

Projet Scilab

A consulter de préférence avec une version récente d'Adobe Reader

Table des matières

1	Problème instationnaire : equation de transport a coefficients variables	1
2	Problème stationnaire : éléments finis	10

1 Problème instationnaire : equation de transport a coefficients variables

On appelle "equation de transport non-conservative" le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}(x, t) + a(x) \partial_x \bar{u}(x, t) = 0 \\ \bar{u}(x, 0) = u_{ini}(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^+ \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \quad (1)$$

On appelle "equation de transport conservative" le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(x, t) + a(x) \partial_x \hat{u}(x, t) = 0 \\ \hat{u}(x, 0) = u_{ini}(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^+ \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \quad (2)$$

On admettra qu'il existe une et une seule fonction $X_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} \frac{dX_{x_0}(t)}{dt} = a(X_{x_0}(t)) \\ X_{x_0}(0) = x_0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

1. Dans le cas $a(x) = x$, on obtient une equation dérivée ordinaire de solution unique sur $\mathbb{R} : X_{x_0}(t) = x_0 e^t$.

Dans le cas $a(x) = -x$, on obtient une equation dérivée ordinaire de solution unique sur $\mathbb{R} : X_{x_0}(t) = x_0 e^{-t}$. On traces ces solutions pour différentes valeurs de x_0 (voir fichier : *ex01_caracteristiques*).

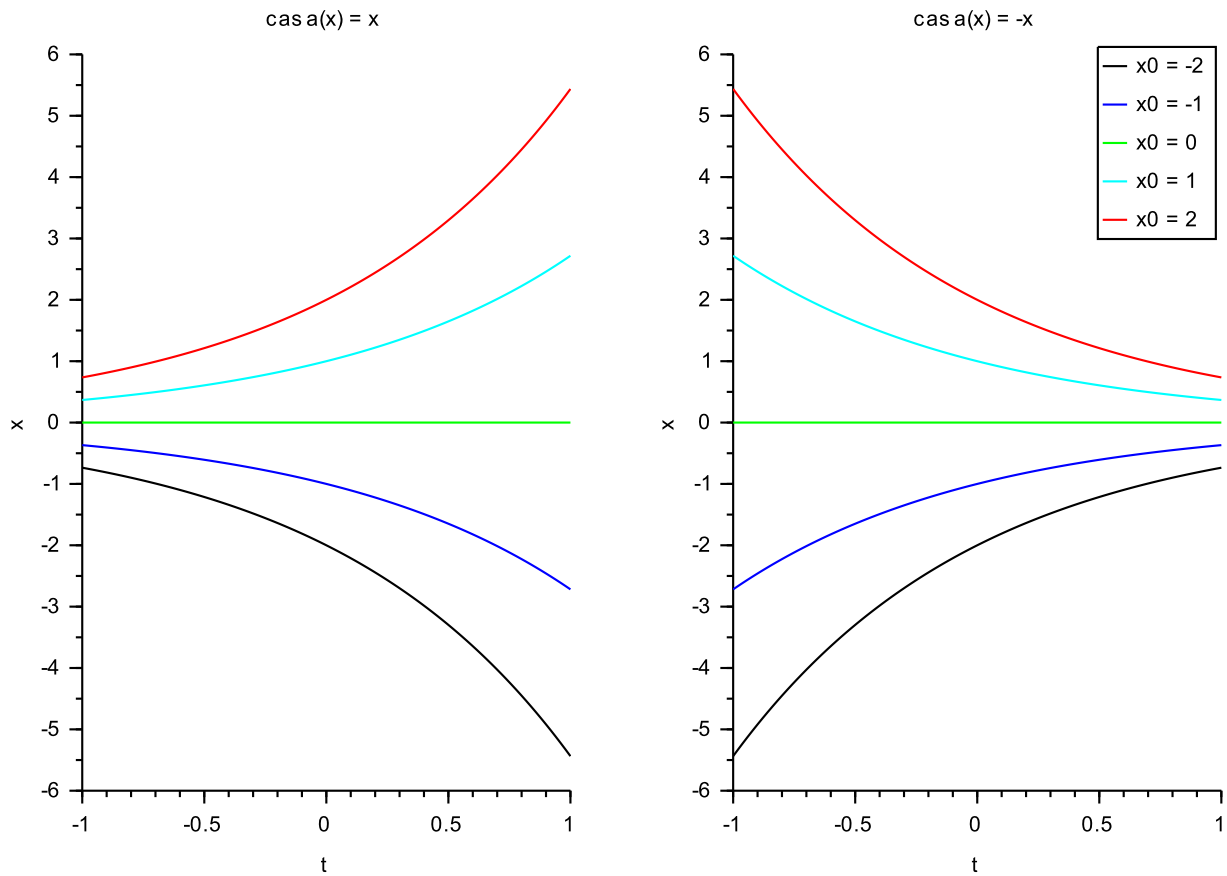


FIGURE 1 – Représentation des caractéristiques.

