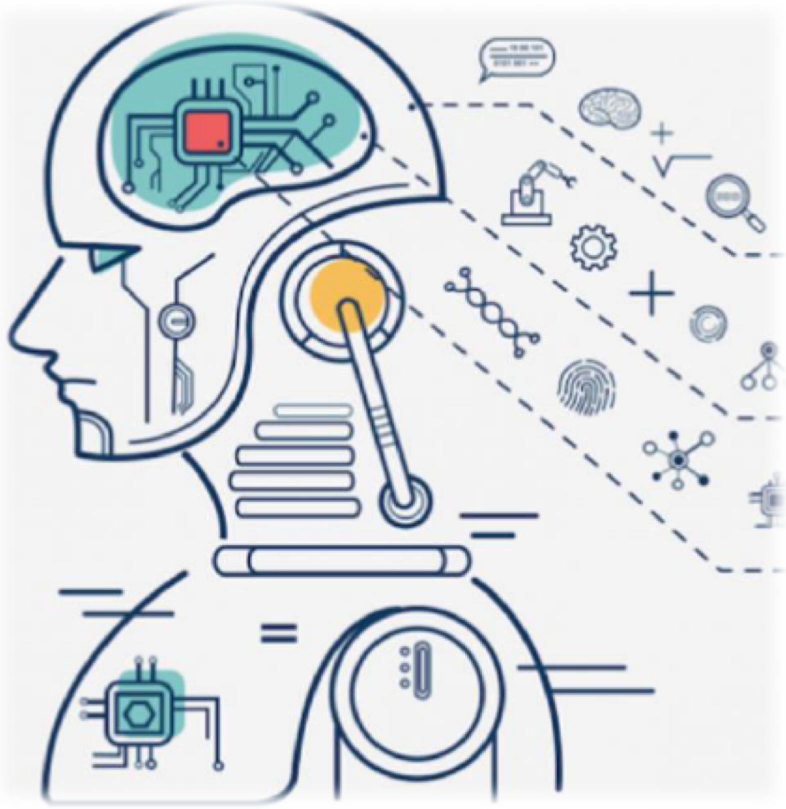
# Intelligence Artificielle et Big Data



## Chapitre 2
## Logique propositionnelle
### partie 1

Pr Bekkari

# Plan

# Introduction

# Logique

- La représentation des connaissances, a pour but l’étude des formalismes qui permettent la représentation de toutes formes de connaissances.

- Le formalisme peut être sous forme de langages logiques ou probabilistes.

# Logique

- La **Logique** est la discipline qui s'attaque à la notion de validité des raisonnements, toutefois, la manière de traiter cette notion, les fondements, le formalisme utilisé, etc., changent d’une logique à une autre.

- Une logique peut être défini comme un langage artificiel doté de règles pour déduire des propositions vraies à partir d’autres supposées vraies.

# Logique

- Nous avons une sorte d'arbre d'héritage entre ces différentes logiques

**Logique**

- Logiques inductives
- Logiques déductives
  - Logiques classiques
    - Logique des propositions
    - Logiques des prédicats
  - Logiques non classiques

# Partie I : syntaxe et sémantique de la logique propositionnelle

## Logique propositionnelle

- La logique des **propositions** est une branche de la **Logique** et plus précisément de la logique classique.
- C’est une logique très simple qui se trouve à la base de presque toutes les logiques qui sont étudiées aujourd’hui.
- Les éléments de bases sont des propositions (ou variables propositionnelles) qui représentent des énoncés qui peuvent être soit vrais ou faux.

## Logique propositionnelle

- Dans la logique des propositions, les opérations qui lient les propositions pour en former d'autres plus complexes sont appelées des *connecteurs logiques*,
- Un connecteur binaire permet de composer deux propositions pour en obtenir une troisième,
- un connecteur unaire permet d'obtenir une proposition à partir d'une autre .

# Proposition

- Une proposition est une création syntaxique, qui exprime une ”vérité” ou une ”fausseté”.
- Notation : Les proposition sont notés par des lettre en majuscule par exemple : P, Q, S, T …etc.

