Izvještaj: Laboratorijska vježba za skrivene Markovljeve modele

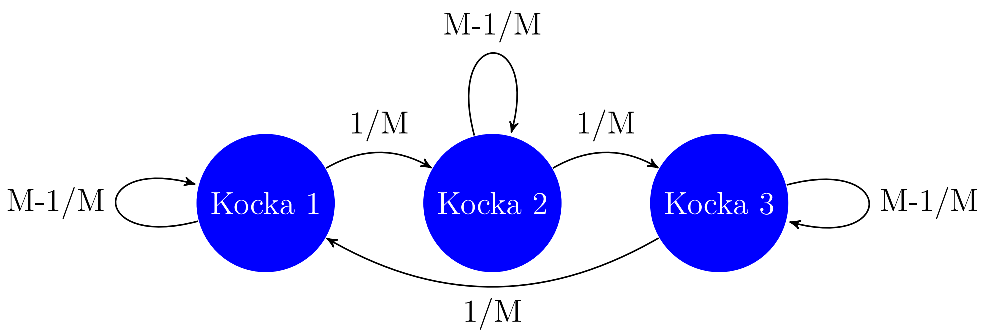
Dominik Barukčić

12. prosinca 2023.

1 Opis eksperimenta

Odabrani stohastički eksperiment je temeljen na bacanju tri pristrane igrače kocke s mogućim ishodima bacanja od 1 do 6. Ove kocke su „podešene“ na način da će prva kocka u prosjeku, u pola svih bacanja dati broj „1“, da će druga kocka također u pola svih bacanja dati broj „3“ i da će treća na jednak način u pola svih bacanja dati broj „5“. Vjerojatnosti preostalih ishoda bacanja bitno su manje, ali nisu jednake, nego su ovisne o pojedinoj kocki za svaki od preostalih 5 mogućih brojeva. Ishod bacanja kocke vidljiv je gledateljima, dok ono što im nije vidljivo jest informacija koja od tri pristrane kocke je korištena pri pojedinom bacanju, pa stoga indeks korištene kocke (1., 2. ili 3. kocka) predstavlja skriveno stanje ovog modela.

Promjene skrivenih stanja definirane su prijelaznom matricom modela, pri čemu neki prijelazi u ovom eksperimentu nisu dozvoljeni, tj. imaju nultu vjerojatnost. Konkretno, ako je u aktualnom bacanju korištena prva kocka, tada će u narednom bacanju biti korištena ta ista kocka, ili druga kocka, ali ne može biti odabrana treća kocka. Analogno, ako je model u stanju bacanja druge kocke, može ostati u tom stanju, ili prijeći u stanje treće kocke, ali se ne može vratiti u stanje prve kocke. Konačno kada uđe u stanje treće kocke, može ciklički prijeći u stanje prve kocke, ili ostati u postojećem stanju, ali se ne može vratiti u stanje druge kocke. Zaključno, ovaj model nužno ciklički prolazi kroz skrivena stanja 1->2->3->1, uz mogućnost zadržavanja u aktualnom stanju. Vjerojatnost zadržavanja istog stanja iznosi (M-1)/M, dok vjerojatnost prijelaza u naredno cikličko stanje iznosi 1/M.



U svrhu definiranja početnog stanja ovog modela, dakle samo za prvo bacanje, koristi se dodatna nepristrana kocka na ovaj način: ako je ishod bacanja te nepristrane kocke „1“ za prvo bacanje će se koristiti prva pristrana kocka, za ishode „2“ ili „3“ koristit će se druga kocka, dok se u slučaju preostala tri ishoda, „4“, „5“ i „6“, kao prva baca treća pristrana kocka.

2 Opis zadanog modela

Slučajni eksperiment kojeg koristimo za ovu vježbu odnosi se na bacanje tri pristrane igrače kocke, gdje indeks korištene kocke predstavlja skriveno stanje ovog HMM modela. Vjerojatnosti pojedinih ishoda bacanja su različite za svaku pristranu kocku, a vjerojatnosti cikličke izmjene stanja su određene parametrom M. Za detaljni opis eksperimenta svakako pogledajte opis vježbe u ranije navedenom dokumentu.

Zadani parametar zadržavanja istog stanja iznosi M=5.

Matrica prijelaznih i početnih vjerojatnosti HMM modela zadane su kao:

$$A = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Prosječne učestalosti osmatranja pojedinih ishoda "1" do "6" za sve tri kocke u 40 bacanja su:

$$B\_count = \begin{bmatrix} 20 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 20 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 7 & 20 & 5 \end{bmatrix} \tag{3}$$

3 Pod-zadaci

3.1 Pod-zadatak 1: Definiranje HMM Modela

Temeljem zadanih ucestalosti pojedinih ishoda bacanja pristranih kocki i temeljem zadanog parametra M u vasem Moodle zadatku, potrebno je dopuniti predlozak Matlab skripte kako bi cjelovito opisali zadani HMM model ovog eksperimenta ukljucujuci i matricu vjerojatnosti osmatranja izlaznih simbola.

