Obrada informacija
Jesenski ispitni rok – 31. kolovoza 2021.

1. **(16 bodova)** U ovom zadatku promatramo signale koje je moguće prikazati kao zbroj kosinusa različitih frekvencija.

a) **(6 bodova)** Zadan je vremenski kontinuirani signal $x(t) = 20 + 16\cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right) + 12\cos\left(\frac{2\pi}{12}3t\right)$. Odredite vremenski kontinuiran Fourierov red X_k zadanog signala $x(t)$. Nacrtajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku $|X_k|$.

b) **(6 bodova)** Zadan je vremenski diskretan signal $x(n) = 20 + 16\cos\left(\frac{2\pi}{12}n\right) + 12\cos\left(\frac{2\pi}{12}3n\right)$ za $n = 0, \ldots, 11$. Odredite diskretnu Fourierovovu transformaciju DFT $X(k)$ zadanog signala $x(n)$ uz $N = 12$. Nacrtajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku $\left|X(k)\right|$.

c) **(4 boda)** Navedite izraz za Fourierovu transformaciju na vremenskom otvoru (STFT) i objasnite korištene oznake.

2. **(16 bodova)** Potrebno je izračunati poravnanje nizova koristeći korelaciju signala. Zadani su nizovi S_1 = "CCACTA" i S_2 = "ACCA".

a) **(6 bodova)** Pomoću **globalnog** poravnanja izračunajte sličnost nizova S_1 i S_2, s tim da podudaranje znakova povećava sličnost za **dva**, različiti znakovi smanjuju sličnost za **jedan**, dok umetanja i brisanja smanjuju sličnost za **dva**. Iz tablice dinamičkog programiranja odredite i ispišite poravnanje.

b) **(6 bodova)** Nizove S_1 i S_2 pretvorite u signal, pri čemu vrijednosti dodijelite nukleotidima poštujući sljedeća pravila:

- Niti jedan nukleotid nema vrijednost nula, dva nukleotida imaju pozitivne vrijednosti, dok dva nukleotida imaju negativne vrijednosti.

- Nukleotide dijelimo u purine (A i G) i pirimidine (C i T). Nukleotidi unutar svake od skupina su međusobno sličniji nego nuklotidi iz različitih skupina.

Izračunajte korelaciju tako dobivenih signala (ručno, **bez DFT**). Na temelju izračunate korelacije odredite najbolje poravnanje nizova S_1 i S_2, obrazložite svoje rješenje.

c) **(4 boda)** Koja je vremenska složenost računanja korelacije ručno i pomoću DFT? Obrazložite svoj odgovor!

3. **(18 bodova)** Skriveni Markovljev model ima tri skrivena stanja (1, 2 i 3), a u svakom stanju moguće su dvije izlazne opservacije (A ili B). Vjerojatnost osmatranja simbola A u stanjima 1, 2 i 3 iznosi 1/2, 1/3 i 1/4, dok su vjerojatnosti osmatranja simbola B komplementarne. Model iz stanja 1 ne može direktno prijeći u stanje 3, iz stanja 2 ne može prijeći u stanje 1, dok iz stanja 3 ne može prijeći u stanje 2. Vjerojatnosti svih ostalih promjena (ili zadržavanja) stanja su jednake i iznose 1/2. Početna vjerojatnost sva tri skrivena stanja je jednaka 1/3.

a) **(4 boda)** Formalno opišite model L pomoću matrica A, B i Π.

b) **(8 bodova)** Pomoću algoritma „Unaprijed" izračunajte unaprijedne vjerojatnosti $\alpha_t(1)$, $\alpha_t(2)$ i $\alpha_t(3)$ za prva dva trenutka osmatranja $t = 1$ i $t = 2$ za niz osmatranja $O = (o1, o2) = (A, B)$ za zadani model L.

c) **(4 boda)** Temeljem rezultata algoritma „Unaprijed" odredite kolika je izvjesnost osmatranja cijelog osmotrenog niza $O = (A, B)$ uz zadani model L, $P(O|L) = P\big((o1, o2)|L\big)$?

d) **(2 boda)** Koliko iznosi izvjesnost osmatranja samo prvog izlaznog simbola $P\big((o1)|L\big)$?