# Proposition

## Exemples de propositions

- "C'est nuageux." (Dans une situation donnée.)
- "Ottawa est la capitale du Canada."
- "1 + 2 = 3"

Exemples qui ne sont pas des propositions:

- "Quelle heure est-il?" (interrogation, question)
- "OH ! OH! OH!." (sans signification)
- "Fait ce devoir !" (impératif, commande)
- "Roule 4-5 minutes, tourne à gauche..." (vague)
- "1 + 2" (expression sans valeur de vérité)

# Proposition

- Exercice: déterminez s'ils sont des propositions ou pas

(oui) "2 + 2 = 4"

(oui) "2+ 2 = 5"

(oui) Il pleut

(oui) Hicham est un étudiant

(non) Quand tu passeras me voir ?

(non) Viens s'il te plait !

# Connecteurs logiques

| Nom formel | Nom court | Parité | Symbole |
|---|---|---|---|
| Négation | NOT (NON) | Unaire | $\neg$ |
| Conjonction | AND (ET) | Binaire | $\wedge$ |
| Disjonction | OR (OU) | Binaire | $\vee$ |
| Implication | IMPLIQUE | Binaire | $\rightarrow \Rightarrow$ |
| Équivalence | SSI | Binaire | $\Leftrightarrow$ |

## Connecteurs logiques: Négation

- L'opérateur de *négation* "¬" (*NOT*) transforme une proposition dans sa forme logique complémentaire (*négation*).

*Ex:* SI $p$ = "J'ai les cheveux blanc."

ALORS $\neg p$ = "Je n'ai pas les cheveux blanc."

Table de vérité du NOT:

| $p$ | $\neg p$ |
| --- | --- |
| T | F |
| F | T |
| Opérande | Résultat |

T :≡ True; F :≡ False

":≡" "est défini comme"

# Connecteurs logiques: Conjonction

- L'opérateur de *conjonction* "$\wedge$" (*AND, ET*) combine deux propositions pour former leur *conjonction logique*.

*Ex: p*="J'irai à Marrakech."

*q*="J'irai à la Koutobia.",

alors *p*$\wedge$*q*="J'ira à Marrakach et à la Koutoubia."

Exemple : $A :\equiv\ 5 = y \quad B :\equiv\ 5 > y$

$A \wedge B$ est faux

# Connecteurs logiques: Conjonction

- Notez qu'une conjonction $p1 \wedge p2 \wedge \ldots \wedge pn$ de n propositions aura $2^n$ rangées dans sa table de vérité.

Table de vérité du AND:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

Les opérations ¬ et ∧ sont suffisantes pour déduire n'importe quelles tables de vérités Booléennes

# Connecteurs logiques: Disjonction

- L'opérateur de *disjonction* "$\vee$" (*OU*) combine deux propositions pour former une *disjonction* logique.

*p*="**Mon ordinateur a une bonne carte graphique**."

*q*="**Mon ordinateur a un CPU performant.**"

$p \vee q$="**Mon ordinateur a soit une bonne carte graphique**, **or (ou) mon ordinateur a un CPU performant.**"

Exemple : $A :\equiv\ 5 = y \quad B :\equiv\ 5 > y$

$A \vee B$ est vraie

# Connecteurs logiques: Disjonction

Table de vérité du OR:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | T |

Notez la différence avec AND

- Notez que p∨q signifie que p est VRAI, ou q est vrai, ou les deux sont vraies!

- Cette opération est aussi appelée ou inclusif,et inclus la possibilité que p et q soient VRAIES.

# Connecteurs logiques: Exercice

- Posons $p$ = “Il a plue la nuit dernière”,
  $q$ = “Le balai mécanique a lavée la rue cette nuit”,
  $r$ = “La rue est mouillée ce matin.”
- Tranduisez chaque proposition:

$\neg p$ = “Il n’a pas plue la nuit dernière.”

$r \wedge \neg p$ = “La rue est mouillée mais il n’a pas plue”

$\neg r \vee p \vee q$ = “Soit que la rue n’était pas mouillée, ou il a plue la nuit dernière, ou la rue a été lavée cette nuit.”

# Connecteurs logiques: Implication

- L' implication $\overbrace{p}^{\text{Hypothèse}} \rightarrow \overbrace{q}^{\text{Conclusion}}$ signifie que p implique q.

