

# Capítulo 2

## Descripción Matemática de Sistemas

### 2.1. Una taxonomía de sistemas

Uno de los problemas más simples en robótica es el control de la posición de un brazo simple de robot usando un motor colocado en la junta. Matemáticamente, este sistema no es más que un péndulo controlado por torque.

Asumiendo que la fricción es despreciable, que el brazo es rígido, y que toda la masa del brazo está concentrada en el extremo libre, aplicando las leyes de Newton, el ángulo  $\theta$  respecto de la vertical está dado por la ecuación diferencial

$$m\ddot{\theta}(t) + mg \sin \theta(t) = u(t). \quad (2.1)$$

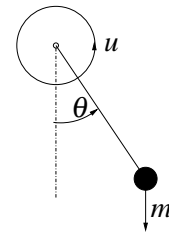


Figura 2.1: Péndulo

El brazo simple de robot es un ejemplo de lo que se llama un sistema *dinámico, causal, de tiempo continuo, finito-dimensional, no lineal y estacionario*.

*Dinámico* se refiere a que las variables que definen el *estado* del brazo en un instante  $t$  dado,  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ , no dependen en forma instantánea del torque de control  $u$ . Si por ejemplo se aplica un valor de torque constante,  $\theta$  tomará un tiempo no nulo en alcanzar su valor de equilibrio.

Un sistema no dinámico es *estático*, y en él la salida depende en forma instantánea de la entrada. Un ejemplo es un amplificador electrónico donde efectos capacitivos e inductivos son despreciables. Los sistemas estáticos suelen llamarse también *sin memoria*.

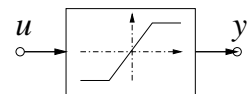


Figura 2.2: Amplificador

Un sistema es *causal* o *no anticipativo* si la salida en un instante dado depende de los valores presentes y pasados de la entrada, y no de valores futuros. Sistemas *anticipativos* o *predictivos* pueden “adivinar” entradas futuras. Ningún sistema físico real es anticipativo.

La salida actual de un sistema causal depende del pasado de la entrada. ¿Pero cuánto tiempo atrás tienen efecto valores pasados de la entrada? Estrictamente, habría que volver atrás en el tiempo hasta  $-\infty$ , lo que no es muy práctico. El concepto de *estado* salva este problema.

**Definición 2.1 (Estado).** El *estado*  $x(t_0)$  de un sistema en el instante  $t_0$  es la información en  $t_0$  que junto con la entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$  determina unívocamente la salida  $y(t)$  para todo  $t \geq t_0$ .

El estado  $x(t_0)$  resume toda la historia del sistema desde  $-\infty$  hasta  $t_0$ : conociendo el valor de ángulo  $\theta$  y velocidad angular  $\dot{\theta}$  en  $t_0$ , podemos predecir la respuesta del brazo de robot a valores de torque  $u$  para todo  $t \geq t_0$ .

Podemos pensar que la *entrada* para  $t \geq t_0$  y las *condiciones iniciales*  $x(t_0)$  determinan la evolución del sistema para  $t \geq t_0$

$$x(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} x(t_0) \\ u(t), t \geq t_0 \end{cases}$$

El ejemplo del brazo de robot es *finito-dimensional*, puesto que el estado  $x(t)$  en un instante cualquiera de tiempo  $t$  puede ser caracterizado completamente por un número finito de parámetros (en este caso, dos: ángulo y velocidad angular).

Un ejemplo de sistema *infinito-dimensional* aparece en el problema de regulación de la temperatura del aula por medio de acondicionadores de aire. La temperatura aparece como una *distribución* en todo el volumen del aula, y su caracterización completa requiere un número *infinito* de datos (la temperatura en todos los puntos del aula).

