Câmp de probabilitate. Evenimente. Calcul de probilități.

$\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$

a) $\Omega \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ $(\emptyset \in \mathcal{F})$

c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

c') $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow$ O mulțime care verifică a,b,c se num ALGEBRĂ

O mulțime care verifică a,b,c' se num σ-ALGEBRĂ

PROPRIETĂȚI: $\emptyset \in \mathcal{F}$

$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

$$A \setminus B \Leftrightarrow A \cap B^c$$

$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{F}$

$$A \Delta B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Perechea $(\Omega, \mathcal{F})$ se num. spațiu măsurabil

Fie $(A_n)_n \subset \mathcal{F}$, $A_n \cap A_m \neq \emptyset$ pt $n \neq m$ (disjuncte două câte două) at.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A)$$

Fie $(\Omega, \mathcal{F})$ spațiu măsurabil al unui experiment

O funcți $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ care verifică:

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) $\forall$ $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ disjuncte 2 câte 2 a.î.:

$$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$$

Se numește măsură de prob pe Ω

Modelul clasic de prob | Câmpul de prob al lui Laplace

Fie $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ mulțimea even elementare

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ mulțimea even pos.

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ este echi repartiția (distribuția uniformă discretă)

$$\mathbb{P}(\{w\}) = 1/N$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s.n câmpul de prob al lui Laplace.

$A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{w \in A} \{w\})$$

Elemente de algebră combinatorială

1. Regula sumei

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \Rightarrow |A| = \mathbb{P}(A) \cdot |\Omega|$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ n mulțimi finite atunci

Funcția lui Euler $n \in \mathbb{N}^*$ $\varphi(n)$ - nr de nr prime cu n $(\leq n)$

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

2. Regula produsului

A, B finite

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\} \Rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B|$

Metode eșantionare

1. Schema bilei cu revenire : n^k șiruri

2. Schema bilei fără revenire: $\frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$

Metode de eșantionare

	Contează ordinea	nu contează ordinea
cu revenire	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
fără revenire	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Prob. condiționate. Formule de calcul. Formula lui Bayes. Independență

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. ; $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Regula înmulțirii: Fie $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n) > 0$ at:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) * \mathbb{P}(A_2|A_1) * \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) * \dots * \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Formula Prob. totale: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp prob și $B_1, B_2, B_3 \subseteq \mathcal{F}$ o partiție pe Ω

$$\begin{cases} B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega \\ B_1 \cap B_2 = \emptyset \\ B_2 \cap B_3 = \emptyset \\ B_1 \cap B_3 = \emptyset \end{cases}$$

Fie $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\cdot\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\cdot\mathbb{P}(B_3)$$

Formula Generală: $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq \mathcal{F}$ partiție

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\cdot\mathbb{P}(B_i)$$

Formula lui Bayes: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $A, B \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$.

$$\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\cdot\frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $A, B, C \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$, $\mathbb{P}(A \cap C) > 0$, $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$

$$\mathbb{P}(A \mid B, C) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A, C) \times \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$$

Prob lui A știind că B și C s-au realizat

Formula prob. totale: $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$, $(B_i)_{i=\overline{1,n}}$ o part pe Ω

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i, C) \cdot \mathbb{P}(B_i \mid C)$$

Ev. A si B indep dc realizarea unuia nu influențează cu nimic realizarea celuilalt.

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \Rightarrow \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A)$$

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. ; $A, B \in \mathcal{F}$ A și B indep. $(A \perp\!\!\!\perp B)$ dc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Obs: $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B,\ A \perp\!\!\!\perp B^c,\ A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p și $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ $A_1, \dots A_n$ indep. (mutual) dacă :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \quad \forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$$

Independența în contextul prob. cond: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p; $A, B, C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) > 0$.

A, B independente cond. la C dacă:

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C)$$

=> Independența nu implică independența condiționată.

