6. oct. 2025 curs 1

Notă
- Activitate Lab / Seminar 20p
- Proiect 30p (în R) pe echipe (max 2 pers)
- Examen (Scris 3h - 5 exerciții 50p)

Oficiu: 10p

Pt a promova: i) Nota ≥ 5
ii) Nota la examen $\geq 25p$

Cadru: Avem o urnă cu bile roșii și verzi, prop bilelor roșii din urnă e p. Efectuăm n extrageri și notăm culorile bilelor extrase.

→ extrageri cu revenire/întoarcere.

Pb Probabilități: Știm $p = 0.23$

Extragem cu întoarcere $n = 20$ bile, care este prob ca din cele $n = 20$, 5 să fie de culoare roșie.

$$C_{20}^{5} \cdot 0.23^{5} \cdot 0.77^{15}$$

$$\parallel$$

$$\binom{20}{5}$$

Pb statistică: Am efectuat 20 extrageri cu întoarcere și am obs că 5 bile sunt de culoare roșie. Ce pot să spun despre proporția bilelor roșii din urnă.

$$\hat{p} = 5/20$$

Câmp de probabilitate evenimente și calcul de probabilități.

DEF: Un experiment aleator este un exp./fenomen al cărui rezultat nu îl cunoaștem înaintea realizării lui.

DEF: Mulțimea rez. posibile din cadrul unui experiment aleator se numește spațiu stărilor (spațiu posibil.) și se notează Ω.

exp: → Aruncăm un zar : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
→ Aruncăm un ban : $\Omega = \{H, T\}$

DEF: Elementele lui Ω ($w \in \Omega$) se numesc evenimente elementare

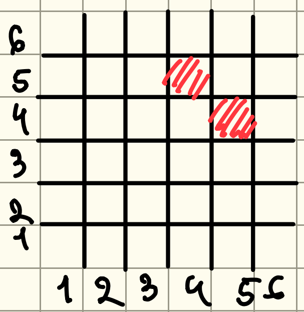
Evenimente elementare:

a) mutual exclusive.
b) colectiv exhaustive.
c) granularitate potrivită.

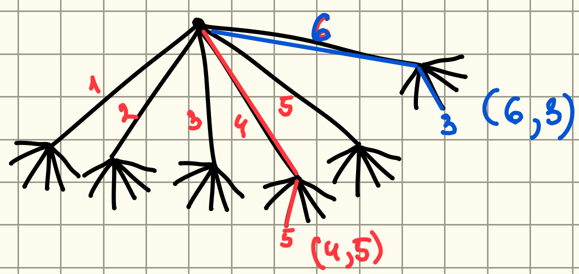
H si afară plouă
H si afară nu plouă
T si afară plouă
T si afară nu plouă.

Exp: Aruncăm cu două zaruri:

$\Omega = \{(x, y) \mid 1 \leq x, y \leq 6\}$



Arbore:



OBS: O mulțime A este discretă dacă este finită sau numărabilă (cel mult numărabilă)

Exp: 4) Durata de viață a unui aparat $\Omega = [0, t]$

5) Trasul la țintă, $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$

Def: O submulțime $A \subseteq \Omega$ este un eveniment. Spunem că evenimentul A s-a realizat dacă în urma desf. exper. aleator am obținut $\omega \in A$.

Exp: Arunc un zar: $\Omega : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{3\}$

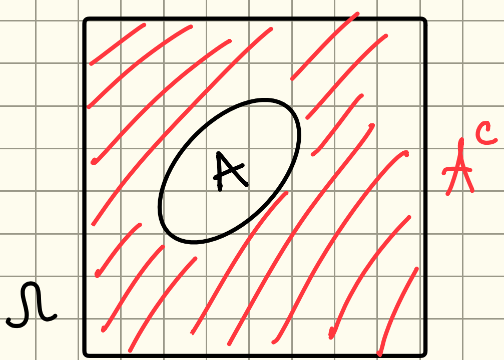
$A = \{2, 3, 5\}$ nr prim

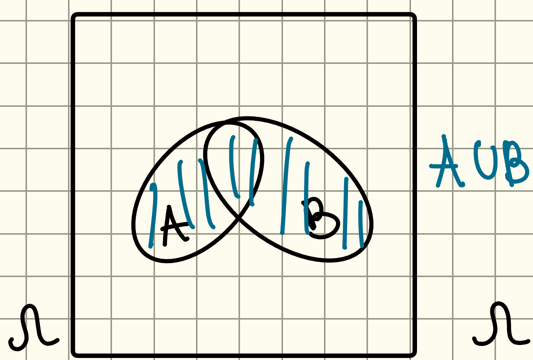
$A = \{4, 5, 6\}$

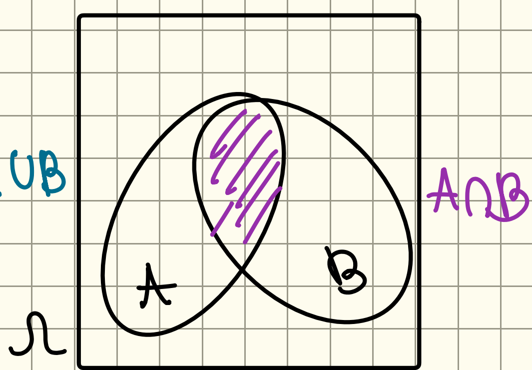
Avem 2 evenimente A, B ($A, B \subseteq \Omega$)

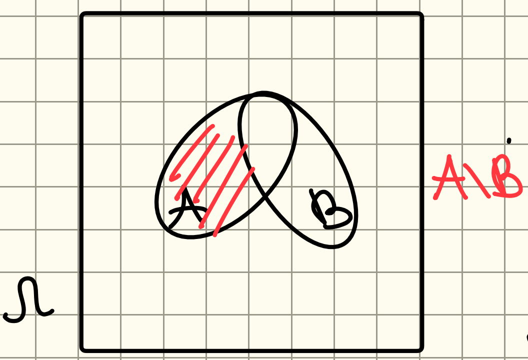
	Teoria Mulțimilor	Teoria Probabilităților
Ω	mulțimea Ω	spațiul stărilor, spațiul probelor, evenimentul sigur.
$\emptyset$	mulțimea $\emptyset$	evenimentul imposibil
A, B	mulțimile A, B	evenimentele A, B
$A^c / C_A / \bar{A}$	complementara lui A	evenimentul contrar lui A.
$A \cup B$	reuniunea lui A cu B	cel puțin unul dintre evenim A și B se realizează
$A \cap B$	intersecție	evenimentele A și B se realiz. simultan.
$A \setminus B$	Diferență	evenimentul A se realizează dar nu și B
$A \Delta B$	Diferență simetrică $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	cel puțin unul dintre evenim A sau B se realizează, dar nu ambele.
$A \subseteq B$	incluziune	ev A implică ev B

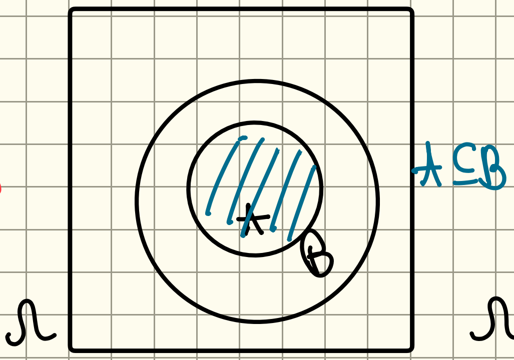
Diagrama Venn:

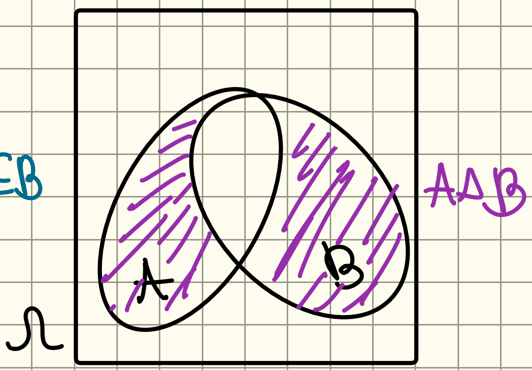












$\mathcal{F}$ s.n mulțimea evenimentelor posibile asociate exp aleator

$\mathcal{F}$ – mulțime de mulțimi.

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mulțimea părților lui Ω

a) $\Omega \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ $(\emptyset \in \mathcal{F})$

c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ c') $(A_n)_n \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$ $\to \sigma$-alg

Exp: Aruncăm în mod repetat cu o monedă până obținem pt prima oară H: Ne întrebăm la nr de aruncări

$$\Omega = \{\underset{H}{1}, \underset{TH}{2}, \underset{TTH}{3}, \dots\} = \mathbb{N}^*$$

Considerăm evenimentul $A = \{$am obținut pt prima oară H într-un nr par de aruncări$\}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \qquad A = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$c')\ (A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n{}^c\ \mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{2i\}$$

Def: O mulțime $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ care verifică care verifică a, b și c' s.n. σ algebră peste Ω.

Prop: a) $\emptyset \in \mathcal{F}$ a') $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

b) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

c) $A, B \in \mathcal{F} \overset{b}{\Rightarrow} A^c, B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

$= (A \cap B)^c$ b

d) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$, $A \setminus B = A \cap B^c$

e) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{F}$

Exp: Aruncăm de 10 ori cu o monedă

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_{10}) \mid x_i \in \{H, T\}\}$$

A_j - la aruncarea j am obținut H.

$A_1 = \{(H, x_1, \dots, x_{10}) \mid x_i \in \{H, T\}\}$

$A_2 = \{(x_1, H, x_3, \dots, x_{10}) \mid x_i \in \{H, T\}\}$

$E_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{10}$

↳ Am obținut cel puțin un cap.

$E_2 = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10}$

↳ Am obținut cap la toate cele 10 aruncări.

$E_3 = \bigcup_{i=1}^{9} (A_i \cap A_{i+1})$

↳ Am obținut cel puțin 2 consecutive.

Perechea $(\Omega, \mathcal{F})$ s.n spațiu măsurabil

Fie $A \in \mathcal{F}$. Presupunem că repetăm experimentul de un nr N ori și notăm cu $N(A)$ nr de exp. în care ev. A s-a realizat.

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{N \to A} \frac{N(A)}{N}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\mathbb{P}"] \arrow[d, "\forall"'] & {[0,1]} \arrow[d] \\
A \arrow[r] & p
\end{tikzcd}$$

Dacă $A = \emptyset$, atunci $N(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Dacă $A = \Omega$, atunci $N(A) = N \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

A și B, $A \cap B = \emptyset$ (Disjuncte)

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) \quad | : N$

$n \to \infty$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (aditivitate)

Dacă $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$, $A_n \cap A_m \neq \emptyset$ pt $n \neq m$ (disjuncte 2 câte 2)

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (σ-aditivitate)

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F})$ sp măsur asociat unui exp aleatoriu. O funcție $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ care verifică

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) Dacă $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ disjuncte 2 câte 2 atunci

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$$

se numește măsură de probabilitate (posibilitatea) pe Ω.

