

# Capítulo 4

## Solución de la Ecuación de Estado y Realizaciones

### 4.1. Introducción

Vimos que los sistemas lineales pueden representarse mediante integrales de convolución y, si son de dimensión finita (a parámetros concentrados), también mediante ecuaciones de estado. En este capítulo veremos cómo encontrar soluciones de estas ecuaciones (solución de la ecuación de estado), y cómo transformar modelos en matriz transferencia a ecuaciones de estado (realización).

Veamos antes brevemente cómo calcular soluciones cuando uno tiene una descripción entrada/salida del sistema. Lamentablemente, no existe forma analítica simple de resolver la integral de convolución

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.1)$$

La forma más fácil es calcularla numéricamente en una computadora digital, para lo cual hay que aproximarla primero mediante una discretización. Una forma de discretizar (4.1) es en la forma

$$y(k\Delta) = \sum_{m=k_0}^k g(k\Delta, m\Delta)u(m\Delta)\Delta, \quad (4.2)$$

donde  $\Delta$  es el *paso de integración*. La ecuación (4.2) es básicamente la ecuación de convolución discreta que discutimos en §2.6.1.

En el caso lineal y estacionario, también podemos usar la representación en dominio Laplace  $\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s)$  para calcular la solución. Si el sistema es de dimensión infinita,  $\hat{g}(s)$  no va a ser una función racional de  $s$ . Salvo casos especiales, resulta más fácil calcular la solución directamente en dominio temporal de una discretización del tipo (4.2).

Cuando el sistema es lineal, estacionario y de dimensión finita, entonces  $\hat{g}(s)$  es una función racional de  $s$ . Si  $\hat{u}(s)$  también es racional, el cálculo de  $y(t)$  se reduce a calcular polos, hacer expansión en fracciones simples, y finalmente usar una tabla de transformada Laplace. En MATLAB estas operaciones pueden hacerse con las funciones `roots` y `residue`. Hay limitaciones, sin embargo, cuando existen polos repetidos, que pueden hacer que la solución sea muy sensible a errores de cómputo. En consecuencia, la transformada Laplace no es un método eficiente en computadoras digitales.

En este capítulo vemos la forma más eficiente de calcular  $y(t)$ : obtener primero una representación en EE de (4.1) (es decir, hacer una *realización* en EE), y luego resolver las

ecuaciones

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4.3)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \quad (4.4)$$

Consideraremos primero el caso estacionario y luego el caso inestacionario.

## 4.2. Solución de Ecuaciones de Estado Estacionarias

Empezamos con el caso estacionario (invariante en el tiempo), es decir:  $A, B, C, D$  constantes. Queremos determinar la solución  $x(t)$  de la ecuación

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.5)$$

para un estado inicial  $x(0)$  y entrada  $u(t), t \geq 0$  dados. Una forma de encontrar la solución en este caso, como es simple, es “probar” con una solución candidata y ver si satisface la ecuación. Por ejemplo, para si el sistema fuera escalar,

$$\dot{x}(t) = ax(t),$$

sabemos que la solución tiene la forma  $x(t) = e^{at}x(0)$ . No es mala idea entonces suponer que  $x(t)$  en (4.5) va a involucrar a la exponencial matricial  $e^{At}$ .

Multipliquemos entonces (por derecha) ambos lados de la ecuación (4.5) (escrita en la variable  $\tau$ , que va a ser nuestra variable de integración) por la matriz  $e^{-A\tau}$ . De esta operación obtenemos

$$\begin{aligned} e^{-A\tau}\dot{x}(\tau) - e^{-A\tau}Ax(\tau) &= e^{-A\tau}Bu(\tau) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}(e^{-A\tau}x(\tau)) &= e^{-A\tau}Bu(\tau). \end{aligned}$$

La integración de esta última ecuación entre 0 y  $t$  da

$$e^{-A\tau}x(\tau)\Big|_{\tau=0}^t = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau,$$

o lo que es lo mismo,

$$e^{-At}x(t) - e^0x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau.$$

Como la inversa de  $e^{-At}$  es  $e^{At}$  y  $e^0 = I$ , como vimos anteriormente, finalmente arribamos a que la solución de (4.5) es

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) es la solución general de la ecuación de estado (4.5). Suele referirse como la *fórmula de variación de los parámetros*. La substitución de (4.6) en la ecuación de salida (4.4) expresa  $y(t)$  en la forma siguiente, que evidencia la superposición de la *respuesta a entrada nula* y la *respuesta a condiciones iniciales nulas*:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \quad (4.7)$$

Como adelantáramos en §4.1, la solución de la ecuación de estado también puede calcularse en el dominio frecuencial haciendo la transformada de Laplace de (4.3) y (4.4) y resolviendo las ecuaciones algebraicas obtenidas:

$$\begin{aligned}\hat{x}(s) &= (sI - A)^{-1} [x(0) + B\hat{u}(s)] \\ \hat{y}(s) &= C(sI - A)^{-1} [x(0) + B\hat{u}(s)] + D\hat{u}(s).\end{aligned}$$

Las fórmulas (4.6) o (4.7) requieren la exponencial matricial  $e^{At}$ . Como vimos,  $e^{At}$  puede calcularse en más de una forma, entre otras,

1. Usando el Teorema 3.4 del Capítulo 3, evaluando  $f(\lambda) = e^{\lambda t}$  en el espectro de  $A$ , y calculando los coeficientes del polinomio matricial  $h(\lambda)$ .
2. Encontrando la forma de Jordan de  $A = QJQ^{-1}$ , usando la fórmula explícita de  $e^{Jt}$  al final de § 3.6.4, y después haciendo  $e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}$ .
3. Como  $\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$ , calculando la inversa de  $(sI - A)$  y antitransformando.

**Ejemplo 4.1.** Consideremos la ecuación

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Su solución está dada por la ecuación (4.6). Calculamos  $e^{At}$  por el método 3; la inversa de  $sI - A$  es

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (s+2)/(s+1)^2 & -1/(s+1)^2 \\ 1/(s+1)^2 & s/(s+1)^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La matriz  $e^{At}$  es la antitransformada Laplace de  $(sI - A)^{-1}$ , que obtenemos expandiendo en fracciones simples y usando una tabla de transformada Laplace (o en MATLAB con el *symbolic toolbox* con la función `ilaplace`).

$$\mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{(s+2)}{(s+1)^2} & \frac{-1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, usando la fórmula de variación de los parámetros (4.6)

$$x(t) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t}x_1(0) - te^{-t}x_2(0) \\ te^{-t}x_1(0) + (1-t)e^{-t}x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \\ \int_0^t [1 - (t-\tau)]e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \end{bmatrix}.$$

### 4.2.1. Comportamiento asintótico de la respuesta a entrada nula

De la forma de  $e^{Jt}$  donde  $J$  está en forma de Jordan podemos deducir el comportamiento asintótico de la respuesta del sistema a condiciones iniciales. Consideremos un sistema cuya matriz  $J = Q^{-1}AQ$  es

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

La respuesta a entrada nula de  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  es  $x(t) = e^{At}x(0)$ , donde ya conocemos la expresión en forma cerrada para  $e^{At}$

$$e^{At} = Q \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} Q^{-1}$$

Vemos que cada elemento de  $e^{At}$  será una combinación lineal de los términos  $\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ , que surgen de los autovalores de  $A$  y sus multiplicidades.