Variabile Aleatoare

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. Se numește variabilă aleatoare, o funcție $X: \Omega \to \mathbb{R}$ care verifică:

$$\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Variabile Aleatoare Discrete

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. Se numește REPARTIȚIA LUI X (distribuția lui X) măsura de prob. pe $\mathbb{R}$ def. prin:

$$\mathbb{P}_X(A) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A), \forall A \in \mathbb{R}$$

Se numește FUNCȚIA DE REPARTIȚIE A LUI X (funcția cumulativă) o fct. $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

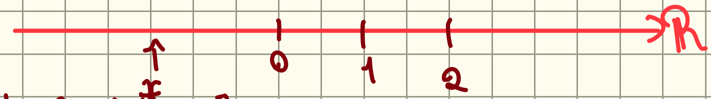
$F(x)=\mathbb{P}(X\le x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

$F(x)=(\mathbb{P}\circ X^{-1})(\underbrace{(-\infty,x)}_{A})$

Exemplu: $X(\Omega)=\{0,1,2\}$

TT   TH, HT   HH

$F(x)=?$ $F(x)=\mathbb{P}(X\le x),\ \forall x\in\mathbb{R}$



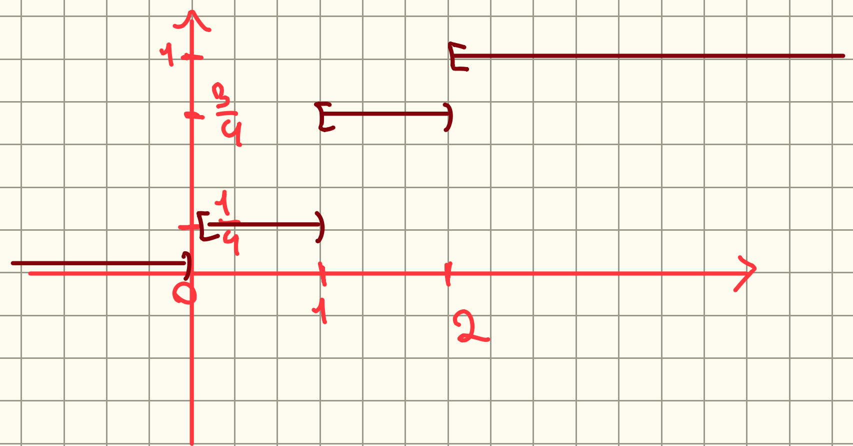
Dc $x\in(-\infty,0)$ even $\{X\le x\}=\{\omega \mid X(\omega)\le x\}=\emptyset$

$F(x)=\mathbb{P}(X\le x)=\mathbb{P}(\emptyset)=0.$

Dc $x\in[0,1) \Rightarrow \mathbb{P}(X\le x)=\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{4}$

Dc $x\in[1,2) \Rightarrow F(x)=\mathbb{P}(X\le x)=\frac{3}{4}$

Dc $x\in[2,\infty) \Rightarrow F(x)=\mathbb{P}(\Omega)=1$



PROPRIETĂȚI: $F:\mathbb{R}\to[0,1]$

a) F crescătoare: $x\le y \Rightarrow F(x)\le F(y)$

b) F continuă la dreapta : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0)$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

1) $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F(x)$

2) $\mathbb{P}(X < x) = \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} F(y) = F(x^-)$

3) $\mathbb{P}(x < X < y) = \mathbb{P}(X \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x) = F(y) - F(x)$

4) $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x) = F(x) - F(x^-)$

FUNCȚIE DE MASĂ : Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p $X : \Omega \to \mathbb{R}$ + v.a disc.

funcție de masă PMF : $f : \frac{X(\Omega)}{\mathbb{R}} \to [0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x) & \forall x \in X(\Omega) \\ 0 & \text{, altfel.} \end{cases}$$

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ notăm :

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & & f(x_n) \end{pmatrix}$$

1) **V.a. constanta**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ $X = c$, $c \in \mathbb{R}$