On supposera avoir les régularités idoines sur a et u_{ini} de sorte que les problèmes (1) et (2) soient bien posées. On peut montrer que les solutions continues sont données par :

$$\bar{u}(x, t) = u_{ini}(X_x(-t)) \quad (4)$$

et

$$\hat{u}(x, t) = u_{ini}(X_x(-t)) \exp \left(- \int_{-t}^0 a'(X_x(s)) ds \right) \quad (5)$$

2. Explicitons les solutions :

	$\bar{u}(x, t)$	$\hat{u}(x, t)$
$a(x) = x$	$u_{ini}(xe^{-t})$	$u_{ini}(xe^{-t})e^{-t}$
$a(x) = -x$	$u_{ini}(xe^t)$	$u_{ini}(xe^t)e^t$

On peut vérifier :

cas : $a(x) = x$

On a bien $\bar{u}(x, 0) = u_{ini}(x)$

D'une part $\partial_t \bar{u}(x, t) = -xe^{-t} u'_{ini}(xe^{-t})$

D'autre part $\partial_x \bar{u}(x, t) = e^{-t} u'_{ini}(xe^{-t})$

D'où $\partial_t(x, t) + x \partial_x \bar{u}(x, t) = 0$

cas : $a(x) = -x$

On a bien $\bar{u}(x, 0) = u_{ini}(x)$

D'une part $\partial_t \bar{u}(x, t) = xe^t u'_{ini}(xe^t)$

D'autre part $\partial_x \bar{u}(x, t) = e^t u'_{ini}(xe^t)$

D'où $\partial_t(x, t) - x \partial_x \bar{u}(x, t) = 0$

On a bien $\hat{u}(x, 0) = u_{ini}(x)$

D'une part $\partial_t \hat{u}(x, t) = -xe^{-2t} u'_{ini}(xe^{-t}) - e^{-t} u_{ini}(xe^{-t})$

D'autre part $\partial_x \hat{u}(x, t) = e^{-2t} u'_{ini}(xe^{-t})$

D'où $\partial_t \hat{u}(x, t) + \hat{u}(x, t) + x \partial_x \hat{u}(x, t) = 0$

On a bien $\hat{u}(x, 0) = u_{ini}(x)$

D'une part $\partial_t \hat{u}(x, t) = xe^{2t} u'_{ini}(xe^t) + e^t u_{ini}(xe^t)$

D'autre part $\partial_x \hat{u}(x, t) = e^{2t} u'_{ini}(xe^t)$

D'où $\partial_t \hat{u}(x, t) - \hat{u}(x, t) - x \partial_x \hat{u}(x, t) = 0$

On cherche à présent une approximation de \bar{u} et \hat{u} à l'aide d'un schéma numérique basé sur une discrétisation de l'espace et du temps. On se donne un maillage régulier : $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t), \forall n \in \mathbb{N}$, on note $C_j = (x_{j-1}, x_j)$ la "cellule j" du maillage d'un espace. On note u_j^n une approximation de $\frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} u(x, t_n) dx$ ou u sera la solution de \bar{u} ou \hat{u} . On supposera qu'il existe $A \in [0, \infty[$ tel que $|a(x)| \leq A \forall x \in \mathbb{R}$. On admettra également que la fonction u_{ini} est à support compact. On notera $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Schéma pour l'équation conservatrice (2)

On propose le schéma suivant :

$$\Delta x \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + (a_j^+ u_j^n - a_j^- u_{j+1}^n) - (a_{j-1}^+ u_{j-1}^n - a_{j-1}^- u_j^n) = 0 \quad (6)$$

3. On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_j^n \geq 0 \forall j \in \mathbb{Z}$.

Le schéma (6) peut s'écrire

$$u_j^{n+1} = u_j^n (1 - \lambda(a_{j-1}^- + a_j^+)) + u_{j+1}^n \lambda a_j^- + u_{j-1}^n \lambda a_{j-1}^+$$

Pour $\lambda 2A \leq 1$, les coefficients $1 - \lambda(a_{j-1}^- + a_j^+)$, λa_j^- , λa_{j-1}^+ sont supérieurs donc $\forall j \in \mathbb{Z}$ $u_j^{n+1} \geq 0$ et $u_j^{n+1} \leq \max_j(u_j^n)$.