Experiment Aleator $\longrightarrow (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ← câmp de probabilitate.

exemplu: 1) Aruncatul cu banul

$\Omega = \{H, T\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{H,T\}, \{H\}, \{T\}\}$

$\mathbb{P}$: $\emptyset \to 0$, $\{H,T\} \to 1$, $\{H\} \to p \in [0,1]$

2) Zar

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}(\{i\}) = p_i$, $p_i \in [0,1]$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_6 = 1$.

13 oct 2025 curs 2

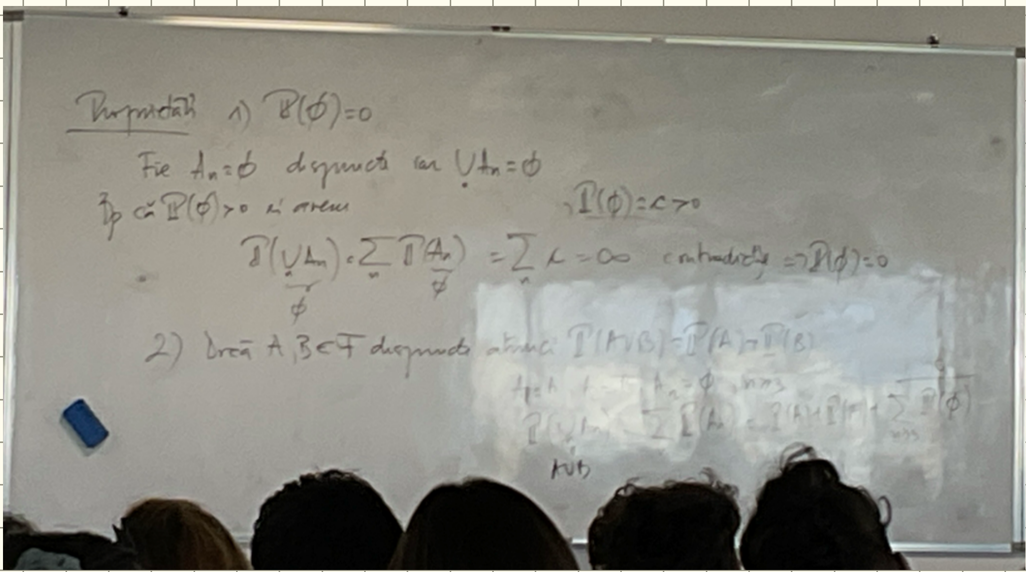
Experiment aleator $\rightarrow (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$

dacă i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

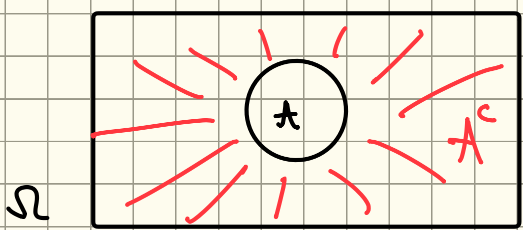
ii) $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$

$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$



3) $A \in \mathcal{F}$

$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$



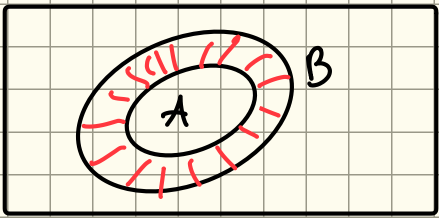
$$\left.\begin{array}{l} A \cup A^c = \Omega \\ A \cap A^c = \phi \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(\underbrace{A \cup A^c}_{\Omega}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

$1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$

4) $A, B \in \mathcal{F}$ și $A \subseteq B$ atunci

$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ monotonie

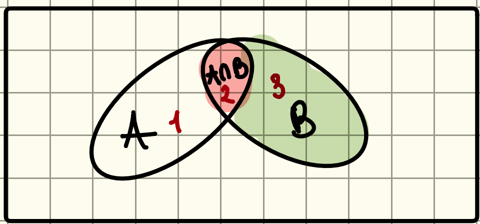
$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$



$$\left.\begin{array}{l} B = A \cup (B \setminus A) \\ A \cap (B \setminus A) = \emptyset \\ B \setminus A = B \cap A^c \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$$

5) $A, B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$



$$\left.\begin{array}{l} A \cup B = A \cup (B \setminus A) \\ A \cap (B \setminus A) \neq \emptyset \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbb{P}(A \cup B) \\ = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} B \setminus A = B \setminus (A \cap B) \\ A \cap B \subseteq B \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) \\ = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{array}$$

6) $A, B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

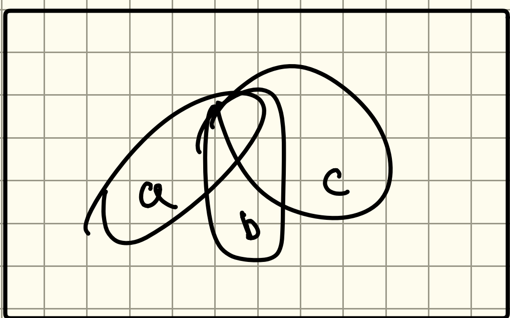
(Inegalitățile lui Bomfferoni)

Când se folosesc?

i) atunci când $\mathbb{P}(A)$ si $\mathbb{P}(B)$ sunt foarte mici

ii) atunci când $\mathbb{P}(A)$ și $\mathbb{P}(B)$ sunt mari

7) $A, B, C \in \mathcal{F}$



$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

8) Formula lui

$A_1, A_2 \ldots A_n \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{j=1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n)$$

6') $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

i) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

ii) $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$

9) Ineg Boole

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

10) Fie $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ din $\mathcal{F}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$$

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ din $\mathcal{F}$ (şir descrescător)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$$

Exp: Aruncăm cu o monedă în mod repetat. Ştim că probabilitatea să obţinem H este $p \in (0,1)$

$A = \{$obţinem mai devreme sau mai târziu H$\}$

$\Omega = \{H, T\}^{\mathbb{N}}$ $\qquad E^F = \{f : F \to E\}$

$\Omega = \{(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid w_i \in \{H, T\}\}$

$A_n = \{(w_1, w_2, \dots w_n) \mid \exists i \text{ a.i. } w_i = H\}$

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \uparrow$ $\qquad A = \bigcup_n A_n$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$$

$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n^c)$

$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n^c) = 1 - \underbrace{(1-p)^n}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} \longrightarrow 1$

$p \in (0,1)$

20 octombrie curs 3

PARTIȚII

Fie A o mulțime cu n elemente și $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ cu $n_1+n_2+\dots+n_k=n$
Se numește $(n_1, \dots, n_k)$ partiție pe A o partiție $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq A$ cu prop. că $(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_k = A;\ A_i \cap A_j = \emptyset)$

Câte $(n_1, \dots n_k)$ partiții avem?

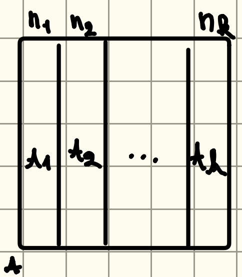
nr de secv lungime n cu n_1 elem de tipul 1, n_2 elem de tip 2 .... n_k elem de tip k

(n_1, n_2) $\quad n_1 + n_2 = n$

$n_2 = n - n_1$

A, A^c

$|A| = n \qquad \binom{n}{n_1} = C_n^{n_1}$



Putem alege Subm. A_1 care are n_1 elem, $\binom{n}{n_1}$ valori
după putem alege A_2 cu n_2 elem în $\binom{n-n_1}{n_2}$

.... A_3 cu n_3 elem $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$

..... A_k cu n_k elem $\binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k}$ valori.

$\Rightarrow$ În total avem $\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \ \dots \ \binom{n-n_1-\dots n_{k-1}}{n_k}$

$$\frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3! \cdot (n-n_1-n_2-n_3)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-n_1-\dots-n_k)!}{n_k!\,(n-n_1-\dots n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ \dots \ \cdot n_k!}$$ Coeficientul Multinomial

La ce folosim?:

exp: MATEMATICA | câte cuv dif putem obține

M → 2
A → 3
T →
E, I, C →

$$\binom{10}{2, 3, 2, 1, 1, 1}$$

Exp: În grupa 242 sunt 4 băieți 12 fete
- grupe de 4 studenți în mod aleator.

Care este prob ca în fiecare grupă să avem 1b?

$$\binom{16}{4,4,4,4} = \frac{16!}{4!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!} \quad \text{cazuri posibile}$$

Cazuri favorabile: $\rightarrow$ 4! pot distribui băieți $\boxed{b_1}$ $\boxed{b_2}$ $\boxed{b_3}$ $\boxed{b_4}$

$$\rightarrow \binom{12}{3,3,3,3} = \frac{12!}{3!\cdot 4}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\frac{12!}{(3!)^4}\cdot 4!}{\frac{16!}{(4!)^4}}$$

	ordinea contează	ordinea nu contează
cu întoarcere	n^k	? $\binom{n+k-1}{k}$
fără întoarcere	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Modelul Bose-Einstein

→ Avem k bile identice (nu se pot diferenția) și n urne distincte.

$k=7$
$n=5$

$$\underbrace{\lfloor o \rfloor}_{x_1}\ \underbrace{\lfloor\ \rfloor}_{x_2}\ \underbrace{\lfloor oo \rfloor}_{x_3}\ \underbrace{\lfloor ooo \rfloor}_{x_4}\ \underbrace{\lfloor o \rfloor}_{x_5}$$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7$

nr de soluții?

$$|\ o\ |\ \ |\ oo\ |\ ooo\ |\ o\ |$$

rămân pe loc   rămân pe loc

k bile + $n-1$ bare $\Rightarrow$ $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

PROBABILITĂȚI CONDIȚIONATE

FORMULE DE CALCUL
FORMULA LUI BAYERS
INDEPENDENȚA.

exp: Aruncăm cu o monedă de 3 ori (monedă echilibrată). Ne uităm la ev.

$A = \{HHH\}$; am obținut cap de 3 ori.

$\Omega = \{H, T\}^3$; $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$; $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0, 1]$ echip. $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{8}$.

Ω

HHH (A)	HHT	THH	THT
HTH	HTT	TTH	TTT

Pp că știm că la prima aruncare am ob H.

B ↗ $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A|B)$

ev. A; | știind că; ev B

$\mathbb{P}(A|B)$ – pos even A știind că B s-a realizat
(pos cond a lui A (a B)

Obs: $A|B$ nu este eveniment

$\neq A \setminus B$

Abordare

Repetăm un experiment în condiții indentice de N ori și la fiecare rep ne uităm la & ev A și resp B.