→ f de masă $f(x) = \begin{cases} 1 ; x = c \\ 0 ; \text{altfel} \end{cases}$

→ f. de repartiție $F(x) = \begin{cases} 0, x > c \\ 1, x \geq c \end{cases}$

2) **V.a. de tip Bernulli**: Un experiment aleator și A un eveniment de interes

$X(w) = \begin{cases} 1 & w \in A \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$ $\mathbb{P}(X=1) = p \in [0,1)$

$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

→ fct de masă : $f(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1-p, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

→ fct de rep : $F(X) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq X - 1 \end{cases}$

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad x \in \{0, 1\}$$

Dc A - eveniment $\mathbb{1}_A(w) = \begin{cases} 1, w \in A \\ 0, w \notin A \end{cases}$ se numește f indicator

O variabilă de tip Benulli este o v.a care ia 2 val și se notează $X \sim Ber(p)$

"$X \sim Ber(p)$" = X este repartizată Bernulli de parametru p.

$X \sim Ber(p) \Rightarrow 1 - X \sim Ber(1-p)$

3) V.a. cu nr finit de valori

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

$$f(x) = \begin{cases} p_i & x = x_i \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & & f(x_n) \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p_1 & x_1 \leq x < x_1 \\ p_1 + p_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_i & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

4) V.a repartizate binomial:

repetăm un exp aleator de n ori și numărăm în fiecare dacă un eveniment s-a realizat sau nu

X = nr de ori în care s-a realizat even în cele n repetări.

O v.a $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $X(\Omega)=\{0,1,\dots,n\}$ se numește binomială de param. n și p și se notează $X\sim Bin(n,p)$ dacă

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad k\in\{0,1,\dots,n\}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=(p+1-p)^n=1$$ funcție de masă validă.

5) V.a repart. hipergeometric: extragem elemente dintr-un grup finit fără întoarcere!

v.a $X:\Omega\to\mathbb{R}$

fct de masă $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{m}}$ $k\in\{0,1,\dots\min(M,n)\}$ se numește hipergeometrică

$X\sim HG(n, N, M)$

nr de bile extrase

nr tot de bile

nr de bile negre

6) V.a repart. uniform pe o mulțime discretă: o v.a X poate lua n valori și toate sunt echiprobabile

$\mathbb{P}(X=x_i)=\frac{1}{n}$ $i\in\{1,\dots,n\}$ (fct de masă: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x\in\{x_0,\dots,x_n\}\\ 0 & \text{altfel}\end{cases}$

7) V.a repartizate geometric și negativ binomiale: Repetăm un exp aleator cu prob constantă
Așteptarea primului succes.

$X \sim Geom(p)$ $X \in \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$

$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad k \in \{1, 2, \dots\}$

Obs: În anumite cazuri, rep. geom poate fi interp ca „nr de eșecuri până la primul succes".

$Y = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \quad Y = X-1$

$\mathbb{P}(Y=k) = (1-p)^k \cdot p \quad k \geq 0$

Negativ Binomiala: Nr de exp necesare pt a obține a n-a oară evenimentul

$X \sim NB(n, p)$

$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{n-1} \cdot (1-p)^{k-n} \cdot p^n \quad k \geq n$

8) V.a. rep. Poisson: De câte ori se întâmplă un eveniment rar într-un interval de timp.

