

Université de Pau et des Pays de l'Adour
Année universitaire 2013-2014
Rapport de TPE Mathématiques

Encadrant : Daniele FAENZI

ARRANGEMENTS ET RÉGIONS DE L'ESPACE

RAPHAËL COUSIN ET JUSTINE LABAT

Pau, le 21 janvier 2014

Table des matières

Introduction	3
1 Arrangements et grands hommes^[7]	5
1.1 Premières définitions	5
1.2 Graphe de Hasse	6
1.3 Fonction de Möbius	7
1.4 Polynôme de Poincaré	8
1.5 Dénombrement des régions d'après Zaslavsky	8
1.5.1 Dénombrement des régions	8
1.5.2 Dénombrement des régions bornées	11
2 Arrangements affines	12
2.1 Théorème (Arnold) sur des valeurs non atteintes pour le nombre de régions	12
2.2 Démonstration du théorème	13
3 Arrangements projectifs	21
3.1 Espace projectif ^[2]	21
3.2 Plan projectif réel ^[2]	21
3.3 Arrangements dans le plan projectif réel	23
3.3.1 Premiers exemples de valeurs non atteintes pour le nombre de régions	23
3.3.2 Etude des arrangements dans \mathbb{P}^2 pour n grand	26
3.3.3 Stabilité	30
Références	33
A Applications	34

Introduction

La question de savoir si 8 droites affines peuvent diviser le plan en 23 régions semble rester entière. C'est sur cette interrogation que Vladimir I. ARNOLD achève son ouvrage *Real Algebraic Geometry* [1]. C'est dans le but d'y répondre que Daniele FAENZI nous a guidés tout au long de ce semestre.

Le problème du nombre de parts possibles obtenues en procédant à n coupes est à l'origine des arrangements d'hyperplans [5]. Dans le cas des arrangements du plan, on nomme régions le nombre de parts du plan obtenues en le découpant avec n droites. Le nombre maximal de régions est donné dans une configuration générique de droites c'est-à-dire dans une configuration où chaque paire de droites se coupe en des points distincts. Que se passe-t-il lorsque l'on introduit une perturbation ?

La théorie des arrangements d'hyperplans a connu des avancées récentes et regroupe différentes approches (topologique, géométrique, algébrique).

En 1889, S. Roberts donne une formule, pour n droites fixées dans le plan [6], du nombre de régions en fonction du nombre de droites parallèles et de la multiplicité des points d'intersections. Mais quels sont les constructions possibles avec n droites ?

En 1971, B. Grünbaum (1929-à nos jours) répertorie les différents arrangements simples du plan jusqu'à 38 droites [3].

Actuellement, grâce à l'informatique, on connaît tous les arrangements du plan jusqu'à 14 droites ; au delà, le nombre de combinaisons excède le calcul des machines. De nombreux mathématiciens ont généralisé ces recherches en dimension supérieure, nous nous concentrerons sur les arrangements dans le plan.

Nous étudierons deux points de vue : le premier consiste à déterminer, pour un arrangement fixé, le nombre de régions. Le second, à trouver s'il existe des arrangements réalisables pour un nombre de régions fixé.

Tout d'abord, nous définirons le graphe de Hasse qui permet de représenter un arrangement en fonction du nombre de droites, du nombre de points d'intersection et de la multiplicité de ces points et nous montrerons comment la fonction de Möbius et le polynôme de Poincaré mènent au théorème de Zaslavsky [12] qui dénombre les régions.

Ensuite, nous démontrerons le théorème d'Arnold [1] qui détermine deux intervalles de valeurs non-atteintes par le nombre de régions, appelés trous [1], en construisant des arrangements affines à partir du nombre de droites parallèles et du plus grand nombre de droites passant par un même point.

Enfin, nous introduirons le plan projectif, nous déterminerons plusieurs trous et étudierons leur répartition. Les arrangements projectifs sont plus simples à manipuler que les arrangements affines du fait que la notion de parallélisme n'existe pas et l'on peut se ramener à un arrangement affine en considérant une droite comme étant la droite à l'infini.

Finalement, encadrés par Benoît GUERVILLE, nous avons testé sous Scilab l'ensemble des combinatoires des arrangements de 8 droites affines afin de déterminer si la valeur 23 pour le nombre de régions est atteinte.

Aussi, à un nombre de droites fixé, est-on capable de déterminer quelles valeurs pour le nombre de régions sont atteintes et peut-on construire un arrangement pour chaque valeur connue ?

1 Arrangements et grands hommes^[7]

1.1 Premières définitions

Définition 1 (Hyperplan). Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} de dimension finie N . On appelle *hyperplan* H de E tout sous-espace affine de E de dimension $N - 1$.

Exemples.

1. Dans \mathbb{R}^2 , les hyperplans sont des droites.
2. Dans \mathbb{R}^3 , les hyperplans sont des plans.

Définition 2 (Arrangement). On appelle *arrangement* \mathcal{A} toute réunion finie d'hyperplans. Étant donné un espace vectoriel E de dimension finie et $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'hyperplans de E , on a :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n H_i$$

Exemple (*). $E = \mathbb{R}^2$, $n = 5$

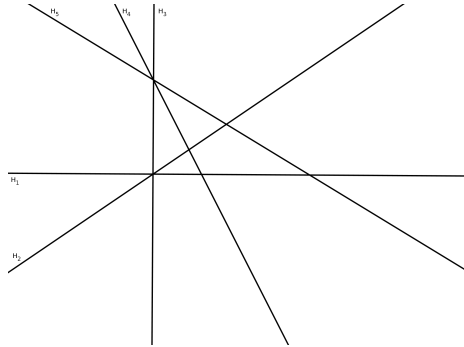


FIGURE 1 – Un exemple d'arrangement

$$\mathcal{A} = (H_1, H_2, H_3, H_4, H_5)$$

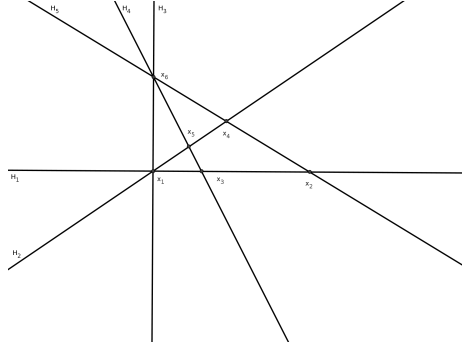
Définition 3 (Composante connexe). Soit E un espace vectoriel réel. Soit $x \in E$. On appelle *composante connexe* de x dans E , notée $c(x)$, la réunion de toutes les parties connexes contenant x . Autrement dit, c'est la plus grande (au sens de l'inclusion) de toutes les parties connexes contenant x .

Définition 4 (Région). Soit \mathcal{A} un arrangement dans \mathbb{R}^2 . Les *régions* de \mathcal{A} sont les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}$. On note $r(\mathcal{A})$ le nombre de régions de \mathcal{A} .

Notation. On définit l'ensemble des points d'intersection entre deux droites distinctes de \mathcal{A} , noté $l(\mathcal{A})$ par :

$$l(\mathcal{A}) = \{x \in H \cap H' \mid H, H' \in \mathcal{A} \mid H \neq H', H \cap H' \neq \emptyset\}$$

Exemple (*). $E = \mathbb{R}^2$, $n = 5$



$$l(\mathcal{A}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

1.2 Graphe de Hasse

Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement de \mathbb{R}^2 . On peut construire un graphe, appelé *graphe de Hasse*, tel que :

- Les sommets du graphe sont les sous-espaces de \mathbb{R}^2 ie : $\mathbb{R}^2, H_1 \dots H_n \in \mathcal{A}, x_1 \dots x_p \in l(\mathcal{A})$.
- Les arêtes sont définies de la manière suivante : on relie un sommet à un autre si et seulement si l'un des sous-espaces correspondant est contenu dans l'autre. On supprime les arêtes induites.

Les sommets du graphe sont appelés noeuds du graphe. On note :

$$G(\mathcal{A}) := \{\{\text{sommets}\}, \{\text{arêtes}\}\} = \{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}, \{\text{arêtes}\}\}$$

où $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} := \{\text{sommets}\}$.

Exemple (*). Les sous-espaces de \mathbb{R}^2 avec cette configuration sont :

- $\forall 1 \leq i \leq 5, \mathbb{R}^2 \cap H_i = H_i$ donc H_1, H_2, H_3, H_4 et H_5 sont des sommets du graphe.
- $\forall 1 \leq i, j \leq 5, i \neq j, H_i \cap H_j = x \in l(\mathcal{A}) \Leftrightarrow H_i$ et H_j ne sont pas parallèles. Les points d'intersection entre les droites sont donc des sommets du graphe.

Représentons-le :

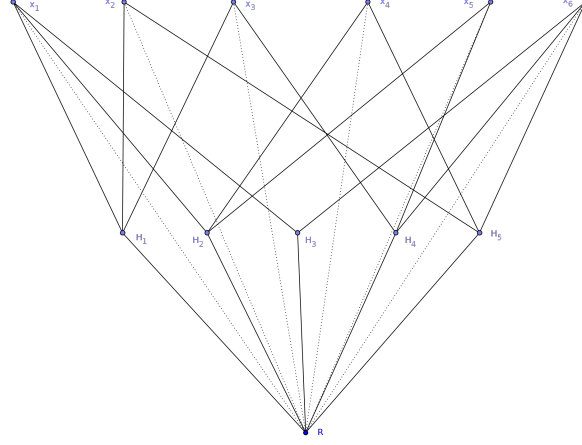


FIGURE 2 – Graphe de \mathcal{A}

- $H_1 \subseteq \mathbb{R}^2, H_2 \subseteq \mathbb{R}^2, H_3 \subseteq \mathbb{R}^2, H_4 \subseteq \mathbb{R}^2, H_5 \subseteq \mathbb{R}^2$
- $x_1 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3, x_2 \in H_1 \cap H_5, x_3 \in H_1 \cap H_4, x_4 \in H_2 \cap H_5, x_5 \in H_2 \cap H_4, x_6 \in H_3 \cap H_4 \cap H_5$
- On a naturellement $\forall 1 \leq i \leq 6, x_i \in \mathbb{R}^2$. On supprime l'arête qui lie x_i et \mathbb{R}^2

1.3 Fonction de Möbius

Définition 5 (Fonction de Möbius). Soit \mathcal{A} un arrangement de \mathbb{R}^2 . On appelle *fonction de Möbius*, notée μ , l'application de $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ dans \mathbb{Z} définie par :

$$\begin{cases} \mu(\mathbb{R}^2) = 1 \\ \forall S \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}, \mu(S) = \sum_{T < S} -\mu(T) \end{cases}$$

où $T < S$ si $T \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}, \dim T > \dim S$ et $T \subset S$.

