

# Seminario de Tesis I : Cálculo intensivo de los ceros de las sumas parciales de la función zeta de Riemann

Víctor Racsó Galván Oyola

19 de diciembre de 2019

- 1 Introducción
- 2 Antecedentes
- 3 Conceptos preliminares
- 4 Algoritmo y resultados

# Función zeta de Riemann

## Definición

La función  $\zeta : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  está definida por la siguiente expresión:

$$\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s}$$

## Suma parcial

Definimos como suma parcial de la función zeta de Riemann con parámetro  $n$  a la siguiente expresión:

$$\zeta_n(s) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^s}$$

# Ceros de la función zeta de Riemann

## Cero no trivial

Se define como **cero no trivial** a todo elemento del conjunto:

$$\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1, \zeta(s) = 0\}$$

## Distribución de los ceros no triviales

El teorema de Hadamard y de la Vallée Poussin (1896) concluye:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$$

Donde  $\pi(x) = \{p \in \mathbb{N} : p \leq x \text{ y } p \text{ es primo}\}$ .

Esto es equivalente a que no existen ceros en la recta  $\operatorname{Re}(s) = 1$ .

# Hipótesis de Riemann

## Enunciado

La hipótesis de Riemann (HR) establece que todos los ceros no triviales de  $\zeta(s)$  están en la recta  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ .

## Consecuencias

Si la hipótesis de Riemann es verdadera, entonces:

- 1 Existe una constante  $C > 0$  tal que:

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq C\sqrt{x} \log x$$

Donde  $Li(x) = \int_2^x \ln t dt$ .

- 2 Existe una constante  $C > 0$  tal que:

$$p_{k+1} - p_k = C\sqrt{p_k} \log p_k$$

Donde  $p_k$  es el  $k$ -ésimo número primo.

## Producto de Euler

Euler relacionó la función zeta de Riemann con los números primos al probar la igualdad

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

## Ecuación funcional

Riemann demostró que la función  $\zeta$  verificaba la siguiente ecuación funcional:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

Donde  $\Gamma$  es la función gamma de Euler.

# Existencia de ceros en $\operatorname{Re}(s) > 1$

## Conclusiones a lo largo del tiempo

- La HR será cierta si, para todo  $n$  suficientemente grande, no existen ceros de  $\zeta_n(s)$  en  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . (Turán, 1948)
- Para  $1 \leq n \leq 5$ ,  $\zeta_n(s)$  no tiene ceros en  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . (Turán)
- Para  $6 \leq n \leq 9$ ,  $\zeta_n(s)$  no tiene ceros en  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . (Spira, 1966)
- Para un  $n$  fijo, si  $\zeta_n(s)$  tiene al menos un cero en  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , entonces tiene infinitos ceros en dicha región. (Spira)

Gracias a resultados de Spira (1968), Monach (1980) y Platt et Trudgian (2016) se concluye que:

## Existencia de ceros según $n$

Para  $1 \leq n \leq 18$ ,  $n = 20, 21, 28$  no hay ceros de  $\zeta_n(s)$  en  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . Para los demás enteros positivos  $n$  existen infinitos ceros en dicha región.

# Ínfimo y supremo de la parte real

Sean  $a_n = \inf\{\operatorname{Re}(s) : \zeta_n(s) = 0\}$  y  $b_n = \sup\{\operatorname{Re}(s) : \zeta_n(s) = 0\}$ .

## Montgomery

En 1983, demostró que:

$$b_n = 1 + \left( \frac{4}{\pi} - 1 + o(1) \right) \frac{\log(\log n)}{\log n}$$

## Balazard et Velásquez

En 2009, demostraron que:

$$a_n = -n \log 2 + o(n)$$



## Derivada de una función compleja

Dada una función  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  y un punto de acumulación  $z_0$ , decimos que  $f$  es diferenciable en  $z_0$  si el siguiente límite existe:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Además  $f'(z_0)$  es llamada la derivada de  $f$  en el punto  $z_0$ .

## Función analítica u holomorfa

Sea un conjunto abierto no vacío  $A \subset \mathbb{C}$ . Decimos que la función  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa o analítica si es diferenciable en todos los puntos de  $A$ .