$X \sim Pois(\lambda)$

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad , k \in \{0,1,2,\dots\} = \mathbb{N}$$

Funcții de variabile aleatoare discrete

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. si $X:\Omega \to \mathbb{R}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție ; $Y = g(X)$ a.î.

$$\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{\{x \mid g(x)=y\}} \mathbb{P}(X) = x$$

Independența variabilelor aleatoare

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p ; $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a disc

X, Y indep dc $(X \perp\!\!\!\perp Y)$: $\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

PROPRIETĂȚI : $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow$ ① $\mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x)\cdot\mathbb{P}(Y \le y)$ $\forall x, y$

② $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X\in A)\cdot\mathbb{P}(Y \in B)$

Prop: $X \perp\!\!\!\perp Y$; $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$

Dc $X_1, X_2, \dots X_n$ indep şi identic repart cu rep com $B(p)$ at $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim Bin(n, p)$

Dc $X_1, \dots X_n$ indep, $X_i \sim Geom(p)$ at $X = X_1 + \dots + X_n \sim NB(n, p)$

Dc $X \sim Bin(n, p)$ şi $Y \sim (m, p)$ indep. $\Rightarrow X + Y \sim B(n+m, p)$

Dc $X \sim Pois(\lambda_1)$, $Y \sim Pois(\lambda_2)$; $X \perp\!\!\!\perp Y$ at $X + Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$

Dc $X \sim Pois(\lambda_1)$, $Y \sim Pois(\lambda_2)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$: $\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}$

Media şi mom. variabilelor aleatoare

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.d Se numeşte media v.a X şi se notează $\mathbb{E}[X]$ cantitatea:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x} x \, \mathbb{P}(X = x)$$

PROPRIETĂŢI: 1) X e constantă, $X = c \Rightarrow \mathbb{E}[X] = c$

2) $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0$

3) $X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$

4) X, Y v.a; $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$

5) $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

În general $\mathbb{E}[X \cdot Y] \neq \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

6) $X \perp\!\!\!\perp Y$, $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{E}[g(X) \cdot h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)] \cdot \mathbb{E}[h(Y)]$

7) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x} g(x) \cdot \mathbb{P}(X = x)$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.d, $k \geq 1$ $k \in \mathbb{N}$

$\mathbb{E}[X^k]$ moment de ordin k

$\mathbb{E}[(X-a)^k]$ moment centrat în a de ordin k

$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k]$ moment centrat de ordin k

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.d

$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$ - mom centrat de ord k.

Varianța

$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$

standard deviation

Proprietăți:

1) Dc. X este const c, $1 = X = c \Rightarrow Var(X) = 0$.

2) $Var(X) \geq 0 \qquad (\mathbb{E}[\underbrace{(X-\mathbb{E}[X])^2}_{\geq 0}] \geq 0)$

3) Dc. $a \in \mathbb{R}$ atunci $Var(X+a) = Var(X)$.

$$\mathbb{E}[X+a] = \mathbb{E}[X] + a \Rightarrow Var(X+a) = \mathbb{E}[(X+a-\mathbb{E}[X+a])^2] =$$
$$= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = Var(X).$$

4) Dc. $a \in \mathbb{R}$ atunci $Var(a \cdot X) = a^2 \cdot Var(X)$.

$$Var(a \cdot X) = \mathbb{E}[(aX - \mathbb{E}[aX])^2] = \mathbb{E}[(aX - a\mathbb{E}[X])^2] =$$
$$= a^2 \cdot \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = Var(X)$$

5) $Var(aX+b) = a^2 \cdot Var(X)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

Obs! $Var(-X) = Var(X)$.

Obs! $Var(-X) = Var(X)$.

6) $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ (momentul de ordin 2 - media la pătrat)

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$$
$$= \mathbb{E}[X^2 - 2X \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2]$$

liniaritatea mediei

$$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[-2X\mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}[\overbrace{\mathbb{E}[X]^2}^{const}]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$$
$$= \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[X]^2 \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2.$$

7) $Var(X+Y) = ?$

$$\mathbb{E}[(X+Y-\mathbb{E}[X+Y])^2] = \mathbb{E}[(\underbrace{X-\mathbb{E}[X]}_{a} + \underbrace{Y-\mathbb{E}[Y]}_{b})^2] =$$
$$= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2 - 2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y]) + (Y-\mathbb{E}[Y])^2] =$$
$$= Var(X) + 2\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] + Var(Y).$$

Cantitatea:

$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$ se numește covarianța lui X și Y și se notează $Cov(X,Y)$.

