Obrada informacija

Zimski ispitni rok – 9. veljače 2021.

1. **(15 bodova)** U ovom zadatku promatramo signale koje je moguće prikazati kao zbroj kosinusa različitih frekvencija.

a) **(5 bodova)** Zadan je vremenski kontinuirani signal $x(t) = 10 + 12\cos(\frac{2\pi}{12}t) + 16\cos(\frac{2\pi}{12}3t)$. Odredite vremenski kontinuiran Fourierov red X_k zadanog signala $x(t)$. Nacrtajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku $|X_k|$.

b) **(5 bodova)** Zadan je vremenski diskretan signal $x(n) = 10 + 12\cos(\frac{2\pi}{12}n) + 16\cos(\frac{2\pi}{12}3n)$ za $n = 0, \ldots, 11$. Odredite diskretnu Fourierovovu transformaciju DFT $X(k)$ zadanog signala $x(n)$ uz $N = 12$. Nacrtajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku $|X(k)|$.

c) **(5 bodova)** Navedite izraz za kontinuiranu valićnu transformaciju CWT i objasnite korištene oznake. Navedite dva primjera valića (skicirajte ih i navedite ime).

2. **(17 bodova)** U ovom zadatku razmatramo računanje poravnanja nizova koristeći korelaciju signala. Zadani su nizovi $S_1 =$ "AACGCTA" i $S_2 =$ "CAC".

a) **(6 bodova)** Pomoću globalnog poravnanja izračunajte udaljenost uređivanja nizova S_1 i S_2, s tim da podudaranje znakova ne utječe na udaljenost, različiti znakovi povećavaju udaljenost za **jedan**, dok umetanja i brisanja povećavaju udaljenost za **dva**. Iz tablice dinamičkog programiranja očitajte i ispišite poravnanje.

b) **(5 bodova)** Definirajte što je korelacija signala i objasnite kako se može izračunati pomoću diskretne Fourierove transformacije. Objasnite kako možemo iskoristiti korelaciju da bismo odredili poravnanje dvaju nizova odnosno, u ovom konkretnom primjeru, kako možemo odrediti dio niza S_1 koji je najsličniji nizu S_2.

c) **(6 bodova)** Nizove S_1 i S_2 pretvorite u signal, pri tome koristite vrijednosti A $= -2$, G $= -1$, C $= 1$ i T $= 2$. Izračunajte korelaciju tako dobivenih signala (ručno, **bez DFT**). Na temelju izračunate korelacije odredite najbolje poravnanje nizova S_1 i S_2, obrazložite svoje rješenje.

3. **(20 bodova)** Opiši slučajni pokus HMM modelom. Pokus se provodi bacanjem dva pristrana novčića od kojih novčić A u $\frac{1}{3}$ slučaja pada na stranu pisma (P), a u $\frac{2}{3}$ slučaja pada na stranu glave (G), dok novčić B u $\frac{3}{4}$ slučaja pada na pismo, a u $\frac{1}{4}$ slučaja pada na glavu. Odluka o odabiru novčića koji se baca (A ili B) nije vidljiva promatraču, a jedino što on vidi je ishod bacanja (P ili G). Eksperimentator odluku o odabiru novčića kojeg će bacati, prije svakog bacanja donosi bacanjem trećeg pristranog novčića C, koji u $\frac{1}{5}$ bacanja pada na pismo, a u $\frac{4}{5}$ slučaja pada na glavu. Ako na novčiću C padne pismo, bira i baca novčić A, a ako na novčiću C padne glava, bira i baca novčić B. Ishod bacanja ovog pomoćnog novčića C promatraču nije vidljiv. Odluka za prvo bacanje u cijelom nizu ostvaruje se na identičan način pomoću novčića C.

a) **(4 boda)** Za opisani eksperiment definiraj HMM model L, tj. definiraj matricu izlaznih vjerojatnosti B, kao i matricu prijelaznih vjerojatnosti A, odnosno stupac početne vjerojatnosti svakog stanja modela.