## Arco

Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es un arco si  $\gamma$  es continuamente diferenciable excepto, tal vez, en un número finito de puntos  $t_i \in [a, b]$ , donde existen derivadas izquierda y derecha.

## Índice

Dado un arco cerrado  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $z$  no en la imagen de  $\gamma$ , definimos el índice del arco  $\gamma$  con respecto a  $z$  mediante

$$\text{ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$$

## Cero

Sea  $A \subset \mathbb{C}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , denotamos los ceros de  $f$  en  $A$  como:

$$N(f) = \{a \in A : f(a) = 0\}$$

Decimos que  $m$  es la multiplicidad de  $z_0$  si es el único entero que satisface

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), g(z_0) \neq 0, g \in H(A)$$

## Polo

Decimos que un polo  $z_0$  tiene orden  $m$  si existen  $\{c_1, c_2, \dots, c_m\} \subset \mathbb{C}$ ,  $m \geq 1$ , con  $c_m \neq 0$ , tales que:

$$f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z - z_0)^k} \text{ tiene una singularidad removible en } z_0$$

# Teorema del residuo y principio del argumento

## Teorema del residuo

Sea  $f$  una función holomorfa en  $A$  (excepto, tal vez, en sus ceros y polos) y  $B$  el conjunto de polos de  $f$ . Si  $\gamma$  es un ciclo en  $A \setminus B$  tal que  $\text{ind}_\gamma(a) = 0, \forall a \in A^c$  entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a) \text{ind}_\gamma(a)$$

## Principio del argumento

Sean una curva  $\gamma$  cerrada y simple en sentido antihorario,  $f$  holomorfa en  $\gamma$  (excepto sus ceros y polos) y  $\text{ord}(z)$  es el orden del cero o polo  $z$ :

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} = 2\pi i \text{ind}(f \circ \gamma, 0)$$

# Relación entre los ceros y la variación del argumento

Bajo las condiciones del principio del argumento, se cumple que:

$$\frac{\Delta \arg_{f \circ \gamma}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Donde  $\Delta \arg_g$  es la variación del argumento a lo largo de la función  $g$ .

## Conteo de ceros

Por el principio del argumento, si  $\partial R$  es una curva poligonal simple y recorrida en sentido antihorario, el número de ceros de  $f(s)$  en  $R$ , denotado por  $N(R)$ , es:

$$N(R) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial R} \arg f(s)$$

## Verificación de Ying et Katz

Sea  $P(s)$  una función compleja lineal,  $f(s)$  una función holomorfa sobre el intervalo  $[s_1, s_2]$  y  $R(s)$  una función definida como  $R(s) = f(s) - P(s)$ . Si

$$\min_{s \in [s_1, s_2]} |P(s)| > \max_{s \in [s_1, s_2]} R(s)$$

entonces

$$|\Delta_{[s_1, s_2]} \arg f(s)| < \pi \wedge \Delta_{[s_1, s_2]} \arg f(s) = \arg \left( \frac{f(s_2)}{f(s_1)} \right)$$

## Una cota más rápida de procesar

Sea  $f(s)$  una función holomorfa sobre el intervalo  $[s_1, s_2]$ ,  $P(s)$  y  $R(s)$  definidas por:

$$P(s) = f(s_1) + \frac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1}(s - s_1)$$

y  $R(s) = f(s) - P(s)$ . Si  $M(s_1, s_2)$  es tal que para todo  $s \in [s_1, s_2]$ ,

$$|f''(s)| \leq M(s_1, s_2)$$

entonces

$$\max_{s \in [s_1, s_2]} R(s) \leq M(s_1, s_2) \frac{|s_1 - s_2|^2}{8}$$

# Método de bisección bidimensional

Basándonos en el método de bisección unidimensional, planteamos un método de bisección bidimensional en el cual biseccionaremos la dimensión más larga de cada rectángulo (como contraparte del intervalo en una dimensión).