Notăm $N(B)$ – nr de realizări B

$N(A \cap B)$ – nr de realizări ale lui A și B simultan

Vrem să vedem în câte dintre evem în care s-a realizat B s-a realizat B

$\frac{N(A \cap B)}{N(B)}$ – frecvența relativă a realizării lui A în toate exp în care s-a realizat B

Am v2 că $\mathbb{P}(A) \simeq \dfrac{N(A)}{N}$

Observăm că $\dfrac{N(A\cap B)}{N(B)} = \dfrac{\frac{N(A\cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} \simeq \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mcp și $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(B) > 0$. Se numește prob. lui A condiționat la B și se notează $\mathbb{P}(A|B)$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

exp 1 (continuare)

$$\underset{HHH)}{\mathbb{P}(A|B)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}$$

$B = \{HHH, HHT, H, TH, HTT\}$

$\mathbb{P}(B) = 4/8$

$A\cap B = \{HHH\}$

$P(A\cap B) = \frac{1}{8}$

Exp 2: Avem un pachet cu cărți de joc, extragem aleator în mod succesiv 2 cărți fără întoarcere.

$A = \{$ prima carte este inimă roșie$\}$

$B = \{$ a doua carte este inimă roșie$\}$

$C = \{$ a doua carte este de culoare roșie$\}$

52 cărți
13 inimă roșie
26 culoare roșie.

Calculăm $\mathbb{P}(B|A), \mathbb{P}(C|A), \mathbb{P}(A|B)$ și $\mathbb{P}(A|C)$

Sol $\mathbb{P}(B|A) = \frac{12}{51}$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{13\cdot 12}{52\cdot 51}}{\frac{13}{52}} = \frac{12}{51}.$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{13}{52}$$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{13\times 12}{52\cdot 51}$$

$$\mathbb{P}(C|A) = \frac{25}{51} \neq \mathbb{P}(A|C)$$

$$\mathbb{P}(A\cap C) = \frac{13\cdot 25}{52\cdot 51}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$P(B) = \frac{13}{52}$$

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{25}{102}$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{26}{52}$$

exp3: O familie are 2 copii

$\frac{1}{2}$ a) care este prob ca cei 2 copii să fie de sex F știind că cel mai mare este F.

$\frac{1}{3}$ b) care este prob ca cei 2 copii să fie de sex F știind că cel puțin unul este F.

$\Omega = \{BB, BF, FB, FF\}$

BB	BF
FB	FF

a) $A = \{FF\}$
$B = \{FB, FF\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

b)

BB	BF
FB	FF

$C = \{$cel puțin unul este de sex F$\} = \{FB, FF, BF\}$.

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)$$

$$P(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \qquad = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

Cond: $P(A \cap B) > 0$.

- Regula înmulțirii.

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) > 0$

Atunci $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \ldots$
$\ldots \cdot \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

exp: Dacă apare aeronavă → alarmă 99%

Dacă nu avem aeronavă → alarmă în 10%

Prob să apară o aeronavă este de 5%.

a) Care este prob să nu avem aeronavă și să avem alarmă falsă.

b) Care este prob să avem aeronavă și să nu fie dectată.

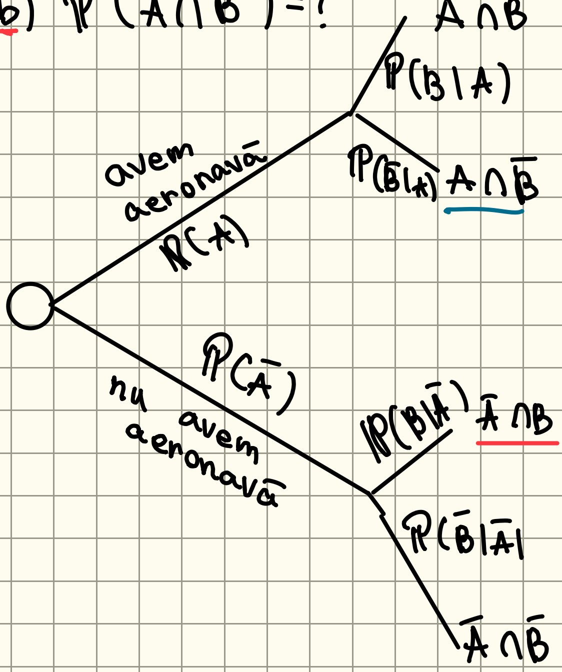
$A = \{$avem aeronavă$\}$ $\qquad \mathbb{P}(A) = 5\%$

$\mathbb{P}(B|A) = 99\%$

$B = \{$Se declanșează alarma$\}$ $\qquad \mathbb{P}(B|\bar{A}) = 10\%$

a) $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = ?$

b) $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = ?$



$\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \underbrace{\mathbb{P}(\bar{B}|A)}_{0.01} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{0.05}$

← să nu am aeronavă și să se de.

$\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B|\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{A})$

$= 1 - \mathbb{P}(A) = 0.95.$

FORMULA PROBABILITĂȚII TOTALE

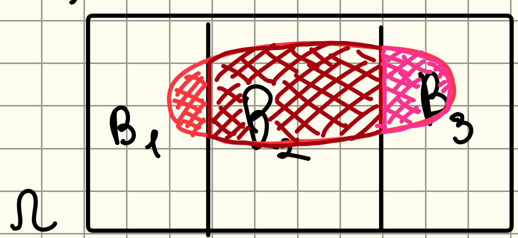
Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $B_1, B_2, B_3 \subseteq \mathcal{F}$ o partiție pe Ω

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$

$B_2 \cap B_3 = \emptyset$

$B_1 \cap B_3 = \emptyset$



$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3))$$
$$= \mathbb{P}((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3))$$
$$\overset{\text{disjuncte}}{=} \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3)$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)$$

(D) Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ partiție pe Ω
cu $\mathbb{P}(B_i) > 0$ $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Obs: în practică $n = 2$

$A, B \in \mathcal{F}$ $\quad \mathbb{P}(B) \in (0, 1)$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})$$

exp2 (continuare)

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}($a doua carte să fie de inimă roșie$)$

$$= \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})$$

$$= \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{52} + \frac{13}{51} \cdot \frac{39}{52} = \frac{13(12+39)}{51 \cdot 52} = \frac{13}{52}.$$

FORMULA LUI BAYES

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A) > 0$; $\mathbb{P}(B) > 0$.

$$\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(B|A)}_{\text{Prob a posterior}} = \underbrace{\mathbb{P}(B)}_{\text{Prob apriori}} \cdot \frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)} \rightsquigarrow \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq \mathcal{F}$ o partiție. $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $\mathbb{P}(A) > 0$.

$$\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}$$

exp: Pp că prevalența unei boli în populație este de 1%

Pp că avem un test cu acuratețea de 95% (senzitivitatea și specifitatea de 95%)

true pozitiv

true negativ

Pp că o pers. a efectuat testul și testul și rez. a fost pozitiv. Care este prob ca pers să fie infectată.

Notăm D - persoana are afecțiunea

T - testul este pozitiv

- rata de true positive $\mathbb{P}(T \mid D) = 0.95$ (sensitivitate)
- rata de true negative $\mathbb{P}(\overline{T} \mid \overline{D}) = 0.95$ (specificitatea

- false positive : $\mathbb{P}(T \mid \overline{D})$
- false negative : $\mathbb{P}(\overline{T} \mid D)$

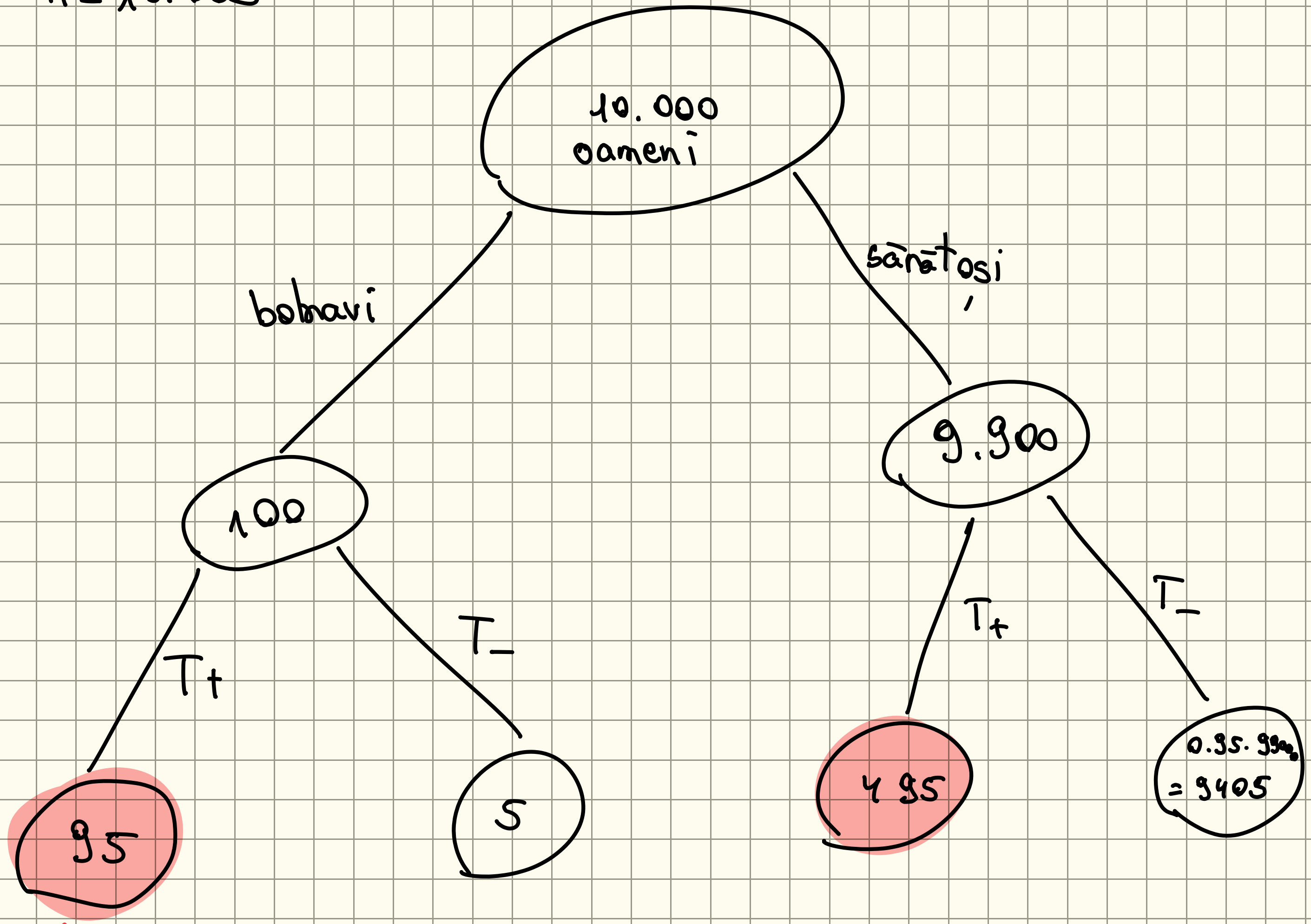
$\mathbb{P}(D) = 0.01$.