4. Sous cette condition CFL, on suppose à présent que $\forall n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^n|$ est convergente. On a

$$\begin{aligned} |u_j^{n+1}| &= |u_j^n (1 - \lambda(a_{j-1}^- + a_j^+)) + u_{j+1}^n \lambda a_j^- + u_{j-1}^n \lambda a_{j-1}^+| \\ &\leq |u_j^n| (1 - \lambda(a_{j-1}^- + a_j^+)) + |u_{j+1}^n| \lambda a_j^- + |u_{j-1}^n| \lambda a_{j-1}^+ \\ &\leq |u_j^n| + \lambda A |u_{j+1}^n| + \lambda A |u_{j-1}^n| \\ &\Rightarrow \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^{n+1}| \leq (1 + \lambda A + \lambda A) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^n| \leq 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^n|. \end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^{n+1}|$ est convergente.

Schéma pour l'équation non-conservatrice (1)

On propose le schéma ci-dessous :

$$\Delta x \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a_j^+ u_j^n - a_j^- u_{j+1}^n - (a_{j-1}^+ u_{j-1}^n - a_{j-1}^- u_j^n) - (a_j - a_{j-1}) u_j^n = 0 \quad (7)$$

5. On peut réécrire (7) comme suit :

$$\Delta x \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a_j^+ u_j^n - a_j^- u_{j+1}^n - (a_{j-1}^+ u_{j-1}^n - a_{j-1}^- u_j^n) - (a_j^+ - a_j^- - a_{j-1}^+ + a_{j-1}^-) u_j^n = 0$$

Ce qui se simplifie par :

$$\Delta x \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a_j^- (u_j^n - u_{j+1}^n) - a_{j-1}^+ (u_{j-1}^n - u_j^n) = 0$$

6. Montrons que le schéma vérifie le principe du maximum discret sous la condition CFL $2\lambda A \leq 1$. Le schéma peut s'écrire :

$$u_j^{n+1} = u_j^n (1 - \lambda(a_j^- + a_{j-1}^+)) + u_{j+1}^n \lambda a_j^- + u_{j-1}^n \lambda a_{j-1}^+$$

Les coefficients $1 - \lambda(a_j^- + a_{j-1}^+)$, λa_j^- , λa_{j-1}^+ sont positifs et leur somme vaut 1 (combinaison connexe) ainsi $\forall k, \forall n \geq 0 \min_j u_j^0 \leq u_k^n \leq \max_j u_j^0$.

D'où $|u_k^n| \leq \max(|\max_j(u_j^0)|, |\min_j(u_j^0)|) = \|u_j^0\|_\infty$ et donc la stabilité $L^\infty : \forall n \in \mathbb{N}, \|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$. Sous notre condition CFL $2\lambda A \leq 1$.

Mise en oeuvre sous Scilab.

Afin d'effectuer des testes numériques, on se fixe le domaine en espace $(-2, 2)$ et le domaine en temps $(0, T)$ avec $T = 0.85$. La taille du domaine et le temps final ont été choisis pour que le support de la solution du problème n'atteigne pas les bords, ce qui permet donc bien d'approcher la solution en domaine infini. Au besoin, pour estimer A, on pourra implémenter son calcul par $A = \max_{[-2,2]} |a(x)|$. On considère en outre la donnée initiale suivante :

$$u_{ini}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. implémentons le schéma (6). On initialise $u_j^0 = u_{ini}(x_j) \forall j$. Puis on calcule au temps $n + 1$ à partir du temps précédent en utilisant le schéma (6). (voir fichier : *ex01_schema_representation.sci*).

8. On représente le schéma 2 et la solution analytique pour deux valeurs de $a(x)$ et pour $\lambda = 0.25$ tel que notre condition CFL soit respectée, ce qui nous donne :

FIGURE 2 – Graphique solution analytique et schema (6).

FIGURE 3 – Graphique solution analytique et schema (6).

Les graphiques 2 et 3 sont en accords avec ce qui a été trouve a la question 3. : les valeurs de u_j^n sont bien toutes positives.

9. implémentons le schéma (7). On initialise $u_j^0 = u_{ini}(x_j) \forall j$. Puis on calcule au temps $n + 1$ a partir du temps précédent en utilisant le schéma (7). (voir fichier : *ex01_schema_representation.sci*).

10. On représente le schéma (7) et la solution analytique pour deux valeurs de $a(x)$ et pour $\lambda = 0.25$ tel que notre condition CFL soit respectée, ce qui nous donne :

FIGURE 4 – Graphique solution analytique et schema (7).