MATLAB Kod

```
clear;
pack;
addpath(genpath('/Users/dominik/Desktop/Obrada␣informacija/Lab3
   /HMMall'))

% Zadani parametar zadrzavanja istog stanja M
m = 5;

% matrica pocetnih vjerojatnosti, P
prior0=[
1/6
1/3
1/2
];

% matrica vjerojatnosti prijelaza stanja, A
transmat0=[
4/5 1/5 0
0 4/5 1/5
1/5 0 4/5
];
```

```
Q=size(prior0,1);

% Prosjecne ucestalosti osmatranja pojedinih ishoda "1" do "6"
   za sve tri kocke u 40 bacanja
B_count = [
20 4 5 2 4 5
5 4 20 5 3 3
1 2 5 7 20 5
];

br_bacanja = 40;

% matrica vjerojatnosti osmatranja izlaznih simbola
obsmat0 = B_count ./ br_bacanja;
O=size(obsmat0,2);
```

3.2 Pod-zadatak 2: Log-Izvjesnosti Osmotrenih Nizova

Osmotrena su dva niza duljine T=41 simbola kojeg je generirao model L:
O = [o1 .. oT] =
[3 6 6 4 5 1 2 3 5 4 4 5 5 3 1 6 1 5 3 5 5 5 4 5 5 5 6 5 1 6 1 3 3 3 3 3 6 3 4 1 3]
[2 2 3 5 3 6 3 4 4 4 4 1 4 6 1 4 2 6 4 1 4 3 2 5 6 6 6 4 6 6 2 6 6 3 4 4 4 2 3 4 2]
(2a) Izračunajte log-izvjesnosti osmatranja ova dva niza uz zadane parametre HMM modela te ih upišite u naredna dva polja:

MATLAB Kod

```
fprintf('2a␣zadatak\n')
% dva niza duljine T simbola kojeg je generirao model L
T = 41;
o1 = [ 3 6 6 4 5 1 2 3 5 4 4 5 5 3 1 6 1 5 3 5 5 5 4 5 5 5 6 5
   1 6 1 3 3 3 3 3 6 3 4 1 3];
o2 = [ 2 2 3 5 3 6 3 4 4 4 4 1 4 6 1 4 2 6 4 1 4 3 2 5 6 6 6 4
   6 6 2 6 6 3 4 4 4 2 3 4 2];
```

```
data = o1;
ll1 = dhmm_logprob(data, prior0, transmat0, obsmat0);
disp(ll1)

data = o2;
ll2 = dhmm_logprob(data, prior0, transmat0, obsmat0);
disp(ll2);
```

Rezultati

```
2a zadatak
-64.7879

-84.4789
```

(2b) Izračunajte i upišite u Moodle koliko puta je drugi niz manje izvjestan od prvog u eksponencijalnom zapisu:

MATLAB Kod

```
fprintf('2b␣zadatak\n')

% izracunaj razliku log-izvjesnosti
log_prob_diff = ll1 - ll2;

% izracunaj omjer u exp obliku
prob_ratio = exp(log_prob_diff);

% koliko puta je drugi niz manje izvjestan od prvog u
   eksponencijalnom zapisu
fprintf('Probability␣ratio␣(o2␣is␣less␣likely␣than␣o1␣by):␣%e␣
   times\n', prob_ratio);
```

Rezultati

```
2b zadatak
Probability ratio (o2 is less likely than o1 by): 3.562017e+08 times
```

IZVJEŠTAJ

Analizom omjera log-izvjesnosti možemo zaključiti da je prvi niz vjerojatniji od drugog niza, budući da je omjer veći od 1. Drugim riječima, prvi niz sadrži simbole koji imaju veću vjerojatnost prema opservacijskoj matrici, dok drugi niz uključuje simbole s manjim vjerojatnostima.

3.3 Pod-zadatak 3: Vjerojatnosti Unaprijed i Unazad

Za prvu sekvencu iz pod-zadatka 2 potrebno je primijeniti algoritme "Unaprijed" i "Unazad" i izračunati unaprijedne vjerojatnosti α i unazadne vjerojatnosti β za sve trenutke osmatranja t=1 ... T za zadani model L.

Važno: pri pozivu funkcije ne smijete aktivirati skaliranje vjerojatnosti, tj. u pozivu funkcije morate definirati ..., 'scaled', 0); kao što je učinjeno i u primjeru u uputama.

Upišite koji iznos unaprijedne vjerojatnosti $\alpha(3)$ ste dobili za t=26 u prvo polje, odnosno iznos unazadne vjerojatnosti $\beta(3)$ za t=11 u drugo polje u eksponencijalnom zapisu.

