Obrada informacija

Ljetni ispitni rok – 6. srpnja 2021.

1. (16 bodova) U ovom zadatku promatramo signale koje je moguće prikazati kao zbroj kosinusa različitih frekvencija.

a) **(6 bodova)** Zadan je vremenski kontinuirani signal $x(t) = 12 + 14\cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right) + 16\cos\left(\frac{2\pi}{12}4t\right)$. Odredite vremenski kontinuiran Fourierov red X_k zadanog signala $x(t)$. Nacrtajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku $|X_k|$.

b) **(6 bodova)** Zadan je vremenski diskretan signal $x(n) = 12 + 14\cos\left(\frac{2\pi}{12}n\right) + 16\cos\left(\frac{2\pi}{12}4n\right)$ za $n = 0, \dots, 11$. Odredite diskretnu Fourierovovu transformaciju $\mathrm{DFT}_N\left[X(k)\right]$ zadanog signala $x(n)$ uz $N = 12$. Nacrtajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku $\left|X(k)\right|$.

c) **(4 boda)** Navedite izraz za kontinuiranu valićnu transformaciju CWT i objasnite korištene oznake. Objasnite što se događa s amplitudom i brojem valića kada mijenjamo skalu.

2. (16 bodova) U ovom zadatku razmatramo računanje poravnanja nizova koristeći korelaciju signala. Zadani su nizovi S_1 = "CCACTA" i S_2 = "ACCA".

a) **(6 bodova)** Pomoću **polu-globalnog** poravnanja izračunajte sličnost nizova S_1 i S_2, s tim da podudaranje znakova povećava sličnost za **jedan**, različiti znakovi smanjuju sličnost za **jedan**, dok umetanja i brisanja smanjuju sličnost za **dva**. Iz tablice dinamičkog programiranja očitajte i ispišite poravnanje.

b) **(6 bodova)** Nizove S_1 i S_2 pretvorite u signal, pri čemu vrijednosti dodijelite nuklotidima poštujući sljedeća pravila:

- Niti jedan nukleotid nema vrijednost nula, dva nuklotida imaju pozitivne vrijednosti, dok dva nukleotida imaju negativne vrijednosti.

- Nukleotide dijelimo u purine (A i G) i pirimidine (C i T). Nukleotidi unutar svake od skupina su međusobno sličniji nego nuklotidi iz različitih skupina.

Izračunajte korelaciju tako dobivenih signala (ručno, **bez DFT**). Na temelju izračunate korelacije odredite najbolje poravnanje nizova S_1 i S_2, obrazložite svoje rješenje.

c) **(4 boda)** Objasnite što govori teorem o korelaciji.

3. (16 bodova) U ovom zadatku razmatramo ICP algoritam. Zadana su dva oblaka 2D točaka od po četiri točke svaki:

$$\mathcal{X} = \{x_1 = (0,2), x_2 = (1,3), x_3 = (2,2), x_4 = (1,0)\} \quad \text{i} \quad \mathcal{Y} = \{y_1 = (1,1), y_2 = (2,2), y_3 = (4,1), y_4 = (2,0)\}.$$

a) **(6 bodova)** Odredite korespondentnu točku iz oblaka $\mathcal{Y}$ za svaku od točaka $x_i \in \mathcal{X}$. Hoćemo li dobiti iste parove korespondentnih točaka ako zamijenimo oblake? Objasnite!

b) **(6 bodova)** Skicirajte oba oblaka točaka. Iz skice odredite za koji kut je potrebno zarotirati oblak $\mathcal{X}$ kako bi ga poravnali s oblakom $\mathcal{Y}$. Ako je z koordinata svih točaka 0 odredite kvaternion koji opisuje 3D rotaciju oko z-osi za kut kojeg ste odredili u prvom dijelu podzadatka.

c) **(4 boda)** Postoje li oblaci/podaci koje nije moguće registrirati ICP algoritmom? Ako ne postoje objasnite zašto ne postoje, a ako postoje navedite barem jedan primjer!

4. (18 bodova) Zadana je kovarijacijska matrica:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$$

slučajnog vektora $X^T = \left[X_1, X_2\right]$.

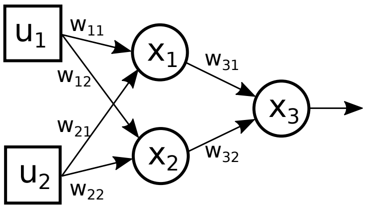
a) **(6 bodova)** Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore kovarijacijske matrice Σ.

b) **(6 bodova)** Odredite glavne komponente Y_1 i Y_2.

c) **(6 bodova)** Provjerite svojstvo dekompozicije varijance.

Okrenite!

5. **(16 bodova)** Razmatramo treniranje višeslojne mreže povratnom propagacijom pogreške (eng. error backpropagation). Mreža prikazana slikom ima dva sloja te zadane vrijednosti težina w. Sve aktivacijske funkcije u mreži su ReLU. Na ulazu mreže nalaze se dva ulazna uzorka $[u_1, u_2] = [4, \frac{-1}{2}]$ i $[u_1, u_2] = [0, \frac{1}{2}]$ čije su željene vrijednost na izlazu $d_3 = [0, 1]$.