Si $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$, on a :

- $\forall 1 \leq i \leq n, \mu(H_i) = -\mu(\mathbb{R}^2) = -1$
- $\forall x \in H_i \cap H_j (j \neq i), \mu(x) = \sum_{H_i < x} (-\mu(H_i)) - \mu(\mathbb{R}^2) = m_x^{\mathcal{A}} - 1$
où $m_x^{\mathcal{A}} := \text{card}\{H_i | x \in H_i\}$.

Exemple (*). On a :

- $\forall 1 \leq i \leq 5, \mu(H_i) = -1$
- $\mu(x_1) = m_{x_1}^{\mathcal{A}} - 1 = 3 - 1 = 2$
- $\mu(x_2) = m_{x_2}^{\mathcal{A}} - 1 = 2 - 1 = 1$
- $\mu(x_3) = m_{x_3}^{\mathcal{A}} - 1 = 2 - 1 = 1$
- $\mu(x_4) = m_{x_4}^{\mathcal{A}} - 1 = 2 - 1 = 1$

- $\mu(x_5) = m_{x_5}^{\mathcal{A}} - 1 = 2 - 1 = 1$
- $\mu(x_6) = m_{x_6}^{\mathcal{A}} - 1 = 3 - 1 = 2$

1.4 Polynôme de Poincaré

Définition 6 (Codimension). Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace affine de E . On appelle *codimension* de F dans E l'entier :

$$\text{codim}_E(F) = \dim(E) - \dim(F)$$

Définition 7 (Polynôme de Poincaré). Soit \mathcal{A} un arrangement de \mathbb{R}^2 . On appelle *polynôme de Poincaré*, noté $\pi_{\mathcal{A}}$, l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\pi_{\mathcal{A}} : t \mapsto \sum_{S \in \mathcal{S}_G} \mu(S) \cdot (-t)^{\text{codim}(S)}$$

Remarque. Si l'on considère $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$, $\pi_{\mathcal{A}}$ se réécrit :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{A}}(t) &= \mu(\mathbb{R}^2)t^0 - \text{card}(\mathcal{A}) \cdot \mu(H_i)t^1 + \sum_{x \in \mathcal{A}} (m_x^{\mathcal{A}} - 1)t^2 \\ &= 1 + nt + \sum_{x \in \mathcal{A}} (m_x^{\mathcal{A}} - 1)t^2 \end{aligned}$$

Exemple (*). Rappel : $\mathcal{A} = (H_1, H_2, H_3, H_4, H_5)$ et $l(\mathcal{A}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

On a :

$$\pi_{\mathcal{A}}(t) = 1 + 5t + \sum_{1 \leq i \leq 6} (m_{x_i}^{\mathcal{A}} - 1)t^2 = 1 + 5t + 8t^2$$

1.5 Dénombrement des régions d'après Zaslavsky

Thomas ZASLAVSKY (1945-à nos jours) [4] [11] enseigne les mathématiques à l'Université d'État de New York à Binghamton depuis 1985 et est connu principalement pour ses recherches en mathématiques combinatoires (arrangements des hyperplans, théorie des graphes, etc...), en algèbre et en analyse. En 1975, il démontra deux théorèmes sur les arrangements dans \mathbb{R}^2 (valables aussi en dimension supérieure) portant sur le nombre de régions [7].

1.5.1 Dénombrement des régions

Théorème 1. Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement dans \mathbb{R}^2 . Alors le nombre total de régions $r(\mathcal{A})$ est donné par :

$$r(\mathcal{A}) = \pi_{\mathcal{A}}(1) = 1 + n + \sum_{x \in \mathcal{A}} (m_x^{\mathcal{A}} - 1)$$

Lemme 1 (Important). Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement de \mathbb{R}^2 . Soit H une droite de \mathbb{R}^2 distincte de $H_i, \forall 1 \leq i \leq n$. Alors :

$$r(\mathcal{A} \cup H) = r(\mathcal{A}) + 1 + i_H^{\mathcal{A}}$$

où $i_H^{\mathcal{A}} := \text{card}\{x \in H \cap H_i, H_i \in \mathcal{A}\}$.

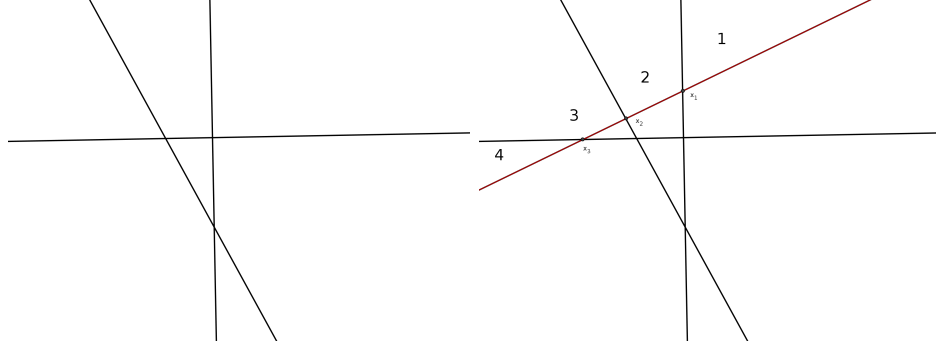


FIGURE 3 – À gauche \mathcal{A} , à droite $\mathcal{A} \cup H$ (H est représentée par la droite rouge)

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement de \mathbb{R}^2 . Soit H une droite de \mathbb{R}^2 distincte de $(H_1 \dots H_n)$. que H coupe $(H_1 \dots H_n)$ en m points $x_1 \dots x_m$.

H est la réunion des segments $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq m - 1$ et des demi-droites délimitées respectivement par x_1 et x_m , de directions identiques aux segments, l'une opposée à l'autre.

Chaque segment et demi-droite sépare la région ambiante en deux régions distinctes et laisse inchangées les régions que la droite ne franchit pas. On a : $(m - 1)$ segments, 2 demi-droites, donc $(m - 1) + 2 = m + 1$ régions ajoutées.

Ainsi,

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A} \cup H) &= r(\mathcal{A}) + 1 + m \\ &= r(\mathcal{A}) + 1 + \text{card}(x_1 \dots x_m) \\ &= r(\mathcal{A}) + 1 + i_H^{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

Démonstration (du théorème). Notons $s(\mathcal{A}) = \pi_{\mathcal{A}}(1)$. Par récurrence, montrons que $s(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A})$.

Initialisation : pour $\mathcal{A} = (H)$, on a :

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}) &= 2 \\ s(\mathcal{A}) &= 1 + 1 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Donc les deux formules coïcident.

Hérédité : Supposons $s(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A})$, montrons que $s(\mathcal{A} \cup H) = r(\mathcal{A} \cup H)$, ie montrons que $s(\mathcal{A} \cup H) = s(\mathcal{A}) + 1 + i_H^{\mathcal{A}}$. On a :

$$\begin{aligned}
s(\mathcal{A} \cup H) &= 1 + (n + 1) + \sum_{x \in \mathcal{A} \cup H} (m_x^{\mathcal{A} \cup H} - 1) \\
&= 2 + n + \sum_{x \in \mathcal{A} \cup H} (m_x^{\mathcal{A} \cup H} - 1) \\
s(\mathcal{A}) + 1 + i_H^{\mathcal{A}} &= 1 + n + \sum_{x \in \mathcal{A}} (m_x^{\mathcal{A} \cup H} - 1) + 1 + i_H^{\mathcal{A}} \\
&= 2 + n + \sum_{x \in \mathcal{A}} (m_x^{\mathcal{A} \cup H} - 1) + i_H^{\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que :

$$\sum_{x \in \mathcal{A} \cup H} (m_x^{\mathcal{A} \cup H} - 1) = \sum_{x \in \mathcal{A}} (m_x^{\mathcal{A} \cup H} - 1) + i_H^{\mathcal{A}}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathcal{A} \cup H} (m_x^{\mathcal{A} \cup H} - 1) &= \underbrace{\sum_{x \in (\mathcal{A} \cup H) \setminus H} (m_x^{\mathcal{A} \cup H} - 1)}_{x \notin H} + \sum_{x \in \mathcal{A} \cap H} (m_x^{\mathcal{A} \cup H} - 1) \\
&= \sum_{x \in (\mathcal{A} \cup H) \setminus H} (m_x^{\mathcal{A}} - 1) + \sum_{x \in \mathcal{A} \cap H} (m_x^{\mathcal{A}} + 1 - 1) \\
&= \sum_{x \in (\mathcal{A} \cup H) \setminus H} (m_x^{\mathcal{A}} - 1) + \sum_{x \in \mathcal{A} \cap H} m_x^{\mathcal{A}} \\
\sum_{x \in \mathcal{A}} (m_x^{\mathcal{A} \cup H} - 1) + i_H^{\mathcal{A}} &= \sum_{x \in (\mathcal{A} \cup H) \setminus H} (m_x^{\mathcal{A}} - 1) + \sum_{x \in \mathcal{A} \cap H} (m_x^{\mathcal{A}} - 1) + i_H^{\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $\sum_{x \in \mathcal{A} \cap H} m_x^{\mathcal{A}} = \sum_{x \in \mathcal{A} \cap H} (m_x - 1) + i_H^{\mathcal{A}}$, ce qui est vrai, en effet :

Supposons $\text{card}\{x \in \mathcal{A} \cap H\} = p$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathcal{A} \cap H} (m_x^{\mathcal{A}} - 1) + i_H^{\mathcal{A}} &= \sum_{0 \leq i \leq p} (m_{x_i}^{\mathcal{A}} - 1) + i_H^{\mathcal{A}} \\
&= \sum_{0 \leq i \leq p} m_{x_i}^{\mathcal{A}} - \sum_{0 \leq i \leq p} 1 + \underbrace{i_H^{\mathcal{A}}}_{=p} \\
&= \sum_{0 \leq i \leq p} m_{x_i}^{\mathcal{A}} - p + p \\
&= \sum_{0 \leq i \leq p} m_{x_i}^{\mathcal{A}} \\
&= \sum_{x \in \mathcal{A} \cap H} m_x^{\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

Donc les deux formules coïcident.