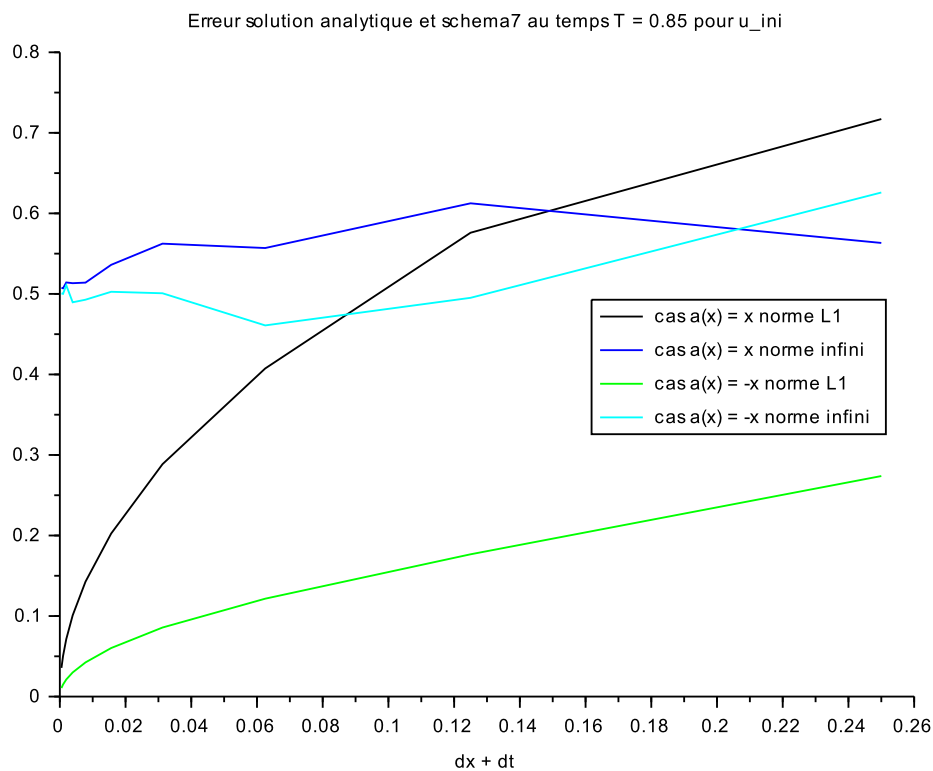
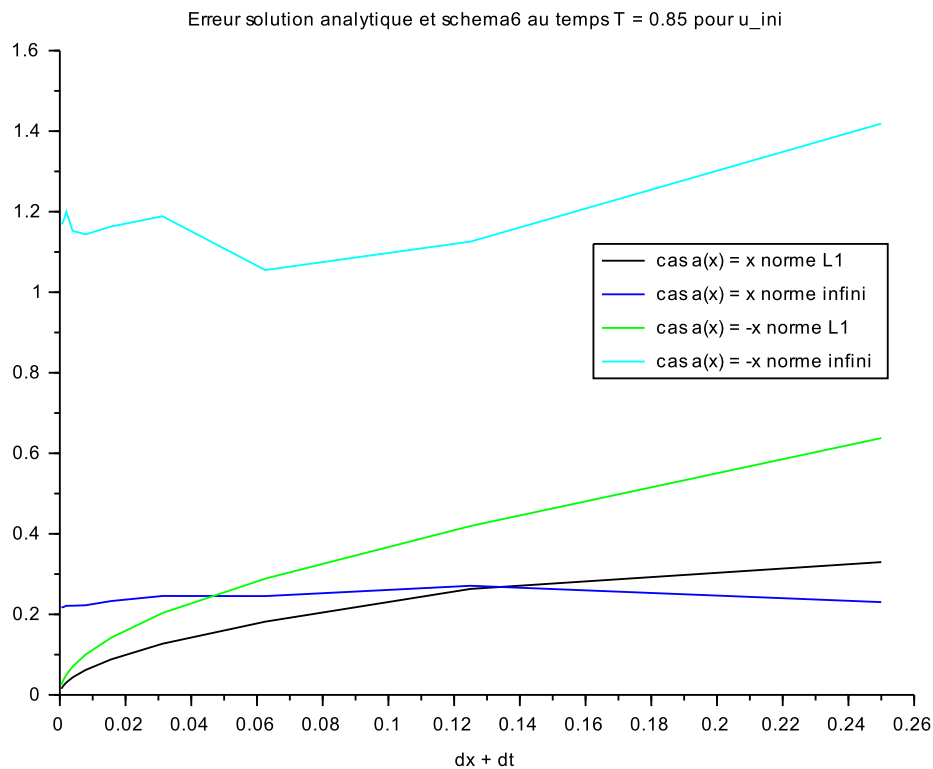
FIGURE 5 – Graphique solution analytique et schema (7).

Les graphiques 4 et 5 sont en accords avec ce qui a été trouve a la question 6 : la stabilité L^∞ n'est pas contrariée, on a bien $\max u_0 \geq \max_j u_0^n \forall n \in \mathbb{N}$.