Podemos así deducir que

- Si *todos* los autovalores de  $A$ , repetidos o no, tienen parte real negativa,  $\|e^{At}\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ; la respuesta de extingue.
- Si *algún* autovalor de  $A$  tiene parte real positiva,  $\|e^{At}\| \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ; la respuesta crece en forma ilimitada.
- Si ningún autovalor de  $A$  tiene parte real positiva, y los autovalores con parte real cero son de multiplicidad 1,  $\|e^{At}\| \leq \alpha$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para alguna cota  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; la respuesta permanece acotada.
- Si  $A$  tiene autovalores con parte real cero de multiplicidad 2 o mayor,  $\|e^{At}\| \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ; la respuesta crece en forma ilimitada.

Estas conclusiones son válidas en general para la respuesta de un sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ .

**Ejemplo 4.2 (Oscilador armónico).** Para el *oscilador armónico*, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

de donde

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

La respuesta a entrada nula  $x(t) = e^{At}x(0)$  será oscilatoria.

### 4.2.2. Discretización

Una aplicación directa de la fórmula de variación de los parámetros es la discretización de sistemas para simulación o diseño de controladores digitales. Dado que la gran mayoría de los sistemas de control se implementan en forma digital, será necesario en alguna etapa del diseño discretizar; bien el controlador en tiempo continuo diseñado en base a un modelo en tiempo continuo de la planta, o bien la planta en tiempo continuo misma a fin de realizar el diseño del controlador discreto en forma directa.

La Figura 4.1 ilustra una planta en tiempo continuo con los conversores

- *analógico/digital*, o *muestreador*, que convierte la señal medida en tiempo continuo  $y(t)$  en una secuencia de valores discretos  $y[k]$ , aptos para ser procesados en una computadora digital; y
- *digital/analógico*, o *bloqueador*, que convierte la secuencia discreta de control  $u[k]$  producida por el controlador digital en la entrada analógica  $u(t)$  a la planta.

Vamos a asumir por simplicidad que ambos conversores operan en sincronismo y con un período regular  $T$ .

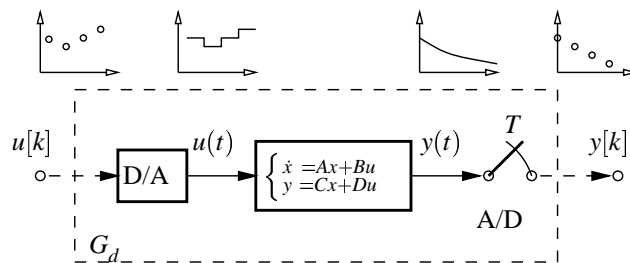


Figura 4.1: Esquema de discretización de un sistema en variables de estado

Consideremos el sistema en tiempo continuo  $G$  dado por sus EE

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t).\end{aligned}$$

Pretendemos obtener un modelo discreto  $G_d$  en EE asumiendo un *bloqueador de orden cero* (D/A) a la entrada y un *muestreador ideal* (A/D) a la salida, que son los casos más simples de estos conversores. La ley de conversión del bloqueador de orden cero es

$$u(t) = u[k], \quad \forall t \in [kT, (k+1)T),$$

mientras que la ley de conversión del muestreador ideal es

$$y[k] = y(kT).$$

### Discretización simple pero inexacta

Hagamos primero un enfoque intuitivo. La forma más simple de obtener un modelo discreto de este sistema es usando la aproximación de la derivada

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+T) - x(t)}{T}$$

para obtener  $x(t+T) = x(t) + Ax(t)T + Bu(t)T$ . Si sólo nos interesa la evolución del sistema en los instantes  $t = kT, k = 0, 1, 2, \dots$ , llegamos al modelo

$$x[k+1] = (I + AT)x[k] + BTu[k]. \quad (4.8)$$

El modelo discreto (4.8) es simple de obtener, pero *inexacto* aún en los instantes de muestreo.

### Discretización exacta

Podemos obtener un modelo discreto exacto del sistema continuo usando la fórmula de variación de los parámetros (4.6) que da la solución general de la EE. Para empezar, notemos que la salida del *bloqueador de orden cero* (D/A) se mantiene constante durante cada período de muestreo  $T$  hasta la próxima muestra,

$$u(t) = u(kT) \triangleq u[k] \quad \text{para } t : kT \leq t < (k+1)T.$$

Para esta entrada seccionalmente constante, evaluamos el estado del sistema continuo en el instante de muestreo  $t = (k+1)T$ ,

$$\begin{aligned} x[k+1] &\triangleq x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{AT} \underbrace{\left( e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right)}_{x[k]} + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu[k]d\tau \\ &= e^{AT}x[k] + \left( \int_0^T e^{A\sigma}d\sigma \right) Bu[k], \end{aligned}$$

donde en la última línea usamos  $\sigma = (k+1)T - \tau$ . Así llegamos al modelo discreto

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k] \\ y[k] &= C_d x[k] + D_d u[k], \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde

$$\begin{aligned} A_d &\triangleq e^{AT}, & B_d &\triangleq \int_0^T e^{A\tau}d\tau B \\ C_d &\triangleq C, & D_d &\triangleq D. \end{aligned}$$

El modelo (4.9) da el valor *exacto* de las variables en  $t = kT$ .

Usando la igualdad  $A \int_0^T e^{A\tau}d\tau = e^{AT} - I$ , si  $A$  es no singular podemos computar  $B_d$  con la fórmula

$$B_d = A^{-1}(A_d - I)B.$$

Un método mejor, que vale para toda  $A$ , surge del siguiente resultado

**Teorema 4.1 (Van Loan [1978]).** Sean dados los enteros positivos  $n_1, n_2$  tales que  $n_1 + n_2 = n$ . Si definimos la matriz triangular  $n \times n$

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

donde  $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  y  $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ , entonces para  $t \geq 0$

$$e^{Ct} = \begin{bmatrix} F_1(t) & G_1(t) \\ 0 & F_2(t) \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \begin{cases} F_1(t) = e^{A_1 t} \\ F_2(t) = e^{A_2 t} \\ G_1(t) = \int_0^t e^{A_1 \tau} B_1 e^{A_2(t-\tau)} d\tau. \end{cases}$$

Aplicando el teorema para  $C = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  obtenemos  $A_d = F_1(T)$  y  $B_d = G_1(T)$ . La función MATLAB `[Ad, Bd] = c2d(A, B, T)` calcula  $A_d$  y  $B_d$  de estas expresiones.

### 4.3. Ecuaciones de Estado Equivalentes

La descripción en EE para un sistema dado *no es única*. Dada una representación en EE, un simple cambio de coordenadas nos lleva a una representación en EE distinta *equivalente* del mismo sistema.

