Elevación de Grado de una Curva de Bézier

Víctor Racsó Galván Oyola

30 de noviembre de 2020

Índice

Curva de Bézier

Polinomio de Bernstein

Un polinomio de Bernstein se define en base a 2 parámetros n y k tales que $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$. Está definido mediante la siguiente expresión:

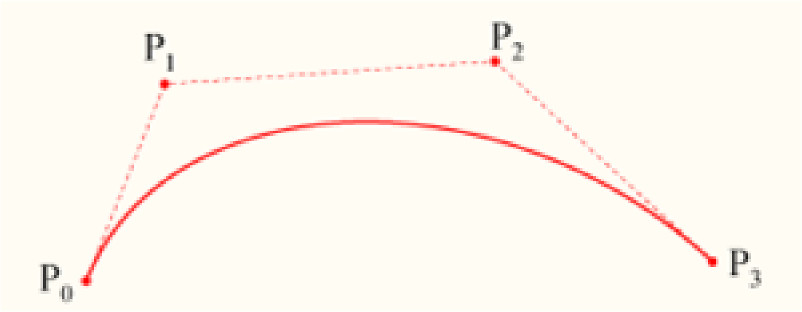
$$b_{i,n} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, t \in [0,1]$$

Definición

Una curva de Bézier está definida en base a un conjunto de $n+1$ puntos $P_0, P_1, \ldots, P_n$ llamados **puntos de control**, con los cuales se forma un polinomio combinándolos con los $b_{i,n}$, donde $b_{i,n}$ es un polinomio de Bernstein.

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i b_{i,n}, t \in [0,1]$$

Ejemplo de una Curva de Bézier



La curva siempre pasa por los puntos de control extremos pero no necesariamente por los intermedios

Elevación de grado

Introducción

Algunas aplicaciones que usan curvas de Bézier requieren que sus polinomios sean del mismo grado, lo cual implica que es necesaria alguna forma de elevar el grado de una curva **sin modificar su forma**, pues si hubiera alguna modificación geométrica perdería todo el sentido.

Problemática

La pregunta es: ¿Cómo logramos aumentar el grado sin modificar la forma?

Observación - Forma incremental

Podemos plantear la elevación de grado en 1 y aplicarla repetidamente hasta obtener el grado deseado.

Solución

Construcción de los nuevos puntos

Ya que si tenemos inicialmente $n+1$ puntos, necesitaremos $n+2$ puntos para construir una curva de grado $n+1$, deberíamos considerar el definir dicho conjunto nuevo para resolver el problema.

Forma del nuevo conjunto de puntos

Sea Q_i el i-ésimo punto del nuevo conjunto, entonces se puede definir:

$$Q_0 = P_0$$

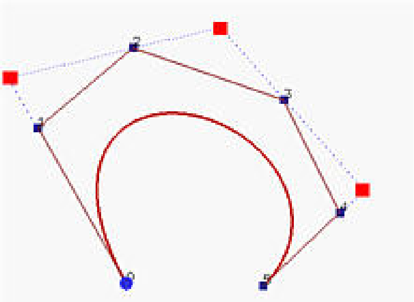
$$Q_{n+1} = P_n$$

$$Q_i = \left(\frac{i}{n+1}\right) P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, 1 \leq i \leq n$$

Análisis geométrico

Observación

Cada punto nuevo intermedio está en el segmento $P_{i-1}P_i$, cortándolo con un radio de $\frac{i}{n+1} : 1 - \frac{i}{n+1}$.
El procedimiento corta cada esquina de la cadena poligonal de manera ponderada.



Ejemplo pequeño

Las siguientes son imágenes de aplicar el procedimiento múltiples veces mientras mantenemos la forma.