Formula lui B

$$\mathbb{P}(D \mid T) = ? \quad \frac{\mathbb{P}(T \mid D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T)}$$

$$= \frac{\overset{0.95}{\mathbb{P}(T \mid D)}\ \overset{0.95}{\mathbb{P}(D)}}{\underset{0.95}{\mathbb{P}(T \mid D)}\underset{0.01}{\mathbb{P}(D)} + \underbrace{\mathbb{P}(T \mid \overline{D})}_{\substack{1-\mathbb{P}(\overline{T} \mid \overline{C}) \\ =0.05}} \cdot \underset{0.99}{\mathbb{P}(\overline{D})}} \approx 0.16.$$

$n = 10.009$

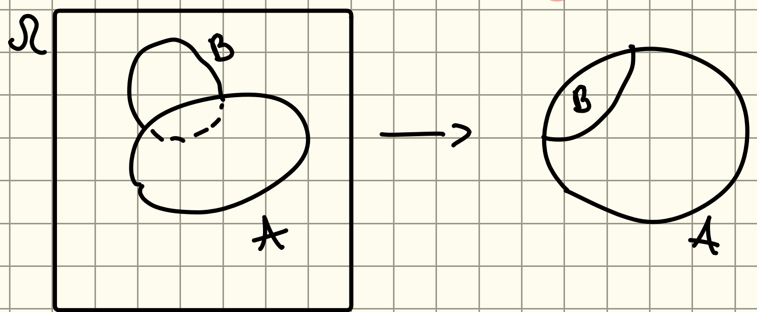


cu adev. bolnavi

$$\Rightarrow \frac{95}{95+495} \approx 16\%$$

27 oct 2025 curs 5

PROBABILITĂȚI CONDIȚIONATE



Vom arăta că prob cond sunt prop

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$

Atunci dacă definim

$Q_A : A \cap \mathcal{F} \to [0,1]$

$A \cap B$, $B \in \mathcal{F}$

$$Q(B) = \mathbb{P}(B|A)$$

$$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \,|A) : \mathcal{F} \to [0,1].$$

Q este o măsură de probabilitate pe A

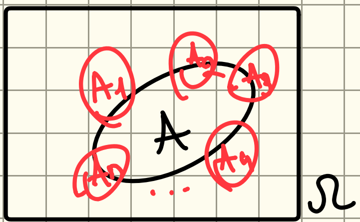
i) $Q(A) = 1$

$$\overset{\shortparallel}{\mathbb{P}}(A|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1.$$

ii) $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$, disjuncte două câte 2.

Atunci $Q(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} Q(A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} A_n | A)$

$$= \frac{\mathbb{P}(A \cap (\bigcup_{n\geq 1} A_n))}{\mathbb{P}(A)}.$$



$$= \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} (A \cap A_n))}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{P}(A \cap A_n)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \sum_{n\geq 1} Q(A_n)$$

FORMULA LUI BAYES:

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p ; $A, B, C \in \mathcal{F}$

$\mathbb{P}(A \cap B) > 0$; $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$; $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$.

$$\mathbb{P}(A | B, C) = \frac{\mathbb{P}(B | A, C) \cdot \mathbb{P}(A | C)}{\mathbb{P}(B | C)}$$

Probabilitatea lui A știind că B și C s-au realizat.

$$\mathbb{P}(A | B, C) = \mathbb{P}(A | B \cap C)$$

Fie $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \,| C)$; Aplicăm formula lui Bayes pt Q

$$Q(A|B) = \frac{Q(B|A) \cdot Q(A)}{Q(B)}$$

FORMULA PROB. TOTALE

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)$; $(B_i)_{i=\overline{1,n}}$ o partiție pe Ω

$$\mathbb{P}(A|C) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i, C) \cdot \mathbb{P}(B_i|C)$$

Exp: PP că o pers are în buzunar 2 monede, una echilibrată și una trucată ($3/4$ H)

- extrage o monedă la întâmplare ($1/2$)
- aruncă moneda de 3 ori, obține HHH.

Care este prob să fi extras moneda echilibrată.

A = „ev în care am obținut HHH"

B = „ev în care am extras moneda echilibrată"

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Din Ipoteză

$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(A|B) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{3^3}{2^3}} = \frac{2^3}{2^3 + 3^3} = \frac{8}{35}.$$

b) Aruncă pt a 4-a oară ca banul. Care este prob să obțină H?.

C = "ev în care obținem H la a 4-a aruncare"

$\mathbb{P}(C|A) = ?$

Fie $Q(C) = \mathbb{P}(C|A) = \frac{97}{140}$

Din formula prob totale

$Q(C) = Q(C|B)Q(B) + Q(C|\overline{B})Q(\overline{B})$

$Q(C|B) = 1/2$; $Q(C|\overline{B}) = 3/4$

$Q(B) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{8}{35}.$

$$Q(\bar{B}) = 1 - Q(B) = \frac{27}{35}.$$

$$Q(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{35} + \frac{3}{4}\cdot\frac{27}{35} = \frac{16 + 27\cdot 3}{140} = \frac{97}{140}.$$

INDEPENDENȚA

Două evenimente A și B independente Dc realizarea unuia nu influențează realizarea celuilalt.

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Rightarrow \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

$\mathbb{P}(B)>0.$ $\quad \Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $A, B \in \mathcal{F}$. A, B indep $A \perp\!\!\!\perp B$ dacă:

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

Obs: $A \perp\!\!\!\perp B$ atunci $\bar{A} \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp \bar{B}$, $\bar{A} \perp\!\!\!\perp \bar{B}$

exp: Aruncăm cu o monedă de 2 ori

Fie A_1 = "ev în care am obținut H la prima aruncare"

A_2 = "ev în care am obținut H la a 2-a aruncare"

Sunt $A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$.

$\Omega = \{H, T\}^2 = \{HH, HT, TH, TT\}$

$A_1 = \{HT, HH\}$

$A_2 = \{TH, HH\}$

$A_1 \cap A_2 = \{HH\}$

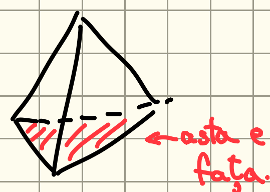
$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{P}(A_1\cap A_2) = 1/4 \\ &\mathbb{P}(A_1) = 2/4 \\ &\mathbb{P}(A_2) = 2/4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1\cap A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2) \Rightarrow A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$$

exp: Zar cu 4 fețe

aruncăm de 2 ori cu zarul

$A = \{$ primul are fața $1\}$

$B = \{$ suma punctelor de pe cele 2 zaruri este $5\}$



$A = \{(1,1); (1,2); (1;3); (1,4)\}$ $\mathbb{P}(A) = 4/16$

$B = \{(1,4); (2,3), (3,2), (4,1)\}$ $\mathbb{P}(B) = 4/16$.

$\Omega = \{1,2,3,4\}^2$

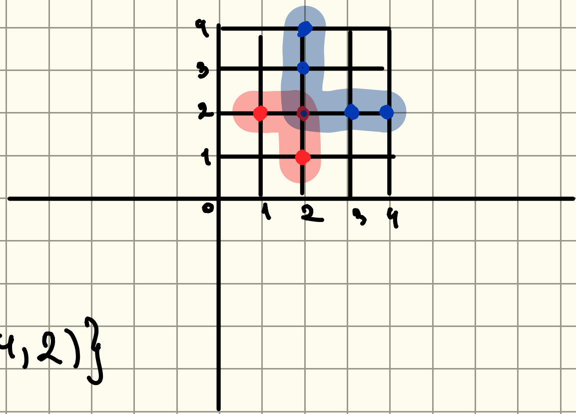
$A \cap B = \{(1,4)\} \rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 1/16$.

$\Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$

Exp: aruncăm 2 zaruri cu 4 fețe

$A =$ " maximul celor 2 zaruri e $2\}$

$B =$ " minimul celor 2 zaruri este $2\}$



$A = \{(1,2); (2,1); (2,2)\}$

$B = \{(2,2); (2,3); (3,2); (2,4); (4,2)\}$

$\mathbb{P}(A) = 3/16$

$\mathbb{P}(B) = 5/16$.

$A \cap B = \{(2,2)\}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/16 \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A \not\perp\!\!\!\perp B$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $A_1, A_2 \dots A_n \in \mathcal{F}$. Spunem că $A_1, \dots, A_n$ sunt independente (mutual) dacă

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i), \forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$$

exp: $A, B, C \in \mathcal{F}$ independente d.c.:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \end{aligned}\right\} \text{Indep. două câte două.}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

$C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - n - 1$ - nr de relații care trb verificate.

ex: Aruncăm 2 monede echilibrate

A_1 = " am Ob H la prima aruncare"

A_2 = " am ob H la a 2-a aruncare"

B = " cele două au rez diferite"

$\Omega = \{H, T\}^2$ $\quad A_1 = \{HT, HH\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1) = 1/2$

$A_2 = \{TH, HH\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_2) = 1/2$

$B = \{HT, TH\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1/2$.

$A_1 \cap A_2 = \{HH\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 1/4 = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$

$A_1 \cap B = \{HT\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap B) = 1/4 = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(B)$

$A_2 \cap B = \{TH\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_2 \cap B) = 1/4 = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(B)$

$A_1 \cap A_2 \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(B) = 1/8$

$\Rightarrow A_1, A_2, B$ nu sunt independente mutual, în schimb sunt 2 câte 2.

Obs: Putem defini indep și în contextul prob. condiționate

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $A, B, C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) > 0$

Spunem că A și B sunt indep. cond la C dacă

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C)$$

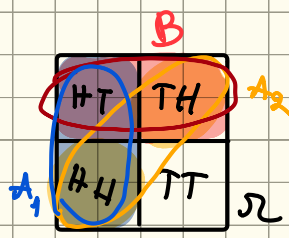
Obs: Este def indep ev A și B în rap. cu prob cond. $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C)$

$$Q(A \cap B) = Q(A) \cdot Q(B).$$

exp: (Indep. nu implică indep cond)

$A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$

$$\mathbb{P}(A_1 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$



$\mathbb{P}(A_2|B) = 1/2$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B) = 0.$

Exp: Testăm o boală rară.