**Ejemplo 4.3.** Sea el circuito RLC de la Figura 4.2, donde  $R = 1\Omega$ ,  $L = 1H$  y  $C = 1F$ . Como salida tomamos la tensión en el capacitor. Si elegimos como variables de estado la tensión

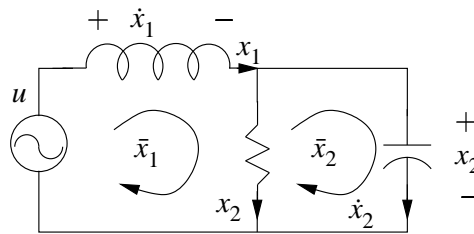


Figura 4.2: Circuito RLC

en la resistencia y la tensión en el capacitor, obtenemos la descripción en EE

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Si en cambio elegimos las corrientes de lazo  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Las dos descripciones en EE valen para el mismo circuito. De hecho puede verificarse que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad \text{es decir} \quad x = P\bar{x} \quad \text{o} \quad \bar{x} = P^{-1}x.$$

La matriz  $P$  (no singular) representa un cambio de coordenadas o *transformación de equivalencia*.

**Definición 4.1 (Transformación de Equivalencia).** Sea  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz no singular, y sea  $\bar{x} = P^{-1}x$ . Entonces la EE

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t). \end{aligned}$$

donde  $\bar{A} = PAP^{-1}$ ,  $\bar{B} = PB$ ,  $\bar{C} = CP^{-1}$ ,  $\bar{D} = D$ , se dice (algebraicamente) *equivalente* a la EE en  $x$  con las matrices  $A, B, C, D$ , y  $x = P\bar{x}$  es una *transformación de equivalencia*.

Por lo visto en el repaso de Álgebra Lineal, las matrices  $A$  y  $\bar{A}$  son similares y comparten los mismos autovalores con la misma estructura de autovectores.<sup>1</sup>

La función MATLAB `[Ab,Bb,Cb,Db] = ss2ss(A,B,C,D,P)` realiza transformaciones de equivalencia.

### 4.3.1. Equivalencia a estado cero

Dos descripciones en EE estacionarias son *equivalentes a estado cero* si tienen la misma matriz transferencia,

$$C(sI - A)^{-1}B + D = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}. \quad (4.10)$$

Usando la expansión en series<sup>2</sup>

$$(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots$$

válida para todo  $s$  que no sea un autovalor de  $A$ , podemos escribir (4.10) como

$$D + CBs^{-1} + CABs^{-2} + \dots = \bar{D} + \bar{C}\bar{B}s^{-1} + \bar{C}\bar{A}\bar{B}s^{-2} + \dots$$

**Teorema 4.2 (Equivalencia a Estado Cero).** Dos EE lineales y estacionarias  $\{A, B, C, D\}$  y  $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$  son equivalentes a estado cero si  $D = \bar{D}$  y  $CA^m B = \bar{C}\bar{A}^m \bar{B}$ , para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

### 4.3.2. Parámetros de Markov

La matriz  $D$  representa la ganancia estática directa del sistema. Cuando  $D = 0$ , la matriz transferencia se reduce a  $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , que no es otra cosa que la transformada Laplace de la respuesta al impulso

$$G(t) = Ce^{At}B.$$

Los coeficientes

$$\begin{aligned} CB &= G(0) \\ CAB &= G'(0) \\ CA^2B &= G''(0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

son las derivadas de la respuesta al impulso en el origen, y se llaman *parámetros de Markov*.

En otras palabras, dos sistemas en EE son equivalentes a estado cero

$\Leftrightarrow$  sus respuestas al impulso son idénticas.

$\Leftrightarrow$  sus ganancias estáticas y sus parámetros de Markov son idénticos.

<sup>1</sup>Dado que la forma de Jordan es única, salvo reordenamientos de filas y columnas.

<sup>2</sup>Surge de evaluar matricialmente la función  $f(\lambda) = (1 - \lambda/s)^{-1} = 1 + \lambda/s + \lambda^2/s^2 + \lambda^3/s^3 + \dots$



Es claro que equivalencia algebraica implica equivalencia a estado cero. Pero que dos sistemas tengan la misma matriz transferencia *no* implica que tengan la misma descripción en EE.

**Ejemplo 4.4 (Equivalencia algebraica  $\nRightarrow$  equivalencia a estado cero).** Los sistemas

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) & \dot{x}(t) &= u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) & y(t) &= x(t). \end{aligned}$$

son equivalentes a estado cero, ya que para ambos  $D = 0$  y  $CB = 1$ ,  $CA^m B = 0$  para todo  $m \geq 1$ , y por ende, tienen la misma función transferencia,  $\hat{G}(s) = 1/s$ . No son, sin embargo, algebraicamente equivalentes (tienen distinta dimensión).

## 4.4. Formas Canónicas

Existen formas particulares de las EE que presentan características útiles. Estas formas se llaman canónicas y discutimos tres:

- Forma canónica modal,
- Forma canónica controlable,
- Forma canónica del controlador.

### 4.4.1. Forma canónica modal

La forma canónica modal es aquella en la que la matriz  $A$  del sistema está en forma de Jordan. Como ya vimos, la matriz de cambio de base  $Q$  se forma apilando los autovectores y autovectores generalizados del sistema. Recordemos la salvedad cuando hay autovalores complejos  $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ ,  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$  — naturalmente conjugados ya que  $A$  es real — con autovectores  $v_{1,2} = r \pm ju$ ,  $r, u \in \mathbb{R}^n$ ; En vez de apilar  $v_1$  y  $v_2$  en  $Q$  hay que usar  $r$  y  $u$  para obtener la forma de Jordan real con el bloque  $\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$ .

**Ejemplo 4.5.** La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

tiene autovalores  $\lambda_1 = 1 + j$ ,  $\lambda_2 = 1 - j$ , y  $\lambda_3 = 2$ , respectivamente con autovectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz de cambio de base  $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  la lleva a la forma de Jordan real

$$Q^{-1} * A * Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

### 4.4.2. Forma canónica controlable

Presentamos esta forma canónica para el caso de una sola entrada de control, es decir  $B \in \mathbb{R}^n$ . Esta forma canónica se obtiene seleccionando como matriz de cambio de base  $C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ , que lleva a la matriz  $A$  a una forma *companion*,

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Obviamente se requiere que la matriz  $C$  sea no singular (lo que veremos sucede si el sistema es *controlable*).

Esta forma canónica tiene una relación uno a uno con el polinomio característico de  $A$ ,  $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$ .

En MATLAB la función `[Ac,Bc,Cc,Dc] = canon(A,B,C,D,'modal')` genera la forma canónica modal y `canon(A,B,C,D,'companion')` la forma canónica controlable.

### 4.4.3. Forma canónica del controlador

Una forma canónica similar a la controlable (4.11), pero más conveniente para diseño de control, es la *del controlador*. Esta está dada por (caso SISO)

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de cambio de base es  $Q = CR$ , donde  $C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  y

$$R = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La derivación del caso multientrada es complicada [ver Rugh, 1995, §13]; volveremos a ella en el Capítulo 6.