Ex:, posons p = "Vous étudiez beaucoup."
q = "Vous obtenez une bonne note."

$p \rightarrow q$ = "Si vous étudiez beaucoup, vous obtiendrai Alors une bonne note."

## Connecteurs logiques: Implication

- $p \to q$ est faux seulement quand p est VRAI mais que q n'est pas VRAI.
- $p \to q$ ne veut pas dire que p a causé q
- $p \to q$ ne requiert pas que p ou q soit VRAIE
- EX: "$(1=0) \to (3<5)$" est VRAIE

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

Le <u>seul</u> cas FAUX

# Connecteurs logiques: Implication

- Formes découlants de l'implication $p \rightarrow q$:
  - Sa ***réciproque*** est: $q \rightarrow p$.
  - Son ***inverse*** est: $\neg p \rightarrow \neg q$.
  - Sa ***contraposée***: $\neg q \rightarrow \neg p$.
  - Une de ces formes a le même sens (même table de vérité) que $p \rightarrow q$. Laquelle ?

**Contraposée**

# Connecteurs logiques: Implication

- Prouvons l'équivalence de $p \to q$ et sa contraposée par table de vérité:

| $p$ | | $q$ | $\neg q$ | | $\neg p$ | $p \to q$ | $\neg q \to \neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | $\to$ | F | T | $\to$ | T | T | T |
| F | $\to$ | T | F | $\to$ | T | T | T |
| T | $\not\to$ | F | T | $\not\to$ | F | F | F |
| T | $\to$ | T | F | $\to$ | F | T | T |

# Connecteurs logiques: Équivalence

- Une forme *équivalent* **$p \leftrightarrow q$ est vraie si la proposition *p* est vraie et si *la proposition q* est vraie**. Nous dirons p SSI q.

$p$ = “Obama gagne les élections de 2008.”

$q$ = “Obama sera président jusqu’en 2012.”

$p \leftrightarrow q$ = “Obama gagne les élections de 2008, SSI, Obama sera président jusqu’en 2012.”

## Connecteurs logiques: Équivalence

- $p \leftrightarrow q$ signifie que $p$ et $q$ ont la même valeur de vérité.

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

- $p \leftrightarrow q$ ne veut pas dire que p et q sont VRAIES, ou que chacune est la cause de l'autre, ou découlent d'une cause commune.

## Connecteurs logiques: Sommaire

- Table de vérité des opérateurs logiques vus jusqu'à maintenant.

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | T | F | F | T | T |
| F | T | T | F | T | T | F |
| T | F | F | F | T | F | F |
| T | T | F | T | T | T | T |

# L’alphabet

- L'*alphabet* de la logique propositionnelle est constitué de :
  - un ensemble dénombrable de *variables propositionnelles* (ou *formules atomiques*, ou encore atomes) : par exemple, p, q, r, …
  - Les constantes : *F* (faux, ie: ‘0’ de Boole) *et V* (vrai, ie: ‘1’ de Boole)

    (Rq1: $\neg$ *F* est équivalente à *V*, on peut s’en passer de *V* si on veut)

    (Rq2: *F* est équivalente à (p $\wedge\neg$p) on peut s’en passer de *F* si on veut)
  - les *connecteurs :* $\neg$ , $\vee$ , $\wedge$ , $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$
  - les séparateurs ‘(‘ et ‘)‘.

# L'alphabet

- L'ordre de priorité des connecteurs est comme suit : $\neg$ , $\wedge$ , $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ , et l'associativité est à gauche pour chaque connecteur.

- **Remarque** : les parenthèses influencent sur l'ordre de priorité.

- Exemple :

$r \vee p \Rightarrow q$ $\qquad\qquad$ $r \vee (p \Rightarrow q)$

- **Exercice** :dans quel ordre on va traiter la formule suivante ?

$$A \wedge \neg B \vee C \rightarrow D \wedge E$$

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

## Formules bien formées (fbf ou wff)

- L'ensemble des formules (ou propositions) de la logique propositionnelle est le plus petit ensemble de mots construits sur l'alphabet tel que :
  - si A est une formule atomique alors A est une formule;
  - *F* (faux) est une formule ;
  - $\neg$ A est une formule si A est une formule;
  - (A $\vee$ B), (A $\wedge$ B), (A $\Rightarrow$ B) et (A $\Leftrightarrow$ B) sont des formules si A et B sont des formules.
  - toutes les fbfs sont formées par application des règles précédentes.

