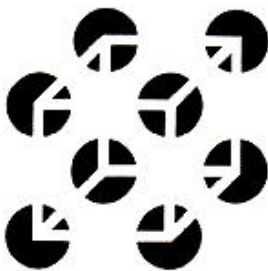


Control Automático 2

Notas de Clase



«Cubo» por M.C. Escher

Por Julio H. Braslavsky
Profesor Asociado
Automatización y Control Industrial
Universidad Nacional de Quilmes
Agosto 2001

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Introducción a Control Automático 2	1
1.1.1. Representación Externa	1
1.1.2. Representación Interna	2
1.1.3. Sistemas Estacionarios	2
1.1.4. Panorama de la Materia	2
1.2. Bibliografía y Material de Estudio	4
2. Descripción Matemática de Sistemas	7
2.1. Una taxonomía de sistemas	7
2.2. Sistemas Lineales	8
2.3. Sistemas lineales estacionarios	9
2.3.1. Representación entrada-salida	9
2.3.2. Representación en Espacio de Estados	10
2.4. Representación en diagrama de bloques	11
2.5. Linealización	11
2.6. Sistemas discretos	15
2.6.1. Descripción entrada-salida de sistemas discretos	15
2.6.2. Representación en Espacio de Estados	16
2.7. Resumen	17
2.8. Ejercicios	17
3. Herramientas de Álgebra Lineal	19
3.1. Vectores y Matrices	19
3.2. Bases y Ortonormalización	20
3.2.1. Norma de vectores	22
3.2.2. Ortonormalización	22
3.3. Ecuaciones Lineales Algebraicas	23
3.4. Transformaciones de Semejanza	25
3.5. Forma Diagonal y Forma de Jordan	26
3.5.1. Autovalores y autovectores	26
3.5.2. Forma Companion	27
3.5.3. Forma de Jordan	28
3.6. Funciones de Matrices Cuadradas	31
3.6.1. Polinomios	31

3.6.2.	Polinomio mínimo	32
3.6.3.	Evaluación de funciones matriciales	32
3.6.4.	Funciones matriciales no necesariamente polinomiales	33
3.6.5.	Series de Potencias	35
3.6.6.	Diferenciación e Integración Matricial	35
3.6.7.	La Exponencial Matricial	36
3.7.	Ecuación de Lyapunov	36
3.8.	Formas Cuadráticas	37
3.8.1.	Matrices definidas y semi-definidas positivas	38
3.9.	La Descomposición en Valores Singulares (SVD)	39
3.10.	Normas de Matrices	40
3.11.	Resumen	42
3.12.	Ejercicios	43
4.	Solución de la Ecuación de Estado y Realizaciones	45
4.1.	Introducción	45
4.2.	Solución de Ecuaciones de Estado Estacionarias	46
4.2.1.	Comportamiento asintótico de la respuesta a entrada nula	47
4.2.2.	Discretización	48
4.3.	Ecuaciones de Estado Equivalentes	50
4.3.1.	Equivalencia a estado cero	51
4.3.2.	Parámetros de Markov	52
4.4.	Formas Canónicas	52
4.4.1.	Forma canónica modal	53
4.4.2.	Forma canónica controlable	53
4.4.3.	Forma canónica del controlador	54
4.5.	Realizaciones	54
4.5.1.	Realización Mínima	58
4.5.2.	Sistemas Discretos	59
4.6.	Solución de Ecuaciones de Estado Inestacionarias	59
4.6.1.	Matriz Fundamental	60
4.6.2.	Caso Discreto	64
4.7.	Ecuaciones Inestacionarias Equivalentes	64
4.8.	Realizaciones de Sistemas Inestacionarios	66
4.9.	Resumen	67
4.10.	Ejercicios	67
5.	Estabilidad	70
5.1.	Introducción	70
5.2.	Estabilidad Externa de Sistemas Estacionarios	71
5.2.1.	Representación externa	71
5.2.2.	Caso MIMO	75
5.2.3.	Representación interna	75
5.2.4.	Caso discreto	76
5.3.	Estabilidad Interna de Sistemas Estacionarios	77
5.3.1.	Relaciones entre Estabilidad Externa e Interna	81
5.3.2.	Sistemas discretos	82
5.4.	El Teorema de Lyapunov	82