$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \text{ReLU}(x) = \max(0, x)$$

a) **(6 bodova)** Odredite vrijednosti nakon aktivacijskih funkcija za sva tri elementa mreže $[x_1, x_2, x_3]$ za oba ulazna uzorka.

b) **(6 bodova)** Odredite parcijalnu derivaciju kvadratne pogreške ($e = (x_3 - d_3)^2$) za svaku težinu $w_{m,n}$ u mreži.

c) **(4 boda)** Odredite nove vrijednosti težina ako je koeficijent učenja $\eta = 1$. Koristite prosječnu vrijednost greške svih podatkovnih primjera kao grešku za računanje gradijenata.

Napomena: Sve brojčane vrijednosti zaokružite na dvije decimale.

6. **(18 bodova)** Dva streličara gađaju kružnu metu koja ima i središnje kružno polje. Pogodak u metu, ali izvan središnjeg polja donosi jedan bod; pogodak u središnje polje donosi dva boda, dok se u slučaju promašaja mete ne ostvaruju bodovi. Promatrač vidi metu i ostvarene pogotke, ali mu je nepoznato koji od dva streličara gađa metu, jer su mu oni skriveni. Odabir streličara provodi se slučajnim izvlačenjem kuglice iz jedne od dvije posude u kojima se nalaze crne i bijele kuglice. U prvoj posudi su dvije bijele kuglice i osam crnih, dok su u drugoj posudi šest bijelih i četiri crne. U slučaju da je iz bilo koje od posuda izvučena bijela loptica, metu će gađati iskusniji streličar, koji prosječno od 10 gađanja, u četiri slučaja pogađa središnje polje, u pet slučaja pogađa vanjsko polje, dok u jednom slučaju potpuno promašuje metu. U slučaju izvlačenja crne loptice, drugi manje iskusni streličar gađa metu, koji od 10 gađanja samo jednom pogađa središnje polje, 3 puta pogađa vanjsko polje, a 6 puta promašuje metu. Loptica se izvlači iz prve posude ako je u prethodnom izvlačenju izvučena crna loptica, a iz druge posude ako je u prethodnom izvlačenju izvučena bijela loptica. Nakon svakog slučajnog izvlačenja loptice iz definirane posude i odabira strijelca (ovisno o boji), ona se vraća nazad u istu posudu iz koje je izvučena kako bi udjeli loptica ostali sačuvani. Prije prvog izvlačenja (i to samo prvog), odabir posude iz koje se izvlači loptica provodi se bacanjem nepristrane kovanice, čime se definira početno stanje modela $q0$ u trenutku $t = 0$. Tek nakon vađenja prve loptice (bijele ili crne) iz odabrane posude, odabrani streličar gađa metu čime dobivamo prvu opservaciju u trenutku $t = 1$, a model prelazi u novo stanje $q1$ ovisno o boji izvučene loptice, čime se ujedno odabire posuda za naredno izvlačenje. Ovaj stohastički eksperiment opišite formalno pomoću skrivenog Markovljevog modela $L = (A, B, P)$. Skrivena stanja modela qt neka budu indeksi posude iz koje se vadi loptica (prva ili druga) u trenutcima $t = 0, 1, 2$ na dalje, a opservacije neka budu bodovi za pogotke u metu označeni kao 2 (središnje), 1 (vanjsko) ili 0 (promašaj) u trenutcima $t = 1, 2$ na dalje.

a) **(4 boda)** Odredite matricu vjerojatnosti prijelaza A i stupac P s inicijalnim vjerojatnostima stanja, te matricu B koja definira vjerojatnost pojedine opservacije s obzirom na stanje modela.

b) **(9 bodova)** Provedena su tri gađanja u nizu od nepoznatih strijelaca, a osmotreni su ovi simboli (pogodci mete) $O = (o1, o2, o3) = (2, 0, 1)$. Potrebno je izračunati izvjesnost ovog niza osmatranja O uz zadane parametre modela L koristeći algoritam „Unaprijed“. To ćete napraviti izračunavanjem unaprijedne vjerojatnosti $alpha_t(1)$ i $alpha_t(2)$ za početno stanje modela u $t = 0$ i za sve trenutke osmatranja $t = 1$, $t = 2$ i $t = 3$ za zadani niz osmatranja O i za zadani model L. Dobivene vjerojatnosti označite na dijagramu stanja, te napišite pripadajuće izraze koje ste koristili za izračun ovih vjerojatnosti i ukupne izvjesnosti zadanog osmatranja.

c) **(5 bodova)** Primijeni Viterbi algoritam i odredi optimalni niz skrivenih stanja modela $Qv = \{qv0, qv1, qv2 \text{ i } qv3\}$ za isti niz opservacija O iz podzadatka b). Na novom prikazu dijagrama stanja označi nove vjerojatnosti svih čvorova $v_t(1)$ i $v_t(2)$, za $t = 0$ do 3, koje se ostvaruju samo za put najveće vjerojatnosti, te objasni način kako si odredio optimalni niz stanja.