Conclusion : $r(\mathcal{A}) = \pi_{\mathcal{A}}(1)$

Exemple (*). En dénombrant visuellement le nombre de régions, on a : $r(\mathcal{A}) = 14$

D'après le théorème précédent, on a : $r(\mathcal{A}) = 1 + 5.1 + 8.1 = 14$

1.5.2 Dénombrement des régions bornées

Théorème 2. Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement dans \mathbb{R}^2 . Alors :

1. Si $\forall 1 \leq i, j \leq n, H_i // H_j$ alors il n'y a aucune région bornée.
2. Si $\exists 1 \leq i, j \leq n$ tels que H_i et H_j ne soient pas parallèles, alors le nombre de régions bornées est donné par :

$$\pi_{\mathcal{A}}(-1) = 1 - n^{\mathcal{A}} + \sum_{x \in \mathcal{A}} (m_x^{\mathcal{A}} - 1)$$

Remarque 1. Si toutes les droites sont parallèles, nous sommes dans cette configuration :

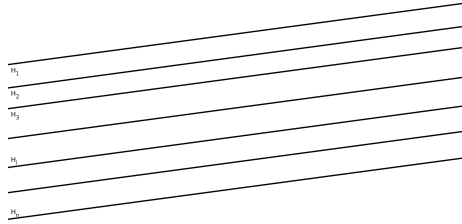


FIGURE 4 – Cas où toutes les droites sont parallèles

Le résultat du théorème est vrai.

Remarque 2.

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{A}}(1) &= 1 - n + \sum_{x \in \mathcal{A}} (m_x^{\mathcal{A}} - 1) \\ &= 1 + n - 2n + \sum_{x \in \mathcal{A}} (m_x^{\mathcal{A}} - 1) \\ &= r(\mathcal{A}) - 2n \end{aligned}$$

Démonstration (du 2. du théorème). Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement de \mathbb{R}^2 . Quitte à effectuer une rotation sur l'arrangement, on ne veut aucune droite verticale ie aucune droite d'équation de la forme $x = b, b \in \mathbb{R}$.

Chaque droite est définie par une équation de la forme :

$\forall 1 \leq i \leq n,$

$$H_i : y = a_i x + b_i$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}.$

On note, $\forall 1 \leq i \leq n :$

$$\gamma_i = \max((a_1 \dots a_n) \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} \gamma_j))$$

On a :

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n$$

Soit $1 \leq i \leq n$. On ordonne les droites $(H_1 \dots H_n)$ de la manière suivante :

- Si $\gamma_i < \gamma_{i+1}$, les droites $H_{\varphi(i)}$ et $H_{\varphi(i+1)}$ sont dites consécutives (où $H_{\varphi(i)} : y = \gamma_i x + b_{\varphi(i)}$).
- Si $\gamma_i = \gamma_{i+1}$, $H_{\varphi(i-1)}$ et $H_{\varphi(i)}$ sont consécutives ssi $b_{\varphi(i+1)} > b_{\varphi(i)}$.

Chaque région non-bornée est délimitée par une paire de droites consécutives et chaque paire de droites consécutives délimite deux régions non-bornées, opposées. On a n droites donc n paires de droites consécutives (car $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \dots, i \rightarrow (i+1), \dots, (n-1) \rightarrow n, n \rightarrow 1$) et par conséquent $2n$ régions non-bornées.

Or, $\{\text{nombre de régions bornées}\} = r(\mathcal{A}) - \{\text{nombre de régions non-bornées}\} = r(\mathcal{A}) - 2n = \pi_{\mathcal{A}}(-1)$, d'après la remarque 2.

D'où le résultat.

2 Arrangements affines

Vladimir ARNOLD (1937-2010) [8] [9] était un mathématicien russe connu principalement pour ses recherches sur les systèmes dynamiques et les équations différentielles, sur les mécaniques classiques, en géométrie et topologie et sur les géométries algébriques. On étudie dans cette partie *A problem for School Pupils*, extrait de *Real Algebraic Geometry* [1].

2.1 Théorème (Arnold) sur des valeurs non atteintes pour le nombre de régions

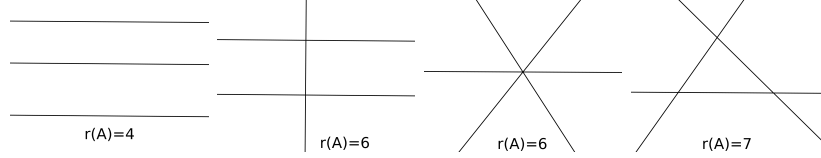
Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement de \mathbb{R}^2 . Ces n droites divisent le plan en un certain nombre de régions. Le but de cette partie est de savoir en combien de régions ces n droites peuvent-elles diviser le plan.

Dans un premier temps, regardons les configurations possibles lorsque $1 \leq n \leq 4$.

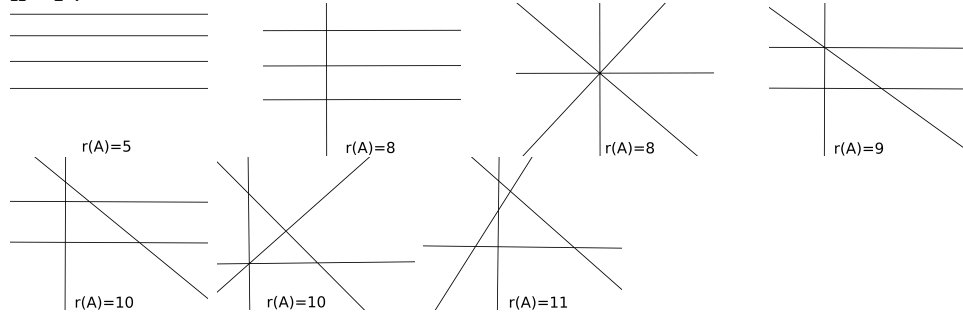
Considérons une droite du plan \mathbb{R}^2 . Elle divise le plan en deux régions. Prenons maintenant deux droites. Elles divisent le plan en trois régions si

elles sont parallèles, sinon en quatre. Pour $n = 3$ et $n = 4$, nous avons les possibilités suivantes pour $r(\mathcal{A})$:

$n=3$:



$n=4$:



Manifestement, pour n fixé, certaines valeurs de $r(\mathcal{A})$ sont admissibles et d'autres ne le sont pas. On remarque que, dans tous les cas, $r(\mathcal{A})$ est compris entre $n+1$ (pour une configuration de n droites où elles sont toutes parallèles) et $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ (pour une configuration générique de n droites, ie pour une configuration de n droites prises "au hasard").

Théorème 3. Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement de \mathbb{R}^2 , $n > 4$. Alors on ne peut avoir :

$$\begin{aligned} n+1 &< r(\mathcal{A}) < 2n \\ 2n &< r(\mathcal{A}) < 3n-3 \end{aligned}$$

2.2 Démonstration du théorème

Pour démontrer ce théorème, on introduit les notations suivantes :

- k := le plus grand nombre de droites parallèles dans \mathcal{A} .
- h := le plus grand nombre de droites passant par un même point dans \mathcal{A} .

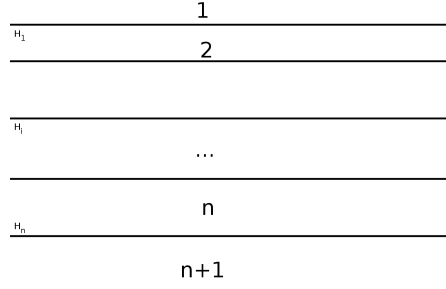
On rappelle qu'étant donné un arrangement $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ dans \mathbb{R}^2 tel que $r(\mathcal{A})$ est connu. Soit H un hyperplan de \mathbb{R}^2 distinct de $H_i, \forall 1 \leq i \leq n$. Alors :

$$r(\mathcal{A} \cup H) = r(\mathcal{A}) + 1 + i_H^{\mathcal{A}}$$

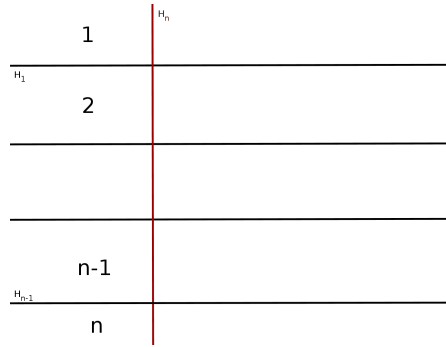
où $i_H^{\mathcal{A}} := \text{card}\{x \in H \cap H_i, H_i \in \mathcal{A}\}$.