5.4.1.	Estabilidad Interna de Sistemas Discretos	84
5.5.	Estabilidad de Sistemas Inestacionarios	85
5.5.1.	Estabilidad entrada/salida	85
5.5.2.	Estabilidad interna	85
5.5.3.	Invariancia frente a transformaciones de equivalencia	87
5.6.	Resumen	88
5.7.	Ejercicios	89
6.	Controlabilidad y Observabilidad	91
6.1.	Controlabilidad	91
6.1.1.	Definiciones y tests fundamentales	91
6.1.2.	Control de mínima energía y gramiano de controlabilidad	94
6.1.3.	Tests PBH de controlabilidad	97
6.1.4.	Controlabilidad y transformaciones de semejanza	98
6.2.	Observabilidad	98
6.2.1.	Definiciones y tests fundamentales	98
6.2.2.	Gramiano de observabilidad	101
6.2.3.	Tests PBH de observabilidad	102
6.2.4.	Observabilidad y transformaciones de semejanza	102
6.3.	Descomposiciones Canónicas	104
6.4.	Condiciones en Ecuaciones en Forma Modal	110
6.5.	Ecuaciones de Estado Discretas	114
6.5.1.	Índices de Controlabilidad y Observabilidad	116
6.5.2.	Controlabilidad al Origen y Alcanzabilidad	117
6.6.	Controlabilidad, Observabilidad y Muestreo	117
6.7.	Sistemas Inestacionarios	120
6.8.	Ejercicios	123
7.	Especificaciones y Limitaciones de Diseño	125
7.1.	Sensibilidad y Robustez	125
7.1.1.	Perturbaciones	126
7.1.2.	Incertidumbre	127
7.2.	Funciones de Sensibilidad	128
7.2.1.	Funciones de transferencia en lazo cerrado	128
7.2.2.	Especificaciones de la Respuesta en Frecuencia	130
7.3.	Robustez	130
7.3.1.	Estabilidad Robusta	130
7.3.2.	Desempeño robusto	133
7.4.	Limitaciones de Diseño	133
7.4.1.	Restricciones algebraicas en $\hat{S}(s)$ y $\hat{T}(s)$	134
7.4.2.	Especificaciones de diseño en la respuesta temporal	134
7.4.3.	Restricciones en la respuesta al escalón	135
7.4.4.	Efecto de ceros y polos en el eje imaginario	139
7.5.	Resumen	142
7.6.	Ejercicios	142

8. Realimentación de Estados y Observadores	145
8.1. Realimentación de Estados	147
8.1.1. Otra receta para calcular K	151
8.2. Estabilización	151
8.3. Regulación y Seguimiento	152
8.3.1. Seguimiento Robusto: Acción Integral	155
8.4. Observadores	157
8.4.1. Una primer solución: Observador a lazo abierto	157
8.4.2. Una solución mejor: Observador a lazo cerrado	158
8.4.3. Observador de orden reducido	161
8.5. Realimentación de estados estimados	161
8.5.1. Notas Históricas	163
8.6. Realimentación de estados — caso MIMO	164
8.6.1. Diseño Cíclico	165
8.6.2. Diseño via Ecuación de Sylvester	167
8.6.3. Diseño Canónico	168
8.7. Observadores — MIMO	169
8.7.1. Observador MIMO de orden reducido	169
8.8. Consideraciones de diseño	170
8.8.1. Dificultades de la realimentación de ganancia elevada	170
8.8.2. Resumen del proceso de diseño	172
8.9. Resumen	172
8.10. Ejercicios	174
9. Introducción al Control Óptimo	176
9.1. Introducción	176
9.1.1. El Principio de Optimalidad	177
9.1.2. Nota Histórica	177
9.2. Control LQ discreto	178
9.2.1. Transición $[N - 1] \rightarrow [N]$	178
9.2.2. Transición $[N - 2] \rightarrow [N]$	180
9.2.3. Transición $[k] \rightarrow [N]$	180
9.3. Control LQ en tiempo continuo	182
9.4. Control LQ de Horizonte Infinito	183
9.5. Estimadores Óptimos	184
9.5.1. Modelos de sistemas con ruido	185
9.5.2. Filtro de Kalman discreto	185
9.6. Notas	190
9.7. Ejercicios	192
Bibliografía	193