## Decisiones al biseccionar

- Hay 0 ceros: El rectángulo debe ser descartado.
- Hay 1 cero: El rectángulo es considerado para hallar la respuesta (Usando método de Newton). Si no se halla la respuesta, proceder como si hubiera más de 1 cero en el rectángulo.
- Hay  $q > 1$  ceros: El rectángulo debe ser reducido a 2 rectángulos de menor tamaño, esto se logrará realizando un corte sobre la dimensión más larga del mismo.



## Multihilos

Se planteó usar el paradigma de multihilos para paralelizar el cálculo debido a su ventaja de memoria compartida y la simplicidad con la que se puede lograr la implementación.

## Algoritmo

- 1 Crear una pila con el rectángulo inicial  $[1 - n, 1,74] \times [0, T]$  y otra vacía para las respuestas.
- 2 Para cada hilo: Intentar extraer un elemento de la pila y procesarlo según el método de bisección propuesto.
- 3 Modificar las pilas correspondientes y volver al paso 2.

# Ceros modulares de $\zeta_3$ - I

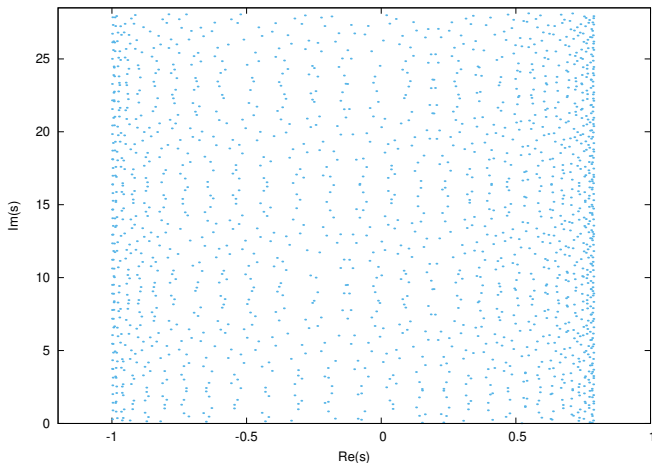


Figura: 1748 ceros de  $\zeta_3(s)$  en  $-2 < \text{Re} < 1,74$  y  $0 < \text{Im} < 10^4$  módulo  $\frac{2\pi}{\log 5/4}i$

# Ceros modulares de $\zeta_3$ - II

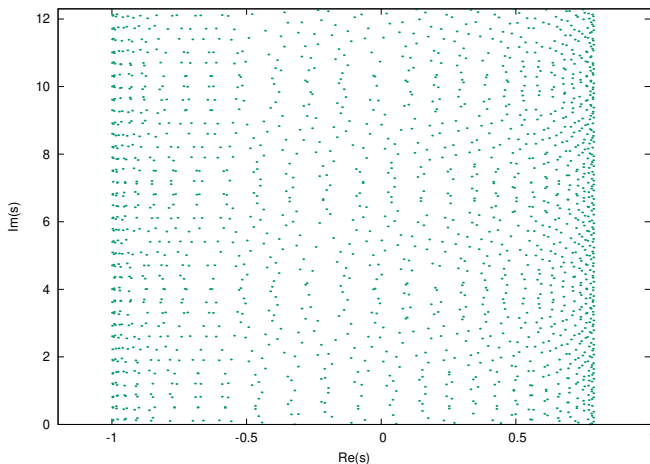


Figura: 1748 ceros de  $\zeta_3(s)$  en  $-2 < Re < 1,74$  y  $0 < Im < 10^4$  módulo  $\frac{2\pi}{\log 5/3}i$