MATLAB Kod

```
fprintf('3. zadatak\n')

data = o1;
data2 = o2;
if ~iscell(data)
data = num2cell(data, 2);
data2 = num2cell(data2, 2);
end
ncases = length(data);

% Forward algorithm
loglik = 0;
errors = [];
for m=1:ncases
obslik0 = multinomial_prob(data{m}, obsmat0);
obslik1 = multinomial_prob(data2{m}, obsmat0);
[alpha, beta, gamma, ll] = ...
```

```
fwdback(prior0, transmat0, obslik0, 'scaled', 0);
if ll==-inf
errors = [errors m];
end
loglik = loglik + ll;
end

% Backward algorithm
% beta = zeros(T, length(prior0)); % Initialize beta matrix
% beta(T, :) = 1; % Initial step
%
% for t = T-1:-1:1
% for i = 1:length(prior0)
% beta(t, i) = sum(transmat0(i, :) .* obsmat0(:, o1(t+1))' .*
    beta(t+1, :));
% end
% end

% Display the requested probabilities
fprintf('Forward␣probability␣alpha_t(3)␣at␣t=26:␣%e\n', alpha
    (3, 26));
fprintf('Backward␣probability␣beta_t(3)␣at␣t=11:␣%e\n', beta(3,
     11));
```

Rezultati

```
Forward probability alpha_t(3) at t=26: 4.424103e-19
Backward probability beta_t(3) at t=11: 9.854075e-20
```

IZVJEŠTAJ

Unaprijedna vrijednost αt(i) predstavlja izvjesnost cijelog niza u stanju i u vremenu T, što je ekvivalentno zadnjem koraku. S druge strane, unazadna vrijednost $\beta 1$(i) odnosi se na izvjesnost cijelog niza u stanju i u prvom koraku, tj. kada t=1. Oba ova skupa vrijednosti možemo iskoristiti kako bismo izračunali log-izvjesnost cijelog niza za to određeno skriveno stanje.

Formule za izračun log-izvjesnosti za određena stanja izgledaju kao logaritam αt(i) ili logaritam βt(i), dok bismo, ako želimo izračunati izvjesnost cijelog niza za sva stanja, koristili logaritam suma α svih stanja u vremenu T ili logaritam izraza za terminaciju, što predstavlja log-izvjesnost izračunanu preko odgovarajuće funkcije.

3.4 Pod-zadatak 4: Dekodiranje Skrivenih Stanja

Potrebno je primjenom Viterbi algoritma odrediti najizvjesniji niz skrivenih stanja modela za prvi promatrani niz iz drugog podzadatka. U narednih šest polja upišite dekodirana stanja modela za prva tri i zadnja tri vremenska koraka prve opservacije:

MATLAB Kod

```
fprintf('4.␣zadatak\n')
% Najizvjesniji put
vpath = viterbi_path(prior0, transmat0, obslik0);
disp(vpath)
```

Rezultati

```
4. zadatak
Columns 1 through 17

3 3 3 3 3  1    1     2     3     3     3     3     3     1    1    1    1

Columns 18 through 34

1 2 3 3 3  3    3     3     3     3     3     1     1     1    2    2    2

Columns 35 through 41

2     2     2     2     2     2     2
```

3.5 Pod-zadatak 5: Log-Izvjesnosti duž Viterbi Puta

Ponovite određivanje Viterbi niza stanja za drugi promatrani niz iz pod-zadatka 2. Za oba niza izračunajte log-izvjesnosti promatranja, ali samo duž dekodiranih 'optimalnih' Viterbi puteva. Usporedite dobivene rezultate s onima iz pod-zadatka 2, gdje je izračunata ukupna log-izvjesnost za sve moguće puteve skrivenih stanja. U donjim dva polja upišite razliku između log-izvjesnosti preko svih puteva i log-izvjesnosti duž Viterbi puta za oba promatrana niza:

MATLAB Kod

```
fprintf('5.␣zadatak\n')
vpath1 = viterbi_path(prior0, transmat0, obslik0);
vpath2 = viterbi_path(prior0, transmat0, obslik1);

[ll_viterbi1, p1] = dhmm_logprob_path(prior0, transmat0,
   obslik0, vpath1);
[ll_viterbi2, p2] = dhmm_logprob_path(prior0, transmat0,
   obslik1, vpath2);

% Usporedba s ukupnim log-izvjesnostima
razlika1 = ll1 - ll_viterbi1;
razlika2 = ll2 - ll_viterbi2;

fprintf('Razlika␣log-izvjesnosti␣za␣prvi␣niz␣(ukupno␣-␣Viterbi)
   :␣%f\n', razlika1);
fprintf('Razlika␣log-izvjesnosti␣za␣drugi␣niz␣(ukupno␣-␣Viterbi
   ):␣%f\n', razlika2);
```

Rezultati

```
5. zadatak
Razlika log-izvjesnosti za prvi niz (ukupno - Viterbi): 6.132279
Razlika log-izvjesnosti za drugi niz (ukupno - Viterbi): 8.526175
```

IZVJEŠTAJ

Primjećujemo da razlika u izvjesnosti niza preko svih stanja premašuje izvjesnost koju dobivamo putem optimalnog puta, što nam sugerira pozitivan predznak. Vjerojatno je razlog tome što izvjesnost niza preko svih stanja, za razliku od izvjesnosti putem optimalnog puta, uključuje izvjesnosti svih stanja u svakom koraku, dok putem optimalnog puta uzimamo u obzir samo najizvjesnije izvjesnosti. Ova razlika nam pruža uvid u koliko se različiti putevi razlikuju po izvjesnosti.