(Lemme 1)

Assertion 1. Si $k = n$ alors $r(\mathcal{A}) = n + 1$



Assertion 2. Si $k = n - 1$ alors $r(\mathcal{A}) = 2n$



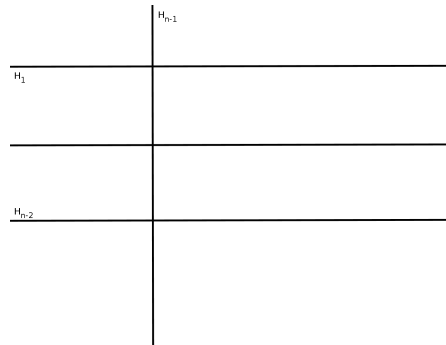
On a $(n - 1)$ droites parallèles donc d'après l'assertion 1,

$$r(\mathcal{A} \setminus H_n) = (n - 1) + 1 = n$$

H_n coupe $(n - 1)$ droites en $(n - 1)$ points distincts donc

$$r(\mathcal{A}) = r((\mathcal{A} \setminus H_n) \cup H_n) = r(\mathcal{A}) + (n - 1) + 1 = n + n = 2n$$

Assertion 3. Si $k = n - 2$ alors $r(\mathcal{A}) = 3n - 3$ ou $r(\mathcal{A}) = 3n - 2$

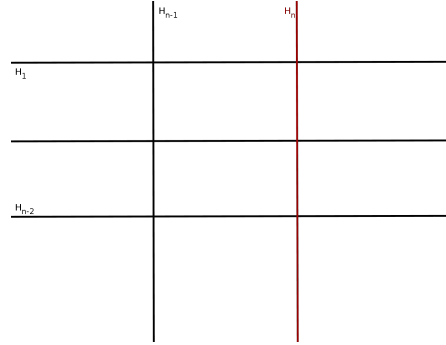


Partant de la configuration précédente avec $(n-2)$ droites parallèles et H_{n-1} qui n'est pas parallèle aux $(n-2)$ autres droites, on a :

$$r(\mathcal{A} \setminus H_n) = 2(n-1) = 2n-2$$

Ajoutant la $n-ième$ droite H_n , il y a trois cas possibles :

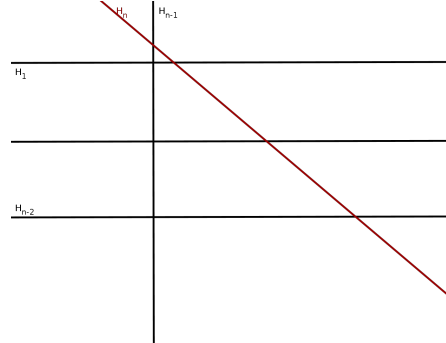
- Si $H_n // H_{n-1}$:



H_n coupe $(n-2)$ droites en $(n-2)$ points distincts donc

$$r(\mathcal{A}) = r((\mathcal{A} \setminus H_n) \cup H_n) = r(\mathcal{A} \setminus H_n) + (n-2) + 1 = 2n-2 + n-1 = 3n-3$$

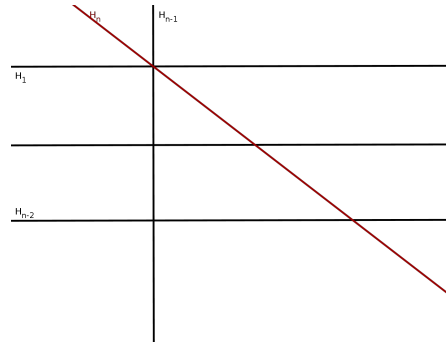
- Si H_n n'est parallèle à aucune droite et $h = 2$:



H_n coupe $(n-1)$ droites en $(n-1)$ points distincts donc

$$r(\mathcal{A}) = r((\mathcal{A} \setminus H_n) \cup H_n) = r(\mathcal{A} \setminus H_n) + (n-1) + 1 = 2n-2 + n = 3n-2$$

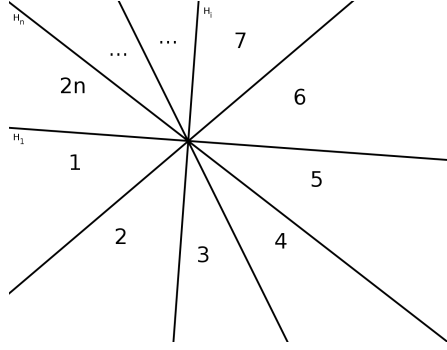
- Si H_n n'est parallèle à aucune droite et $h = 3$:



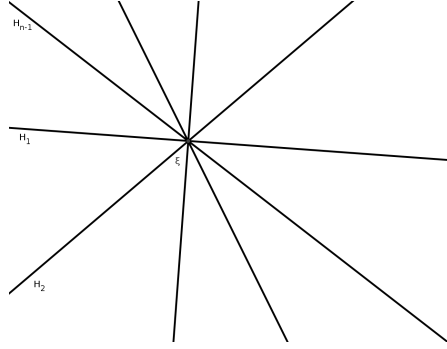
H_n coupe $(n - 1)$ droites en $(n - 2)$ points distincts donc

$$r(\mathcal{A}) = r((\mathcal{A} \setminus H_n) \cup H_n) = r(\mathcal{A} \setminus H_n) + (n - 2) + 1 = 2n - 2 + n - 1 = 3n - 3$$

Assertion 4. Si $h = n$ alors $r(\mathcal{A}) = 2n$



Assertion 5. Si $h = n - 1$ alors $r(\mathcal{A}) = 3n - 3$ ou $r(\mathcal{A}) = 3n - 2$

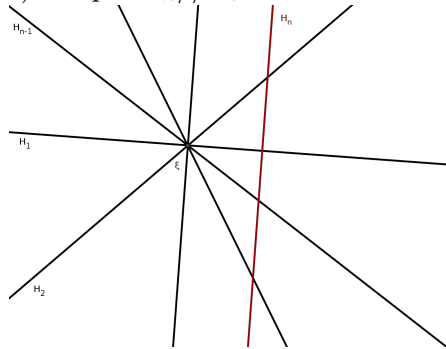


Partant de la configuration précédente avec $(n - 1)$ droites passant en un même point ξ , on a :

$$r(\mathcal{A} \setminus H_n) = 2(n - 1) = 2n - 2$$

Ajoutant la $n - i\grave{e}me$ droite H_n , il y a deux cas possibles :

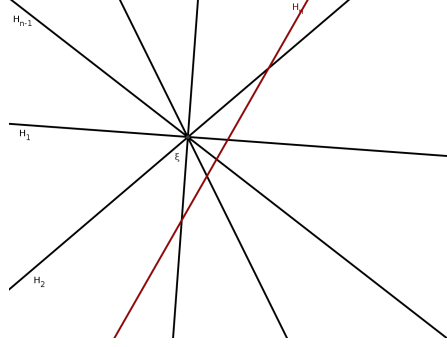
– Si $\exists 1 \leq i \leq (n - 1)$ tel que $H_n // H_i$:



H_n coupe $(n - 2)$ droites en $(n - 2)$ points distincts donc

$$r(\mathcal{A}) = r((\mathcal{A} \setminus H_n) \cup H_n) = r(\mathcal{A} \setminus H_n) + (n - 2) + 1 = 2n - 2 + n - 1 = 3n - 3$$

- Si H_n n'est parallèle à aucune droite :

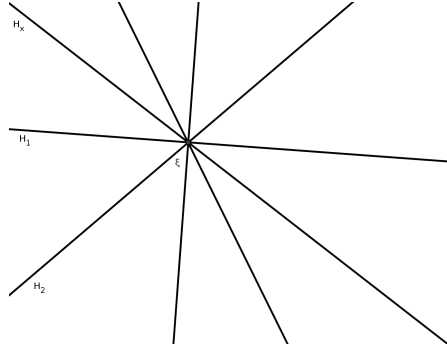


H_n coupe $(n - 1)$ droites en $(n - 1)$ points distincts donc

$$r(\mathcal{A}) = r((\mathcal{A} \setminus H_n) \cup H_n) = r(\mathcal{A} \setminus H_n) + (n - 1) + 1 = 2n - 2 + n = 3n - 2$$

Assertion 6.

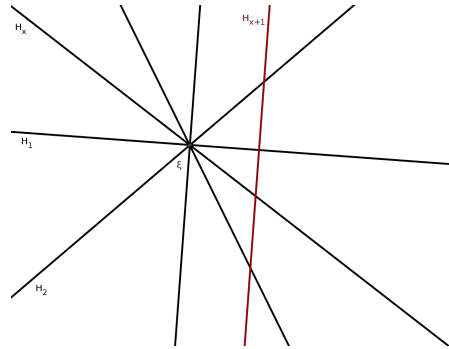
- Si $n > 6$, $k < n - 2$ et $3 < h < n - 1$ alors $r(\mathcal{A}) \geq 4n - 8$
- Si $n > 4$, $k < n - 2$ et $2 < h < n - 1$ alors $r(\mathcal{A}) \geq 3n - 3$



- Partant de la configuration où h droites passent par un même point ξ , on a :

$$r(\mathcal{A} \setminus (\bigcup_{i=h+1}^n H_i)) = 2h$$

On cherche à minorer $r(\mathcal{A})$. D'après l'assertion 5, le nombre minimal de régions est atteint lorsque l'on ajoute une droite telle qu'elle soit parallèle à une des h droites. Ajoutons alors H_{h+1}



On a ainsi :

$$r(\mathcal{A} \setminus (\bigcup_{i=h+2}^n H_i)) \geq 2h + (h-1) + 1 = 3h$$

De même, pour les $n-h-1$ droites restantes, on obtient :

$$r(\mathcal{A}) \geq 3h + (n-h-1)((h-1)+1) \geq (3+n-h-1)h \geq (2+n-h)h = \varphi(h)$$

On a :

h	3	$1 + \frac{n}{2}$	$n-1$
$\varphi'(h)$	+	0	-
$\varphi(h)$	$4n-8$	$\frac{n^2}{4} + n + 1$	$4n-8$