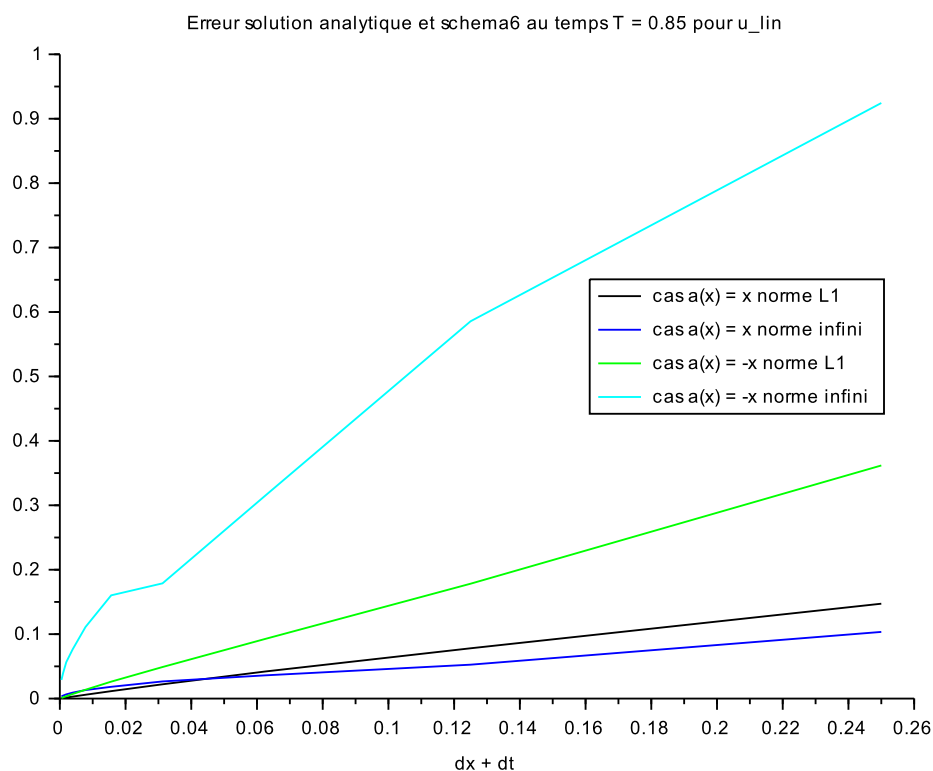
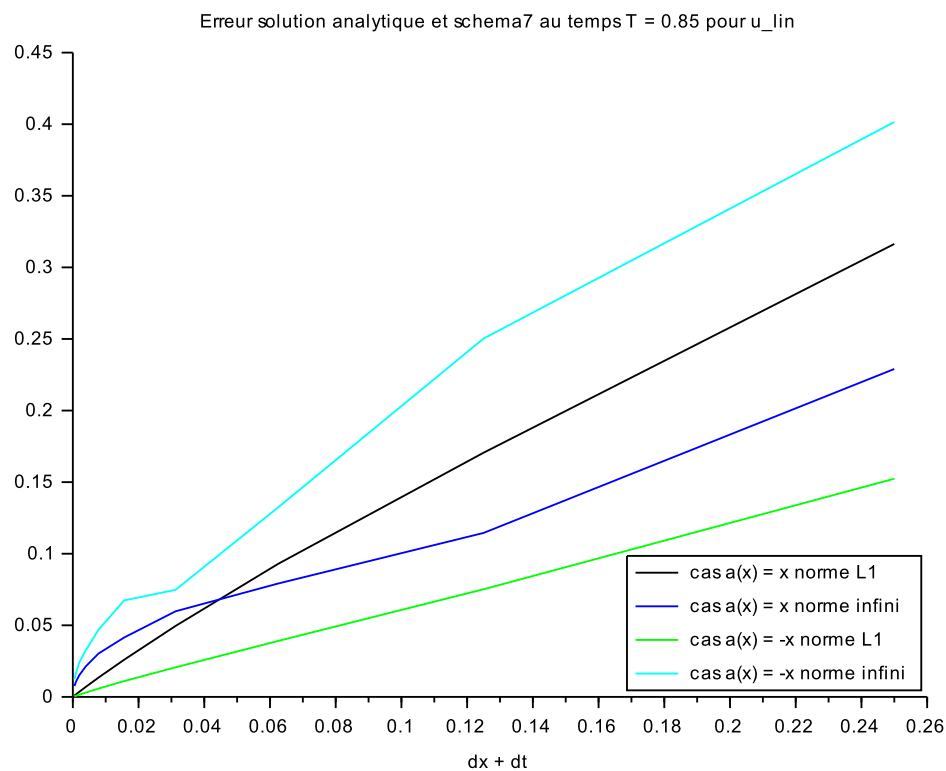
On introduit une seconde donnée initiale :

$$u_{lin}(x) = \begin{cases} 1 + 2x, & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ 1 - 2x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

11. On trace l'erreur entre solution analytique et schéma au temps $T = 0.85$ pour différentes longueurs (et durées) de pas en gardant $\lambda (= 0.25)$ tel que notre condition CFL soit respectée, (voir fichier : *ex01_convergence.sci*) ce qui nous donne :

FIGURE 6 – Etude de la convergence u_{ini} .