Teorijski bismo mogli izračunati izvjesnosti osmatranja za sve moguće pojedinačne puteve kroz mrežu stanja duž cijelog zadatog osmatranog niza. Međutim, u praksi je to izrazito zahtjevno i gotovo nemoguće jer broj mogućih puteva eksponencijalno raste s povećanjem duljine niza i broja skrivenih stanja.

3.6 Pod-zadatak 6: Izvjesnost Osmotrenih Nizova za Skraćeni Niz

(6a) Za prvi promatrani niz iz pod-zadatka 2 potrebno je odrediti ukupnu vjerojatnost promatranja skraćenog niza, tj. samo za prva četiri promatrana izlazna simbola o1, o2, o3 i o4. U tu svrhu trebate iskoristiti ranije rješenje iz trećeg pod-zadatka u kojem ste odredili sve vjerojatnosti modela, ali za cijeli niz. Upišite u eksponencijalnom zapisu koliko iznosi vjerojatnost (ne log-vjerojatnost!) promatranja prvih četiri izlazna simbola:

MATLAB Kod

```
fprintf('\n6.a zadatak\n')
constraint = 4; % prva cetiri simbola
tmp = sum(alpha);
fprintf('Likelyhood is %e\n', tmp(constraint))
```

Rezultati

```
6.a zadatak
Likelyhood is 3.264609e-04
```

(6b) Ponovno odredite Viterbi put, ali sada za ovu skraćenu opservacijsku sekvencu, te izračunajte i upišite u naredno polje koji udio vjerojatnosti promatranja (normiran na 1) ostvaruje duž Viterbi puta u odnosu na sve moguće puteve stanja ovog modela:

MATLAB Kod

```
fprintf('6.b␣zadatak\n')
vpath = viterbi_path(prior0, transmat0, obslik0(:, 1:constraint
   ));
[ll_viterbi, p] = dhmm_logprob_path(prior0, transmat0, obslik0
   (:, 1:constraint), vpath);
udio_izvjesnosti = exp(ll_viterbi - log(tmp(constraint)));
fprintf('Likelyhood␣ratio:␣%e\n', udio_izvjesnosti)
```

Rezultati

```
6.b zadatak
Likelyhood ratio: 2.680259e-01
```

(6c) Upišite pronađeni Viterbi put stanja za prvih četiri promatrana simbola prvog niza:

MATLAB Kod

```
fprintf('6.c␣zadatak\n')
disp(vpath)
```

Rezultati

```
6.c zadatak
3     3     3     3
```

(6d) Izračunajte vjerojatnosti promatranja prvih četiri izlazna simbola, ali duž svih mogućih pojedinačnih puteva resetke stanja, prema primjeru iz uputa. Koliko ukupno ima ovih pojedinačnih puteva stanja?

MATLAB Kod

```
fprintf('6.d␣zadatak\n')
num_states = 3;
sequence_length = 4;
total_paths = num_states^sequence_length;

% Inicijalizacija matrice za sve puteve
all_paths = zeros(total_paths, sequence_length);

% Generiranje svih mogucih puteva
counter = 1;
for i = 1:num_states
       for j = 1:num_states
              for k = 1:num_states
                     for l = 1:num_states
                            all_paths(counter, :) = [i, j, k,
                               l];
                            counter = counter + 1;
                     end
              end
       end
end

% Izracunavanje log-izvjesnosti za svaki put
llm = zeros(total_paths,1); % Stupac za log-izvjesnosti
for i = 1:total_paths
[llm(i), p] = dhmm_logprob_path(prior0, transmat0, obslik0(:,
   1:sequence_length), all_paths(i,:));
end;
% Ispis log-izvjesnosti za svaki put
disp(llm)
fprintf('Pojedinacnih␣puteva␣stanja␣ima␣')
disp(total_paths)
```

Rezultati

```
6.d zadatak
-11.6952
-12.1653
-Inf
-Inf
-12.6761
-13.7259
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-13.1869
-14.2367
-16.3650
-Inf
-13.7259
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
```