# Ceros modulares de $\zeta_3$ - III

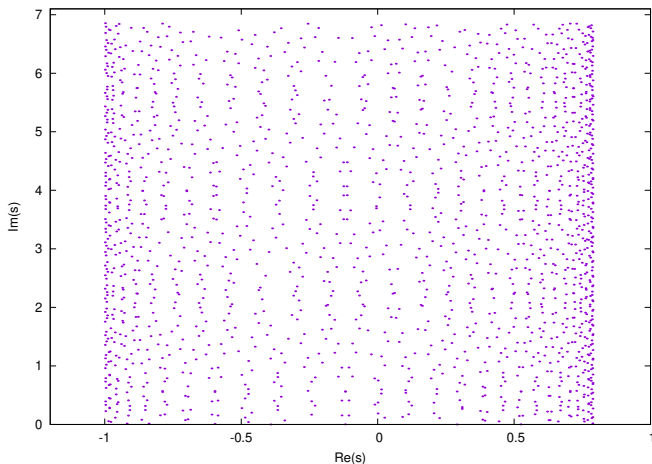


Figura: 1748 ceros de  $\zeta_3(s)$  en  $-2 < \text{Re} < 1,74$  y  $0 < \text{Im} < 10^4$  módulo  $\frac{2\pi}{\log 5/2}i$

# Ceros modulares de $\zeta_3$ - IV

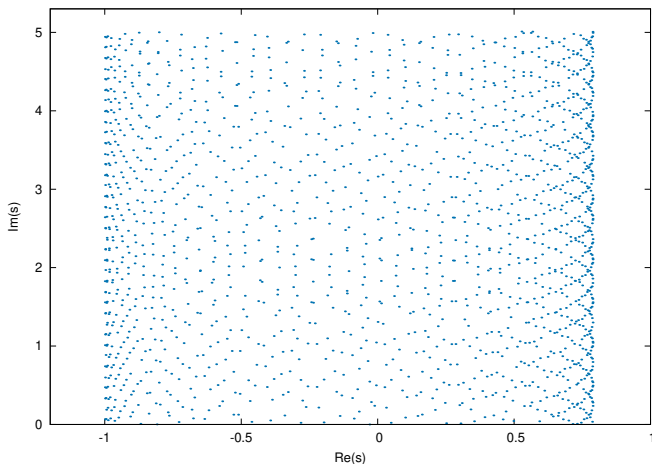


Figura: 1748 ceros de  $\zeta_3(s)$  en  $-2 < \text{Re} < 1,74$  y  $0 < \text{Im} < 10^4$  módulo  $\frac{2\pi}{\log 7/2}i$

# Ceros modulares de $\zeta_3$ - V

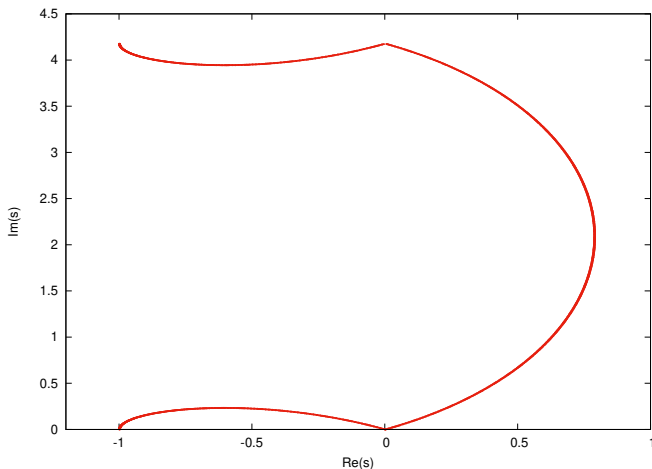


Figura: 1748 ceros de  $\zeta_3(s)$  en  $-2 < \text{Re} < 1,74$  y  $0 < \text{Im} < 10^4$  módulo  $\frac{2\pi}{\log 9/2}i$

# Ceros modulares de $\zeta_3$ - VI

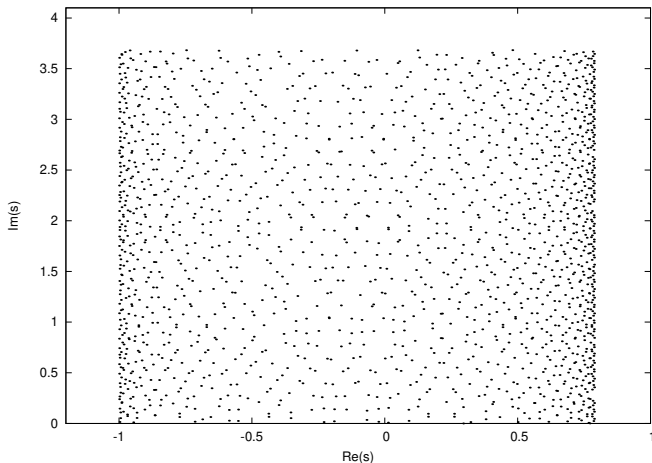


Figura: 1748 ceros de  $\zeta_3(s)$  en  $-2 < \text{Re} < 1,74$  y  $0 < \text{Im} < 10^4$  módulo  $\frac{2\pi}{\log 11/2}i$