Il semblerait que les schémas (6) et (7) convergent en norme L^1 mais pas en norme L^∞ .

FIGURE 7 – Etude de la convergence u_{lin} .

Pour la condition initiale u_{lin} qui est "plus régulière", Il semblerait que les schémas (6) et (7) convergent en norme L^1 et en norme L^∞ . On trace a titre gracieux les schémas pour la donnée initiale u_{lin} voir 10 et 11.

2 Problème stationnaire : éléments finis

Dans cette partie, nous étudions un problème aux limites en dimension 1. Le but est d'approcher la solution $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ du problème suivant :

$$(D) \begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x), & \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

avec $f \in L^2(]0, 1[)$ et $\lambda \geq 0$.

Rappelons que la formule du problème (D) est donnée par

$$(FV_D) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(]0, 1[) \text{ telle que, } \forall v \in H_0^1(]0, 1[), \text{ on ait} \\ \int_0^1 (u'(x)v'(x) + \lambda u(x)v(x))dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{cases}$$

1. Pour tout $u, v \in H_0^1(]0, 1[)$, on note $a(u, v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x) + \lambda u(x)v(x))dx$ et $l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$. Nous sommes dans les hypothèses du théorème de Lax-milgram :

- (i) l'espace $H_0^1(]0, 1[)$ est un espace de Hilbert
- (ii) la forme bilinéaire a est continue dans $H_0^1(]0, 1[)$ et coercive
- (iii) la forme linéaire l est continue dans $H_0^1(]0, 1[)$

Donc il existe une unique solution $u \in H_0^1(]0, 1[)$ telle que $\forall v \in H_0^1(]0, 1[) a(u, v) = l(v)$ (ie une unique solution au problème variationnelle (FV_D)).

On considère $\lambda = 1$ et $f(x) = (1 + \pi^2)\sin(\pi x)$. Soit $v \in H_0^1(]0, 1[)$ On a

$$\begin{aligned} a(\sin(\pi x), v(x)) &= \int_0^1 \pi \cos(\pi x) v'(x) dx + \int_0^1 \sin(\pi x) v(x) dx \\ &= [\sin(\pi x) v(x)]_0^1 + \int_0^1 \pi^2 \sin(\pi x) v(x) dx + \int_0^1 \sin(\pi x) v(x) dx \\ &= (1 + \pi^2) \int_0^1 \sin(\pi x) v(x) dx = l(v_x) \end{aligned}$$

On a montré que $u(x) = \sin(\pi x)$ est solution faible de (FV_D).

On définit :

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = 1/(N + 1)$ et on définit les points $x_k = kh$. On introduit les intervalles $I_k =]x_k, x_{k+1}[$ pour $k = 0, \dots, N$. On note $V_1^h = \{v_h \in C^0([0, 1]), v|_{I_k} \in \mathbb{P}_1(I_k), v_h(0) = v_h(1) = 0\}$. On définit les fonctions "chapeaux" $\phi_{h,k}$ pour $k = 1, \dots, N$. Rappelons que les fonctions $\phi_{h,k}$ forment une base de V_1^h , de sorte que la formulation variationnelle du problème discrétisé s'écrit :

$$(EF_D) \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_1^h \text{ telle que, } \forall j \in 1, \dots, N, \text{ on ait} \\ \int_0^1 (u_h'(x)\phi_{h,j}'(x) + \lambda u_h(x)\phi_{h,j}(x))dx = \int_0^1 f(x)\phi_{h,j}dx. \end{cases}$$

2. Montrons que le vecteur $\tilde{u}_h = (u_h(x_1), \dots, u_h(x_N))^T$ est solution d'un système linéaire. On a

$$a(u_h, \phi_{h,j}) = l(\phi_{h,j})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^N u(x_k) a(\phi_{h,k}, \phi_{h,j}) = l(\phi_{h,j}) \quad \text{par bilinéarité de } a.$$

$$\Leftrightarrow (A_h \tilde{u}_h)_j = (b_h)_j \quad \text{En posant } (A_h)_{j,k} = a(\phi_{h,k}, \phi_{h,j}) \text{ et } (b_h)_j = l(\phi_{h,j}).$$

Ainsi \tilde{u} est solution de $A_h \tilde{u}_h = b_h$.

