = S_0$.

3. Calculamos la estima *a posteriori*, corregida con la salida medida y_{k+1} mediante (9.23), que puede simplificarse a

$$\hat{x}_{k+1} = \check{x}_{k+1} + L_{k+1}[y_{k+1} - C\check{x}_{k+1}]. \quad (9.34)$$

4. Calculamos, de (9.29), la matriz de covarianza para la próxima iteración,

$$S_{k+1} = [I - L_{k+1}C]^T [AS_kA^T + GVG^T] [I - L_{k+1}C]^T + L_{k+1}WL_{k+1}^T. \quad (9.35)$$

y el proceso se repite el siguiente paso.

Ejemplo 9.2 (Filtro de Kalman discreto). Consideremos el sistema en tiempo discreto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0,8146405 & 0,0817367 \\ -0,0817367 & 0,8146405 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0,0021886 \\ 0,0452456 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0,0430570 \\ -0,0474342 \end{bmatrix} v_k \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + w_k, \end{aligned} \quad (9.36)$$

donde el término de ruido v tiene media cero y covarianza $V = 0,09$. El ruido de medición se asume de media cero y covarianza $W = 0,25$. El sistema (9.36) es la discretización exacta, con período de muestreo $T = 0,05$ s, del sistema de tiempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} v \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + w. \end{aligned}$$

Construimos un filtro de Kalman discreto para estimar la evolución del estado del sistema (9.36) cuando se le aplica la entrada $u = \sin kT$, con período de muestreo $T = 0,05$ s, y sobre el intervalo $kT \in [0, 10]$ s. Las ecuaciones del filtro de Kalman, (9.32), (9.33), (9.34) y (9.35), no son difíciles de programar en MATLAB, por ejemplo de la siguiente manera:

```
% Ejemplo filtro de Kalman discreto
% Sistema en tiempo continuo
Ac=[-4,2;-2,-4];
Bc=[0;1];
Gc=[1;-1];
C=[1,0];

% Discretizacion exacta - Sistema en tiempo discreto
T=0.05; % tiempo de muestreo
A=expm(Ac*T);
B=inv(Ac)*(A-eye(2,2))*Bc;
G=inv(Ac)*(A-eye(2,2))*Gc;

% Covarianzas de Ruidos
V=0.09; % ruido de proceso
W=0.025; % ruido de medicion

% Condiciones iniciales del sistema (para simular)
t=0:T:10;
u=sin(t);
x0=[0;0];
x=x0;
y=C*x0;

% Conjetura de condiciones iniciales para el filtro de kalman
xh=[0.5;-0.5]; % xh(0)
xp=xh; % xp(0)
S=eye(2,2); % S0

% Simulacion
for k=1:length(t)-1
    % sistema
```

```

x(:,k+1)=A*x(:,k)+B*u(k)+G*sqrt(V)*randn;
y(k+1)=C*x(:,k+1)+sqrt(W)*randn;
% filtro de Kalman inestacionario
xp(:,k+1)=A*xh(:,k)+B*u(k); % estima a priori
L=(A*S*A'+G*V*G')*C'*inv(C*(A*S*A'+G*V*G')*C'+W);
xh(:,k+1)=xp(:,k+1)+L*(y(k+1)-C*xp(:,k+1)); % estima
S=(eye(2,2)-L*C)*(A*S*A'+G*V*G')*(eye(2,2)-L*C)'+L*W*L';
end

```

Corriendo este programa simulamos el sistema discreto y al mismo tiempo vamos calculando la estima del estado. La Figura 9.5 muestra la evolución de los estados del sistema y los estados estimados por el filtro de Kalman inestacionario. Puede verse como las variables ruidosas son filtradas por el estimador, dando versiones «suavizadas» de la evolución de los estados luego de un breve transitorio de aproximadamente 0.5 s.