D="persoana are afecțiunea" $\mathbb{P}(D) = 1\%$

Acuratețea testului(specificitatea = sensitivitatea) = 95%

$$\mathbb{P}(\bar{T}|\bar{D}) = \mathbb{P}(T|D)$$

Am văzut că $\mathbb{P}(D|T) \approx 16\%$

Nou: Pp că persoana care a efectuat testul, efectuează un nou test independent de primul test condiționat de statusul afecțiunii și cu aceeași acuratețe.

Cele 2 teste sunt indep. condiționat de statutul afecțiunii

T_1, T_2 - testul (1, respectiv 2 au ieșit pozitiv)

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D) = \mathbb{P}(T_1|D) \cdot \mathbb{P}(T_2|D)$$
$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | \bar{D}) = \mathbb{P}(T_1|\bar{D}) \cdot \mathbb{P}(T_2|\bar{D})$$

Al doilea test a ieșit pozitiv. Care este acum prob ca pers să fie infectată?

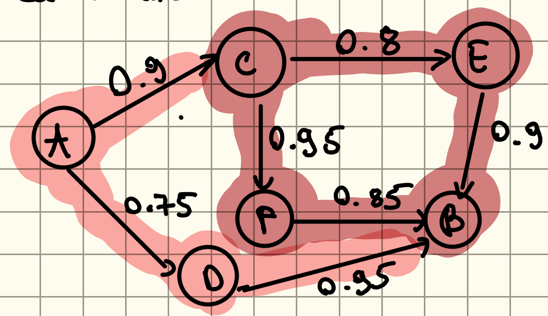
$$\mathbb{P}(D|T_1 \cap T_2) = ?$$
$$= \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2|D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)}$$
$$= \frac{(0.95)^2 \cdot 0.01}{(0.95)^2 \cdot 0.01 + (0.05)^2 \cdot 0.99}$$

formula prob. totale:

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2|D) \cdot \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2|\bar{D}) \cdot \mathbb{P}(\bar{D})$$

$\boxed{\approx 78\%}$ $\qquad 16\% \to 78\%$

exp: Rețea de calculatoare:



Vrem să calc prob să avem conexiune între A și B.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "pCE"] \arrow[d, "pCF"'] & E \arrow[d, "pEB"] \\ F \arrow[r, "pFB"'] & B \end{tikzcd}$$

$$P(C \to B) = 1 - (1 - \mathbb{P}(C \to E \text{ și } E \to B))(1 - \mathbb{P}(C \to F \text{ și } F \to B))$$
$$= 1 - (1 - pCE \cdot pEB)(1 - pCF \cdot pFB)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "pAC"] \arrow[d, "pAD"'] & C \arrow[d, "? = pCB"] \\ D \arrow[r, "pDB"'] & B \end{tikzcd}$$

$$P(A \to B) = 1 - (1 - \mathbb{P}(A \to C \text{ și } C \to B))(1 - \mathbb{P}(A \to D \text{ și } D \to B))$$
$$= 1 - (1 - pAC \cdot pCB)(1 - pAD \cdot pBD)$$

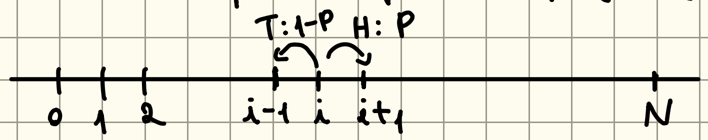
VARIABILE ALEATOARE

Aruncăm 2 zaruri $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$

a) suma punctelor $= 3$

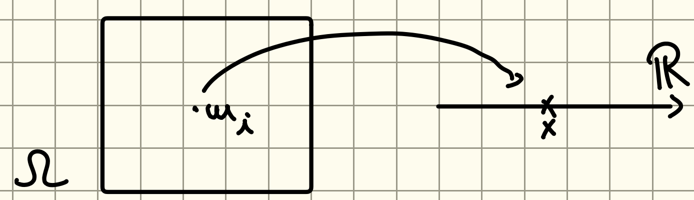
b) nr de fețe cu 3 puncte în cele 3 arc

c) nr de puncte pe zarul 2 la patenea a-3a

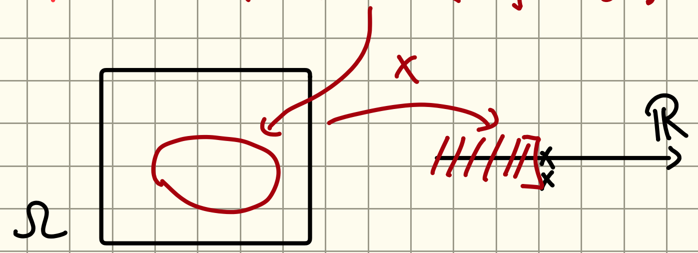


Ideea de variabilă aleatoare este de a asocia fiecărui eveniment elementar o valoare reală

$$\omega \in \Omega \longrightarrow x \in \mathbb{R}$$

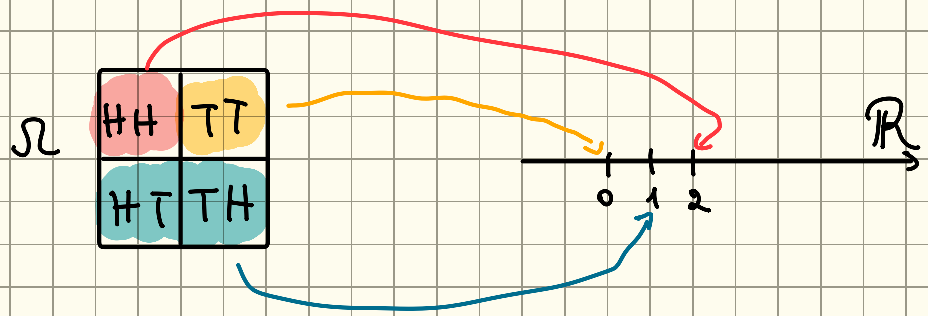


Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. Se numește variabilă aleatoare o funcție $X : \Omega \to \mathbb{R}$ care verifică urm. proprietate: $\{\omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}$



Exp: Aruncăm de 2 ori cu banul $\Omega = \{H, T\}^2$

X = nr (#) de capete din cele 2 aruncări.



$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (submulțimi)

$X(HH) = 2$
$X(HT) = X(TH) = 1$
$X(TT) = 0$

$x \in \mathbb{R}$
$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}$

$x = \sqrt{2}$
$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le \sqrt{2}\} = \{\underset{0}{TT}, \underset{1}{HT}, \underset{1}{HT}\} \in \mathcal{F}$

$x = 0{,}79$
$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le 0{,}79\} = \{\underset{0}{TT}\} \in \mathcal{F}$

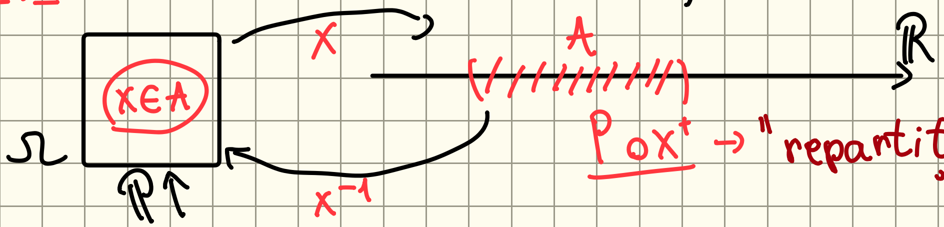
$\Omega = \{H, T\}^2 \longrightarrow \{0, 1\}^2 \ni (s_1, s_2)$ $\quad y = \# T$ (nr de T) $= 2 - x$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un cp și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a

- $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ mulțimea val. lui X
- Dacă $X(\Omega)$ este cel mult numărabilă (finită sau numărabilă) atunci spunem că v.a este discretă, în caz contrar v.a este continuă.

Obs: Pp că putem lua un nr aleator din $[0,1]$, atunci $X = a^7, a \in [0,1]$ continuă, iar v.a $\text{sign}(a) = \begin{cases} -1, & a<0 \\ 0, & a=0 \\ 1, & a>0 \end{cases}$ este discretă.

Scop: Având dată o v.a $X : \Omega \to \mathbb{R}$, vrem să calculăm $\mathbb{P}(X \in A)$

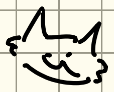


$P \circ X^{-1} \to$ "repartiția lui X"

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$
$$= X^{-1}(A) \quad \text{preimaginea}$$

$$\mathbb{P}(X^{-1}(A)) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A)$$

24 noiembrie curs 8



VARIABILE ALEATOARE CONTINUE

MEDIA ȘI MOMENTELE V.A CONTINUE

Reamintim: Dacă X v.a. discretă, atunci $\mathbb{E}[X]=\sum_{x} x\,\mathbb{P}(X=x)$

$\left(\sum_{x}|x|\,\mathbb{P}(X=x)<\infty\right)$

momentul $\mathbb{E}[X^k]=\sum_{x} x^k\,\mathbb{P}(X=x)$

$$\mathbb{E}[(X-a)^k]=\sum_{x}(x-a)^k\,\mathbb{P}(x=X)$$

$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k]=\sum_{x}(x-\mathbb{E}[X])^k\,\mathbb{P}(X=x)$$

Def: (v.a cont) Fie $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$

$$\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\,dx \quad \text{dacă} \int_{\mathbb{R}}|x|\, f(x)\,dx<\infty$$

În caz contrar nu are medie.

Def: Momentul de ord k:

$$\mathbb{E}[X^k]=\int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,dx$$

Momentul

$E[g(x)] = \sum_{x} g(x) \cdot \mathbb{P}(X=x)$

În cazul cont., $x \sim f$ avem că $\mathbb{E}[g(x)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$

<u>Prop</u> (medie și varianța)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. cont. cu $X \sim f$.

a) Dc X este const, $X = c$ at $\mathbb{E}[X] = c$ și $Var(X) = 0$.

b) Dc $X \geq 0$ atunci $E[X] \geq 0$

c) Dc $X \geq Y$ atunci $E[X] \geq E[Y]$

d) Dc $a, b \in \mathbb{R}$ atunci $E[aX+b] = aE[X] + b$ și
$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

e) Dacă X și Y v.a cont atunci $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.

f) Dacă X și Y indep. atunci $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$ și
$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

1) V.a. repartizate uniform

D O v.a. $X: \Omega \to [a,b]$ este rap. uniform pe $[a,b]$ și notăm $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, dc densitatea de repartiție a lui X, f este constantă pe $[a,b]$ și 0 altfel.