El término *en tiempo continuo* se refiere al hecho de que la variable  $t$  es continua, en contraste al caso de un sistema definido por una *ecuación diferencia*

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[x].$$

## 2.2. Sistemas Lineales

Un sistema se llama lineal si cumple con el *principio de superposición*, es decir, dados dos pares de condiciones iniciales y entradas,

$$x_i(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} x_i(t_0) \\ u_i(t), t \geq t_0 \end{cases} \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (2.2)$$

tenemos que

$$x_1(t) + x_2(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} x_1(t_0) + x_2(t_0) \\ u_1(t) + u_2(t), t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\alpha x_i(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} \alpha x_i(t_0) \\ \alpha u_i(t), t \geq t_0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

La propiedad (2.3) es *de aditividad*, y la propiedad (2.4) *de homogeneidad*. La combinación de ambas es la *propiedad de superposición*. La propiedad de aditividad permite considerar la respuesta del sistema como la superposición de la respuesta a condiciones iniciales y excitación aplicadas por separado.

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} x_l(t), t \geq t_0 & \Leftarrow \begin{cases} x(t_0) \\ u(t) = 0, t \geq t_0 \end{cases} \\ x_f(t), t \geq t_0 & \Leftarrow \begin{cases} x(t_0) = 0 \\ u(t), t \geq t_0 \end{cases} \end{cases}$$

La respuesta de un sistema lineal es la superposición de su respuesta *libre* (a condiciones iniciales, sin excitación) y su respuesta *forzada* (a excitación, con condiciones iniciales nulas — *relajado*).

Los sistemas *no lineales*, como el brazo de robot, no cumplen con el principio de superposición.

## 2.3. Sistemas lineales estacionarios

Un sistema es *estacionario* si para cada par condiciones iniciales y entrada

$$x(t), t \geq t_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(t_0) \\ u(t), t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

y cada  $T \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$x(t - T), t \geq t_0 + T \Leftrightarrow \begin{cases} x(t_0 + T) \\ u(t - T) + u_2(t), t \geq t_0 + T. \end{cases} \quad (2.6)$$

Es decir, el sistema responde da la misma respuesta, corrida en tiempo, si se le aplica la misma entrada corrida con iguales condiciones iniciales. Un sistema que no cumple esta propiedad se dice *inestacionario*.

### 2.3.1. Representación entrada-salida

Por superposición se deduce la representación de sistemas lineales mediante la *integral de convolución*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

donde  $g(t, \tau)$  es *respuesta al impulso*: la salida del sistema a un impulso unitario  $\delta(t)$  en el instante  $\tau$  (Chen 1999).

La causalidad implica que

$$\text{causalidad} \Leftrightarrow g(t, \tau) = 0 \text{ para } t < \tau,$$

y como las condiciones iniciales se asumen nulas, (2.7) se reduce a

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau) u(\tau) d\tau.$$

Si el sistema tiene  $p$  entradas y  $q$  salidas, entonces hablamos de la *matriz de respuesta al impulso*  $G(t, \tau) \in \mathbb{R}^{q \times p}$ .

Si el sistema es estacionario entonces para cualquier  $T$  se cumple

$$g(t, \tau) = g(t + T, \tau + T) = g(t - \tau, 0).$$

Así podemos redefinir  $g(t - \tau, 0)$  simplemente como  $g(t - \tau)$ . La representación entrada-salida del sistema se reduce a

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau.$$

La condición de causalidad para un sistema lineal estacionario se reduce a  $g(t) = 0$  para  $t < 0$ .

### 2.3.2. Representación en Espacio de Estados

Todo sistema lineal finito-dimensional puede describirse mediante *ecuaciones de estado* (EE)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t).\end{aligned}$$

Para un sistema de *orden*  $n$ , el *vector de estados* es un vector  $n \times 1$ , es decir que tiene  $n$  variables de estado,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  para cada  $t$ . Si el sistema tiene  $p$  entradas y  $q$  salidas, entonces  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ . Las matrices  $A, B, C, D$  se suelen llamar

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : *de evolución*

$C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  : *de salida*

$B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  : *de entrada*

$D \in \mathbb{R}^{q \times p}$  : *de ganancia directa*

Cuando el sistema es además estacionario, entonces la representación en EE se reduce a