**Ejemplo 4.6.** Consideremos un sistema cuyas matrices  $A$  y  $B$  son

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz  $C = [B, AB, A^2B]$  con la función MATLAB `ctrb(A,B)`, y  $R$  con el polinomio característico de  $A$ , `poly(A)`,  $\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 8\lambda - 2$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 20 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 14 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde obtenemos

$$(CR)^{-1}A(CR) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \quad (CR)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## 4.5. Realizaciones

Como vimos, todo sistema lineal estacionario (invariante en el tiempo) puede describirse por una representación entrada-salida con matriz transferencia

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s),$$

y si el sistema es de dimensión finita, también por una representación interna en EE

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Cuando tenemos las EE,  $\{A, B, C, D\}$ , la matriz transferencia puede calcularse en forma única como  $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ . El problema inverso, de obtener las EE  $\{A, B, C, D\}$  de  $\hat{G}(s)$ , se llama problema de *realización*. Diremos que una matriz transferencia  $\hat{G}(s)$  es *realizable* si existe una EE con  $\{A, B, C, D\}$  tales que  $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , y el cuádruplo  $\{A, B, C, D\}$  se dice una *realización* de  $\hat{G}(s)$ .

Como vimos con el Ejemplo 4.3, si existe *una* realización, existen infinitas, ya que un simple cambio de coordenadas lleva a una descripción en EE equivalente. Más aún, dos sistemas en EE no necesariamente de la misma dimensión pueden tener la misma función transferencia.

Para analizar el problema de realizabilidad necesitamos introducir el concepto de función transferencia *propia*.

**Definición 4.2 (Función transferencia propia).** Una función transferencia racional (cociente de polinomios) es *propia* si el grado del polinomio numerador no supera (es menor o igual) al grado del polinomio denominador. Si el grado del numerador es estrictamente menor que el del denominador, la función se dice *estrictamente propia*.

La definición de función transferencia propia se extiende naturalmente a una *matriz* transferencia, que es (estrictamente) propia si todos sus elementos son funciones racionales (estrictamente) propias.

**Teorema 4.3 (Realizabilidad).** Una matriz transferencia  $\hat{G}(s)$  es realizable  $\Leftrightarrow \hat{G}(s)$  es una matriz racional y propia.

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Si  $\hat{G}(s)$  es realizable, entonces existen matrices  $\{A, B, C, D\}$  tales que

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} C \operatorname{adj}(sI - A)B + D\end{aligned}$$

Si  $A$  es  $n \times n$ ,  $\det(sI - A)$  es un polinomio de orden  $n$ . Como cada elemento de  $\operatorname{adj}(sI - A)$  es el determinante de una submatriz  $(n - 1) \times (n - 1)$ ,  $C \operatorname{adj}(sI - A)B$  es una matriz de polinomios de a lo sumo grado  $n - 1$ . Así  $(sI - A)^{-1}B$  es racional y estrictamente propia, y si  $D \neq 0$ ,  $\hat{G}(s)$  racional y propia.

( $\Leftarrow$ ) Si que  $\hat{G}(s)$  es una matriz racional propia  $q \times p$  descomponemos  $\hat{G}(s) = \hat{G}(\infty) + \hat{G}_{ep}(s)$ , donde  $\hat{G}_{ep}(s)$  es la parte estrictamente propia de  $\hat{G}(s)$ .

Definimos  $d(s) = s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1}s + \alpha_r$  como el polinomio mónico mínimo común denominador de los elementos de  $\hat{G}_{ep}(s)$ . Entonces podemos expresar

$$\hat{G}_{ep}(s) = \frac{1}{d(s)} [N_1 s^{r-1} + N_2 s^{r-2} + \dots + N_{r-1}s + N_r],$$

donde las  $N_i$  son matrices constantes  $q \times p$ . Entonces no es difícil probar que el conjunto de EE en forma canónica del controlador

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_p \\ -\alpha_r I_p & -\alpha_{r-1} I_p & -\alpha_{r-2} I_p & \dots & -\alpha_1 I_p \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{bmatrix} u(t) \\ y &= [N_r \ N_{r-1} \ N_{r-2} \ \dots \ N_1] x(t) + \hat{G}(\infty)u(t)\end{aligned}$$

es una realización de  $\hat{G}(s)$ , finalizando la demostración.  $\square$

Entonces, una matriz transferencia  $\hat{G}(s)$  es realizable sii  $\hat{G}(s)$  es racional y propia. En la prueba del Teorema 4.3 tenemos una forma de obtener las matrices  $A, B, C$  de la realización ( $D$  es directamente  $\hat{G}(\infty)$ ). En el caso SISO esta forma es particularmente simple y se reduce a la *forma canónica del controlador*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.12)$$

$$y(t) = [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \beta_{n-2} \ \dots \ \beta_1] x(t) \quad (4.13)$$

correspondiente a una función transferencia  $\hat{G}(s)$  dada por

$$\hat{G}(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_n}.$$

La misma función transferencia corresponde a la forma canónica alternativa del controlador

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \cdots \ \beta_{n-1} \ \beta_n] x(t).$$

En el caso SIMO (una entrada y varias salidas) la forma es también simple; la única modificación en la ecuación (4.12) es en la ecuación de salida

$$y(t) = \begin{bmatrix} \beta_{1n} & \cdots & \beta_{13} & \beta_{12} & \beta_{11} \\ \beta_{2n} & \cdots & \beta_{23} & \beta_{22} & \beta_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{pn} & \cdots & \beta_{p3} & \beta_{p2} & \beta_{p1} \end{bmatrix} x(t) \quad (4.14)$$

para  $y \in \mathbb{R}^p$ , que corresponde a la matriz transferencia

$$\hat{G}(s) = \frac{\begin{bmatrix} \beta_{11}s^{n-1} + \beta_{12}s^{n-2} + \cdots + \beta_{1n} \\ \beta_{21}s^{n-1} + \beta_{22}s^{n-2} + \cdots + \beta_{2n} \\ \vdots \\ \beta_{p1}s^{n-1} + \beta_{p2}s^{n-2} + \cdots + \beta_{pn} \end{bmatrix}}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n}$$

La realización SISO (4.12)-(4.13), o la SIMO (4.12)-(4.14), pueden escribirse directamente por inspección de la matriz transferencia  $\hat{G}(s)$ .