-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-9.7212
-10.7710
-12.8992
-Inf
-10.2602
-12.3884
-12.8584
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-12.3884
-Inf
-9.7493
-11.9829
-12.4529
-Inf
-Inf
-12.9638
-14.0136
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-11.9829

```
-12.4529
-Inf
-Inf
-Inf
-Inf
-11.9829
-Inf
-9.3439

Pojedinacnih puteva stanja ima     81
```

(6e) Temeljem izracunatih vjerojatnosti pojedinacnih puteva stanja, odredite koliko puteva od svih njih uopće nisu mogući, pa upišite broj puteva koji imaju nultu vjerojatnost promatranja skraćenog niza:

MATLAB Kod

```
fprintf('\n6.e zadatak\n')
% Brojanje puteva s nultom izvjesnošću
broj_nemogucih_puteva = sum(isinf(llm));

fprintf('Broj puteva koji imaju nultu izvjesnost: %d\n',
   broj_nemogucih_puteva);
```

Rezultati

```
6.e zadatak
Broj puteva koji imaju nultu izvjesnost: 57
```

(6f) Sortirajte puteve od najvjerojatnijih prema najmanje vjerojatnima, a zatim u polje upišite koji udio ukupne vjerojatnosti promatranja (normiran na 1) kumulativno ostvaruje duž prvih pet najvjerojatnijih puteva u ovoj sortiranoj listi:

MATLAB Kod

```
fprintf('6.f␣zadatak\n')
% Sortiranje log-izvjesnosti od najizvjesnijih do najmanje
   izvjesnijih
[sllm, illm] = sort(-llm);

% Pretvaranje log-izvjesnosti u izvjesnosti i izračunavanje
   kumulativne sume
kumulativna_suma = cumsum(exp(-sllm));

% Ukupna suma izvjesnosti svih puteva
ukupna_suma = sum(exp(llm));

% Normiranje kumulativne sume na 1
normirana_kumulativna_suma = kumulativna_suma / ukupna_suma;

% Uzimanje kumulativne sume za prvih pet puteva
udio_prvih_pet_puteva = normirana_kumulativna_suma(5);

fprintf('Udio␣ukupne␣izvjesnosti␣uzduž␣prvih␣pet␣najizvjesnijih
   ␣puteva:␣%e\n', udio_prvih_pet_puteva);
```

Rezultati

```
6.f zadatak
Udio ukupne izvjesnosti uzduž prvih pet najizvjesnijih puteva: 8.020357e-01
```

IZVJEŠTAJ

Da bismo dobili izvjesnost za skraćeni niz, modificirali smo funkciju fwdback tako da smo umjesto cijele matrice opservacija koristili samo prva 4 stupca. Nakon izvođenja te funkcije, zbrojili smo posljednji stupac rezultirajuće matrice alfa.

Važno je napomenuti da nismo koristili rješenja iz prethodnih podzadataka jer smo primijetili da se putevi generirani Viterbijevim algoritmom za skraćeni niz razlikuju od prvih 4 koraka koje smo dobili Viterbijevim algoritmom za cijeli niz.

Od 57 puteva, njih 57 ima izvjesnost jednaku nuli. Razlog tome leži u činjenici da se na tim putevima događaju nemogući (nedozvoljeni) prijelazi. Pogledom na tablicu A možemo primijetiti da iz stanja 1 nije moguće prijeći u stanje 2, iz stanja 2 u stanje 1, niti iz stanja 3 u stanje 2.

Prvih pet najizvjesnijih puteva zajedno čini 89.15% ukupne izvjesnosti. Među njima se ističe Viterbijev put jer je najizvjesniji i značajno doprinosi ukupnoj izvjesnosti.

3.7 Pod-zadatak 7: Generiranje Osmotrenih Nizova

(7a) Generirajte višestruke slučajne nizove promatranih izlaznih simbola s nex = 18 različitih nizova, pri čemu svaki niz treba biti duljine T = 186 vremenskih uzoraka. Za generiranje podataka koristite funkciju dhmm_sample u skladu s uputama, uz parametre HMM modela iz vašeg individualnog pod-zadatka 1. Spremite ovu matricu opservacija jer će biti intenzivno korištena u narednim pod-zadatcima. Prije poziva funkcije, svakako resetirajte generator slučajnih brojeva na početnu vrijednost naredbom rng('default'). Vaše rješenje će biti provjereno i bodovano u narednom pod-zadatku.

MATLAB Kod

```
fprintf('\n7.zadatak\n') % mozda treba mijenjat

% generiraj visestruki opservacijski niz:
T = 186; % duljina svakog niza
nex = 18; % broj opservacijskih nizova
rng('default');
data_180 = dhmm_sample(prior0, transmat0, obsmat0, nex, T);
```

3.8 Pod-zadatak 8: Dugotrajne Statistike i Teorijska Očekivanja

Analiza dugotrajnih statistika osmotrenih simbola.