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Aplicando la transformada de Laplace a (2.8) obtenemos

$$\begin{aligned}s\hat{x}(s) - x(0) &= A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) &= C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s),\end{aligned}$$

de donde siguen

$$\begin{aligned}\hat{x}(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) &= C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]\hat{u}(s).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Las ecuaciones algebraicas (2.9) permiten computar  $\hat{x}(s)$  y  $\hat{y}(s)$  de  $x(0)$  y  $\hat{u}(s)$ . Las transformadas inversas dan  $x(t)$  e  $y(t)$ . Asignando  $x(0) = 0$  vemos que la matriz transferencia del sistema es

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

En MATLAB las funciones `tf2ss` y `ss2tf` permiten pasar de una representación a otra.

**Ejemplo 2.1.** Supongamos que el brazo de robot trabaja tomando objetos de distinta masa. Entonces  $m$  varía con cada objeto y tenemos que escribir

$$m(t)\ddot{\theta}(t) + m(t)g \sin \theta(t) = u(t).$$

El sistema se convierte en *inestacionario*.

**Ejemplo 2.2.** Consideremos un cohete a reacción que asciende en forma vertical de la superficie de la tierra. La fuerza de propulsión es el producto  $v_e u_0$ , donde  $v_e < 0$  es la velocidad relativa de escape de gases, y  $u_0 < 0$  la velocidad de variación de masa  $m(t)$ , supuestas constantes. Asumiendo la aceleración de la gravedad  $g$  constante,

$$m(t)\ddot{h}(t) = -m(t)g + v_e u_0.$$

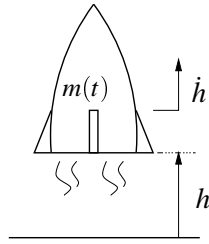


Figura 2.3: Cohete

Como  $\dot{m}(t) = u_0$ , entonces  $m(t) = m_0 + u_0 t$ . Definiendo  $x_1(t) := h(t)$  y  $x_2(t) := \dot{h}(t)$  y tomando como salida la altura, llegamos a la representación en EE

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g + \frac{v_e u_0}{m_0 + u_0 t} \end{bmatrix}, \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

El sistema es lineal, de dimensión 2, e inestacionario.

## 2.4. Representación en diagrama de bloques

El diagrama de bloques se obtiene en forma directa de las EE.

**Ejemplo 2.3.** El sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0,3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 5u(t)$$
(2.10)

tiene el diagrama de bloques de la Figura 2.4.

## 2.5. Linealización

La gran mayoría de los sistemas físicos son no lineales. Una clase importante de ellos se puede describir por las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), x(t_0), t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t), u(t), x(t_0), t), \end{aligned}$$
(2.11)

donde  $f$  y  $h$  son campos vectoriales no lineales, es decir, escrita en términos escalares, la componente  $i$  de  $\dot{x}(t)$  en (2.11) es

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); x_1(t_0), \dots, x_n(t_0); t) \quad x_i(t_0) = x_{i0}.$$

Este tipo de sistemas se trata en detalle en la asignatura *Sistemas No Lineales*.

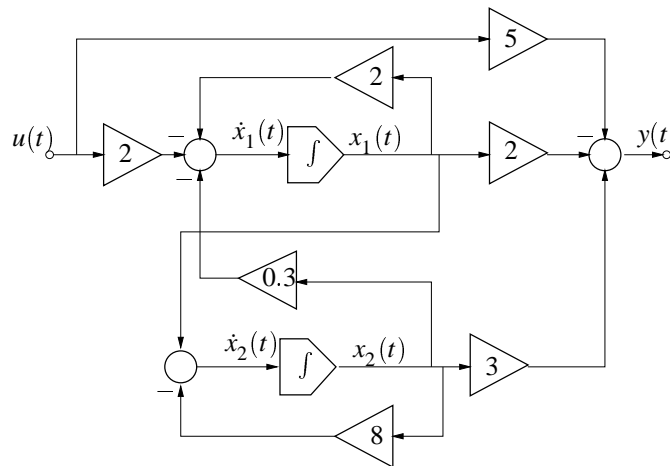


Figura 2.4: DB del sistema (2.10)

Una ecuación de estado lineal es una herramienta útil para describir sistemas como (2.11) en forma *aproximada*. El proceso de obtención de un modelo lineal a partir de uno no lineal se llama *linealización*.