# Ceros de $\zeta_4$

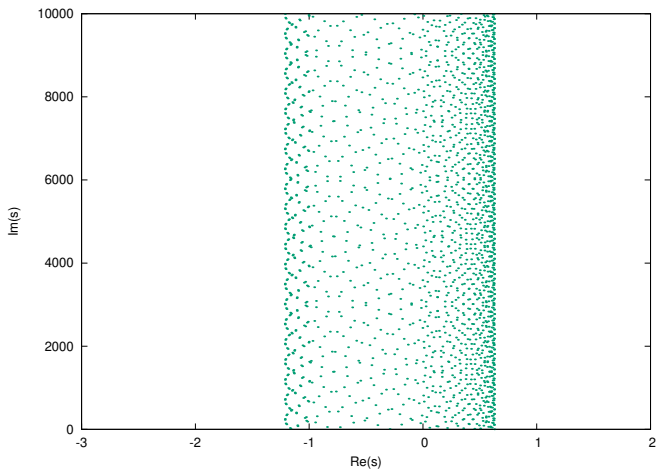


Figura: 2206 ceros de  $\zeta_4(s)$  en  $-3 < \text{Re} < 1,74$  y  $0 < \text{Im} < 10^4$



# Ceros de $\zeta_5$

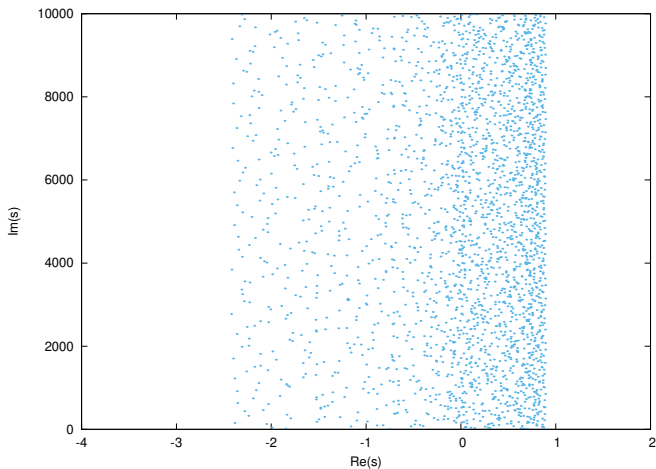


Figura: 2561 ceros de  $\zeta_5(s)$  en  $-4 < \text{Re} < 1,74$  y  $0 < \text{Im} < 10^4$

# Ceros de $\zeta_6$

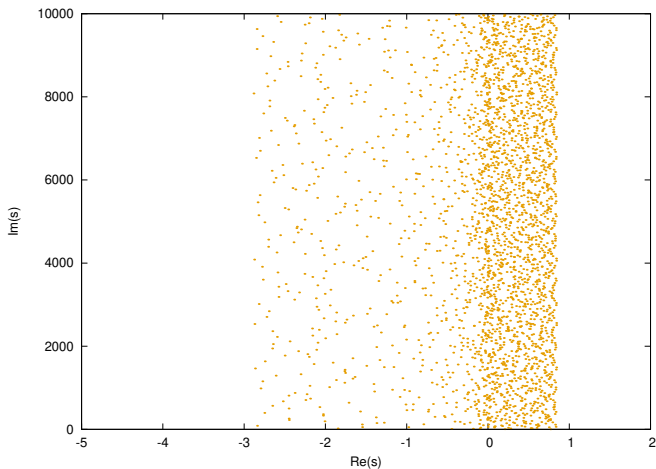


Figura: 2851 ceros de  $\zeta_6(s)$  en  $-5 < \text{Re} < 1,74$  y  $0 < \text{Im} < 10^4$