MATLAB Kod

```
fprintf('\n8.a zadatak\n') % ne treba mijenjat

hm_180 = hist(data_180', [1 2 3 4 5 6]);

for i = 1:6
fprintf('Broj osmatranja simbola %d: %d\n', i, hm_180(i));
end
```

Rezultati

```
8.a zadatak
Broj osmatranja simbola 1: 54
Broj osmatranja simbola 2: 15
Broj osmatranja simbola 3: 42
Broj osmatranja simbola 4: 25
Broj osmatranja simbola 5: 33
Broj osmatranja simbola 6: 17
```

MATLAB Kod

```
fprintf('\n8.b zadatak\n') % treba mijenjat

% Stacionarna distribucija stanja
A = transmat0;
T = 1000; % Broj iteracija za konvergenciju
pi_stac = ones(1, size(A, 1)) / size(A, 1);

for t = 1:T
pi_stac = pi_stac * A;
end

% Izlazne vjerojatnosti osmatranja
B = obsmat0;

% Dugotrajne vjerojatnosti osmatranja
p_o = zeros(1, size(B, 2));
```

```
for i = 1:size(B, 2)
p_o(i) = sum(pi_stac .* B(:, i)');
end

% Ispis dugotrajne vjerojatnosti stanja 1 i izlaznog simbola 6
fprintf('Dugotrajna␣vjerojatnost␣stanja␣1:␣%f\n', pi_stac(1));
fprintf('Dugotrajna␣vjerojatnost␣osmatranja␣izlaznog␣simbola␣6:
    ␣%f\n', p_o(6));
```

Rezultati

```
8.b zadatak
Dugotrajna vjerojatnost stanja 1: 0.333333
Dugotrajna vjerojatnost osmatranja izlaznog simbola 6: 0.108333
```

MATLAB Kod

```
fprintf('\n8.c␣zadatak\n')
T = 186; % treba mijenjat
a0=A;
for i=1:100,
a0=a0*A;
end;
expected_freq = a0(1,:)*B*T;

hm = hist(data_180',[1 2 3 4 5 6]); %ocitamo n-ti stupac za n-
    tu sekvencu

diff = double(max(abs(expected_freq/T-mean(hm')/T)));

fprintf('Najveća␣apsolutna␣razlika:␣%e\n', diff);
```

Rezultati

```
8.c zadatak
Najveća apsolutna razlika: 1.356033e-02
```

IZVJEŠTAJ

Razlika između prosječnih statistika i izračunatih dugotrajnih statistika je izuzetno mala, pri čemu najveća odstupanja iznose samo 0.016.

Dugotrajne vjerojatnosti možemo opisati kao kombinaciju redaka matrice opservacija (obsmat0), koja prikazuje očekivanu vjerojatnost pojave simbola bez obzira na trenutačno stanje. Degenerirani model predstavlja model s samo jednim stanjem, gdje su emisijske vjerojatnosti u tom jedinom stanju identične dugotrajnim vjerojatnostima promatranja u našem analiziranom primjeru. Pri tom su matrica prijelaznih vjerojatnosti i vektor početne distribucije vjerojatnosti stanja nevažni jer postoji samo jedno stanje.

Primijetili smo da su dobivene vjerojatnosti prilično slične, odnosno očekivane i stvarne vjerojatnosti pojave simbola su izuzetno bliske.

3.9 Pod-zadatak 9: Log-Izvjesnost Generiranih Osmotrenih Nizova

9a) Za svaki od slučajnih nizova koji su generirani u pod-zadatku 7, potrebno je izračunati log-vjerojatnost promatranja uz zadani model, tj. uz isti model koji je korišten za generiranje ovih promatranja. Nakon toga izračunajte najveću, najmanju i srednju vrijednost log-vjerojatnosti usrednjenu preko svih nex promatranih nizova, te upišite dobivene rezultate u naredna tri polja (max, min i mean):

MATLAB Kod

```
fprintf('\n9.␣zadatak\n'); % ne treba nista mijenjat

loglik_values = zeros(1, nex); % Inicijalizacija niza za log-
   izvjesnosti

for i = 1:nex
loglik_values(i) = dhmm_logprob(data_180(i,:), prior0,
   transmat0, obsmat0);
end

% Najveća, najmanja i srednja log-izvjesnost
```

```
max_loglik = max(loglik_values);
min_loglik = min(loglik_values);
mean_loglik = mean(loglik_values);

fprintf('Najveća␣log-izvjesnost:␣%f\n', max_loglik);
fprintf('Najmanja␣log-izvjesnost:␣%f\n', min_loglik);
fprintf('Srednja␣log-izvjesnost:␣%f\n', mean_loglik);
```

Rezultati

```
9. zadatak
Najveća log-izvjesnost: -301.794149
Najmanja log-izvjesnost: -321.785305
Srednja log-izvjesnost: -309.964275
```

IZVJEŠTAJ

S obzirom na stohastičku prirodu skrivenih Markovljevih modela (HMM) i činjenicu da smo koristili nasumično generirane nizove, moguće je primijetiti razlike u vjerojatnostima pojedinih nizova, čak i kada su svi generirani na temelju istog modela.