Donc φ atteint son minimum en les points 4 et $(n-2)$, ie :

$$r(\mathcal{A}) \geq (2+n-4).4 \geq 4n-8$$

– De même, φ atteint son minimum en 3 ($\varphi(3) = 3n-3 \leq 4n-8$), ie :

$$r(\mathcal{A}) \geq (2+n-3).3 \geq 3n-3$$

Assertion 7. Si $n > 4$, $h = 2$ et $2 \leq k \leq (n-3)$ alors $r(\mathcal{A}) \geq 3n-3$



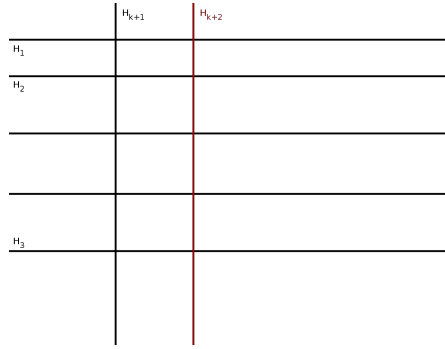
Partant de la configuration où k droites sont parallèles, on a :

$$r(\mathcal{A} \setminus (\bigcup_{i=k+1}^n H_i)) = k + 1$$

D'après l'assertion 2, lorsque l'on ajoute la droite H_{k+1} , on obtient :

$$r(\mathcal{A} \setminus (\bigcup_{i=k+2}^n H_i)) = 2(k + 1)$$

On cherche à minorer $r(\mathcal{A})$. D'après l'assertion 3, le nombre minimal de régions est atteint lorsque l'on ajoute une droite telle qu'elle soit parallèle à H_{k+1} . Ajoutons alors H_{k+2}



On a ainsi (H_{k+2} coupe k droites en k points distincts) :

$$r(\mathcal{A} \setminus (\bigcup_{i=k+3}^n H_i)) \geq 2(k + 1) + k + 1 = 3k + 3$$

De même, pour les $n - k - 2$ droites restantes, on obtient :

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}) &\geq 3k + 3 + (n - k - 2)(k + 1) \\ &\geq (3 + n - k - 2)(k + 1) \\ &\geq (1 + n - k)(k + 1) \\ &\geq (2 + n - (k + 1))(k + 1) \end{aligned}$$

On remarque que si l'on pose $h = k + 1$,

$$(2 + n - (k + 1))(k + 1) = (2 + n - h)h = \varphi(h)$$

Ainsi, $r(\mathcal{A})$ atteint son minimum pour $h = 3$, ie $k = 2$ et on a :

$$r(\mathcal{A}) \geq 3n - 3$$

Assertion 8. Si $h = 2$ et $k = 1$ alors $r(\mathcal{A})$ est maximal et on a $r(\mathcal{A}) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$

Par récurrence :

Initialisation : pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}) &= 2 \\ 1 + \frac{n(n+1)}{2} &= 1 + \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Hérédité : Supposons qu'étant donné un arrangement $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$, avec n fixé, on a $r(\mathcal{A}) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que si l'on ajoute H droite de \mathbb{R}^2 distincte de $H_1 \dots H_n$ et telle que les hypothèses $h = 2$ et $k = 1$ soient vérifiées, $r(\mathcal{A} \cup H) = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Comme $h = 2$ et $k = 1$, H coupe n droites en n points distincts, donc :

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A} \cup H) &= r(\mathcal{A}) + n + 1 \\ &= 1 + \frac{(n+1)(n+1)}{2} + n + 1(H.R) \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= 1 + \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

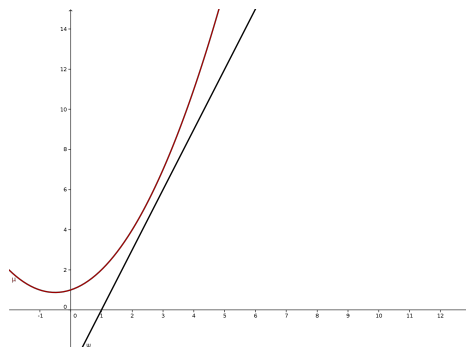
On déduit de ces assertions le théorème énoncé précédemment.

Démonstration (du théorème).

- Si $k \geq n - 2$ alors $r(\mathcal{A}) = n + 1$ ou $r(\mathcal{A}) = 2n$ ou $r(\mathcal{A}) = 3n - 2$ ou $r(\mathcal{A}) = 3n - 3$ ie $r(\mathcal{A}) \geq 3n - 3$ (assertions 1,2 et 3)
- Si $h \geq n - 1$ alors $r(\mathcal{A}) = 2n$ ou $r(\mathcal{A}) \geq 3n - 3$ (assertions 4 et 5)
- Si $k < n - 2$ et $3 < h < n - 1$ alors $r(\mathcal{A}) \geq 3n - 3$, $\forall n > 4$ (assertion 6).
Pour $n \leq 4$, on a déjà vu les configurations possibles (pour $n = 3$, la valeur $r(\mathcal{A}) = 5$ n'est pas admissible, pour $n = 4$, les valeurs $r(\mathcal{A}) = 6$ et $r(\mathcal{A}) = 7$ ne sont pas admissibles ; ce qui est en cohérence avec le théorème)
- Si $k < n - 2$ et $h = 3$ alors $r(\mathcal{A}) \geq 3n - 3$ (assertion 6)
- Si $h = 2$ et $2 \leq k \leq n - 3$ alors $r(\mathcal{A}) \geq 3n - 3$ (assertion 7)
- Si $h = 2$ et $k = 1$ alors $r(\mathcal{A}) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ (assertion 8). Reste à voir que $1 + \frac{n(n+1)}{2} > 3n - 3$. Posant :

$$\begin{aligned} \mu : x &\mapsto 1 + \frac{x(x+1)}{2} \\ \psi : x &\mapsto 3x - 3 \end{aligned}$$

On peut voir sur le graphique suivant que $\mu > \psi$



3 Arrangements projectifs

Girard DESARGUES (1591-1661) [10] était mathématicien et architecte français, connu principalement pour ses recherches et travaux en géométrie projective, en étude des cônes, etc. C'est lui qui fonde la géométrie projective dans son *Brouillon project d'une Atteinte aux évènements des rencontres d'un cône avec un plan*, publié en 1639.

3.1 Espace projectif^[2]

Définition 8. Soit E un espace vectoriel. L'espace projectif de E noté $\mathbb{P}(E)$ est le quotient de $E \setminus \{0_E\}$ par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \Leftrightarrow y = \lambda x$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}$$

(colinéarité)

La dimension de $\mathbb{P}(E)$ est donnée par :

$$\dim(\mathbb{P}(E)) = \dim(E) - 1$$

Exemples.

1. $\forall n \geq 1$, on note $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Cet espace projectif est appelé *espace projectif standard* de dimension n sur un corps \mathbb{K} .
2. Un espace projectif est dit *réel* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et *complexe* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
3. Les espaces projectifs de dimension 0 sont appelés *points*. Les espaces projectifs de dimension 1 et 2 sont respectivement appelés *droite projective* et *plan projectif*.

3.2 Plan projectif réel^[2]

Définition 9 (Plan projectif réel). Le *plan projectif réel*, noté $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ou \mathbb{RP}^2 , est défini comme étant l'ensemble des droites de \mathbb{R}^3 passant par l'origine. Dans la suite, nous le noterons \mathbb{P}^2 .

On se place dans \mathbb{R}^3 . On considère toutes les droites passant par $(0, 0, 0)$. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $v \neq (0, 0, 0)$. Alors l'ensemble des droites de vecteur directeur v est $\{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}^*\} = \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) | \lambda \in \mathbb{R}^*\} = \{(\lambda x : \lambda y : \lambda z)\} = \{(x : y : z)\}$ et $\{(x : y : z)\}$ est une droite contenant v . Un élément de \mathbb{P}^2 sera noté $(x : y : z)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Proposition 1. \mathbb{P}^2 contient naturellement \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Soit $\mathcal{U} = \{v = (x : y : z) \in \mathbb{P}^2 | x \neq 0\}$. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :

$$f : (x : y : z) \mapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

On construit son inverse, notant $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{U}$ telle que :

$$g : (y, z) \mapsto (1 : y : z)$$

Soit $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(f \circ g)(y, z) = f(g(y, z)) = f(1 : y : z) = \left(\frac{y}{1}, \frac{z}{1}\right) = (y, z)$$

Donc $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$

De même, soit $(x : y : z) \in \mathcal{U}$. On a :

$$(g \circ f)(x : y : z) = g(f(x : y : z)) = g\left(\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)\right) = \left(1 : \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = (x : y : z)$$

car $x \neq 0$

Donc $g \circ f = Id_{\mathcal{U}}$

Donc f est bijective de \mathcal{U} dans \mathbb{R}^2 de bijection réciproque $f^{-1} = g$

De plus, $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}^2$.

Donc $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$

Proposition 2. $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{R}^2 &= \{v \in \mathbb{P}^2 | x = 0\} \\ &= \{(0 : y : z) | y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(y : z) | y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

(c'est une droite de \mathbb{R}^2)

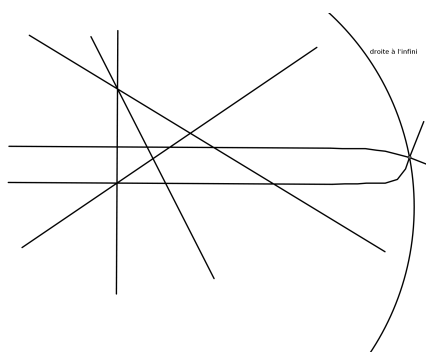
Remarque. On montre de même que $\mathbb{P}^1 = \mathbb{R} \cup \mathbb{P}^0$ où \mathbb{P}^0 est un point.