Dc $X \sim f$, $f = \begin{cases} c & \text{pt } x \in [a,b] \\ 0 & \text{, altfel} \end{cases}$

f densitate $f \geq 0$ și $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$

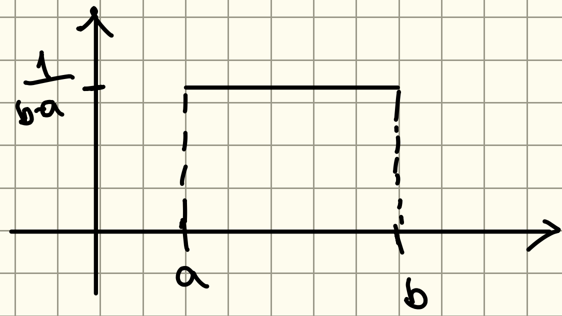
$\Rightarrow$ $c \geq 0$

$\int_{\mathbb{R}} c \, \mathbb{1}_{[a,b]}(x) = 1$

$c \cdot \mathbb{I}_{[a,b]}(x) = f(x)$

$$\int_a^b c\, dx = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

Pentru uniforma pe $[a, b]$, densitatea este $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$



$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,dx \\ A = [c, d) \subseteq [a, b) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(X \in [c, d]) = \int_{[c,d]} f(x)\,dx$$

$$= \int \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[c,d]}(x)\, dx$$

În general $\int_A f(x)\,dx = \int f(x)\, \mathbb{1}_A(x)\, dx$

$$= \int_c^d dx = \frac{d-c}{b-a}.$$

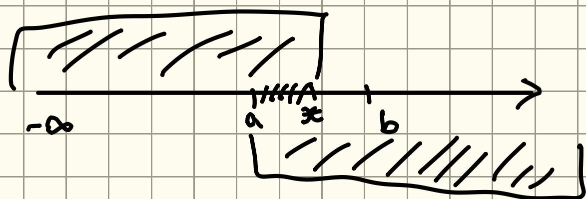
$\mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$

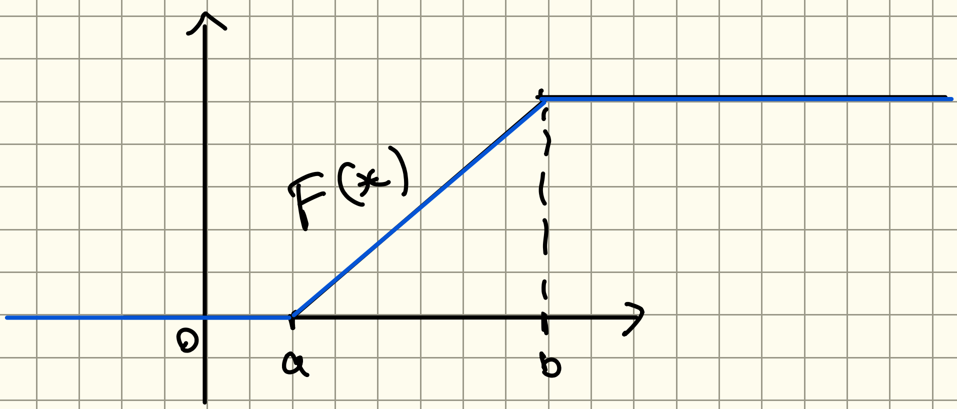
-> este prop. cu lungimea intervalului

Funcția de repartiție $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\, dt, & a \leq x < b \\ \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b)}(t)\, dt, & x \geq b \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ \frac{x-a}{b-a} \\ 1 \end{cases}$

$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x])$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\,dt = \int \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b)}(t) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(t)\, dt = \int_a^x \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{x-a}{b-a}$$





$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

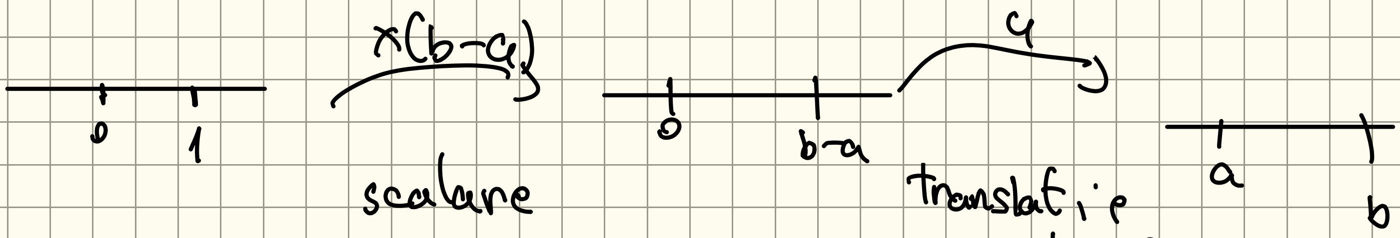
$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

Exista o relație între $\mathcal{U}([0,1])$ și $\mathcal{U}([a,b])$?

(P) Dacă $U\sim\mathcal{U}([0,1])$ atunci $V=a+(b-a)U\sim\mathcal{U}([a,b])$

și, dacă $V\sim\mathcal{U}([a,b])$ atunci $U=\frac{V-a}{b-a}\sim\mathcal{U}([0,1])$



$$\mathbb{P}(V \le x) = \mathbb{P}(a+(b-a)V \le x) = \mathbb{P}\left(U \le \frac{x-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0 \\ \frac{x-a}{b-a} \\ 1 \end{cases}$$

Curs 9   8 decembrie

Repartiția Normală

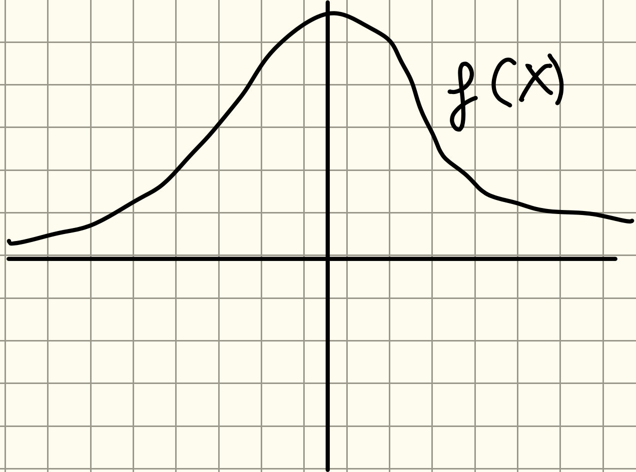
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dacă admite densitatea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$x \in \mathbb{R}$
$\mu \in \mathbb{R}$
$\sigma^2 > 0$

În cazul în care avem o

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

Am arătat că f este o densitate de rep pe $\mathbb{R}$



$\varphi(x)$ sim. față de 0: $\varphi(x) = \varphi(-x)$ $\forall x > 0$

(fct pară)

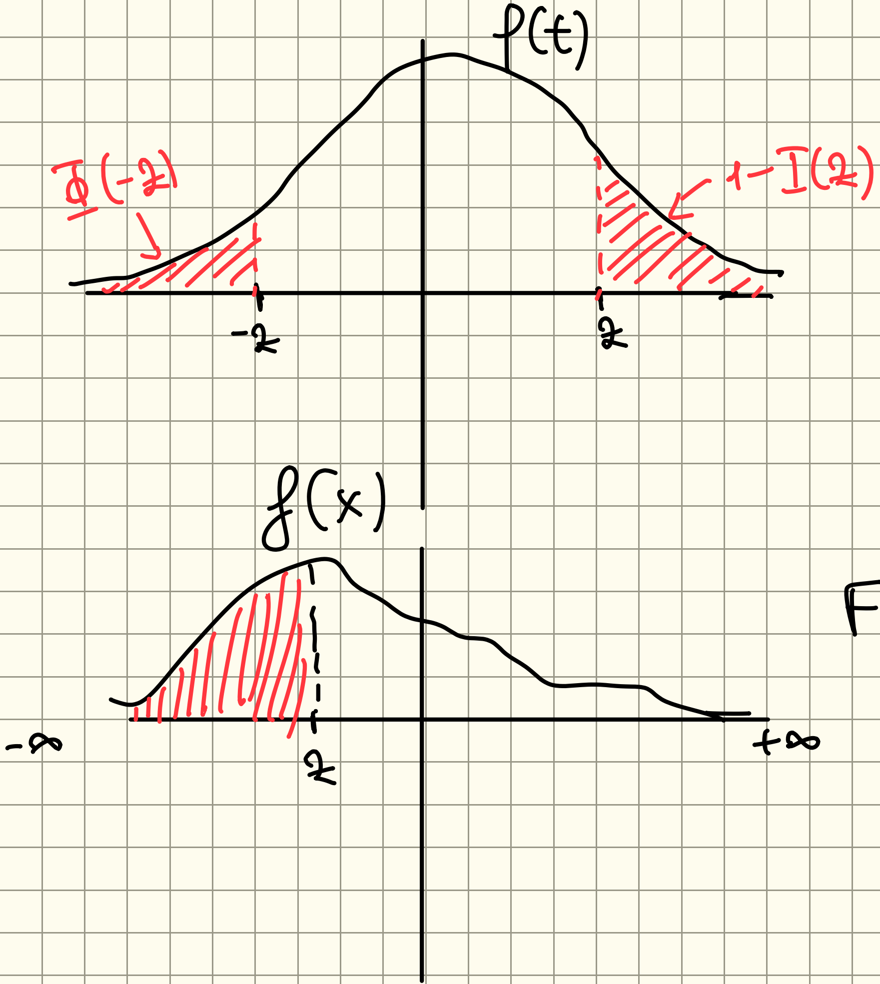
În plus $\Phi(-z) = \int_{-\infty}^{-z} \varphi(t)\,dt$

$$\overset{\substack{u=-t \\ du=-dt}}{=} \int_{+\infty}^{z} \varphi(-u)\,(-du)$$

$$\overset{\varphi \text{ pară}}{=} \int_{z}^{+\infty} \varphi(-u)\,du$$

$$= \int_{z}^{\infty} \varphi(u)\,du$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{z} \varphi(u)\,du = 1 - \Phi(z).$$



$F(z) =$

Media și Varianța lui $Z \sim N(1,1)$

$Z \sim N(0,1)$

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}}_{\text{funcție impară}} dz = 0$$

$g(z) = -g(-z)$

$$Var(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2$$

$$= \mathbb{E}[Z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

funcție pară

$g(z) = g(-z)$

$$= 2\int_0^\infty z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z \cdot \underbrace{z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}}_{(-e^{-\frac{z^2}{2}})'} dz$$

$$\overset{\text{Părți}}{=} 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z\left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)' dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty z' e^{-\frac{z^2}{2}} dz\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[0 + \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}}\right]$$

$$= 1 \Rightarrow Var(Z) = 1.$$

Fie $Z \sim N(0,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ și $X = \mu + \sigma Z$