3.10 Pod-zadatak 10: Treniranje Parametara HMM Modela

(10a) Temeljem svih nizova promatranja koji su generirani u pod-zadatku 7, potrebno je izračunati dva nova HMM modela primjenom funkcije dhmm_em. Važno: u oba slučaja ograničite broj iteracija EM postupka na najviše 200, a prag relativne promjene vjerojatnosti u odnosu na prethodnu iteraciju za završetak postupka postavite na 1E-6.

Za prvi HMM model inicijalizacija parametara modela za početnu iteraciju EM postupka treba biti potpuno slučajna (prema uputama), uz prethodno resetiranje generatora pseudo-slučajnih brojeva na početnu vrijednost. Za drugi HMM model za inicijalizaciju EM postupka iskoristite parametre zadanih modela. Točnost vašeg izračuna parametara modela će se verificirati u narednom pod-zadatku.

Za brzu provjeru upišite broj iteracija koji je bio potreban za estimaciju parametara HMM modela EM postupkom za oba modela (prvi i drugi):

MATLAB Kod

```
fprintf('\n10.␣zadatak\n'); % ne treba nista mijenjat

rng('default');
% initial guess of parameters
prior1 = normalise(rand(Q,1));
transmat1 = mk_stochastic(rand(Q,Q));
obsmat1 = mk_stochastic(rand(Q,O));
[LL1, prior1_trained, transmat1_trained, obsmat1_trained, iter1
   ] = dhmm_em(data_180, prior1, transmat1, obsmat1, 'max_iter
   ', 200, 'thresh', 1E-6);

[LL2, prior2_trained, transmat2_trained, obsmat2_trained, iter2
   ] = dhmm_em(data_180, prior0, transmat0, obsmat0, 'max_iter
   ', 200, 'thresh', 1E-6);

fprintf('Broj␣iteracija␣za␣prvi␣model:␣%d\n', iter1);
fprintf('Broj␣iteracija␣za␣drugi␣model:␣%d\n', iter2);
```

Rezultati

```
10. zadatak
iteration 1, loglik = -5811.518021
iteration 2, loglik = -5769.143630
iteration 3, loglik = -5768.452383
iteration 4, loglik = -5767.737590
iteration 5, loglik = -5766.973756
iteration 6, loglik = -5766.129600
iteration 7, loglik = -5765.164959
iteration 8, loglik = -5764.026418
iteration 9, loglik = -5762.641019
iteration 10, loglik = -5760.907175
```

```
iteration 11, loglik = -5758.681749
iteration 12, loglik = -5755.762446
iteration 13, loglik = -5751.866160
iteration 14, loglik = -5746.608594
iteration 15, loglik = -5739.501890
iteration 16, loglik = -5730.008181
iteration 17, loglik = -5717.710396
iteration 18, loglik = -5702.643382
iteration 19, loglik = -5685.668918
iteration 20, loglik = -5668.466729
iteration 21, loglik = -5652.741876
iteration 22, loglik = -5639.203184
iteration 23, loglik = -5627.501040
iteration 24, loglik = -5617.086336
iteration 25, loglik = -5607.854679
iteration 26, loglik = -5600.077018
iteration 27, loglik = -5593.981500
iteration 28, loglik = -5589.488981
iteration 29, loglik = -5586.267981
iteration 30, loglik = -5583.930352
iteration 31, loglik = -5582.164830
iteration 32, loglik = -5580.766900
iteration 33, loglik = -5579.615327
iteration 34, loglik = -5578.640448
iteration 35, loglik = -5577.801091
iteration 36, loglik = -5577.071118
iteration 37, loglik = -5576.432380
iteration 38, loglik = -5575.871228
iteration 39, loglik = -5575.376778
iteration 40, loglik = -5574.940033
iteration 41, loglik = -5574.553402
iteration 42, loglik = -5574.210399
iteration 43, loglik = -5573.905448
iteration 44, loglik = -5573.633732
iteration 45, loglik = -5573.391083
iteration 46, loglik = -5573.173889
iteration 47, loglik = -5572.979015
iteration 48, loglik = -5572.803745
```

```
iteration 49, loglik = -5572.645724
iteration 50, loglik = -5572.502908
iteration 51, loglik = -5572.373524
iteration 52, loglik = -5572.256036
iteration 53, loglik = -5572.149107
iteration 54, loglik = -5572.051574
iteration 55, loglik = -5571.962424
iteration 56, loglik = -5571.880772
iteration 57, loglik = -5571.805842
iteration 58, loglik = -5571.736952
iteration 59, loglik = -5571.673502
iteration 60, loglik = -5571.614962
iteration 61, loglik = -5571.560864
iteration 62, loglik = -5571.510789
iteration 63, loglik = -5571.464366
iteration 64, loglik = -5571.421265
iteration 65, loglik = -5571.381190
iteration 66, loglik = -5571.343875
iteration 67, loglik = -5571.309081
iteration 68, loglik = -5571.276595
iteration 69, loglik = -5571.246224
iteration 70, loglik = -5571.217794
iteration 71, loglik = -5571.191148
iteration 72, loglik = -5571.166143
iteration 73, loglik = -5571.142651
iteration 74, loglik = -5571.120555
iteration 75, loglik = -5571.099748
iteration 76, loglik = -5571.080135
iteration 77, loglik = -5571.061627
iteration 78, loglik = -5571.044144
iteration 79, loglik = -5571.027614
iteration 80, loglik = -5571.011969
iteration 81, loglik = -5570.997148
iteration 82, loglik = -5570.983096
iteration 83, loglik = -5570.969761
iteration 84, loglik = -5570.957095
iteration 85, loglik = -5570.945056
iteration 86, loglik = -5570.933604
```

```
iteration 87, loglik = -5570.922701
iteration 88, loglik = -5570.912315
iteration 89, loglik = -5570.902413
iteration 90, loglik = -5570.892966
iteration 91, loglik = -5570.883948
iteration 92, loglik = -5570.875334
iteration 93, loglik = -5570.867101
iteration 94, loglik = -5570.859227
iteration 95, loglik = -5570.851692
iteration 96, loglik = -5570.844478
iteration 97, loglik = -5570.837568
iteration 98, loglik = -5570.830945
iteration 99, loglik = -5570.824594
iteration 100, loglik = -5570.818501
iteration 101, loglik = -5570.812653
iteration 102, loglik = -5570.807038
iteration 103, loglik = -5570.801644
iteration 1, loglik = -5579.356946
iteration 2, loglik = -5573.068485
iteration 3, loglik = -5571.960415
iteration 4, loglik = -5571.515865
iteration 5, loglik = -5571.317737
iteration 6, loglik = -5571.221404
iteration 7, loglik = -5571.171211
iteration 8, loglik = -5571.143636
iteration 9, loglik = -5571.127869
iteration 10, loglik = -5571.118578
iteration 11, loglik = -5571.112973
iteration 12, loglik = -5571.109530
Broj iteracija za prvi model: 103
Broj iteracija za drugi model: 12
```