La linealización se realiza alrededor de un *punto* o *trayectoria de operación*, definida por valores *nominales*  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{x}_0$  y  $\tilde{u}(t)$  que satisfacen (2.11),

$$\tilde{x}(t), t \geq t_0 \Leftarrow \begin{cases} \tilde{x}(t_0) \\ \tilde{u}(t), t \geq t_0 \end{cases}$$

Nos interesa el comportamiento de la ecuación no lineal (2.11) para una entrada y estado inicial “cerca” a los valores nominales, es decir  $u(t) = \tilde{u}(t) + u_\delta(t)$  y  $x_0 = \tilde{x}_0 + x_{0\delta}$  para  $u_\delta(t)$  y  $x_{0\delta}$  suficientemente pequeños para  $t \geq t_0$ .

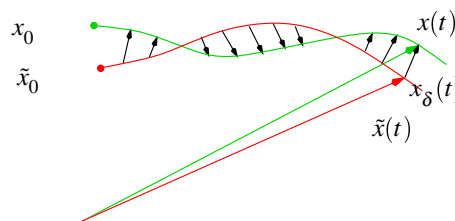


Figura 2.5: Trayectoria de operación y aproximación

Suponemos que la correspondiente solución permanece cercana a la nominal, y escribimos  $x(t) = \tilde{x}(t) + x_\delta(t)$  para cada  $t \geq t_0$ . En términos de la ecuación de estado no lineal (2.11) tenemos

$$\dot{\tilde{x}}(t) + \dot{x}_\delta(t) = f(\tilde{x}(t) + x_\delta(t), \tilde{u}(t) + u_\delta(t), t), \quad \tilde{x}(t_0) + x_\delta(t_0) = \tilde{x}_0 + x_{0\delta}$$

Asumiendo diferenciabilidad, podemos expandir el lado derecho de esta ecuación usando series de Taylor alrededor de  $\tilde{x}(t)$  y  $\tilde{u}(t)$ , reteniendo sólo los términos de primer orden. *Notar* que la expansión es en términos de  $x$  y  $u$ ; no se hace con respecto a la tercer variable  $t$ .

Especificamos la operación para la componente  $i$ , que queda <sup>1</sup>

$$f_i(\tilde{x} + x_\delta, \tilde{u} + u_\delta, t) \approx f_i(\tilde{x}, \tilde{u}, t) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)x_{\delta 1} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)x_{\delta n} \\ + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)u_{\delta 1} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_m}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)u_{\delta m} \quad (2.12)$$

Repitiendo la operación para cada  $i = 1, \dots, n$ , y volviendo a la notación vectorial, obtenemos

$$\dot{\tilde{x}}(t) + \dot{x}_\delta(t) \approx f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)x_\delta + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)u_\delta$$

donde la notación  $\frac{\partial f}{\partial x}$  representa el *Jacobiano*, o *Matriz Jacobiana*, del campo vectorial  $f$  con respecto a  $x$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dado que  $\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)$ ,  $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ , la relación entre  $x_\delta(t)$  y  $u_\delta(t)$  (el *modelo incremental*) queda aproximadamente descrito por una EE lineal *inestacionaria* de la forma

$$\dot{x}_\delta(t) = A(t)x_\delta(t) + B(t)u_\delta(t), \quad x_\delta(t_0) = x_0 - \tilde{x}_0$$

donde

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t).$$

De igual manera se expande la ecuación de salida  $y(t) = h(x(t), u(t), t)$ , de donde obtenemos la aproximación lineal

$$y_\delta(t) = C(t)x_\delta(t) + D(t)u_\delta(t),$$

donde  $y_\delta(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ , con  $\tilde{y}(t) = h(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)$  y

$$C(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t), \quad D(t) = \frac{\partial h}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t).$$

Notar que las EE obtenidas por linealización van a ser en general *inestacionarias*, aún cuando las funciones originales  $f$  y  $h$  sean estacionarias, debido a que las matrices Jacobianas se evalúan a lo largo de trayectorias y no puntos estacionarios.

