Tarea 1

Rodrigo Carvajal Pizarro (rcarvaja@astro.puc.cl)
https://github.com/racarvajal/Tarea1_Astro_Stats.git

Resolución

Problema 1

a) La diferencia entre eventos disjuntos y eventos independientes radica en cómo se comportan sus probabilidades. Para eventos disjuntos, la probabilidad de que ambos (o más eventos) ocurran simultáneamente es nula. En cambio, los eventos independientes sí pueden ocurrir de forma simultánea, pero no existe relación entre ellos.

Matemáticamente, dos eventos son disjuntos si

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j$$

Y dos eventos son independientes si

$$\mathbb{P}\left(A_i A_j\right) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j)$$

Además, se tiene que, para estos eventos independientes,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$$

En Astronomía, un ejemplo de eventos disjuntos es A_i ='El Universo es plano' y A_j = 'El Universo es cóncavo'. Si ocurre uno de ellos, el otro no puede ocurrir. Por lo tanto, son disjuntos.

Un ejemplo para eventos independientes es A_i = 'Las primeras Galaxias se formaron poco tiempo después de la Reionización del Universo' y A_j = 'La Luna se formó luego de un gran impacto que recibió la Tierra'. Estos dos eventos no tienen relación (al menos, a simple vista). La ocurrencia (o no) de uno de ellos no afectará lo que suceda con el otro.

b) Si dos eventos, A y B, son independientes, se tendrá:

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)[1 - \mathbb{P}(B^c)] = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{B}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A)\mathbb{B} = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

Por otro lado, y utilizando lo anterior,

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) = [1 - \mathbb{P}(A^c)]\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$$

Es decir, A^c y B^c son independientes.

Problema 2

a) Se requiere conocer la distribución de X (el número de veces que la gente escoge la primera respuesta, quedarse con la puerta original), sobre el total de respuestas de la gente y solo hay dos opciones para responder la pregunta. Con esta información, la distribución que mejor muestra el comportamiento de las respuestas, será una Binomial con parámetros N y p.

$$X \sim Bin(N,p) = \binom{N}{x} r^x (1-r)^{N-x}$$

De la encuesta, se conocen los parámetros $N = 33$ para todos los experimentos y $X = 18$ para una encuesta en particular (realizada por el Ayudante).

b) Para obtener la probabilidad de observar $X = 18$, se debe utilizar la distribución anterior y reemplazar con los parámetros que se requieren.

$$\mathbb{P}(X = 18 | r = 0{,}5) = \binom{33}{18} 0{,}5^{18}(1-0{,}5)^{33-18} = \binom{33}{18} 0{,}5^{18}(0{,}5)^{15} = \binom{33}{18}\left(\frac{1}{2}\right)^{33} \approx 0{,}120741119$$

El resultado de una simulación de 1000 encuestas puede verse en la figura 1. En ella, puede notarse que para $X = 18$, la cantidad de encuestas obtenidas es cercana a 120. Este valor corresponde a un 12 % y es muy similar al obtenido analíticamente. Por lo tanto, ambos resultados son consistentes.

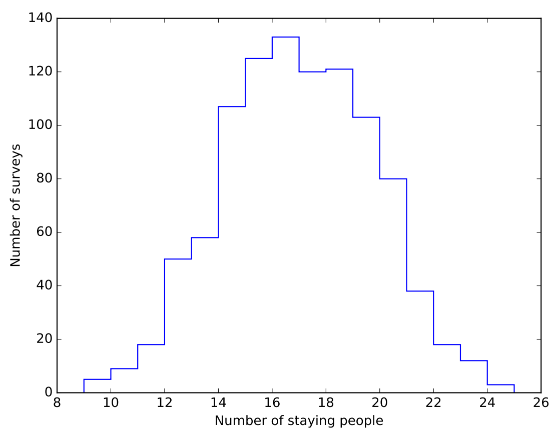

Figura 1: Histograma para 1000 encuestas con p=0.5

c) Ahora, se necesita escribir una expresión para $\mathbb{P}(r|X)$. Para ello, se utilizará el Teorema de Bayes. Con él, la expresión será:

$$\mathbb{P}(r|X) = \frac{\mathbb{P}(X|r)\mathbb{P}(r)}{\sum_r \mathbb{P}(X|r)\mathbb{P}(r)}$$