¿Cómo encaramos el caso MIMO? Puede considerarse como la superposición de varios SIMOs, por ejemplo dividiendo la matriz transferencia en columnas y realizando las columnas por separado (cada columna corresponde a un subsistema SIMO), como se ilustra en la Figura 4.3,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{y}_p(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(s) & \hat{G}_{12}(s) & \cdots & \hat{G}_{1m}(s) \\ \hat{G}_{21}(s) & \hat{G}_{22}(s) & \cdots & \hat{G}_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{G}_{p1}(s) & \hat{G}_{p2}(s) & \cdots & \hat{G}_{pm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \hat{u}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{u}_m(s) \end{bmatrix} \\ &= [\hat{G}_{C1}(s) \ \hat{G}_{C2}(s) \ \cdots \ \hat{G}_{Cm}(s)] \begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \hat{u}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{u}_m(s) \end{bmatrix} \\ &= \hat{G}_{C1}(s)\hat{u}_1(s) + \hat{G}_{C2}(s)\hat{u}_2(s) + \cdots + \hat{G}_{Cm}(s)\hat{u}_m \end{aligned}$$

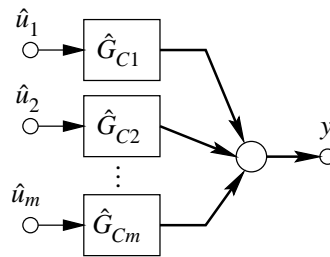


Figura 4.3: Representación de un sistema MIMO por columnas

Si  $A_i, B_i, C_i, D_i$  es la realización de la columna  $\hat{G}_{Ci}(s)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , de  $\hat{G}(s)$  entonces una realización de la superposición es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$y = [C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + [D_1 \ D_2 \ \cdots \ D_m] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

De forma similar, la realización de un sistema MIMO también se puede encarar, *mutatis mutandis*, como la superposición de varios sistemas MISOs subdividiendo la matriz transferencia *por filas*.

**Ejemplo 4.7.** Consideramos la matriz transferencia

$$\begin{aligned} \hat{G}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{4s-10}{2s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-12}{2s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-6(s+2)}{s^2+\frac{5}{2}s+1} & \frac{3(s+2)}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Realizamos la parte estrictamente propia de (4.15) por columnas.

$$\begin{bmatrix} \frac{-6(s+2)}{s^2+\frac{5}{2}s+1} \\ \frac{1}{s^2+\frac{5}{2}s+1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_{C1} &= \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3(s+2)}{s^2+2s+4} \\ \frac{(s+1)}{s^2+2s+4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} \dot{x}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \\ y_{C1} &= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_2 \end{aligned}$$

Finalmente superponemos las realizaciones de las columnas de  $\hat{G}(s)$  para obtener su realización completa.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} -12 & -6 & 6 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

#### 4.5.1. Realización Mínima

Los métodos vistos para obtener una realización de una matriz transferencia (por columnas, por filas, etc.) dan en general realizaciones de distintos órdenes. Cabe preguntarse si será posible obtener una realización que tenga el menor orden posible, que implicará, en general, el modelo en EE más simple. Para toda matriz transferencia realizable existen siempre realizaciones de orden mínimo, llamadas *realizaciones mínimas*. Éstas realizaciones son no sólo equivalentes a estado cero entre sí, sino también algebraicamente equivalentes.

Las realizaciones mínimas están intrínsecamente relacionadas con las propiedades de *controlabilidad* y *observabilidad* del sistema que estudiaremos en El Capítulo 6. La función MATLAB `[Am, Bm, Cm, Dm] = minreal(A, B, C, D)` lleva una realización dada  $\{A, B, C, D\}$  de  $\hat{G}(s)$  a una realización mínima.

#### 4.5.2. Sistemas Discretos

Como es fácil de ver, los conceptos y la teoría de realizaciones que vimos hasta aquí sólo dependen de las matrices  $\{A, B, C, D\}$  y su relación con la matriz transferencia  $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ . Evidentemente entonces, estos conceptos y teoría se aplican también, sin modificaciones, a sistemas de tiempo discreto.

### 4.6. Solución de Ecuaciones de Estado Inestacionarias

Pasemos ahora a analizar el caso inestacionario. Sea entonces el sistema inestacionario descrito por las EE

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

para el que asumimos que existe una solución única para cada condición inicial  $x(t_0)$  y cada entrada de control  $u(t)$ . La solución de las ecuaciones (4.17) es lógicamente más difícil de obtener que en el caso estacionario, pero veremos que la experiencia obtenida va a ser de utilidad. Antes de encarar el caso más general, con entrada, tratemos solamente la respuesta a condiciones iniciales, es decir, el sistema homogéneo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (4.18)$$

Vamos a mostrar primero por qué el método aplicado para deducir la solución en el caso estacionario no sirve. Vale recordar de la teoría de ecuaciones diferenciales que una condición suficiente para la existencia y unicidad de solución de (4.18) es que la función matricial  $A(t)$  sea una función continua de  $t$ . Es decir,

Para cada par  $(t_0, x(t_0))$ , la ecuación lineal (4.18) con  $A(t)$  continua tiene una solución única y continuamente diferenciable.

En el caso estacionario  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  lo que hicimos fue extender la solución de la ecuación escalar  $\dot{x}(t) = ax(t)$  para mostrar que la solución general era  $x(t) = e^{At}x(0)$ , usando la propiedad de conmutatividad de  $A$  con  $e^{At}$  en

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A.$$

Ahora, para el caso inestacionario sabemos que la solución de la ecuación escalar inestacionaria  $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$  con condición inicial  $x(0)$  es

$$x(t) = e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}x(0). \quad (4.19)$$

Sabemos además de la propiedad

$$\frac{d}{dt}e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} = a(t)e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} = e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}a(t).$$

Probemos a ver si funciona extender directamente (4.19) en forma matricial. Escribimos (4.19) en forma matricial como

$$x(t) = e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}x(0),$$

donde la exponencial matricial  $e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}$  puede expresarse como

$$e^{\int_0^t A(\tau)d\tau} = I + \int_0^t A(\tau)d\tau + \frac{1}{2} \left( \int_0^t A(\tau)d\tau \right)^2 + \dots$$

La extensión de la solución escalar al caso matricial *no* es válida en el caso inestacionario pues

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{\int_0^t A(\tau)d\tau} &= A(t) + \frac{1}{2}A(t) \left( \int_0^t A(\tau)d\tau \right) + \frac{1}{2} \left( \int_0^t A(\tau)d\tau \right) A(t) + \dots \\ &\neq A(t)e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}, \end{aligned}$$

dado que para distintos tiempos  $t$  y  $\tau$  las matrices  $A(t)$  y  $A(\tau)$  son distintas, y por ende en general no conmutan,  $A(t)A(\tau) \neq A(\tau)A(t)$ . Concluimos que en general,  $x(t) = e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}x(0)$  *no* es una solución de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  y debemos usar otro método para derivarla. El método que usaremos requiere la introducción de la *matriz fundamental* del sistema.

#### 4.6.1. Matriz Fundamental

Consideremos

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (4.20)$$

donde  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una función continua de  $t$ . Entonces para cada condición inicial  $x(t_0)$  existe una única solución  $x(t)$ . Si tomamos un conjunto de  $n$  condiciones iniciales  $x(t_0) =$



$v_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, n$ , obtendremos  $n$  soluciones  $x(t; v_i)$ .<sup>3</sup> Apilemos estas  $n$  soluciones en una matriz  $n \times n$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t; v_1) & x(t; v_2) & \cdots & x(t; v_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{para cada } t.$$

Dado que cada  $x(t; v_i)$  es una solución de (4.20), no es difícil ver que la matriz  $X(t)$  a su vez satisface la ecuación

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \quad \text{con condición inicial } X(t_0). \quad (4.21)$$

Si  $X(t_0)$  es no singular (es decir, las  $n$  condiciones iniciales  $x_i(t_0)$  son LI), entonces  $X(t)$  se dice una *matriz fundamental* del sistema (4.20).