**Ejemplo 2.4.** Consideremos el péndulo invertido sobre un carro móvil de la Figura 2.6. Las ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{y} = \frac{u + \dot{\theta}^2 ml \sin \theta - mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{-u \cos \theta - \dot{\theta}^2 ml \sin \theta \cos \theta + (m + M)g \sin \theta}{Ml + m \sin^2 \theta}.$$

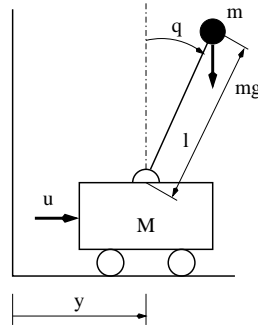


Figura 2.6: Péndulo invertido.

Definiendo  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ ,  $x_3 = \theta$  y  $x_4 = \dot{\theta}$  vemos que el sistema tiene la forma  $\dot{x} = f(x, u)$ , donde  $x \in \mathbb{R}^4$  y  $u \in \mathbb{R}$ , y  $f$  está dada como

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u + x_4^2 ml \sin x_3 - mg \sin x_3 \cos x_3}{M + m \sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{-u \cos x_3 - x_4^2 ml \sin x_3 \cos x_3 + (m + M)g \sin x_3}{Ml + m \sin^2 x_3} \end{bmatrix}$$

Como trayectoria de operación tomamos  $\tilde{\theta}(t) \equiv 0$ ,  $\tilde{u}(t) \equiv 0 \forall t$ , que es fácil ver que satisface  $f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \equiv 0$  (es un equilibrio). Las matrices  $A$  y  $B$  de los respectivos Jacobianos de  $f$  evaluados sobre esta trayectoria son

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix}.$$

**Ejemplo 2.5 ((Rugh 1995)).** Volvemos al cohete del Ejemplo 2.2. Las ecuaciones de movimiento eran

$$m(t)\ddot{h}(t) = -m(t)g + v_e u(t),$$

donde ahora tomamos la velocidad de cambio de masa libre  $u(t) = \dot{m}(t)$  (Ejercicio 2.2). Definiendo  $m(t)$  como una variable de estado más, y denotando  $x_1(t) = h(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{h}(t)$ ,  $x_3(t) = m(t)$ , y tomando  $u(t)$  como una entrada independiente llegamos al modelo no lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -g + \frac{v_e}{x_3(t)} u(t) \\ u(t) \end{bmatrix}.$$

Consideramos ahora su linealización alrededor una trayectoria nominal correspondiente a un valor constante de la entrada  $u = u_0 < 0$ . No es difícil calcular la trayectoria nominal explícitamente mediante integración directa, primero de  $x_3(t)$ , luego  $x_2(t)$  y finalmente

<sup>1</sup>Por simplicidad no escribimos la dependencia temporal de  $x$  y  $u$ .



$x_1(t)$ . Haciendo las cuentas obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &= -\frac{gt^2}{2} + \frac{m_0 v_e}{u_0} \left( \left(1 + \frac{u_0 t}{m_0}\right) \log \left(1 + \frac{u_0 t}{m_0}\right) - \frac{u_0 t}{m_0} \right) \\ \tilde{x}_2(t) &= -gt + v_e \left(1 + \frac{u_0 t}{m_0}\right) \\ \tilde{x}_3(t) &= m_0 + u_0 t.\end{aligned}$$

Los Jacobianos necesarios son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -v_e u / x_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ v_e / x_3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Substituyendo los valores nominales (sólo los de  $x_3(t)$  y  $u(t)$  aparecen) obtenemos la EE linealizada en las variables incrementales  $x_\delta(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$  y  $u_\delta(t) = u(t) - \tilde{u}(t)$

$$\dot{x}_\delta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-v_e u_0}{(m_0 + u_0 t)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_\delta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_e}{m_0 + u_0 t} \\ 1 \end{bmatrix} u_\delta(t).$$