Entre los términos que surgen en esta expresión, está $\mathbb{P}(r)$. Éste puede interpretarse como la probabilidad de alguna fracción de las personas encuestadas mantenga su decisión inicial. Esta fracción puede ir desde 0 a 1. Por ello, puede considerarse que $\mathbb{P}(r) = 1$, pues siempre habrá alguna fración de gente que tomará alguna decisión. Además, no se cuenta con información sobre la cantidad de personas que toman una u otra decisión con lo que la distribución de probabilidad no es afectada.

Por otro lado, se puede asumir que esta probabilidad ($\mathbb{P}(r)$) se comporta como una Distribución Uniforme entre $r = 0{,}0$ y $r = 1{,}0$ y será:

$$\mathbb{P}(r) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq r \leq 1, \\ 0 & \text{para } r < 0 \text{ o } r > 1 \end{cases}$$

Gráficamente, la distribución es representada en la Figura 2

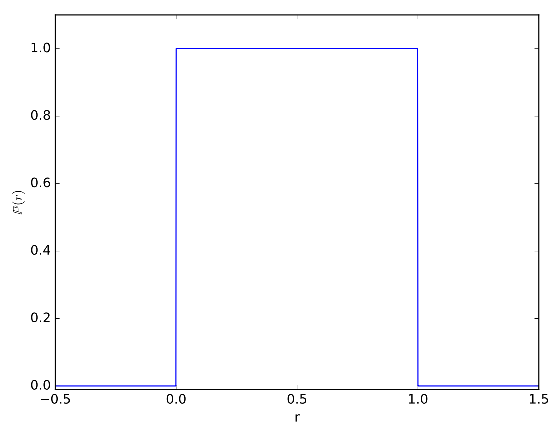

Figura 2: $\mathbb{P}(r)$ en el intervalo $[0, 1]$

Con esta expresión, puede mostrarse que es posible considerar $\mathbb{P}(r) = 1$ para el intervalo deseado ($0 \leq r \leq 1$).

Puede calcularse, además, la integral de esta distribución en el intervalo.

$$\int_0^1 \mathbb{P}(r)\mathrm{dr} = \int_0^1 1 \times \mathrm{dr} = 1$$

Por lo tanto, es una ditribución de probabilidad bien definida para el intervalo en cuestión.

Entonces, y reemplazando los parámetros ya conocidos,

$$\mathbb{P}(r|X) = \frac{\binom{N}{x} r^x (1-r)^{N-x}\mathbb{P}(r)}{\sum_{0\leq r\leq 1}\binom{N}{x} r^x (1-r)^{N-x}\mathbb{P}(r)} = \frac{\binom{33}{18} r^{18}(1-r)^{15} \times 1}{\sum_{0\leq r\leq 1}\binom{33}{18} r^{18}(1-r)^{15} \times 1}$$

$$\mathbb{P}(r|X = 18) = \frac{r^{18}(1-r)^{15}}{\sum_{0\leq r\leq 1} r^{18}(1-r)^{15}}$$

Ahora, para conocer, numéricamente, la distribución anterior, se debe calcular su expresión. Primero, debe obtenerse el denominador. Como r es una variable continua en $[0, 1]$ y una sumatoria es un operador discreto, debe escogerse un Δr pequeño para tomar en cuenta el intervalo de la mejor manera. En este caso se eligió $\Delta r = 0{,}001$.

Si se grafica $\mathbb{P}(r|X)$, se obtiene (con el denominador ya calculado) la Figura 3

Ya conociendo sus valores, se puede comprobar que esta distribución está normalizada. Esto se logra sumando todos sus posibles valores. Haciéndolo numéricamente, se puede mostrar que sí suma 1. Por lo tanto, está normalizada.