**Ejemplo 4.8.** Consideremos la ecuación homogénea

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} x(t). \quad (4.22)$$

La solución de la primer componente  $\dot{x}_1(t) = 0$  es  $x_1(t) = x_1(0)$ ; la solución de la segunda componente  $\dot{x}_2(t) = tx_1(t)$  es  $x_2(t) = \int_0^t \tau x_1(\tau) d\tau + x_2(0) = t^2/2 x_1(0) + x_2(0)$ .

Para condiciones iniciales  $x(0) = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $x(0) = v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  tenemos respectivamente las soluciones

$$x(t; v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ t^2/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x(t; v_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ t^2/2 + 2 \end{bmatrix}.$$

Como los estados iniciales  $v_1$  y  $v_2$  son linealmente independientes,

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t^2/2 & t^2/2 + 2 \end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental de (4.22).

Obviamente, como las columnas de  $X(t_0)$  se pueden elegir LI de muchas formas, la matriz fundamental  $X(t)$  *no es única*. Sin embargo, una propiedad muy importante que sí tiene una matriz fundamental  $X(t)$  es la siguiente.

**Teorema 4.4 (No singularidad de la Matriz Fundamental).** Una matriz fundamental  $X(t)$  es no singular para todo  $t$ .

*Demostración.* Si  $X(t)$  fuera singular para algún  $t_1 \neq t_0$ , entonces existiría un vector no nulo  $z$  tal que  $X(t_1)z = 0$ . Por linealidad del sistema, la función  $\zeta(t) \triangleq X(t)z$  es una solución que cumple  $\zeta(t) = 0$  para todo  $t \geq t_1$ . Como las soluciones son únicas,  $\zeta(t) = 0$  para todo  $t$  (la solución nula es única), y en particular para  $t = t_0$ , es decir  $0 = \zeta(t_0) = X(t_0)z$ . Llegamos a una contradicción, pues  $X(t_0)$  fue asumida no singular en  $t_0$ . En conclusión, si  $X(t)$  es una matriz fundamental, debe ser no singular para todo  $t$ .  $\square$

Como una matriz fundamental  $X(t)$  es no singular para todo  $t$ , su inversa está bien definida, y por lo tanto podemos hacer la siguiente definición, crucial para la solución de EE inestacionarias.

<sup>3</sup>La notación  $x(t; v)$  representa la solución de (4.20) con condición inicial  $x(t_0) = v$ .

**Definición 4.3 (Matriz de Transición de Estado).** Sea  $X(t)$  cualquier matriz fundamental de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ . Entonces la matriz

$$\Phi(t, t_0) \triangleq X(t)X^{-1}(t_0)$$

se llama *matriz de transición de estados* de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ .

En el caso estacionario ( $A(t) = A$  constante), una matriz fundamental es directamente  $X(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0)$ , y así la matriz de transición resulta

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

**Ejemplo 4.9.** Para el sistema (4.22) en el ejemplo anterior obtenemos  $X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} t^2/4+1 & -1/2 \\ -t^2/4 & 1/2 \end{bmatrix}$ , y así

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t^2/2 & t^2/2 + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0^2/4 + 1 & -1/2 \\ -t_0^2/4 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (t^2 - t_0^2)/2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como hemos visto, el método usado en el caso estacionario no podía aplicarse para derivar la solución general de EE inestacionarias (esencialmente porque  $A(t)$  no conmuta con  $\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau$ ).

Hemos también definido

- la *matriz fundamental*  $X(t)$ , formada apilando  $n$  soluciones linealmente independientes del sistema  $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ , y
- la *matriz de transición de estados*  $\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$ . En el caso estacionario la matriz de transición es simplemente  $e^{A(t-t_0)}$ .

En los ejercicios propuestos se pide probar que  $\Phi(t, t_0)$  es la única solución de la ecuación matricial

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I, \quad (4.23)$$

y que satisface las siguientes propiedades:

$$\Phi(t, t) = I \quad (4.24)$$

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad (4.25)$$

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0). \quad (4.26)$$

Utilizaremos estas propiedades de  $\Phi(t, t_0)$  para mostrar que las solución de

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \quad (4.27)$$

con condiciones iniciales  $x(t_0) = x_0$  y entrada  $u(t)$  está dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.28)$$

*Demostración de (4.27).* Tenemos que mostrar que la solución  $x(t)$  en (4.28) satisface las condiciones iniciales y la ecuación diferencial de EE en (4.27). Evaluando (4.28) en  $t = t_0$  y usando la propiedad (4.24) vemos que

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \Phi(t_0, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= Ix_0 + 0 = x_0. \end{aligned}$$

Usando (4.23) y la regla de Leibniz <sup>4</sup> obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0)x_0 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= A(t)\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \Phi(t, t)B(t)u(t) \\ &= A(t)\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t A(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \Phi(t, t)B(t)u(t) \\ &= A(t)x(t) + B(t)u(t). \end{aligned}$$

□

La respuesta de la salida en (4.27) está dada por

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t).$$

La respuesta a entrada nula es

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0,$$

y la respuesta a condiciones iniciales nulas se puede escribir como

$$y(t) = \int_{t_0}^t (C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau)) u(\tau)d\tau, \quad (4.29)$$

que corresponde con la representación entrada-salida vista

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.30)$$

Comparando (4.29) y (4.30) concluimos que la respuesta del sistema (4.27) a un impulso aplicado en el instante  $\tau$  está dada por

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau) \\ &= C(t)X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Resumiendo, la solución general de la EE en sistemas inestacionarios requiere la solución de la ecuación

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

para obtener  $X(t)$ , o bien la solución de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

para obtener  $\Phi(t, t_0)$ . Estas ecuaciones son difíciles de resolver, salvo para casos especiales. Hay dos casos especiales que pueden ser muy útiles:

---

<sup>4</sup>Ver § 3.6.6:  $\frac{d}{dt} \int_{f(t)}^{g(t)} A(t, \tau)d\tau = A(t, \tau)\dot{g}(t) - A(t, \tau)\dot{f}(t) + \int_{f(t)}^{g(t)} \frac{\partial}{\partial t} A(t, \tau)d\tau$ .

1. La matriz  $A(t)$  es triangular; como por ejemplo en

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

En este caso podemos resolver la ecuación escalar  $\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t)$  y substituir la solución en la ecuación de  $x_2$ ,

$$\dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t).$$

2. La matriz  $A(t)$  posee la propiedad conmutativa

$$A(t) \left( \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) = \left( \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) A(t)$$

para todo  $t$  y  $t_0$  (como es el caso de  $A(t)$  diagonal o constante). Entonces puede probarse que la solución está dada por

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^k.$$

#### 4.6.2. Caso Discreto

La solución de las EEs inestacionarias en tiempo discreto

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A[k]x[k] + B[k]u[k] \\ y[k] &= C[k]x[k] + D[k]u[k] \end{aligned} \quad (4.32)$$

es mucho más simple que el caso en tiempo continuo. En forma similar definimos la *matriz de transición de estados discreta* como la solución de

$$\Phi[k+1, k_0] = A[k]\Phi[k, k_0], \quad \text{con } \Phi[k_0, k_0] = I, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots$$

La diferencia importante es que en el caso discreto la solución se obtiene en forma explícita como

$$\Phi[k, k_0] = A[k-1]A[k-2] \cdots A[k_0] \quad (4.33)$$

para  $k > k_0$  y  $\Phi[k_0, k_0] = I$ .