Las condiciones iniciales para las variables incrementales están dadas por

$$x_\delta(0) = x(0) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 \end{bmatrix}.$$

## 2.6. Sistemas discretos

La mayoría de los conceptos de EE para sistemas lineales continuos puede trasladarse directamente a sistemas discretos, descritos por *ecuaciones diferencia*. En este caso la variable temporal  $t$  sólo asume valores en un conjunto *denumerable* (cuyos elementos pueden “contarse”<sup>2</sup>).

Cuando el sistema discreto se obtiene a partir de un *muestreo* de un sistema continuo, vamos a considerar sólo el caso de muestreo *regular*, donde  $t = kT, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , donde  $T$  es el *período de muestreo*. En este caso denotamos las variables discretas (secuencias) como  $u[k] \triangleq u(kT)$ , etc.

Los conceptos de dimensión finita, causalidad, linealidad y el principio de superposición de las respuestas debido a condiciones iniciales y entradas, son exactamente como en el caso continuo.

Una salvedad: a diferencia del caso continuo, retardos puros no dan lugar a un sistema de dimensión infinita si el retardo es un múltiplo del período de muestreo  $T$ .

### 2.6.1. Descripción entrada-salida de sistemas discretos

Definimos la *secuencia de impulsos*  $\delta[k]$  como

$$\delta[k - m] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m \\ 0 & \text{si } k \neq m \end{cases}$$

---

<sup>2</sup>Es decir, ponerse en correspondencia con los números naturales.

donde  $k$  y  $m$  son números enteros. Notar que en el caso discreto los impulsos son fácilmente realizables físicamente.

En un sistema lineal discreto toda secuencia de entrada  $u[k]$  puede representarse mediante la serie

$$u[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\delta[k-m].$$

Si  $g[k, m]$  denota la salida de una sistema discreto a una secuencia de impulsos aplicada en el instante  $m$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\delta[k-m] &\rightarrow g[k, m] \\ \delta[k, m]u[m] &\rightarrow g[k, m]u[m] \quad (\text{por homogeneidad}) \\ \sum_m \delta[k, m]u[m] &\rightarrow \sum_m g[k, m]u[m] \quad (\text{por aditividad}).\end{aligned}$$

Así la salida  $y[k]$  excitada por la entrada  $u[k]$  puede representarse mediante la serie

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g[k, m]u[m]. \quad (2.13)$$

Si el sistema es *causal* no habrá salida antes de que la entrada se aplique, por lo que

$$\text{causalidad} \Leftrightarrow g[k, m] = 0 \text{ para } k < m.$$

Para sistemas discretos *causales* la representación (2.13) se reduce a

$$y[k] = \sum_{m=k_0}^k g[k, m]u[m],$$

y si además tenemos *estacionariedad*, entonces vale la propiedad de invariancia respecto de corrimientos en el tiempo y llegamos a la representación del sistema mediante la *convolución discreta*

$$y[k] = \sum_{m=0}^k g[k-m]u[m] = \sum_{m=0}^k g[m]u[k-m].$$

### 2.6.2. Representación en Espacio de Estados

Todo sistema discreto lineal finito-dimensional puede describirse mediante EE (diferencia)

$$\begin{aligned}x[k+1] &= A[k]x[k] + B[k]u[k] \\ y[k] &= C[k]x[k] + D[k]u[k],\end{aligned}$$

y en el caso estacionario

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k].\end{aligned}$$

En este caso, tiene sentido hablar de funciones transferencia *discretas*,  $\hat{G}(z) = \mathcal{Z}[g[k]]$ . La relación entre función transferencia discreta y representación de estados es idéntica al caso continuo,

$$\hat{G}(z) = C(zI - A)^{-1}B + D,$$

y sirven las mismas funciones de MATLAB `ss2tf` y `tf2ss`.