Índice de figuras

2.1. Péndulo	7
2.2. Amplificador	7
2.3. Cohete	11
2.4. DB del sistema (2.10)	12
2.5. Trayectoria de operación y aproximación	12
2.6. Péndulo invertido.	14
3.1. Cambio de coordenadas.	22
3.2. Bola unitaria en \mathbb{R}^2 en normas 1, 2 e ∞	22
3.3. Hiper-elipsoide E en \mathbb{R}^3	40
4.1. Circuito RLC	50
5.1. Función absolutamente integrable que no tiende a 0.	72
5.2. Región de estabilidad externa para polos de sistemas continuos	74
5.3. Sistema realimentado con retardo.	75
5.4. Región de estabilidad externa para polos de sistemas discretos	77
5.5. Retrato de fase del sistema (5.4)	78
5.6. Espacio de estados (unidimensional) del sistema (5.5)	78
5.7. Relaciones entre estabilidad externa y estabilidad interna	81
5.8. Estabilidad uniforme.	86
5.9. Estabilidad exponencial uniforme.	87
6.1. Sistemas eléctricos no controlables	92
6.2. Sistema plataforma	96
6.3. Actuación y Variación de los Estados	97
6.4. Sistemas eléctricos no observables	99
6.5. Circuito RLC	103
6.6. Descomposición de Kalman	108
6.7. Circuito no controlable ni observable	109
6.8. Diagrama de Bloques	112
6.9. Estructura interna de $\frac{1}{1-\lambda_i}$	113
6.10. Sistema de tanques desconectados	119
6.11. Sistema de tanques en paralelo	120
6.12. Sistema controlable de tanques en paralelo	120
7.1. Lazo de control de un grado de libertad.	126
7.2. Incertidumbre multiplicativa	127
7.3. Lazo de control de dos grados de libertad.	129
7.4. Formas típicas para $ \hat{T}(j\omega) $ and $ \hat{S}(j\omega) $	131

7.5. Mediciones, modelo nominal e incertidumbre	132
7.6. Estabilidad robusta gráficamente	132
7.7. Desempeño robusto gráficamente	133
7.8. Especificaciones en la respuesta temporal	135
7.9. Caso manejable	138
7.10. Caso difícil	138
7.11. Péndulo invertido	139
7.12. Respuesta a lazo cerrado del péndulo invertido	140
8.1. Realimentación de estados	146
8.2. Realimentación de salida con observador	146
8.3. Respuesta sin precompensación	154
8.4. Respuesta precompensada	154
8.5. Respuesta del sistema con incertidumbre	154
8.6. Respuesta del sistema con perturbación de entrada.	154
8.7. Sistema con perturbación a la entrada	155
8.8. Esquema de seguimiento robusto	155
8.9. DB equivalente.	157
8.10. Observador en lazo abierto	158
8.11. Observador en lazo cerrado	159
8.12. Observador en lazo cerrado	159
8.13. Realimentación de estados estimados	162
8.14. \mathbb{R}^2	166
8.15. Realimentación por diseño cíclico	167
8.16. Configuración de polos Butterworth para $k = 1, 2, 3, 4$	171
8.17. Proceso de diseño	172
9.1. Posibles trayectorias de 1 al 8.	177
9.2. Evolución del estado en lazo cerrado	181
9.3. Evolución de las ganancias $K[k] = [k_1[k], k_2[k]]$	182
9.4. Dos señales ruidosas con mayor (iz.) y menor (der.) variabilidad.	187

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción a Control Automático 2

Esta asignatura es un curso avanzado en sistemas lineales y técnicas de control. Introduce la representación y el diseño de sistemas en *dominio temporal*, en contraste con las técnicas clásicas basadas en función transferencia, *dominio frecuencial*, como las vistas en Control Automático 1.

El objetivo del curso es brindar una introducción en profundidad a los conceptos fundamentales de la teoría de sistemas lineales descritos por ecuaciones en variables de estado, y a las principales técnicas de análisis y diseño de sistemas lineales de control en *variable de estado*.

Los *sistemas* a los que nos referiremos a lo largo de la materia son representaciones matemáticas de *sistemas físicos*, y el tipo de representación considerada son las ecuaciones diferenciales en *variable de estado*. Como veremos, estas representaciones matemáticas pueden clasificarse como

- representaciones externas
- representaciones internas

En general, vamos a asumir que el modelo del sistema físico está disponible. Es decir, no vamos a profundizar en la obtención de este modelo, que puede hacerse utilizando técnicas de modelado a partir de leyes físicas (como en Procesos y Máquinas), o a través de estimación paramétrica (como en Identificación).

1.1.1. Representación Externa

A partir de la propiedad de linealidad, un sistema puede describirse mediante la ecuación integral

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

La ecuación (1.1) describe la relación entre la señal de entrada u y la señal de salida y , ambas funciones, en general vectoriales, de la variable real t , el tiempo.

Este tipo de representación es *entrada-salida* o *externa*, y el sistema en sí está descrito como un *operador*, denotémoslo \mathcal{G} , que mapea la función u en y ,

$$\begin{aligned}\mathcal{G} : u &\mapsto y \\ y &= \mathcal{G}u \\ y(t) &= \int_{t_0}^t G(t, \tau)u(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Para cada posible señal de entrada u , el operador \mathcal{G} “computa” la salida y a través de la integral (1.1), que está definida por la función G , intrínseca al sistema.