Dans le plan projectif réel, il est possible de définir un plan affine en choisissant une droite projective quelconque appelée *droite à l'infini* associée à ce plan affine. On la note H_∞ .

Deux droites strictement parallèles dans \mathbb{R}^2 correspondent à deux droites projectives qui s'intersectent en un point situé sur la droite à l'infini, dit *point à l'infini*.

Réciproquement, il est toujours possible de compléter un plan affine par une droite à l'infini de façon à obtenir un plan projectif de ce plan affine.

Exemple. Un arrangement dans le plan projectif réel.



3.3 Arrangements dans le plan projectif réel

Dans cette partie, on étudie les arrangements dans le plan projectif réel en s'appuyant sur un extrait de *Real Algebraic Geometry* de ARNOLD, *Into How Many Parts Do n Lines Divide the Plane?* [1].

3.3.1 Premiers exemples de valeurs non atteintes pour le nombre de régions

On considère $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ dans le plan projectif réel.

$H_1 \dots H_n$ divisent \mathbb{P}^2 en $r(\mathcal{A})$ parties convexes.

Question : Quelles valeurs sont admissibles pour $r(\mathcal{A})$, lesquelles ne le sont pas ?

Si l'on considère que $\exists 1 \leq i \leq n$ tel que $H_i = H_\infty$, on travaille avec $\mathcal{A} \setminus H_\infty$ dans \mathbb{R}^2 . On a :

$$\text{card}(\mathcal{A} \setminus H_\infty) = n - 1$$

Donc, étudier un arrangement de n droites dans \mathbb{P}^2 revient à étudier un arrangement de $n - 1$ droites dans \mathbb{R}^2 .

Pour n petit, $r(\mathcal{A})$ est donné par :

n	1	2	3	4	5
$r(\mathcal{A})$	1	2	3 4	4 6 7	5 8 9 10 11

Comme dans la partie précédente, on remarque que $n \leq r(\mathcal{A}) \leq 1 + \frac{n(n-1)}{2}$. Cependant, il existe des valeurs intermédiaires qui ne peuvent être atteintes.

Théorème 4. Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement dans \mathbb{P}^2 . La valeur $r(\mathcal{A}) = 2(n-1)$ est atteinte mais aucune valeur n'est atteinte dans l'intervalle suivant :

$$n < r(\mathcal{A}) < 2(n-1)$$

Démonstration. Notons k le plus grand nombre de droites passant par un même point. Notons ce point ξ .

Lemme 2. Si $k = n$, alors $r(\mathcal{A}) = n$.

Démonstration. Considérons que l'une de ces n droites soit la droite à l'infini. Alors les $n-1$ droites de $\mathcal{A} \setminus H_\infty$ sont parallèles dans \mathbb{R}^2 et par suite, divisent le plan en $(n-1) + 1 = n$ régions.

Lemme 3. Si $k = n-1$, alors $r(\mathcal{A}) = 2(n-1)$.

Démonstration. Supposons $(H_1 \dots H_{n-1})$ passent par ξ . Considérons $H_\infty = H_n$. Alors les $n-1$ droites de $\mathcal{A} \setminus H_\infty$ passent par ξ dans \mathbb{R}^2 et par suite, divisent le plan en $2(n-1)$ régions.

Lemme 4. Si $k \leq n-1$, alors $r(\mathcal{A}) \geq 2(n-1)$

Démonstration. Si $n > 1$ alors $k \geq 2$ (puisque tout couple de droites de \mathcal{A} a une intersection non vide dans \mathbb{P}^2).

Notons ξ un point d'intersection entre k droites et $(H_1 \dots H_k)$ ces droites ; considérons $H_\infty = H_k$.

Alors les $(k-1)$ droites de $(H_1 \dots H_k) \setminus H_\infty$ sont parallèles dans \mathbb{R}^2 et $r((H_1 \dots H_{k-1})) = k$.

De plus, par hypothèse $k \leq n-1$ donc $n-k \geq 1$, donc il existe au moins une droite ne passant pas par ξ .

Ajoutons une s -ième droite H_s à $(H_1 \dots H_k)$ et notons $x_s = \text{card}(\{x \in H_s H_i, 1 \leq i \leq s-1\})$. On remarque que $x_s \geq k$ (car H_{k+1} coupe k droites, H_{k+2} coupe au moins $(H_1 \dots H_k)$ donc au moins k droites, etc).

Donc :

$$x_1 + \dots + x_{n-k} \geq k(n-k)$$

Et :

$$r(\mathcal{A}) \geq k + k(n-k) = k(n-k+1) = \phi(k)$$

On a :

x	2	$\frac{n+1}{2}$	$n-1$
$\phi'(x)$	+	0	-
$\phi(x)$	$2(n-1)$	$\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} + \frac{5}{4}$	$2(n-1)$

Donc ϕ atteint son minimum en 2 et $(n-1)$, ie :

$$r(\mathcal{A}) \geq 2(n-2+1) = 2(n-1)$$

Le théorème 4 se déduit des lemmes 1, 2 et 3.

Remarque. Si l'on appelle les intervalles où $r(\mathcal{A})$ ne prend aucune valeur les *trous*, on remarque que ce premier trou apparaît pour $n > 4$

Théorème 5. Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement dans \mathbb{P}^2 . La valeur $r(\mathcal{A}) = 3n - 6$ est atteinte mais aucune valeur n'est atteinte dans l'intervalle suivant :

$$2(n-1) < r(\mathcal{A}) < 3(n-2)$$

Démonstration. Notant k le plus grand nombre de droites passant par un même point ξ et $(H_1 \dots H_k)$ ces droites. Considérons $H_\infty = H_k$. On regarde les $n-1$ droites $(H_1 \dots H_n) \setminus H_k$. On a :

- $(k-1)$ droites parallèles
- $(n-k)$ droites non parallèles aux k autres
 - si $k = n-1$, (lemme 2) alors $r(\mathcal{A}) = 2(n-1)$
 - si $k \leq n-2$, (lemme 3) alors $r(\mathcal{A}) \geq k(n-k+1) \geq (n-2)(n-(n-2)+1) \geq 3(n-2)$

Donc, $\forall k > 2$ les valeurs $r(\mathcal{A}) = 2(n-1)$ et $r(\mathcal{A}) = 3(n-2)$ sont atteintes mais aucune dans l'intervalle suivant :

$$2(n-1) < r(\mathcal{A}) < 3(n-2)$$

Si $k=2$ (il n'existe pas trois droites concourantes), alors $r(\mathcal{A})$ atteint son maximum : $r(\mathcal{A}) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$

Lemme 5. $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 \geq 3(n-2)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2} + 1 - 3(n-2) &\geq 0 \Leftrightarrow n(n-1) + 2 - 6(n-2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow n^2 - 7n + 2 + 12 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow n^2 - 7n + 14 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \Delta \leq 0
\end{aligned}$$

où Δ est le discriminant du polynôme de degré 2.

Or, $\Delta = 49 - 4 \cdot 14 = 49 - 56 = -7 \leq 0$

D'où le résultat.

Donc le théorème 5 est démontré.

Remarque. Ce deuxième trou apparaît pour $n > 6$.

3.3.2 Etude des arrangements dans \mathbb{P}^2 pour n grand

À présent, on étudie des intervalles pour des valeurs de n suffisamment grandes.

Théorème 6. Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement dans \mathbb{P}^2 . Supposons que le plus grand nombre de droites passant par un même point ξ est k . Alors :

$$k(n+1-k) \leq r(\mathcal{A}) \leq k(n+1-k) + \frac{R(R-1)}{2}$$

où $R = n - k$

Ici, toutes les valeurs de cet intervalle sont atteintes pour un n suffisamment grand par rapport à R , ie pour k grand. Attention, ce n'est pas nécessairement vrai pour k petit.

Démonstration. Notons $(H_1 \dots H_k)$ les k droites passant par ξ . On considère $H_k = H_\infty$. Alors $(H_1 \dots H_{k-1})$ divisent le plan réel en k régions. Considérons à présent les $n - k = R$ droites restantes. On a :

$$r((H_{k+1} \dots H_n)) = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-k}$$

où x_s est le nombre de points d'intersection entre la s -ième droite ajoutée et les $(s-1)$ -ièmes précédentes

On a : $\forall 1 \leq s \leq n - k$, $x_s \geq k$ (car la s -ième droite coupe $H_1 \dots H_k$ en k points distincts (sinon on aurait $\xi \in H_s$ et $k = k + 1$ CONTRADICTION)).

Donc :

$$r((H_{k+1} \dots H_n)) \geq k(n - k)$$

Ainsi :

$$r(\mathcal{A}) \geq k + k(n - k) = k(n - k + 1)$$

Ce qui démontre la première inégalité du théorème 6.

De plus, la s -ième droite coupe $k + (s - 1)$ droites en au plus $k + (s - 1)$ points distincts, donc $x_s \leq k + (s - 1)$. Donc :

$$\begin{aligned}
r((H_{k+1} \dots H_n)) &\leq \sum_{s=1}^{n-k} (k + (s - 1)) \\
&\leq k(n - k) + \sum_{s=1}^{n-k} (s - 1) \\
&\leq k(n - k) + \sum_{s=0}^{n-k-1} s \\
&\leq k(n - k) + \frac{(n - k - 1)(n - k)}{2} \\
&\leq k(n - k) + \frac{R(R - 1)}{2}
\end{aligned}$$

où $R = n - k$

Donc :

$$r(\mathcal{A}) \leq k + k(n - k) + \frac{R(R - 1)}{2} = k(n - k + 1) + \frac{R(R - 1)}{2}$$

Ce qui démontre la seconde inégalité du théorème.

A présent, montrons que toutes les valeurs dans cet intervalle sont atteintes par $r(\mathcal{A})$ (attention, à noter que cela est valable pour n et k grands, par exemple, si $n \geq \frac{R(R+1)}{2}$, on a aussi $k \geq \frac{R(R-1)}{2}$). Considérons R droites génériques dans \mathbb{R}^2 et notons-les $(H_1 \dots H_R)$.