On calcule $A_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 + \frac{2\lambda h^2}{3} & -1 + \frac{\lambda h^2}{6} & 0 & \dots & 0 \\ -1 + \frac{\lambda h^2}{6} & 2 + \frac{2\lambda h^2}{3} & -1 + \frac{\lambda h^2}{6} & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 + \frac{\lambda h^2}{6} & 2 + \frac{2\lambda h^2}{3} \end{pmatrix}$

Pour b_h , on calcule $l(\phi_{h,j})$ avec $f(x) = (1 + \pi^2) \sin(\pi x)$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \phi_{h,j}(x) dx &= \frac{1 + \pi^2}{h} \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(\pi x) (x - x_{j-1}) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin(\pi x) (x_{j+1} - x) dx \right) \\ &= \frac{1 + \pi^2}{h} \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(\pi x) x dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin(\pi x) x dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(\pi x) x_{j-1} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin(\pi x) x_{j+1} dx \right) \\ &= \frac{1 + \pi^2}{h} \left(- \left[\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\cos(\pi x)}{\pi} dx + \left[\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\cos(\pi x)}{\pi} dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_{j-1}}{\pi} [\cos(\pi x)]_{x_{j-1}}^{x_j} + \frac{x_{j+1}}{\pi} [\cos(\pi x)]_{x_j}^{x_{j+1}} \right) \\ &= \frac{1 + \pi^2}{h\pi} \left(\frac{1}{\pi} (2\sin(\pi x_j) - \sin(\pi x_{j-1}) - \sin(\pi x_{j+1})) \right. \\ &\quad \left. - 2x_j \cos(\pi x_j) + x_{j-1} \cos(\pi x_{j-1}) + x_{j+1} \cos(\pi x_{j+1}) + 2x_j \cos(\pi x_j) - x_{j-1} \cos(\pi x_{j-1}) - x_{j+1} \cos(\pi x_{j+1}) \right) \\ &= \frac{1 + \pi^2}{h\pi^2} (2\sin(\pi x_j) - \sin(\pi x_{j-1}) - \sin(\pi x_{j+1})) \end{aligned}$$

Ainsi $b_h = \frac{1 + \pi^2}{h\pi^2} \begin{pmatrix} 2\sin(\pi x_1) - \sin(\pi x_2) \\ 2\sin(\pi x_2) - \sin(\pi x_1) - \sin(\pi x_3) \\ \vdots \\ 2\sin(\pi x_N) - \sin(\pi x_{N-1}) \end{pmatrix}$