# Formules bien formées (fbf ou wff)

- Exemples:

| formules bien formés | non-formules |
| --- | --- |
| $p$ | $p \wedge$ |
| $(\neg p)$ | $p \neg q$ |
| FALSE | $\wedge p$ |
| $(p \wedge q)$ | $(\wedge )$ |
| $(\neg (p \wedge q) \vee r)$ | $(p$ |
| $(q \Rightarrow (r \vee q))$ | $(q \Rightarrow (r \vee q)$ |

## Formule propositionnelle: sous-formule

- L'ensemble des sous-formules d'une formule A est le plus petit ensemble tel que :
  - A est une sous-formule de A.
  - Si ($\neg$ B) est une sous-formule de A alors B est une sous-formule de A.
  - Si (B $\wedge$ C) (respectivement (B v C) ou (B $\Rightarrow$ C) ou(B $\Leftrightarrow$C)est une sous-formule de A alors B et C sont des sous-formules de A.
- L'endroit où une sous-formule apparaît est son occurrence.
- Il peut avoir plusieurs occurrences dans une formule.

## Table de vérité

- Elle permet de donner les valeurs de vérité possibles d'une formule composée F pour chaque combinaison possible des valeurs de vérité des propositions atomiques qui sont sous-formules de F.
- Établir la table de vérité de $\neg(X \land \neg Y) \Rightarrow Z$

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $\neg Y$ | $X \land \neg Y$ | $\neg(X \land \neg Y)$ | $\neg(X \land \neg Y) \Rightarrow Z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

## Table de vérité

- Construction d’une table
  - Repérer toutes les sous formules des formules complexes, des moins complexes aux plus complexes
  - Compter le nombre de formules atomiques dans la formule complexe = n
  - Prévoir une table contenant $2^n$ lignes
  - Prévoir une colonne différente pour chaque sous formule
  - De gauche à droite, écrire toutes les sous formules en partant des variables propositionnelles et en arrivant à la formule complexe

## Quelques règles utiles

- Théorème 1 (Négation double) : $A :\equiv \neg\neg A$
- Théorème 2 (loi de Morgan) : $\neg(A \wedge B) :\equiv (\neg A \vee \neg B)$.
- Théorème 3 (loi de Morgan) : $\neg(A \vee B) :\equiv (\neg A \wedge \neg B)$.
- Théorème 4(Remplacement de $\Rightarrow$ ) $A \Rightarrow B :\equiv \neg A \vee B$
- Théorème 5(Remplacement de $\Leftrightarrow$) $A \Leftrightarrow B :\equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

**Preuve** :

En utilisant la table de vérité.

## Les bases de composition

- Un ensemble de symboles logiques qui suffisent à représenter chaque fonction de vérité comme formule propositionnelle s'appelle base de compositions.

- **Théorème** (Bases de compositions) :

$\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ et $\{\neg, \Rightarrow\}$ sont des bases de compositions de la logique propositionnelle.

**Preuve** :

En se basant sur les théorèmes 1,2,3,4,5.

# L’interprétation

- Une interprétation I (ou valuation) est une application de l'ensemble des variables propositionnelles dans l'ensemble des valeurs de vérité {V,F} (ou {0,1}).

**Exemple** : Soient A et B deux propositions atomiques. Et I une interprétation de {A,B} définie par I(A) = 1 et I(B) = 0. Donc on a :

- $I(A \land B) = 0$
- $I(A \lor B) = 1$
- $I(A \land (C \lor \neg C)) = 1$
- $I(B \lor (C \land \neg C)) = 0$.