**Nota importante:** Dado que la matriz fundamental en el caso en tiempo continuo es no singular para todo  $t$ , la matriz de transición de estados está definida *para todo*  $t$ ,  $t \geq t_0$  y  $t < t_0$  (lo que implica que podemos resolver la EE en *tiempo invertido*). En el caso discreto, si la matriz  $A$  es singular la inversa de  $\Phi[k, k_0]$  no está definida, por lo que la contrapartida discreta de la propiedad (4.26)

$$\Phi[k, k_0] = \Phi[k, k_1]\Phi[k_1, k_0]$$

sólo vale si  $k \geq k_1 \geq k_0$ .

La solución general de la EE en el caso discreto es

$$x[k] = \Phi[k, k_0]x_0 + \sum_{m=k_0}^{k-1} \Phi[k, m+1]B[m]u[m].$$

## 4.7. Ecuaciones Inestacionarias Equivalentes

**Definición 4.4 (Equivalencia de EE Inestacionarias).** Sea  $P(t)$  una matriz  $n \times n$  no singular y continuamente diferenciable para todo  $t$ . Sea  $\bar{x} = P(t)x(t)$ . Entonces la EE

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}(t)u(t) \\ y(t) &= \bar{C}(t)\bar{x}(t) + \bar{D}(t)u(t),\end{aligned}\tag{4.34}$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{A}(t) &= [P(t)A(t) + \dot{P}(t)]P^{-1}(t) & \bar{B}(t) &= P(t)B(t) \\ \bar{C}(t) &= C(t)P^{-1}(t) & \bar{D}(t) &= D(t)\end{aligned}$$

se dice (*algebraicamente*) *equivalente* a la EE (4.27) y  $P(t)$  es una *transformación de equivalencia*.

No es difícil ver que si  $X(t)$  es una matriz fundamental del sistema original (4.27), entonces  $\bar{X}(t) = P(t)X(t)$  es una matriz fundamental del sistema (4.34).

Una propiedad interesante en el caso inestacionario es que es posible llevar al sistema a una forma equivalente donde  $\bar{A}(t)$  sea constante.

**Teorema 4.5 (Transformación a matriz de evolución estacionaria).** Sea  $A_0$  una matriz  $n \times n$  constante *cualquiera*. Entonces existe una transformación de equivalencia que lleva (4.27) a (4.34) con  $\bar{A}(t) = A_0$ .

*Demostración.* Sea  $X(t)$  una matriz fundamental de  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ , y definamos  $P(t) = e^{A_0 t} X^{-1}(t)$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\bar{A}(t) &= [P(t)A(t) + \dot{P}(t)]P^{-1}(t) \\ &= [e^{A_0 t} X^{-1} A(t) + A_0 e^{A_0 t} X^{-1}(t) + e^{A_0 t} \dot{X}^{-1}(t)] X(t) e^{-A_0 t}.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Como

$$\dot{X}^{-1}(t)X(t) + X^{-1}(t)\dot{X}(t) = 0,\tag{4.36}$$

que sigue de derivar  $X^{-1}(t)X(t) = I$ , el reemplazo de (4.36) en (4.35) muestra que

$$\bar{A}(t) = A_0 e^{A_0 t} X^{-1}(t) X(t) e^{-A_0 t} = A_0.$$

□

Es interesante notar que si  $A_0$  se elige como la matriz nula,  $A_0 = 0$ , entonces  $P(t) = X^{-1}$  y el sistema "barra" se reduce a

$$\bar{A}(t) = 0, \quad \bar{B}(t) = X^{-1}(t)B(t), \quad \bar{C}(t) = C(t)X(t), \quad \bar{D}(t) = D(t),$$

como se ve en la Figura 4.4. Una representación considerablemente más simple, aunque aún necesitamos conocer una matriz fundamental del sistema original para obtenerla.

Usando (4.31), es fácil verificar que la respuesta al impulso inestacionaria es invariante con respecto a transformaciones de equivalencia, como pasa en el caso estacionario. Sin embargo, y a diferencia de lo que pasaba en el caso estacionario, las propiedades de la matriz de evolución del sistema  $A(t)$  pueden cambiar drásticamente con una transformación de equivalencia! Esta es una excepción donde el caso estacionario *no* es un caso particular del caso inestacionario (nunca vamos a poder transformar la matriz  $A(t)$  en la matriz nula con una transformación de equivalencia estacionaria).

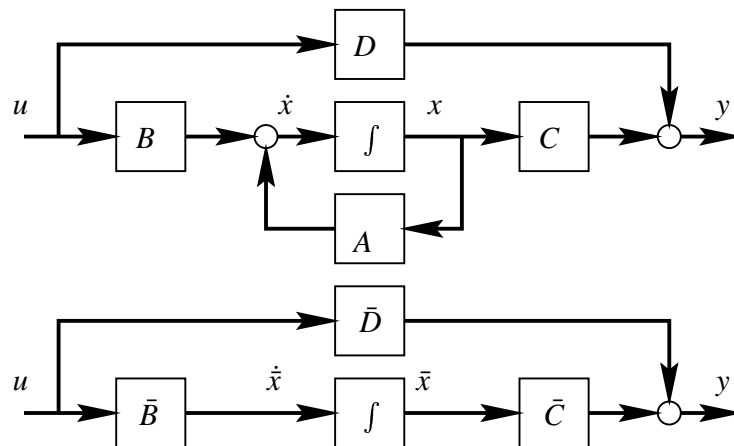


Figura 4.4: Transformación inestacionaria equivalente a un sistema con matriz de evolución nula.

## 4.8. Realizaciones de Sistemas Inestacionarios

En el caso inestacionario no podemos usar la transformada de Laplace para describir el comportamiento entrada-salida del sistema, por lo tanto usamos directamente la descripción en dominio temporal

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau.$$

Si el sistema es de dimensión finita tiene representación en EE. Vimos en (4.31) que de la representación en EE (4.27) la respuesta al impulso está dada por

$$G(t, \tau) = C(t)X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau), \quad \text{para } t \geq \tau, \quad (4.37)$$

donde  $X(t)$  es una matriz fundamental del sistema  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ .

El problema inverso se trata de obtener  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  y  $D(t)$  de la respuesta al impulso  $G(t, \tau)$ . Así, una respuesta al impulso  $G(t, \tau)$  se dice *realizable* si existen  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  y  $D(t)$  tales que se cumple (4.37).