Okrenite!

4. **(16 bodova)** U ovom zadatku razmatramo ICP algoritam. Zadana su dva oblaka 2D točaka od po četiri točke svaki:

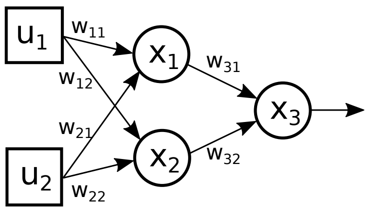
$$\mathcal{X} = \{x_1 = (\sqrt{2}, 0), x_2 = (2\sqrt{2}, 0), x_3 = (3\sqrt{2}, 0), x_4 = (4\sqrt{2}, 0)\} \quad \text{i} \quad \mathcal{Y} = \{y_1 = (1,1), y_2 = (2,2), y_3 = (3,3), y_4 = (4,4)\}.$$

a) **(8 bodova)** Odredite korespondentnu točku iz oblaka $\mathcal{Y}$ za svaku od točaka $x_i \in \mathcal{X}$. Zatim odredite korespondentnu točku iz oblaka $\mathcal{X}$ za svaku od točaka $y_i \in \mathcal{Y}$. Jesu li dobiveni isti parovi? Vrijedi li to uvijek? Objasnite!

b) **(4 boda)** Ako je z koordinata svih točaka 0 onda kvaternion $q = \big(\cos(\pi/8), 0, 0, \sin(\pi/8)\big)$ opisuje rotaciju koja poklapa oblak $\mathcal{X}$ s oblakom $\mathcal{Y}$. Iz zadanog kvaterniona odredite os i kut rotacije.

c) **(4 boda)** Navedite funkciju cilja (pogreške) koju minimiziramo ICP algoritmom i objasnite što su njeni članovi. Konvergira li ICP algoritam u lokalni ili u globalni minimum funkcije cilja? Objasnite!

5. **(18 bodova)** Razmatramo treniranje višeslojne mreže povratnom propagacijom pogreške (eng. error backpropagation). Mreža prikazana slikom ima dva sloja te zadane vrijednosti težina w. Sve aktivacijske funkcije u mreži su ReLU. Na ulazu mreže nalaze se dva ulazna uzorka $[u_1, u_2] = [2, -\frac{1}{4}]$ i $[u_1, u_2] = [0, -\frac{1}{2}]$ čije su željene vrijednost na izlazu $d_3 = [1, -1]$.



$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{ReLU}(x) = \max(0, x)$$

a) **(5 bodova)** Odredite vrijednosti nakon aktivacijskih funkcija za sva tri elementa mreže $[x_1, x_2, x_3]$ za oba ulazna uzorka.

b) **(8 bodova)** Odredite parcijalnu derivaciju prosječne kvadratne pogreške (kvadratna pogreška je $e = (x_3 - d_3)^2$) za svaku težinu $w_{m,n}$ u mreži.

c) **(5 bodova)** Odredite nove vrijednosti težina ako je koeficijent učenja $\eta = 0.1$. Koristite prosječnu grešku svih podatkovnih primjera kao grešku za računanje gradijenata.

Napomena: Sve brojčane vrijednosti zaokružite na dvije decimale.

6. **(16 bodova)** Zadana je kovarijacijska matrica:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

slučajnog vektora $X' = [X_1, X_2]$.

a) **(6 bodova)** Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore kovarijacijske matrice Σ.

b) **(5 bodova)** Odredite glavne komponente Y_1 i Y_2.

c) **(5 bodova)** Provjerite svojstvo dekompozicije varijance.