Arătăm că $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(\mu + \sigma Z \le x) = \mathbb{P}\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \qquad (g \circ h)' = g'(h) \cdot h'$$

$$= \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)'$$

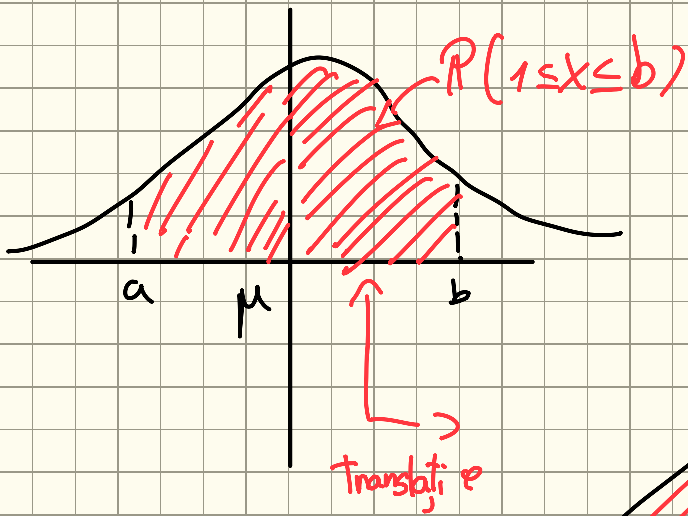
$$= \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \Rightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

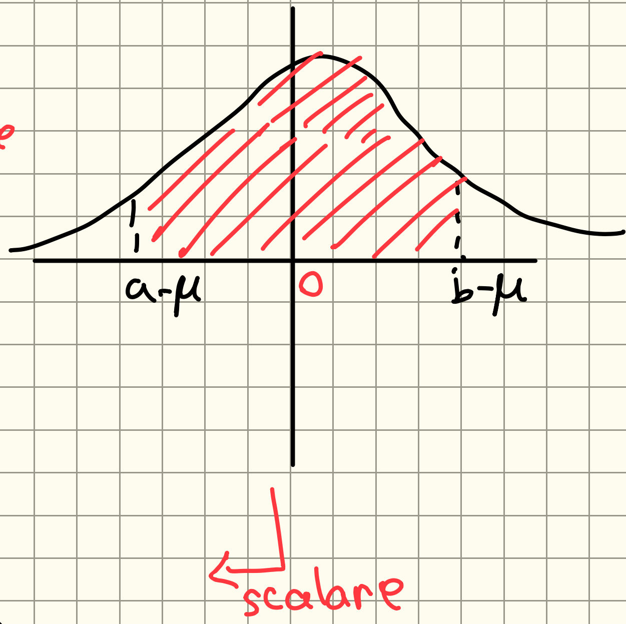
Daca $X \sim (\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ Standardizare

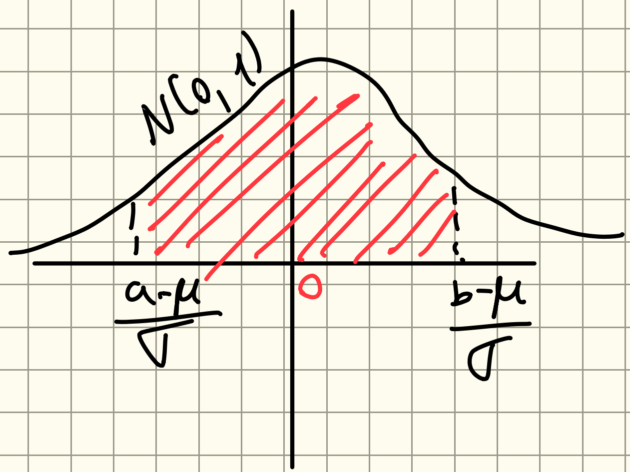
Dacă vrem să calculăm $\mathbb{P}(a \le X \le b) = \mathbb{P}(\underset{\text{translație}}{a-\mu \le X-\mu \le b-\mu})$

$$= \mathbb{P}\left(\underset{\text{scalare}}{\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}}\right)$$



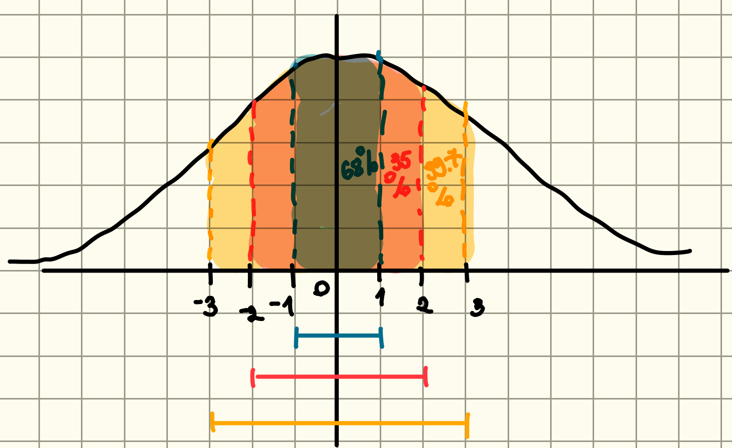
$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$





Regula 68-97-99.7

Dacă $Z \sim N(0,1)$ atunci



$$P(|Z| \le 1) \simeq 68\%$$
$$P(|Z| \le 2) \simeq 95\%$$
$$P(|Z| \le 3) \simeq 99.7\%$$

Media și varianța lui $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ cât este $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X) = ?$

$X = \mu + \sigma Z$ unde $Z \sim N(0,1)$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mu + \sigma Z) = \mu + \sigma \mathbb{E}[\underbrace{Z}_{=0}] = \mu$$

$$Var(X) = Var(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 \underbrace{Var(Z)}_{=1.} = \sigma^2$$

Regula 68 − 95 − 99.7 pt $N(\mu, \sigma^2)$

$$\mathbb{P}(|X-\mu) \le \sigma) \simeq 68\%$$

$$\mathbb{P}(X-\mu \le 2\sigma) \simeq 95\%$$

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \le 3\sigma) \simeq 99.7\%$$

Exemplu: $X \sim N(-1,4)$ și vrem să calculăm $\mathbb{P}(|X|<3) = ?$

Aplicăm procedura de standardizare.

$$\mathbb{P}(|X|<3) = \mathbb{P}(-3 < X < 3)$$

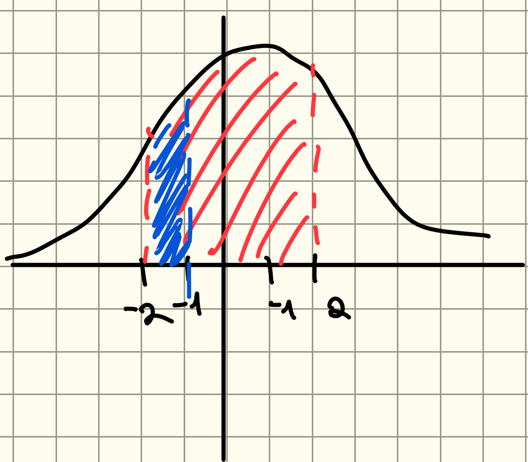
translație scădem media μ $= \mathbb{P}(-3-(-1) < X-(-1) < 3-(-1))$

$$= \mathbb{P}(-2 < X+1 < 4)$$

Scalare $= \mathbb{P}\left(\frac{-2}{2} < \frac{X+1}{2} < \frac{4}{2}\right)$

$$= \mathbb{P}\left(-1 < \frac{X+1}{2} < 2\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 2),\ Z \sim N(0,1)$$

↳ normala standard



$$= \mathbb{P}(-2 \le Z < 2) - \mathbb{P}(-2 < Z < 1)$$

$$\simeq 0.95 - \frac{1}{2}(0.95 - 0.68) = 0.815$$

Exp : $Z \sim N(0,1)$

și $Y = |Z|$

a) $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}(Y)$

b) $F_Y(Y)$, $f_Y(y)$

a) $\mathbb{E}[|Z|] = \int_{-\infty}^{\infty} |z| \varphi(z)\, dz$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z\, e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)' dz$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\mathrm{Var}(|Z|) = \mathbb{E}[|Z|^2] - \mathbb{E}[|Z|]^2$$

$$= \mathbb{E}[Z^2] - \frac{2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

b) $F(y) = \mathbb{P}(|Z| \leq y) \qquad |y| \geq 0$

pt $y < 0 \to F(y) = 0$

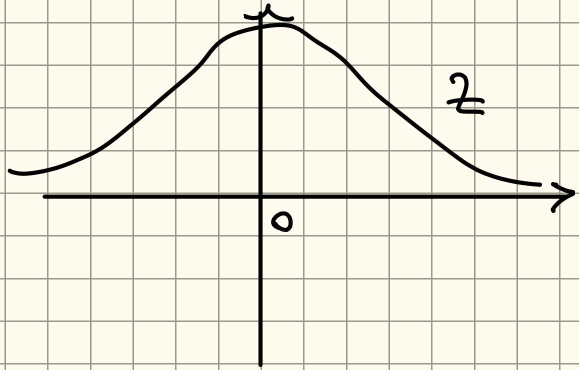
$$= \mathbb{P}(-y \leq Z \leq y) = \Phi(y) - \Phi(-y)$$

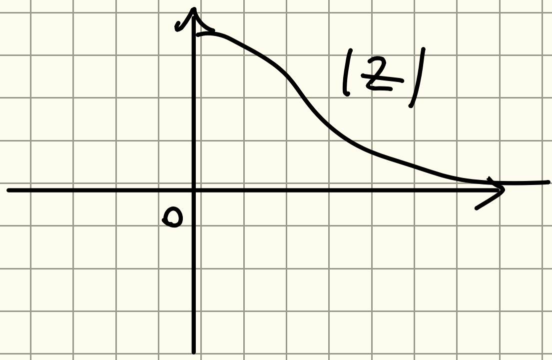
$$f(y) = \frac{d}{dy} F(y) = \frac{d}{dy}\left(\Phi(y) - \Phi(-y)\right) = \varphi(y) - \varphi(-y)(-1)$$

$$= \varphi(y) + \varphi(-y)$$

$$= 2\varphi(y)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad y \geq 0$$





Repartiții comune, marginale și condiționate.

Fie X si Y două v.a. și considerăm vectorul (X, Y).