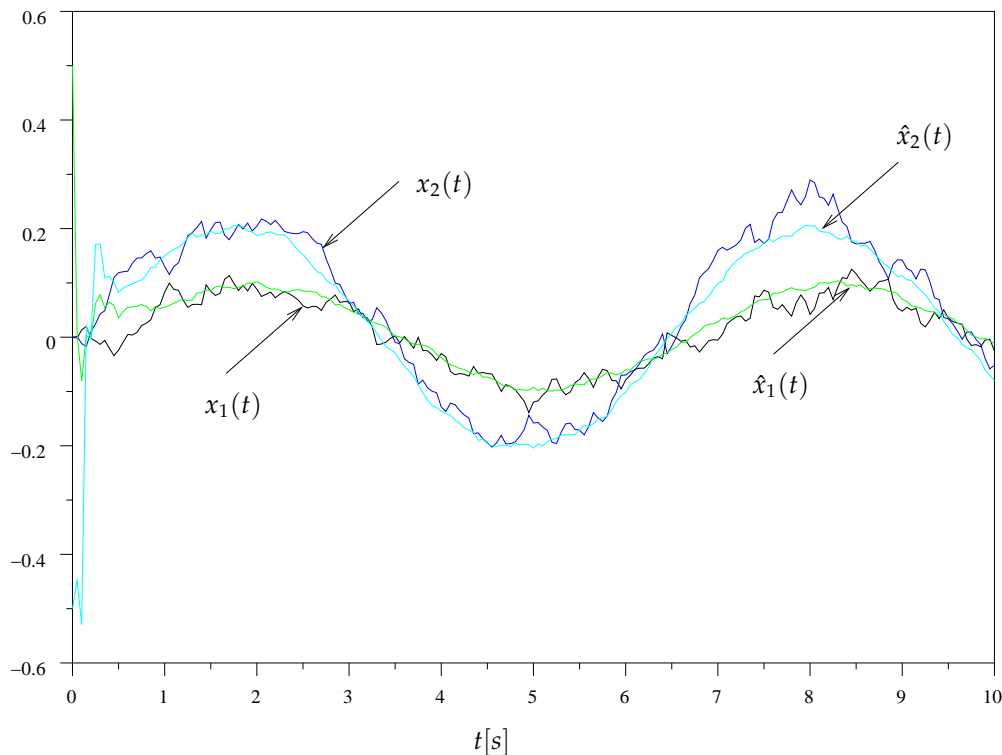


Figura 9.5: Estados verdaderos y estados estimados para el sistema (9.32)

9.6. Notas

- La ecuación diferencia de Riccati (9.29) que determina la matriz de covarianza S_k se calcula *para adelante* en el tiempo, a diferencia del dual caso de control óptimo LQ. Esto implica que el filtro de Kalman puede implementarse en su forma inestacionaria *en tiempo real*.

- El filtro de Kalman derivado es el mejor estimador si los ruidos de proceso y medición son *Gaussianos*. Para otras distribuciones probabilísticas, el filtro de Kalman es el mejor estimador *lineal*.
- El filtro de Kalman puede obtenerse también en tiempo continuo, aunque es raramente usado en la práctica, ya que casi siempre se implementa en una computadora digital, para la que la versión discreta es más natural. La derivación de las ecuaciones es similar al caso continuo, y lleva a una ecuación diferencial de Riccati, dual al caso de control LQ [ver Bay, 1999, §11.2.3].
- Como en el caso de control óptimo LQ, también en el caso del filtro de Kalman pueden calcularse soluciones estacionarias de la ecuación diferencia (diferencial) de Riccati que determina la matriz de covarianza. Esta solución será “aproximadamente óptima”, y única si y sólo si (A^T, C^T) es estabilizarle, y (A^T, T^T) detectable, donde $GCG^T = TT^T$.
- En MATLAB, la función `kalman` computa el filtro de Kalman estacionario (continuo o discreto).
- Naturalmente, el filtro de Kalman puede combinarse con cualquier control por realimentación de estados. Cuando el controlador elegido es el óptimo LQ, la combinación da lo que se conoce como *controlador lineal cuadrático gaussiano* (LQG).
- La robustificación de un regulador LQG mediante agregado de acción integral es exactamente igual al caso visto en asignación de polos y se aplica de la misma manera (la acción integral es parte del diseño de la *arquitectura* de control, y no del control en sí).
- Pueden verse algunas aplicaciones industriales del filtro de Kalman en Goodwin et al. [2000] (hay una copia disponible en IACI).