# Ceros de $\zeta_7$

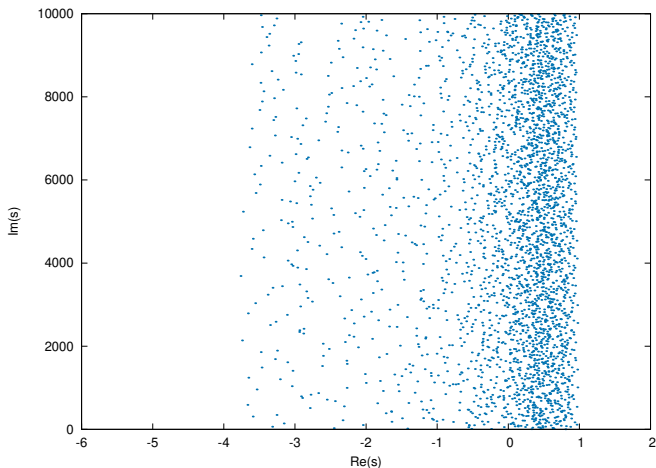


Figura: 3096 ceros de  $\zeta_7(s)$  en  $-6 < \text{Re} < 1,74$  y  $0 < \text{Im} < 10^4$

# Ceros de $\zeta_8$

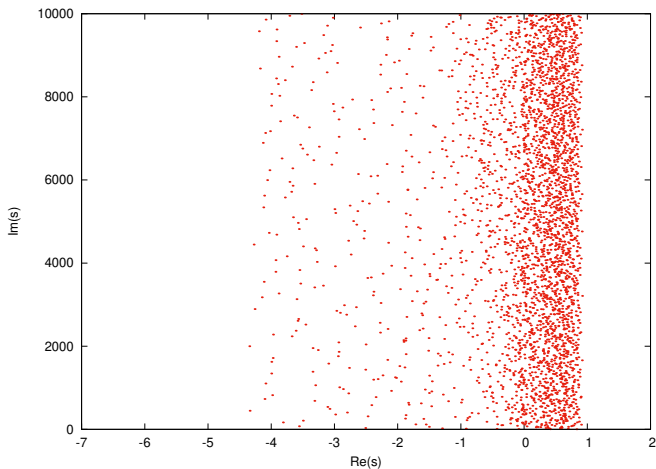


Figura: 3309 ceros de  $\zeta_8(s)$  en  $-7 < \text{Re} < 1,74$  y  $0 < \text{Im} < 10^4$

# Ceros de $\zeta_9$

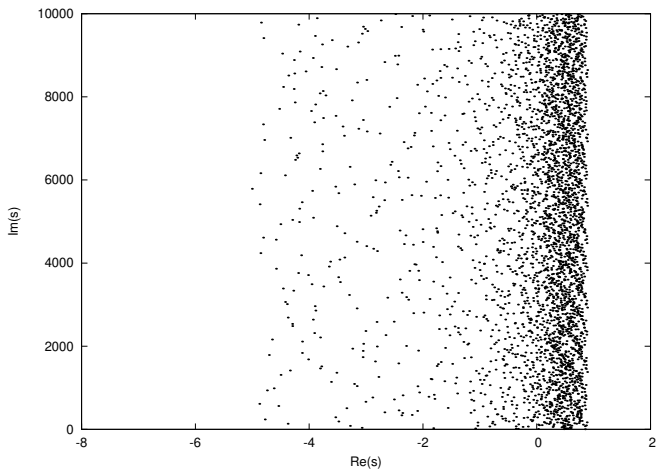


Figura: 3496 ceros de  $\zeta_9(s)$  en  $-8 < \text{Re} < 1,74$  y  $0 < \text{Im} < 10^4$

- Todas las imágenes mostradas fueron generadas con gnuplot usando los resultados obtenidos por el algoritmo propuesto.
- Las referencias teóricas están basadas en las mismas del informe presentado sobre este seminario de tesis.