În general vrem să calc prob de tipul

$$\mathbb{P}((X,Y) \in C) = ? \quad , C \subseteq \mathbb{R}^2$$

↳ rep comună

Dacă avem o singură v.a (ne mutăm la o singură comp)

$$\mathbb{P}(X \in D) \qquad \mathbb{P}(Y \in B)$$

rep marg a lui X ↲ ↳ prop marg a lui Y

Obs: În cazul în care X si Y independ. atunci

$$\underbrace{\mathbb{P}(X\in A, Y\in B)}_{(X,Y)\in A\times B} = \mathbb{P}(X\in A)\times \mathbb{P}(Y\in B), \ \forall A,B$$

a) Cazul variabilelor aleatoare discrete

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. si X si Y două v.a discrete

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \quad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

Vectorul (cuplul) $(X, Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$, $(X,Y)(\Omega) = \{(x_i, y_j) \mid i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\}$

Notăm funcția de masă a (X,Y): (fct de masă comună)

$$f(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y), \ \forall x \in X(\Omega), \ \forall y \in Y(\Omega)$$

$$= \mathbb{P}((X,Y) = (x,y))$$

Funcția de masă a lui X:

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

Funcția de masă a lui Y:

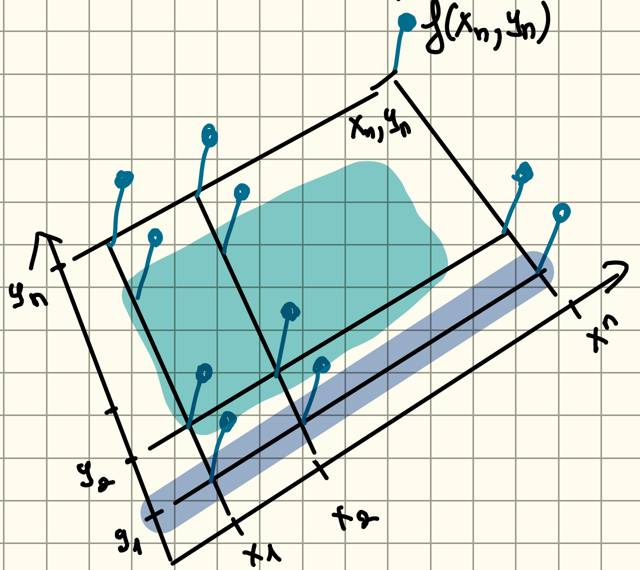
$$f_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y$$

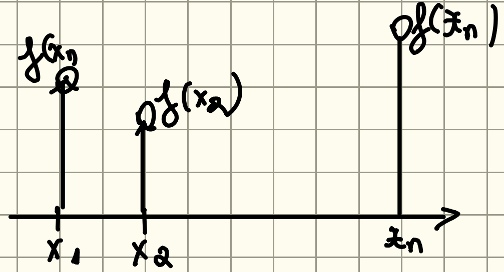
Întrebare: Este $f(x, y)$ o funcție de masă validă?

i) $f(x, y) \geq 0, \forall x, y$?
ii) $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$.

i) $\mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq 0$

ii) $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}) = 1$





Cât este $\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \sum_{\substack{(x,y) \in A \\ x \in X(\Omega) \\ y = Y(\Omega)}} f(x, y)$

Putem calcula și $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = x, Y \in \mathbb{R})$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{y \in Y(\Omega)} \{X = x, Y = y\}\right) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_y f(x,y)$$

În general pt v.a discrete putem scrie valorile (X,Y) sub formă de tabel

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	
x_1							
x_2							
$\vdots$							
x_i				$f(x_i, y_j)$			$\sum_j (x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)$
$\vdots$							
x_m							
				$\sum_i f(x_i, y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j)$			

$X \backslash Y$	-1	0	2	
1	$1/18$	$3/18$	$2/18$	$1/3$
2	$2/18$	0	$3/18$	$5/18$
3	0	$4/18$	$3/18$	$7/18$
	$3/18$	$7/18$	$8/18$	

Vrem repartiția lui X și Y

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{6}{18} & \frac{5}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}(X=1) = \sum_y f(x,y) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = 5/18$$

$$\mathbb{P}(X=3) = 7/18$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{18} & \frac{7}{18} & \frac{8}{18} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}(Y=1) = 3/8$$

$$\mathbb{P}(Y=2) = 7/18$$

$$\mathbb{P}(Y=3) = 8/18.$$

Fie $A \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A) > 0$

Repartiția lui X cond la A

$$\underbrace{\mathbb{P}(X=x \mid A)}_{\text{Not: } f_{X|A}(x)} = \frac{\mathbb{P}(X=x \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Dacă $A = \{Y=y\}$ atunci avem rep lui X cond la $\{Y=y\}$

$$f_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X=x \mid Y=y) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Repart. cond este egală cu rep comună pe marginala variabilei cu care condiționăm.

Obs:
$$\left.\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\ f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x,y) = f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)$$

A, B evenimente
$$A = \{X = x\}$$
$$B = \{Y = y\}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)$$

Exp (continuare)

Vrem să determ. rep cond a lui X la $Y=-1$ si resp Y la $X=2$

$$X \mid Y=-1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}(X=1 \mid Y=-1) = \frac{1/18}{3/18} = \frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(X=2 \mid Y=-1) = \frac{2/18}{3/18} = 2/3$
$\mathbb{P}(X=3 \mid Y=-1) = 0$

$$Y \mid X=2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \underbrace{\frac{2/18}{5/18}}_{=\frac{2}{5}} & 0 & \underbrace{\frac{3/18}{5/18}}_{=\frac{3}{5}} \end{pmatrix}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

În general să presup. că vrem $X \mid Y = y_j$

$$f_{X|Y}(x_i|y_j) = \mathbb{P}(X=x_i \mid Y=y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)} = \frac{f(x_i, y_j)}{\sum_i f(x_i, y_j)}$$

Exp: Profesor care răsp incorect la 25% din cazuri indep. de întrebare. Pe parcursul unui curs prof. poate primi 0, 1 sau 2 întrebări cu prob $\frac{1}{3}$.

Fie X v.a. care ne dă nr de întrebări.
Y v.a. care ne dă nr de răsp. greșite.

Cum este repartizat cuplul $(X, Y) = ?$

X \ Y	0	1	2	
0	$1/3$	0	0	$1/3$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	$1/3$
2	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{3 \cdot 16}$	$1/3$
	$\frac{37}{3 \cdot 16}$	$\frac{10}{3 \cdot 16}$	$\frac{1}{3 \cdot 16}$	1

$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X=0, Y=1) = 0$

$\mathbb{P}(X=0, Y=2) = 0$

$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(X=1) \times \mathbb{P}(Y=0 \mid X=1)$
$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=1) \times \mathbb{P}(Y=1 \mid X=1)$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\mathbb{P}(X=2, Y=0) = \mathbb{P}(X=2) \times \mathbb{P}(Y=0 \mid X=2)$
$= \frac{1}{3} \cdot \binom{2}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{2-0}$

$f(x,y) = ?\ \forall x \in \{0,1,2\}$
$y \in \{0,1,2\}$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

$$\mathbb{P}(X=2, Y=1) = \mathbb{P}(X=2) \times \mathbb{P}(Y=1 \mid X=2)$$
$$= \frac{1}{3} \times \binom{2}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1}$$
$$= \frac{2}{16} =$$

$$\mathbb{P}(X=2, Y=2) = \mathbb{P}(X=2) \times \mathbb{P}(Y=2 \mid X=2)$$
$$= \frac{1}{3} \times \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{2-2}$$
$$= \frac{1}{3 \cdot 16}$$

Formula Prob. Totale.

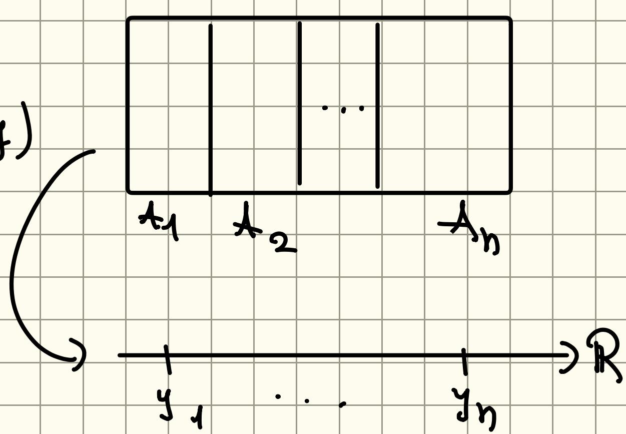
Dacă $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ si $B \in \mathcal{F}$ ca $\mathbb{P}(A_i) > 0$ și $A_1, \dots, A_n$ formează a lui Ω

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=n}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

Dacă particularizăm $B = \{X = x\}$

$$\mathbb{P}(X=x) = \sum_{i=n}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(X=x \mid A_i)}_{f_{X|A_i}(x)} \mathbb{P}(A_i)$$

Dacă luăm $A_i = \{Y = y_i\}$



$$\mathbb{P}(X=x) = \sum_y \mathbb{P}(X=x \mid Y=y) \mathbb{P}(Y=y)$$

$$f_X(x) = \sum_y f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y)$$

$A_i = \{Y = y_i\}$

$$f_Y(y) = \sum_{x} f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)$$

Formula lui Bayes:

$A = \{X = x\}$, $B = \{Y = y\}$

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\,\mathbb{P}(X = x)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)}{\sum_{x'} f_{Y|X}(y|x')\, f_X(x')}$$

EXP: O găină depune un nr aleator de ouă $N \sim Pois(\lambda)$. Să presupunem că fiecare ou eclozează cu prob $p \in (0,1)$ indep de . Fie X nr de ouă care au eclozat și Y nr de ouă care nu au eclozat.

$$N = X + Y$$

Vrem să det. rep. comună $(X, Y) = ?$

Sol: Vrem să calculăm

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = ? \quad \forall i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}$$

Ce știm din ipoteză: Daca $N = n$ atunci $X \mid N = n \sim Bin(n, p)$

$Y \mid N = n \sim Bin(n, 1-p)$

Din formula posibil:

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j \mid N = n)\,\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(X = i, Y = j \mid N = i + j) \cdot \mathbb{P}(N = i + j)$$

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!}$$

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j \mid N = n) = \begin{cases} 0, & n \neq i + j \\ \mathbb{P}(X = i, Y = j \mid N = i + j) & \end{cases}$$

$= \mathbb{P}(X = i \mid N = i + j)$

$= \mathbb{P}(Y = j \mid N = i + j)$

$\rightarrow \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^{j}$

$$\mathbb{P}(X=i,\ Y=j) = \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}$$

$$= \left(\frac{\cancel{(i+j)!}}{i!\ j!} p^i (1-p)^j \frac{\lambda^i \cdot \lambda^j}{\cancel{(i+j)!}} e^{-\lambda} \right)$$

$$= \frac{(p\lambda)^i}{i!} \times \frac{[(1-p)\lambda]^j}{j!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\lambda = p\lambda + (1-p)\lambda$$

$$= \frac{(p\lambda)^i}{i!} e^{-\lambda p} \times \frac{[(1-p)\lambda]^j}{j!} \cdot e^{-\lambda(1-p)}$$

Vreau rep marginala a lui X

$$P(X=i) = \sum_j \mathbb{P}(X=i,\ Y=j) = \sum_j \frac{(p\lambda)^i}{i!} e^{-\lambda p} \times \frac{[(1-p\lambda)]^j}{j!} e^{-\lambda(1-p)}$$