3. On écrit des fonctions Scilab pour calculer A_h et b_h (voir fichier : *COUSIN_Raphael_ex02_elem_fini*).

4. On représente graphiquement la solution exacte et approchée pour différentes valeurs de N :

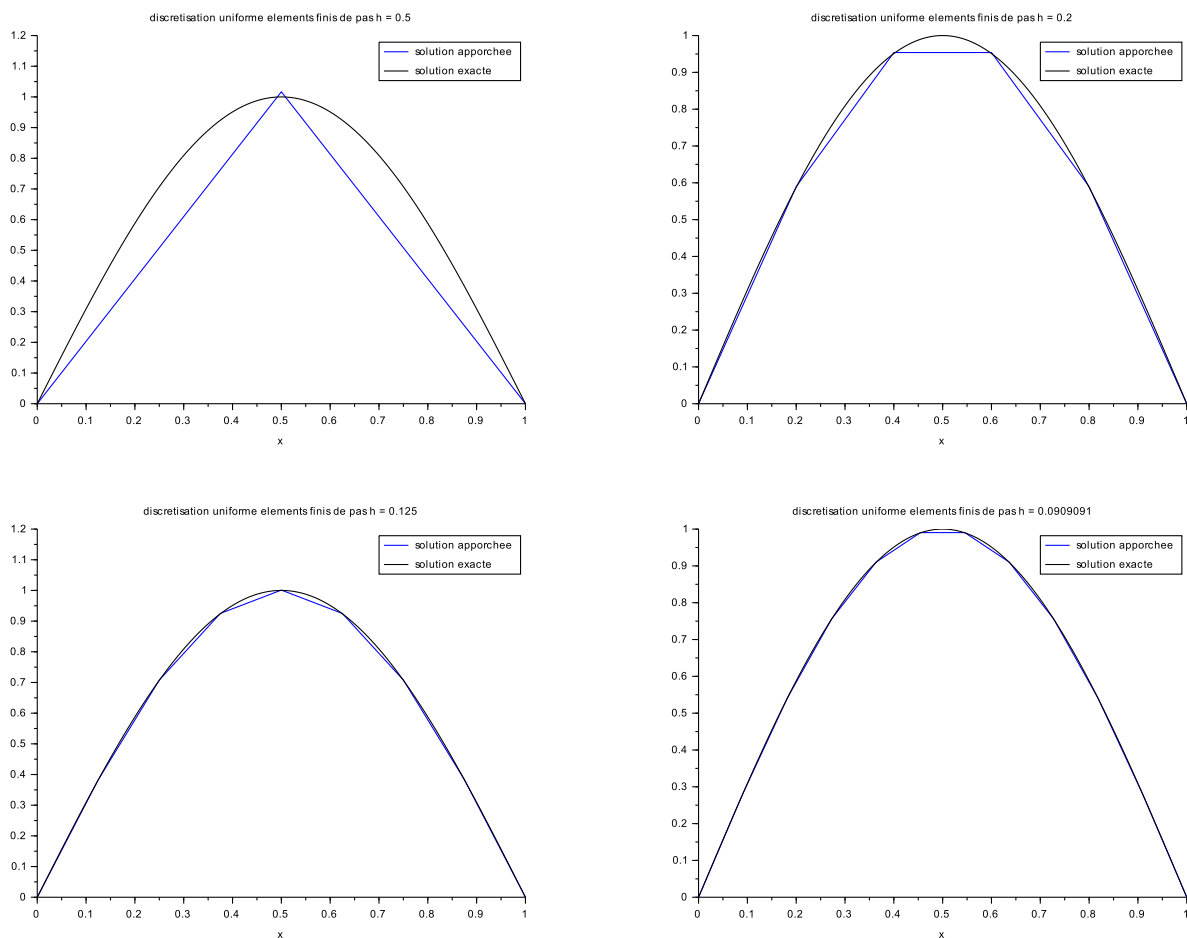


FIGURE 8 – Graphique 2 solution exacte et element fini.

5. La solution exacte est dérivable $u'(x) = \pi \cos(\pi x)$. Pour la solution approchée, on a $u_h(x) = \sum_{k=1}^N u_h(x_k) \phi_{h,k}(x)$ qui n'est pas dérivable. Il faudrait donc prendre une notion faible de la dérivée.

6. On représente les erreurs en norme $L^2(]0, 1[)$.

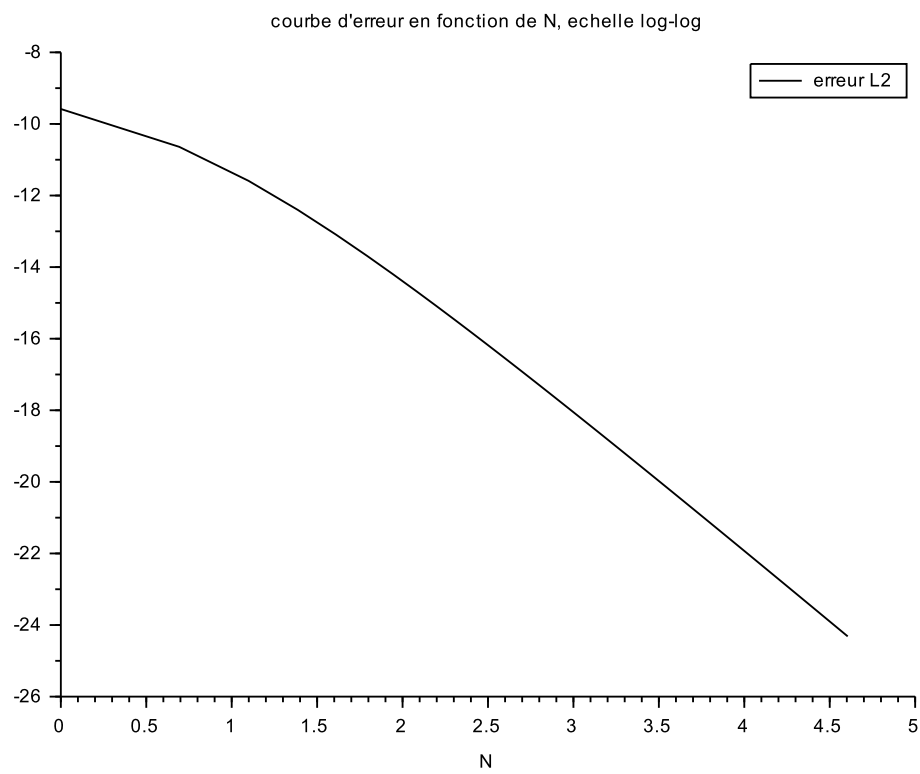


FIGURE 9 – Erreur log-log norme L^2 éléments finis.

FIGURE 10 – Graphique solution analytique et schema (6).

FIGURE 11 – Graphique solution analytique et schema (7).