**Teorema 4.6 (Realizabilidad de sistemas inestacionarios).** Una matriz  $q \times p$  de respuesta al impulso  $G(t, \tau)$  es realizable si y sólo si puede descomponerse en la forma

$$G(t, \tau) = M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t - \tau) \quad (4.38)$$

para todo  $t \geq \tau$ , donde  $M$ ,  $N$  y  $D$  son matrices  $q \times n$ ,  $n \times p$  y  $q \times p$  para algún entero  $n$ .

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ) Si  $G(t, \tau)$  es realizable entonces existe una realización que cumple (4.37) y  $M(t) = C(t)X(t)$  y  $N(\tau) = X^{-1}(\tau)B(\tau)$ .

$\Rightarrow$ ) Si  $G(t, \tau)$  puede descomponerse en la forma (4.38) entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= N(t)u(t) \\ y(t) &= M(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

es una realización del sistema. En efecto, si  $A(t) = 0$  entonces  $X(t) = I$  es una matriz fundamental y  $M(t)II^{-1}N(\tau) + D(t)\delta(t - \tau) = G(t, \tau)$ .

□

**Ejemplo 4.10.** La respuesta al impulso  $G(t) = te^{\lambda t}$ , o  $G(t, \tau) = G(t - \tau) = (t - \tau)e^{\lambda(t - \tau)}$ , puede factorizarse como

$$G(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tau e^{-\lambda t} \\ e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix}$$

y así admite la realización inestacionaria

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -te^{-\lambda t} \\ e^{-\lambda t} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \end{bmatrix} x(t). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Alternativamente, la transformada de Laplace de  $G(t)$  es  $\mathcal{L}[te^{\lambda t}] = \frac{1}{s^2 - 2\lambda s + \lambda^2}$ , de donde obtenemos la realización estacionaria

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 2\lambda \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

## 4.9. Resumen

En este capítulo:

- Obtuvimos la solución general de la ecuación de estado para sistemas lineales estacionarios, conocida como *fórmula de variación de los parámetros*. Aplicamos esta fórmula para obtener la discretización exacta de un sistema con un bloqueador de orden cero a la entrada y un muestreador a la salida.
- Vimos que sistemas cuyas representaciones en EE están relacionadas a través de un cambio de coordenadas no singular son *equivalentes*. Vimos también la *equivalencia a estado cero* de EE, que implica que dos representaciones en EE tienen la misma matriz transferencia, aunque no necesariamente sean algebraicamente equivalentes. Dentro de las infinitas formas posibles para las EE a través de transformaciones de equivalencia, presentamos tres formas canónicas útiles: modal, controlable y del controlador.
- Introducimos el problema de *realización*, que consiste en obtener una descripción en EE dada una matriz transferencia racional y propia. La realización de una matriz transferencia en forma canónica del controlador es particularmente simple para los casos de una entrada, y útil además para reducir el problema de realización de una matriz transferencia con varias entradas (columnas) superponiendo las realizaciones de cada columna. Toda la teoría de realización vista se aplica sin modificaciones a sistemas en tiempo discreto.
- Estudiamos la solución de la ecuación de estados de sistemas inestacionarios. La primera conclusión notable es que el método usado para derivar la solución en el caso estacionario no sirve. En el caso inestacionario recurrimos a la *matriz fundamental*

$X(t)$ , formada apilando  $n$  soluciones LI del sistema, y la *matriz de transición de estados*  $\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$ , que en el caso estacionario se reduce a  $e^{A(t-t_0)}$ . En general, el cómputo de  $\Phi(t, \tau)$  es difícil salvo casos especiales como los de  $A(t)$  triangular, diagonal o constante. Para sistemas inestacionarios discretos, sin embargo,  $\Phi[k, k_0]$  sí se puede calcular explícitamente (la solución en tiempo discreto es válida en la dirección positiva del tiempo).

- Vimos transformaciones de equivalencia (algebraica) inestacionarias. Estas llevan el sistema a una forma con la misma descripción entrada-salida, pero en la que la matriz  $A(t)$  puede tener propiedades muy distintas.
- La respuesta al impulso de un sistema inestacionario es realizable si  $G(t, \tau)$  admite una factorización simple que separa la dependencia en  $t$  y  $\tau$ .

## 4.10. Ejercicios

**Ejercicio 4.1.** Utilizando la regla de Leibniz para derivar expresiones integrales, verificar que (4.6) satisface (4.5) con estado inicial  $x(0)$ .

**Ejercicio 4.2.** Probar que los sistemas descritos por EE equivalentes tienen la misma función transferencia.

**Ejercicio 4.3.** Para los siguientes casos de la matriz  $A$ ,

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

obtener una expresión de la respuesta a entrada nula,  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , y dibujar en forma cualitativa el *diagrama de fases* ( $x_2(t)$  versus  $x_1(t)$ ). ¿Cómo es la respuesta a condiciones iniciales sobre las direcciones de los autovalores de  $A$ ? Verificar los diagramas obtenidos mediante simulación numérica con un conjunto de distintas condiciones iniciales en el marco de la ventana  $-2 \leq x_1(0) \leq 2$ ,  $-2 \leq x_2(0) \leq 2$ . (Los diagramas corresponden a los tipos de sistemas de segundo orden conocidos respectivamente como *nodo*, *nodo degenerado*, *foco* y *ensilladura*.)

**Ejercicio 4.4.** Terminar los detalles de la demostración del Teorema 4.3.

**Ejercicio 4.5.** Hallar una realización para la matriz transferencia

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{2s-3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{s}{s+2} \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 4.6.** Hallar una realización de cada columna de  $\hat{G}(s)$  en el ejercicio anterior por separado, y después conectarlas en un solo modelo en EE. ¿Son las realizaciones obtenidas equivalentes?

**Ejercicio 4.7.** Hallar una realización de cada fila de  $\hat{G}(s)$  en el ejercicio anterior por separado, y después conectarlas en un solo modelo en EE. ¿Cómo se compara la realización obtenida con las de los ejercicios anteriores?



**Ejercicio 4.8.** Probar que la matriz de transición  $\Phi(t, t_0)$  satisface las siguientes propiedades

1.  $\Phi(t, t_0)$  es la única solución de la ecuación diferencial matricial

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

2.  $\Phi(t, t) = I,$
3.  $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t),$
4.  $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0).$

**Ejercicio 4.9.** Encontrar matrices fundamentales y de transición para los sistemas

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} x(t), \quad \text{y} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t).$$

**Ejercicio 4.10.** Mostrar que la matriz de transición de

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix} x(t)$$

tiene la forma

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ 0 & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

para todo  $t, t_0$ , donde  $\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{ii}(t, t_0) = A_{ii}\Phi_{ii}(t, t_0)$  para  $i = 1, 2$ .

**Ejercicio 4.11.** Llevar un sistema estacionario  $(A, B, C)$  a  $(0, \bar{B}(t), \bar{C}(t))$  mediante una transformación de equivalencia inestacionaria.

**Ejercicio 4.12.** Encontrar una realización inestacionaria y una estacionaria de la respuesta al impulso

$$G(t) = t^2 e^{\lambda t}.$$