8) Dc. $X \perp\!\!\!\perp Y$ (independente)

$X-\mathbb{E}[X] \perp\!\!\!\perp Y-\mathbb{E}[Y] \Rightarrow \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] =$

$= \mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X]]\cdot\mathbb{E}[Y-\mathbb{E}[Y]] = 0.$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$

Variabile aleatoare continue

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X:\Omega\to\mathbb{R}$

v.a X absolut continuă dacă: $\exists\, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ a.î.:

$$\mathbb{P}(X\in A) = \int_A f(x)\,dx,\ \forall A\in\mathcal{R}$$

f - densitatea de prob ; X admite densitatea f, $X\sim f$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ densitate $\Leftrightarrow$ i) $f(x)\geq 0\ \forall x$

ii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1.$

FUNCȚIA DE REPARTIȚIE: $F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$\{X \le x\} = \{X \in \underbrace{(-\infty, x]}_{A}\}$$

MEDIA ȘI MOMENTELE: Media: $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$

Mom. de ordin k: $\mathbb{E}[X^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k \cdot f(x)\,dx$

Mom centrat în a de ordin k: $\mathbb{E}[(X-a)^k] = \int_{\mathbb{R}} (x-a)^k\,dx$

Mom. centrat de ordin k: $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k] = \int_{\mathbb{R}} (x-\mathbb{E}[X])^k f(x)\,dx$

Varianța: $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$

X discretă: $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x} g(x) \cdot P(X = x)$

X continuă, $X \sim f$ avem că: $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\,dx$

Proprietăți

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. cont cu $X \sim f$.

a) Dc. X este const, $X = c$, atunci $\mathbb{E}[X] = c$ și $Var(X) = 0$.

b) Dc. $X \ge 0$ atunci $\mathbb{E}[X] \ge 0$

c) Dc. $X \ge Y$ atunci $\mathbb{E}[X] \ge \mathbb{E}[Y]$

d) Dc. $a, b \in \mathbb{R}$ atunci $\mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X] + b$ și $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

e) Dc. X și Y v.a. cont. atunci $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.

f) Dc. X și Y sunt ind. atunci $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ și $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

1) V.a. Repartizată Uniform

O v.a $X : \Omega \to [a, b]$ rep uniform pe $[a,b]$ notat cu $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ dc densitatea este constantă pe $[a,b]$ și 0 altfel.

Dc $X \sim f$, $f = \begin{cases} c, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

f densitate: $f \geq 0$

$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} c \cdot \mathbb{1}_{(a,b)}(x)\,dx = 1$

Densitate de prob:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

densitate

F de repart:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

Obs! $X \sim \mathcal{U}([0,1])$

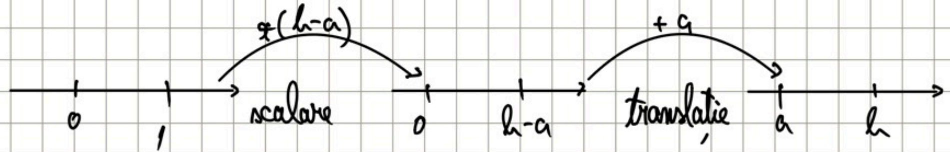
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Există o relație între $\mathcal{U}([0,1])$ și $\mathcal{U}([a,b])$?