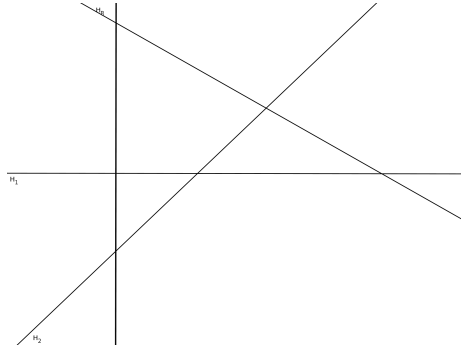


FIGURE 5 – Arrangement de R droites génériques

Choisissons à présent une direction telle que, ajoutant $(k - 1)$ droites $(H_{R+1} \dots H_{n-1})$, ces dernières soient toutes parallèles entre elles mais ne soient parallèles à aucune des droites $(H_1 \dots H_R)$.

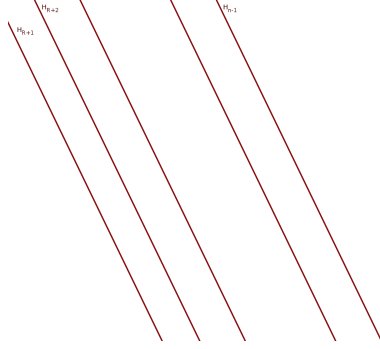
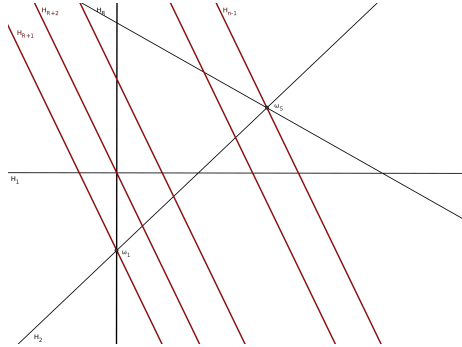


FIGURE 6 – $n - R - 1$ droites parallèles

Notant $H_n = H_\infty$.

Soit $S \in \mathbb{N}$, $S \leq \frac{R(R-1)}{2}$.

Existe alors un sous-ensemble de $(H_{R+1} \dots H_{n-1})$ passant par $\frac{R(R-1)}{2} - S$ points d'intersection entre les $(H_1 \dots H_R)$.



Il vient que :

$$r((H_1 \dots H_R)) = kR + S = k(n - k) + S$$

(car chacune des R droites coupe les k droites (kR) et il y a S points d'intersection entre $(H_1 \dots H_n)$ où aucune des $n - R - 1$ droites parallèles ne passe) Et :

$$r(\mathcal{A}) = k + k(n - k) + S = s(n - k + 1) + S$$

Ceci étant vrai pour tout $S \in \mathbb{N}$, $S \leq \frac{R(R-1)}{2}$, le théorème 6 est démontré.

Théorème 7. Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement dans \mathbb{P}^2 . Supposons que le plus grand nombre de droites passant en un même point ξ est $k > 2$.

Alors les n droites de \mathcal{A} divisent le plan \mathbb{P}^2 en $r(\mathcal{A})$ régions où :

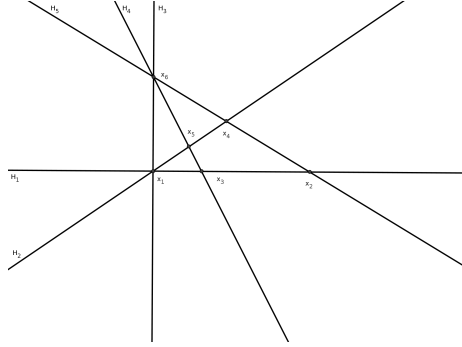
$$r(\mathcal{A}) \geq \frac{n(n-1)}{2(k-1)}$$

Remarque. Est important ici le fait que le numérateur évolue en n^2 tandis que le dénominateur ne dépend pas de n . On aura alors que $\frac{n(n-1)}{2(k-1)}$ est grand lorsque n est grand et k fixé.

Démonstration. Pour démontrer le théorème 7, on ordonne les droites de la manière suivante :

On appelle *évènement* e_i l'ensemble des points d'intersection de H_i avec les $(i-1)$ – ièmes droites.

Exemple 1.



i	1	2	3	4	5
e_i	\emptyset	$\{x_1\}$	$\{x_1, x_1\}$	$\{x_3, x_5, x_6\}$	$\{x_2, x_4, x_6, x_6\}$

Pour chaque i , $\text{card}(e_i) = i - 1$ alors le nombre d'évènements total est donné par :

$$\sum_{i=1}^n \text{card}(e_i) = 0 + 1 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(et ce indépendamment de la multiplicité des points)

On appelle *partition* I_s l'ensemble des points d'intersection de la s – ième droite avec les $(s-1)$ – ièmes droites. Alors :

$$I_s = \bigcup_{j < s} H_s \cap H_j$$

On note x_s le cardinal de I_s . Ces x_s points coupent la droite projective H_∞ en x_s points. Fixons $1 \leq s \leq n$. Alors $r((H_1 \dots H_{s+1})) = r((H_1 \dots H_s)) + x_s$ et :

$$r(\mathcal{A}) = \sum_{s=1}^n x_s$$

On note aussi $m_{y,s} = \text{card}(\{H_j | y \in H_j, j < s\})$. À chaque point de la partition, le nombre maximum d'évènements passés est $k-1$ (car on ne peut avoir plus de k droites passant par un même point). Donc $m_{y,s} \leq k-1$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2} &= \sum_{s=1}^n \sum_{y \in I_s} m_{y,s} \\
&\leq \sum_{s=1}^n \sum_{y \in I_s} (k-1) \\
&\leq (k-1) \sum_{s=1}^n \sum_{y \in I_s} 1 \\
&\leq (k-1) \sum_{s=1}^n x_s \\
&= (k-1)r(\mathcal{A})
\end{aligned}$$

(car $r(\mathcal{A}) = \sum_{s=1}^n x_s$)

Par conséquent :

$$r(\mathcal{A}) \geq \frac{n(n-1)}{2(k-1)}$$

3.3.3 Stabilité

Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement de \mathbb{P}^2 . On cherche les intervalles D_j , $j \in \mathbb{N}$, où $r(\mathcal{A})$ n'atteint aucune valeur et ce pour un n grand qui dépend de j ; si D_j vérifie cela, on l'appellera *trou stable*. On introduit les notations suivantes : $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= (n-j)(j+1) \\
\beta_j &= (n-j)(j+1) + \frac{j(j-1)}{2}
\end{aligned}$$

Pour n suffisamment grand, les premiers termes s'ordonnent de la manière suivante :

$$\alpha_0 = \beta_0 < \alpha_1 = \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 < \beta_3 < \dots < \alpha_{j-1} < \beta_{j-1} < \alpha_j$$

On note :

- $P_0, P_1 \dots P_j$, les intervalles fermés de la forme :

$$P_0 = [\alpha_0, \beta_0], P_1 = [\alpha_1, \beta_1] \dots P_j = [\alpha_j, \beta_j]$$

- $D_1, D_2 \dots P_j$, les intervalles ouverts de la forme :

$$D_1 =]\beta_0, \alpha_1[, D_2 =]\beta_1, \alpha_2[\dots D_j =]\beta_{j-1}, \alpha_j[$$

Théorème 8. Soit $\mathcal{A} = (H_1 \dots H_n)$ un arrangement de \mathbb{P}^2 . Si n est suffisamment grand, alors le nombre de régions $r(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} n'atteint aucune valeur dans les intervalles de la forme :

$$\beta_{j-1} = j(n+1-j) + \frac{(j-1)(j-2)}{2} < r(\mathcal{A}) < (j+1)(n-j) = \alpha_j$$

$\forall j \in \mathbb{N}$

Démonstration. Notons k le plus grand nombre de droites passant par un même point ξ . Montrons que $\forall 2 \leq k \leq n$, $r(\mathcal{A})$ n'est pas dans l'intervalle D_j . Supposons que $n-j \geq j+1$ et n suffisamment grand. Regardons lorsque l'on fait varier k :

1. Si $k > n-j$: notant $r = n-k$, on a, d'après le théorème 6,

$$k(n-k+1) \leq r(\mathcal{A}) \leq k(n-k+1) + \frac{r(r-1)}{2}$$

En remplaçant $n-k$ par r et k par $n-r$, on obtient :

$$(n-r)(r+1) \leq r(\mathcal{A}) \leq (n-r)(r+1) + \frac{r(r-1)}{2}$$

Donc $\alpha_r \leq r(\mathcal{A}) \leq \beta_r$. Et par suite, $r(\mathcal{A}) \in P_r$, $\forall 0 \leq r \leq j-1$.

Les intervalles $(D_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ étant distincts deux à deux, aucune valeur de D_j ne sont atteintes.

Donc $r(\mathcal{A})$ vérifie la propriété pour $k > n-j$.

2. Si $j+1 \leq k \leq n-j$: posons $f(x) = x(n+1-x) = -x^2 + x(n+1)$

x	$j+1$	$\frac{n+1}{2}$	$n-j$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	α_j	$\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} + \frac{1}{4}$	α_j

Donc f atteint son minimum en $(j+1)$ et $(n-j)$, ie :

$$r(\mathcal{A}) \geq f(j+1) = (j+1)(n-j) = \alpha_j$$

Si $r(\mathcal{A}) \in D_j$ alors $r(\mathcal{A}) < \alpha_j$ (ce qui n'est pas possible)

Donc $r(\mathcal{A})$ vérifie la propriété pour $j+1 \leq k \leq n-j$.