Útiles en MATLAB

DLQR Diseño de regulador lineal cuadrático para sistemas de tiempo discreto. $[K, S] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ calcula la ganancia óptima de realimentación de estados K tal que el control $u = -Kx$ minimiza el costo

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) dt$$

y estabiliza asintóticamente el sistema de tiempo discreto

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k.$$

La matriz S resuelve la ecuación algebraica de Riccati discreta

$$A^T S A - S - (A^T S B)(R + B^T S B)^{-1}(B^T S A) + Q = 0.$$

LQR Diseño de regulador lineal cuadrático para sistemas de tiempo continuo. $[K, P] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ calcula la ganancia óptima de realimentación de estados K tal que el control $u = -Kx$ minimiza el costo

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

y estabiliza asintóticamente el sistema de tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

La matriz P resuelve la ecuación algebraica de Riccati

$$PA + A^T P - (PB)R^{-1}(B^T P) + Q = 0.$$

DLQE Diseño de filtro de Kalman para sistemas discretos. La función $L = \text{dlqe}(A, G, C, Q, R)$ calcula la ganancia L del filtro de Kalman estacionario

$$\begin{aligned}\check{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k \\ \hat{x}_{k+1} &= \check{x}_{k+1} + L(y_{k+1} - C\hat{x}_k - Du_k)\end{aligned}$$

para estimar el estado x del sistema en tiempo discreto

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gw_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + v_k\end{aligned}$$

donde w y v son ruidos de proceso y de medición, respectivamente, de media nula y con covarianzas

$$Eww^T = Q, \quad Evv^T = R, \quad Ewv^T = 0.$$

Notar que si w y v son no correlacionados (como generalmente se asume), entonces $N = 0$.

LQE Diseño de filtro de Kalman para sistemas continuos. La función $L = \text{lqe}(A, G, C, Q, R, N)$ calcula la ganancia L del filtro de Kalman estacionario

$$\hat{x} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du)$$

para estimar el estado x del sistema en tiempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Gw \\ y &= Cx + Du + v\end{aligned}$$

donde w y v son ruido de proceso y de medición, respectivamente, de media nula y con covarianzas

$$Eww^T = Q, \quad Evv^T = R, \quad Ewv^T = N.$$

Notar que si w y v son no correlacionados (como generalmente se asume), entonces $N = 0$.

9.7. Ejercicios

Ejercicio 9.1. Para el sistema discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,1 \end{bmatrix} u_k$$

encontrar la secuencia de control que minimiza el funcional de costo

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{19} x_k^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + u_k^2$$

Ejercicio 9.2. Para el sistema discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

determinar el control por realimentación de estados que minimiza el criterio

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_i + u_i^2.$$

Ejercicio 9.3. Para el sistema

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

diseñar una realimentación de estados para ubicar los autovalores a lazo cerrado en $z = 0,25 \pm 0,25j$. Diseñar un observador de orden completo estándar, y uno *actual*. Programar ambos en MATLAB y comparar sus desempeños mediante simulación.

Ejercicio 9.4. La medición ruidosa en tiempo discreto de una constante desconocida α satisface el modelo

$$y_k = \alpha + v_k,$$

donde v_k es ruido blanco de varianza σ^2 .

1. Determinar un filtro óptimo para estimar α .
2. Construir un esquema SIMULINK para evaluar el filtro anterior en régimen permanente.

Ejercicio 9.5. Considerar el problema de medición en tiempo discreto de una senoide de frecuencia conocida pero amplitud y fase desconocidas, es decir:

$$y_k = A \sin(\omega_0 k + \alpha) + v_k,$$

donde v_k es ruido blanco de varianza σ^2 .

1. Contruir un modelo para generar la senoide.
2. Determinar un filtro óptimo para estimar A y α .
3. Construir un esquema SIMULINK para evaluar el filtro en régimen permanente.

Bibliografía

- John S. Bay. *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill, 1999.
- Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.
- John C. Doyle, Bruce A. Francis, and Allen Tannenbaum. *Feedback control theory*. Macmillan Pub. Co., 1992.
- B. Friedland. *Control System Design*. McGraw-Hill, 1986.
- G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2000.
- G.C. Goodwin and K.S. Sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
- Wilson J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, 2nd edition, 1995.
- Ricardo Sánchez Peña. *Introducción a la teoría de control robusto*. Asociación Argentina de Control Automático, 1992.
- M. M. Seron, J. H. Braslavsky, and G. C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. CCES Series. Springer-Verlag, 1997.
- C.F. Van Loan. Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-23(3):395–404, June 1978.