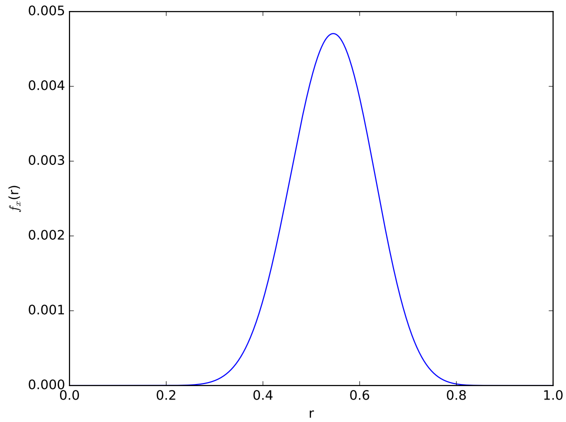

Figura 3: $\mathbb{P}(r|X)$ con $X = 18$

También, es posible obtener el valor de r que maximiza la distribución de probabilidad. Tanto por inspección del gráfico como por métodos numéricos, se llega a que el valor que maximiza la distribución es $r = 0{,}545$.

Sabiendo que la Función Cumulativa de Probabilidad se obtiene de la siguiente manera,

$$\mathbb{F}(R \leq r|X) = \sum_{R \leq r} \mathbb{P}(R \leq r|X)$$

Este valor se puede obtener numéricamente utilizando la distribución de probabilidades mencionada anteriormente. Gráficamente, esto se puede ver en la Figura 4.

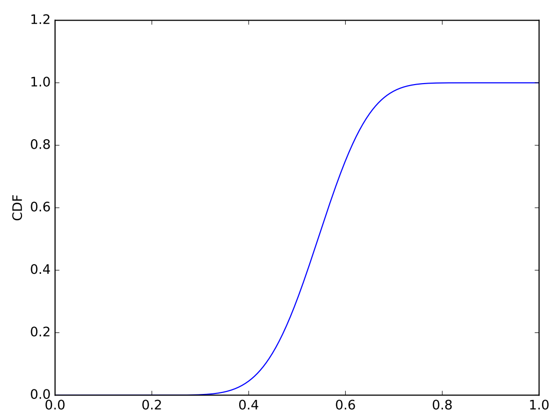

Figura 4: Función Cumulativa de Distribución $\mathbb{F}(R \leq r|X)$ con $X = 18$

d) Ahora, se debe conocer como se comporta la probabilidad para valores mayores o menores a $r = 0{,}5$. Con este fin, se utiliza la Función Cumulativa de Probabilidad para valores hasta el deseado. Usando la definición de CDF, se tendrá:

$$\mathbb{P}(r > 0{,}5|X) = 1 - \mathbb{P}(r < 0{,}5|X)$$

$$\mathbb{P}(r < 0{,}5|X) = \sum_{0 \leq r < 0{,}5} \mathbb{P}(r|X)$$

Como r es una variable continua, se calculará esta suma como una integral. Tomando parte del código de las partes b y c junto con sus parámetros ($X = 18$), se obtienen valores para estas probabilidades.

$$\mathbb{P}(r > 0{,}5|X) = 0{,}694$$

$$\mathbb{P}(r < 0{,}5|X) = 0{,}306$$

Ante estos resultados, se puede decir que existe una probabilidad mayor de que las personas encuestadas mantengan su decisión inicial ($r > 0{,}5$). Y será menos probables que estas personas cambién su decisión tras mostrárseles lo que hay tras una de las puertas ($r < 0{,}5$).

También, puede decirse que la encuesta realizada por el Ayudante tiene resultados que caen dentro de los que tienen una mayor probabilidad; quedarse con la decisión inicial. En la encuesta, un 55 % de las personas mantuvo la puerta que había escogido.