1.1.2. Representación Interna

La descripción externa (1.1) vale para sistemas a *parámetros distribuidos* (como las líneas de transmisión de energía eléctrica). Cuando el sistema es a *parámetros concentrados*, entonces también puede describirse por ecuaciones del tipo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1.2)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \quad (1.3)$$

Notar que la ecuación (1.2) es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, mientras que la ecuación (1.3) es un sistema de ecuaciones algebraicas. Conforman lo que se conoce como representación *interna* de sistemas lineales.

Como el vector x se denomina el *estado* del sistema, el conjunto de ecuaciones (1.2), (1.3) se denominan ecuación en *espacio de estados*, o simplemente, ecuación de estado.

1.1.3. Sistemas Estacionarios

Si el sistema es lineal, además de ser a parámetros concentrados, *estacionario*, entonces las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) se reducen a

$$y(t) = \int_0^t G(t - \tau)u(\tau) d\tau \quad (1.4)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.5)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (1.6)$$

Para los sistemas lineales estacionarios es posible aplicar la transformada de Laplace, que es una herramienta importante en análisis y diseño (Control Automático 1). Aplicando la transformada de Laplace a (1.4) obtenemos la familiar representación

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s) \quad (1.7)$$

donde la función $\hat{G}(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$ es la *función* o *matriz transferencia* del sistema. Ambas (1.4) y (1.7) son representaciones externas; (1.4) en el *dominio temporal*, y (1.7) en el *dominio frecuencial*.

1.1.4. Panorama de la Materia

1. **Introducción**
2. **Descripción Matemática de Sistemas**
 - a) Una taxonomía de sistemas
 - b) Sistemas lineales
 - c) Sistemas lineales estacionarios
 - d) Linealización
 - e) Sistemas discretos
3. **Herramientas de Álgebra Lineal**
 - a) Vectores y matrices
 - b) Bases y ortonormalización
 - c) Ecuaciones lineales algebraicas
 - d) Transformaciones de similitud
 - e) Forma diagonal y forma de Jordan
 - f) Funciones matriciales
 - g) Ecuación de Lyapunov
 - h) Algunas fórmulas útiles
 - i) Formas cuadráticas y matrices definidas positivas
 - j) Descomposición en valores singulares
 - k) Normas de matrices
4. **Solución de la Ecuación de Estado y Realizaciones**
 - a) Solución de ecuaciones de estado estacionarias
 - b) Cambio de coordenadas
 - c) Realizaciones
 - d) Sistemas lineales inestacionarios
5. **Estabilidad**
 - a) Estabilidad entrada-salida
 - b) Estabilidad interna
 - c) Teorema de Lyapunov
 - d) Estabilidad de sistemas inestacionarios
6. **Controlabilidad y Observabilidad**
 - a) Controlabilidad
 - b) Observabilidad
 - c) Descomposiciones canónicas
 - d) Condiciones en ecuaciones en forma de Jordan
 - e) Ecuaciones de estado discretas
 - f) Controlabilidad y muestreo
 - g) Sistemas inestacionarios
7. **Especificaciones y Limitaciones de Diseño**
 - a) Funciones de sensibilidad
 - b) Especificaciones de diseño
 - c) Limitaciones en la respuesta temporal
 - d) Limitaciones en la respuesta frecuencial
8. **Realimentación de Estados y Observadores**
 - a) Realimentación de estados
 - b) Regulación y seguimiento
 - c) Observadores
 - d) Realimentación de estados estimados
 - e) Realimentación de estados — Caso MIMO
 - f) Observadores — Caso MIMO
 - g) Realimentación de estados estimados — Caso MIMO
9. **Introducción al Control Óptimo**
 - a) El principio de optimalidad
 - b) Regulador óptimo cuadrático
 - c) Estimador óptimo cuadrático
 - d) Control óptimo cuadrático Gaussiano

1.2. Bibliografía y Material de Estudio

Para los capítulos 1 a 6 y 8, el programa sigue muy de cerca el libro de texto (en inglés, sorry!)

- Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.

Para el capítulo 7 puede consultarse

- M.M. Seron, J.H. Braslavsky, G.C. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Springer-Verlag, 1997.

Para el capítulo 9,

- John S. Bay. *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill, 1999.

Otros libros recomendados:

- Wilson J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, 2nd edition, 1995.
- T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- E.D. Sontag. *Mathematical control theory. Deterministic finite dimensional systems*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1998.