Propoziție:

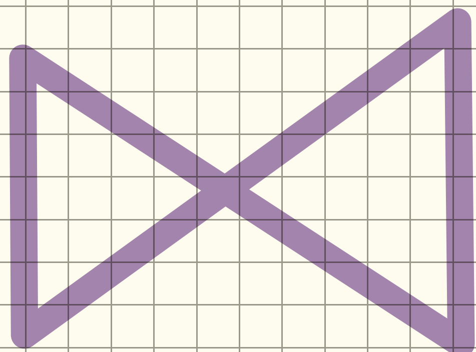
Dc. $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ atunci $V = a + (b-a)U \sim \mathcal{U}([a,b])$ și reciproc, dc. $V \sim \mathcal{U}([a,b])$ atunci $U = \dfrac{V-a}{b-a} \sim \mathcal{U}([0,1])$.



$$P(V \le x) = P(a + (b-a)U \le x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

Media: $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$

Varianța $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$



Universalitatea repartiției uniforme

Fie X v.a. cu fct. de repartiție F continuă și s. cresc. Dc. $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, atunci:

a) $F^{-1}(U)$ și X au aceeași repartiție

b) $F(X)$ este $\mathcal{U}([0,1])$

a) $\mathbb{P}(F^{-1}(U) \le x) = \mathbb{P}(U \le F(x)) = F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$

$$\{F^{-1}(U) \le x\} = \{U \le F(x)\}$$

b) $\mathbb{P}(F(X) \le x) = \mathbb{P}(X \le F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x = \mathbb{P}(U \le x)$

② **Repartiția Exponențială**: Cât timp trece până are loc un eveniment

O v.a este rep. exponențial de param λ notăm $X \sim Exp(\lambda)$ dc admite

densitatea de prob

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

<u>funcția de rep</u> $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$

: Prob. ca timpul să depășească o valoare a.

<u>Probabilitatea de supraviețuire</u>

$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda a}$ scade exponențial

Obs! Pt. $x > 0$, $F(x)$ bij. și $F^{-1}(u) = -\dfrac{\ln(1-u)}{\lambda}$

$F(x) = u \iff 1 - e^{-\lambda x} = u \iff -\lambda x = \ln(1 - x) \iff x = -\dfrac{\ln(1-u)}{\lambda}$

Putem genera $Exp(\lambda)$

1) Generăm $U \sim \mathcal{U}([0,1])$
2) Luăm $-\dfrac{\ln(1-u)}{\lambda} \sim Exp(\lambda)$

Dc. $U \sim \mathcal{U}([0,1]) \Rightarrow 1 - U \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Alternativ $-\dfrac{\ln(U)}{\lambda} \sim Exp(\lambda)$.

Media : $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$

Varianța : $V(X) = \dfrac{2}{\lambda^2}$

Lipsa de Memorie : $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$

↳ "prob ca un even să aibă loc peste încă t minute știind că au trecut deja s

minute este aceeași ca și cum am pornit cronometru de la zero"

③ Repartiția normală: "medie" ; "abatere standard"

Spunem că v.a X este rep. normal de parametru μ și σ^2 notăm $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dc admite densitatea de rep:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}^2, \sigma^2 > 0$$

$X \sim N(0,1)$ rep normal standard dc: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

FORMA DE REPARTIȚIE: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$

$X \sim N(0,1)$

$$\underline{\Phi}^{-1}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

Media unei funcții de v.a.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si v.a $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ discrete

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$Z = g(X, Y)$ este o v.a discretă.

Media Condiționată: X o v.a. discretă $A \in \mathcal{F}$. $\mathbb{P}(A) > 0$. Atunci media cond a lui X la A

$$\mathbb{E}[X|A] = \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x | A) = \sum_x x \underbrace{f_{X|A}(x)}$$

$$\mathbb{P}(X = x | A) = \frac{\mathbb{P}(X = x \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

↳ funcția de masă cu prob recalculate după evenimentul A.

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p si X, Y 2 v.a discrete

Media lui X cond la Y notată cu $\mathbb{E}[X|Y]$

$g(Y)$

$g(Y) = \mathbb{E}[X | Y = y]$

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2 | A] - \mathbb{E}[X|A]^2$$

Cazul Continuu:

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. X si Y două v.a cont. Spunem că vectorul (X,Y) admite densitatea comună $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ d c

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^2$$

Dc $A = [a,b] \times [c,d]$ at $\mathbb{P}(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$