3. Si $k \leq j$:

- Si $k > 2$, d'après le théorème 7,

$$r(\mathcal{A}) \geq \frac{n(n-1)}{2(k-1)} \geq \frac{n(n-1)}{2(j-1)}$$

La condition $n > 2(j^2 - 1)$ suffit pour démontrer la proposition. En effet :

Par hypothèse, $2 < k \leq j$. On a :

$$j > 2 \Leftrightarrow -j < 2 \Leftrightarrow n - j < n - 2 \Leftrightarrow \frac{n-1}{n-j} > 1 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{n-j} > n$$

Donc $\frac{n(n-1)}{n-j} > 2(j^2 - 1)$ ie $\frac{n(n-1)}{2(j+1)} > (n-j)(j-1) = \alpha_j$

Et :

$$r(\mathcal{A}) > \alpha_j$$

Donc $r(\mathcal{A}) \notin D_j$.

- Si $k = 2$, alors $r(\mathcal{A}) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ (assertion 8 appliquée à $(n-1)$). La condition $n > 2(j+1)$ suffit pour démontrer la proposition. En effet :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{n(n-1)}{2} &= 1 + \frac{n}{2}(n+1) \\ &> 1 + (j+1)(n-1) \\ &= 1 + n(j+1) - j - 1 \\ &= n(j+1) - j \\ &> n(j+1) - j - 1 \\ &= n(j+1) - (j+1) \\ &= (n-1)(j+1) \\ &= \alpha_j \end{aligned}$$

Donc :

$$r(\mathcal{A}) > \alpha_j$$

Et par conséquent, $r(\mathcal{A}) \notin D_j$.

Dans tous les cas, $r(\mathcal{A}) \notin D_j$.

D'où le résultat.

Références

- [1] ARNOLD, V.I. 2013 : *Real Algebraic Geometry*, 77-94, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- [2] BERGER, M. 1987 : *Geometry I*, 85-95, Springer-Verlag, Berlin-New York.
- [3] GRÜNBAUM, B. 1971 : *Arrangements of Hyperplanes on combinatorics and graph theory*, 41-106, Proc. Second Louisiana Conf., Baton Rouge.
- [4] Math Binghamton (s.d). En ligne <http://www.math.binghamton.edu/zaslav/>.
- [5] ORLIK, P. HIROAKI, T. 1991 : *Arrangements of Hyperplanes*, 1-5, 303-314, Springer-Verlag.
- [6] ROBERT, S. 1889 : *On the figures formed by intercepts of a system of straight lines in a plane and on analogous relations in space of three dimensions*, 405-422, Proc. London Math. Soc. 19.
- [7] SAMANSKY, E. 2002 : *Zaslavsky's Theorem* , 1-30.
- [8] Wikipedia (2014). En ligne http://fr.wikipedia.org/wiki/Vladimir_Arnold.
- [9] Wikipedia (2013). En ligne http://en.wikipedia.org/wiki/Vladimir_Arnold.
- [10] Wikipedia (2014). En ligne http://fr.wikipedia.org/wiki/Girard_Desargues.
- [11] Wikipedia (2014). En ligne http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Zaslavsky.
- [12] ZASLAVSKY, T. 1975 : *Facing Up to Arrangements : Face-Count Formulas for Partitions of Space by Hyperplanes*, 405-422, Memoirs Amer. Math. Soc.

Annexe A : Applications

Cas pour 8 droites affines. On étudie l'ensemble des valeurs atteintes par le nombre de régions de 8 droites affines ce qui est équivalent à étudier les arrangements de 9 droites projectives. Appliquons les théorèmes 6 et 8 pour $n = 9$:

– D'après le théorème 6, les valeurs admissibles par $r(\mathcal{A})$ sont :

– pour $k = 2$:

$$2(9 + 1 - 2) = 16 \leq r(\mathcal{A}) \leq 16 + \frac{(9 - 2)(9 - 2 - 1)}{2} = 16 + 21 = 37$$

– pour $k = 3$:

$$3(9 + 1 - 3) = 21 \leq r(\mathcal{A}) \leq 21 + \frac{(9 - 3)(9 - 3 - 1)}{2} = 21 + 15 = 36$$

– pour $k = 4$:

$$4(9 + 1 - 4) = 24 \leq r(\mathcal{A}) \leq 24 + \frac{(9 - 4)(9 - 4 - 1)}{2} = 24 + 10 = 34$$

– pour $k = 5$:

$$5(9 + 1 - 5) = 25 \leq r(\mathcal{A}) \leq 25 + \frac{(9 - 5)(9 - 5 - 1)}{2} = 25 + 6 = 31$$

– pour $k = 6$:

$$6(9 + 1 - 6) = 24 \leq r(\mathcal{A}) \leq 24 + \frac{(9 - 6)(9 - 6 - 1)}{2} = 24 + 3 = 27$$

– pour $k = 7$:

$$7(9 + 1 - 7) = 21 \leq r(\mathcal{A}) \leq 21 + \frac{(9 - 7)(9 - 7 - 1)}{2} = 21 + 1 = 22$$

– pour $k = 8$:

$$8(9 + 1 - 8) = 16 \leq r(\mathcal{A}) \leq 16 + \frac{(9 - 8)(9 - 8 - 1)}{2} = 16 + 0 = 16$$

– pour $k = 9$:

$$9(9 + 1 - 9) = 9 \leq r(\mathcal{A}) \leq 9 + \frac{(9 - 9)(9 - 9 - 1)}{2} = 9 + 0 = 9$$

Le théoème 6 nous assure que les bornes inférieure et supérieure des encadrements sont atteintes ; il nous permet de construire des arrangements en introduisant une perturbation sur l'un des arrangements dont le nombre de régions est égal à la borne supérieure des encadrements précédents, jusqu'à atteindre un nombre de régions égal à la borne supérieure $-k$. Or, certaines valeurs peuvent ne pas être atteintes si k est trop petit.

- D'après le théorème 8, les intervalles de valeurs interdites sont :

$$\begin{aligned} - \beta_0 &= 1(9 + 1 - 1) + \frac{(1-1)(1-2)}{2} = 9 < r(\mathcal{A}) < 16 = \alpha_1 \\ - \beta_1 &= 2(9 + 1 - 2) + \frac{(2-1)(2-2)}{2} = 16 < r(\mathcal{A}) < 21 = \alpha_2 \\ - \beta_2 &= 3(9 + 1 - 3) + \frac{(3-1)(3-2)}{2} = 22 < r(\mathcal{A}) < 24 = \alpha_3 \end{aligned}$$

Les intervalles $[\beta_{j-1}, \alpha_j]$ sont vides à partir de $j = 4$. De plus, nous avons démontré que le théorème était vrai pour $n > 2(j^2 - 1)$ on ne peut donc certifier le troisième intervalle.

Bilan :

- Valeurs non-atteintes : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (car inférieur au min=9), 10, 11, 12, 13, 14, 15 ($\beta_0 \dots \alpha_1$), 17, 18, 19, 20 ($\beta_1 \dots \alpha_2$).
- Valeurs atteintes : 9 (assertion 1), 16 (assertion 2), 21 (assertion 3), 22 (assertion 3) et 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 se déduisent du théorème 6 (qui nous permet de construire des arrangements avec exactement ces nombres de régions).
- Valeur possiblement atteinte : 23.

La combinatoire d'un arrangement est une donnée construite par rapport au graphe de Hasse de cet arrangement. Avec l'aide de M. Guerville en possession de la liste de toutes les combinatoires possibles pour les arrangements de 9 droites projectives, nous avons réalisé un test permettant de savoir si la valeur 23 pour le nombre de régions est associée à une combinatoire. Attention, une combinatoire n'est pas toujours réalisable. Si l'on trouve une combinatoire possible associée à la valeur 23, on devra vérifier si celle-ci est réalisable.

Exemple. (*) Rappel : $\mathcal{A} = (H_1, H_2, H_3, H_4, H_5)$ et $l(\mathcal{A}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

La combinatoire de cet arrangement est :

$$[(1, 2, 3), (1, 5), (1, 4), (2, 5), (2, 4), (3, 4, 5)]$$

(car $x_1 \in H_1, H_2, H_3$; $x_2 \in H_1, H_5$; $x_3 \in H_1, H_4$; $x_4 \in H_2, H_5$; $x_5 \in H_2, H_4$; $x_6 \in H_3, H_4, H_5$)

Le théorème de Zaslavsky sur le dénombrement des régions est donné pour un arrangement affine. Le programme suivant, écrit en Scilab transforme une combinatoire projective en combinatoire affine et calcule le nom-

bre de régions pour un arrangement associé à une telle combinatoire :

```
function [r]=regions(Cp)
Ca=list()
n=length(Cp)
for i=1:n do
infini=%F
for j=1:length(Cp(i)) do
if Cp(i)(j)==1 then
infini=%t
end
end
if infini==%f then
Ca($+1)=Cp(i)
end
end
n1=length(Ca)
r=4
for i=1:n1 do
r=r+length(Ca(i))-1
end
endfunction
```

Le programme suivant prend en entrée la liste de toutes les combinatoires projectives possibles et renvoie une liste composée des combinatoires associées à la valeur 23, en effet, on regarde si le nombre de régions associé à chaque combinatoire est égal à 23 :

```
function [L]=result(C)
L=list()
n=length(C)
for i=1:n do
if regions(C(i))==23 then
L($+1)=C(i)
print(affichage(C(i)))
end
end
endfunction
```

Le résultat est qu'il n'y a aucun arrangement possible, donc la la valeur 23 n'est pas atteinte.

Cas pour 9 droites affines. Par une étude similaire, on obtient :

- Valeurs non-atteintes : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23.
- Valeurs atteintes : 10, 18, 24, 25, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.
- Valeurs possiblement atteintes : 26, 27.

En testant les valeurs 26 et 27 sur le programme précédent avec quelques modifications de structure, on obtient qu'aucune combinatoire n'est associée à ces deux valeurs donc elles ne sont pas atteintes.