b) **(5 bodova)** Osmotren je niz duljine $T = 3$ simbola koji je generiran ovim modelom: $O = [o_1\ o_2\ o_3] = [\mathrm{P\ P\ G}]$. Potrebno je odrediti unaprijedne vjerojatnosti $\alpha_t(1)$ i $\alpha_t(2)$ za sve trenutke osmatranja $t = 1$, $t = 2$ i $t = T = 3$.

c) **(2 boda)** Za istu opservaciju O, temeljem određenih unaprijednih vjerojatnosti odredi izvjesnost osmatranja cijelog niza O za zadani model L: $P(O|L)$

d) **(2 boda)** Koliko iznose izvjesnosti osmatranja skraćenih nizova $[o_1]$, odnosno $[o_1\ o_2]$?

e) **(4 boda)** Umjesto algoritma unaprijed, za istu opservaciju O i isti model L izračunaj vjerojatnosti svih čvorova Viterbi algoritmom.

f) **(3 boda)** Koja su najizvjesnija stanja modela za ovu opservaciju za svaki vremenski trenutak?

Okrenite!

4. **(15 bodova)** U ovom zadatku razmatramo ICP algoritam. Zadana su dva oblaka 2D točaka od po tri točke svaki:

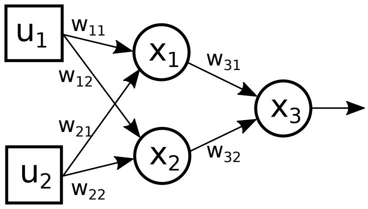
$$\mathcal{X} = \{x_1 = (1,1), x_2 = (1,2), x_3 = (1,3)\} \quad \text{i} \quad \mathcal{Y} = \{y_1 = (3,1), y_2 = (4,1), y_3 = (5,1)\}.$$

a) **(5 bodova)** Odredite korespondentnu točku iz oblaka $\mathcal{Y}$ za svaku od točaka $x_i \in \mathcal{X}$. Hoćemo li dobiti iste parove korespondentnih točaka ako zamijenimo oblake? Objasnite!

b) **(5 bodova)** Oblak $\mathcal{X}$ očito moramo rotirati za 90° da bi ga preklopili s oblakom $\mathcal{Y}$. Odredite kvaternion koji opisuje 3D rotaciju oko z-osi za 90° u smjeru kazaljke na satu koja nam treba da poravnamo $\mathcal{X}$ sa $\mathcal{Y}$. Neka je z koordinata svih točaka 0.

c) **(5 bodova)** Navedite funkciju cilja (pogreške) koju minimiziramo ICP algoritmom i objasnite što su njeni članovi. Konvergira li ICP algoritam u lokalni ili u globalni minimum funkcije cilja? Objasnite!

5. **(18 bodova)** Razmatramo treniranje višeslojne mreže povratnom propagacijom pogreške (eng. error backpropagation). Mreža prikazana slikom ima dva sloja te zadane vrijednosti težina w. Sve aktivacijske funkcije u mreži su hiperbolni tangens: $x_{out} = \tanh(\sum w_{out,in} x_{in})$. Na ulazu mreže nalazi se jedan ulazni uzorak $[u_1, u_2] = [1, 2]$ čija je željena vrijednost na izlazu $d_3 = 0.2616$.



$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

a) **(5 bodova)** Odredite vrijednosti nakon aktivacijskih funkcija za sva tri elementa mreže $[x_1, x_2, x_3]$.

b) **(9 bodova)** Odredite parcijalnu derivaciju kvadratne pogreške ($e = (x_3 - d_3)^2$) za svaku težinu $w_{m,n}$ u mreži.

c) **(4 boda)** Odredite nove vrijednosti težina ako je koeficijent učenja $\eta = 1$.

Napomena: Sve brojčane vrijednosti zaokružite na dvije decimale.

6. **(15 bodova)** Zadana je kovarijacijska matrica

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

slučajnog vektora $X' = [X_1, X_2]$.

a) **(5 bodova)** Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore kovarijacijske matrice Σ.

b) **(5 bodova)** Odredite glavne komponente Y_1 i Y_2.

c) **(5 bodova)** Provjerite svojstvo dekompozicije varijance.