## 2.7. Resumen

- La matriz transferencia es *racional* sii el sistema es lineal, estacionario y de dimensión finita.
- Las representaciones externas asumen condiciones iniciales nulas.
- Los sistemas de dimensión infinita no pueden describirse en EE.
- Mediante linealización, puede describirse el comportamiento de un sistema no lineal en forma *aproximada* mediante un modelo en EE incremental lineal.
- La linealización se realiza alrededor de una *trayectoria de operación* nominal conocida, y los modelos incrementales obtenidos serán, en general, *inestacionarios*.
- Los sistemas discretos tienen representaciones equivalentes a las de sistemas continuos mediante *series de convolución*, funciones transferencia en transformada  $\mathcal{Z}$ , y EE diferencia.
- A diferencia del caso continuo, los retardos puros no necesariamente dan lugar a un sistema discreto distribuido.

Tipo de sistema	Representación interna	Representación externa
dim. infinita lineal		$y(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t, \tau) u(\tau) d\tau$
dim. finita, lineal	$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ $y = C(t)x + D(t)u$	$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau$
dim. inf., lineal, est.		$y(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t, \tau) u(\tau) d\tau$ $\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s)$
dim. fin., lineal, est.	$\dot{x} = Ax + Bu$ $y = Cx + Du$	$y(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t, \tau) u(\tau) d\tau$ $\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s)$

## 2.8. Ejercicios

**Ejercicio 2.1.** A partir de la definición de transformada de Laplace de  $y(t)$

$$\hat{y}(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

probar que para un sistema lineal estacionario  $\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s)$ .

**Ejercicio 2.2.** ¿Cómo se modifica el sistema del cohete si la velocidad de cambio de masa  $u_0$  es  $u(t) = \dot{m}(t)$ ? Escribir las EE y clasificarlo.

**Ejercicio 2.3.** Considerar un sistema consistente en un retardo puro,

$$y(t) = u(t - T).$$

¿Es dinámico, lineal, de dimensión finita, estacionario?

**Ejercicio 2.4.** Introducir el sistema (2.10) en MATLAB utilizando la función `ss` y obtener la función transferencia con `ss2tf`. Explorar las herramientas `ssdata`, `tfdata`, `zpkdata` y `ltiview`.

**Ejercicio 2.5.** Para la ecuación diferencial

$$\ddot{y}(t) + \frac{4}{3}y^3(t) = -\frac{1}{3}u(t)$$

usar una simple identidad trigonométrica como ayuda para encontrar una solución nominal correspondiente a  $\tilde{u}(t) = \sin 3t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 1$ . Determinar una EE linealizada que describa el comportamiento del sistema alrededor de esta trayectoria nominal.

**Ejercicio 2.6.** Linealizar la EE no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{x_2^2(t)} \\ \dot{x}_2(t) &= u(t)x_1(t)\end{aligned}$$

alrededor de la trayectoria nominal originada en  $\tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_2(0) = 1$ , y  $\tilde{u}(t) = 0$ .

**Ejercicio 2.7.** Para la EE no lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) - 2x_1(t)x_2(t) \\ -x_1(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t) + u(t) \end{bmatrix}$$

calcular las posibles soluciones constantes, a menudo denominadas *estados de equilibrio*, y las correspondientes EE linealizadas.

**Ejercicio 2.8.** Considerar la EE no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t)x_1(t) - x_3(t) \\ x_2(t) - 2x_3(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= x_2(t) - 2x_3(t)\end{aligned}$$

con estado inicial  $\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$  y entrada nominal constante  $\tilde{u}(t) = 1$ . Mostrar que la salida nominal es  $\tilde{y}(t) = 1$ . Linealizar la EE alrededor de la solución nominal. ¿Hay algo raro en este sistema?

**Ejercicio 2.9.** De la definición de transformada  $\mathcal{Z}$  de la secuencia  $y[t]$

$$\hat{y}(z) = \mathcal{Z}[y[k]] = \sum_{k=0}^{\infty} y[k]z^{-k}$$

probar que para un sistema lineal estacionario discreto  $\hat{y}(z) = \hat{g}(z)\hat{u}(z)$ .