## L’interprétation

- Une interprétation donnée I peut être *étendue* à l'ensemble des formules comme suit (A et B étant des formules) :
    - I(*F*) = F (ou 0 ) et I(*V*) = V (ou 1)
    - I(¬A) = **V** si I(A)= F et I(¬A) = F sinon (ou 1 - I(A))
    - I(A ∧ B) = **V** si I(A)= V et I(B) =V et I(A ∧ B) = **F** sinon (ou min(I(A),I(B)))
    - I(A v B) = **V** si I(A)= V ou I(B) =V et I(A ∧ B) = **F** sinon (ou max(I(A),I(B)) )
    - I(A ⇒ B) = **V** si I(A) = F (ou 0) ou I(B) =V (ou 1) et I(A ⇒ B) = **F** sinon.
    - I(A ⇔ B) = **V** si I(A ⇒ B) =V (ou 1) et I(B ⇒A) =V (ou 1) et I(A ⇔ B) = **F** sinon.

# Formulles propositionnelles spéciales

- **Modèle:**

Soit I est une interprétation de S (un ensemble de propositions )et A une formule propositionnelle, on dit que I est un ***modèle*** de A si I(A)=V. Et on note **I ⊨ A**

**Remarque:** Notons que si I n'est pas un modèle de A alors I est un modèle de ¬A

**Exemple**: (P v Q) est vraie pour toute interprétation contenant le couple (P,V) ou le couple (Q,V).

# Formules propositionnelles spéciales

- **Formule Valide ou Tautologie:**

A est ***valide***, ce qui est noté ⊧ **A** lorsque toutes les interprétations de S sont des ***modèles*** de A.

**Remarque:** les tautologies ont une valeur de vérité indépendante de l'interprétation dans laquelle on se place.

**Exemple**: $A \vee \neg A$ est une tautologie

$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ est une tautologie

**Exercice** : Est-ce que les formules suivantes sont des tautologies ?

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee \neg B \Leftrightarrow A \vee \neg B$$

# Formules propositionnelles spéciales

- **Formule satisfaisable, contradictoire( antilogie), contingente:**

A est ***satisfaisable***, si elle admet au moins un modèle sur S. <u>*(s'il existe une interprétation I tel que I est un modèle de A)*</u>

**Remarques:**

- Les formules qui ne sont pas satisfaisable sont dites ***contradictoires,*** elle sont aussi appelées ***antilogies.***
- Les formules qui ne sont ni valides (tautologie) ,ni contradictoire (antilogies) sont dites ***contingentes.***

# Formules propositionnelles spéciales

- **Formule satisfaisable, contradictoire( antilogie), contingente:**

**Exemples**:

- La formule $P \lor Q$ est satisfaisable et contingente car elle est fausse dans l'interprétation {(P,F),(Q,F)}.
- La formule $(Q \land \neg Q)$ est contradictoire

**Exercice** : Est-ce que les formules suivantes sont satisfaisables?

1- $A \lor B \Rightarrow B \land C$

2- $A \land B \Leftrightarrow (B \Rightarrow A \lor C)$

3- $\neg (A \lor B \Rightarrow B \land C) \Leftrightarrow A \lor B \lor \neg C$

# Formules propositionnelles spéciales

- **Conséquence logique:**

B est une conséquence logique de A, ce qui est noté **A ⊨ B,** si tous les modèles de A sont des modèles de B**.** *(On dit que G est une conséquence de F si pour toute interprétation I, si I ⊨ F alors I ⊨ G )*

**Exemple**:

- La formule P est une conséquence logique de la formules (P∧ Q).

**Proposition**: B est une conséquence de A si et seulement si A ⇒ B est une tautologie.

**Exercice:** vérifier la conséquence logique suivante : A ⊨ A V B

# Formules propositionnelles spéciales

- **Équivalence tautologique:**

A et B sont ***tautologiquement équivalentes***, ce qui est noté **A ≡ B,** si (A ⇔ B) est une formule ***valide*** (***tautologie***).

*(Si A est une conséquence de B et B est une conséquence de A, on dit que A et B sont tautologiquement équivalentes )*

**Remarque:** les tautologies ont une valeur de vérité indépendante de l'interprétation dans laquelle on se place.

**Exemple**: les formules (P V P) et P sont deux formules tautologiquement équivalentes

**Proposition**: A ≡ B si et seulement si A⇔ B est une tautologie