IZVJEŠTAJ

Da bismo postigli konvergenciju prvog (nasumično generiranog) modela, potrebno je provesti 113 iteracija, dok je za drugi (prvotno zadani model) potrebno samo 19 iteracija. Razlog za veći broj iteracija u slučaju prvog modela leži u tome što su početni parametri znatno udaljeniji od optimalnih vrijednosti, dok su parametri drugog modela već vrlo blizu optimalnih vrijednosti.

3.11 Pod-zadatak 11: Usporedna Evaluacija Modela

(11a) Potrebno je usporediti uspješnost modeliranja opservacijskih nizova generiranih u pod-zadatku 7 sa svim raspoloživim HMM modelima, izračunom log-vjerojatnosti promatranja svih generiranih nizova funkcijom dhmm_logprob. Kao 'loš' model za usporedbu, potrebno je koristiti HMM model s potpuno slučajnim parametrima, koji je korišten za inicijalizaciju prvog od dva nova 'optimalna' HMM modela u prethodnom pod-zadatku (Važno: ... pazite da su parametri ovog slučajnog modela zaista generirani odmah nakon inicijalizacije generatora pseudo-slučajnih brojeva).

U četiri polja upišite dobivene log-vjerojatnosti promatranja ovim redom: za zadani model, za 'loši' slučajni model, za prvi novi HMM model s slučajnom inicijalizacijom i konačno za drugi novi HMM model s zadatom inicijalizacijom:

MATLAB Kod

```
fprintf('\n11.␣zadatak\n'); % ne treba nista mijenjat

% Ukupne log-izvjesnosti za svaki model
total_loglik_zadani = 0;
total_loglik_slucajni = 0;
total_loglik_prvi_trenirani = 0;
total_loglik_drugi_trenirani = 0;

for i = 1:nex
total_loglik_zadani = total_loglik_zadani + dhmm_logprob(
   data_180(i,:), prior0, transmat0, obsmat0);
total_loglik_slucajni = total_loglik_slucajni + dhmm_logprob(
   data_180(i,:), prior1, transmat1, obsmat1);
total_loglik_prvi_trenirani = total_loglik_prvi_trenirani +
   dhmm_logprob(data_180(i,:), prior1_trained,
   transmat1_trained, obsmat1_trained);
total_loglik_drugi_trenirani = total_loglik_drugi_trenirani +
   dhmm_logprob(data_180(i,:), prior2_trained,
```

```
   transmat2_trained, obsmat2_trained);
end

fprintf('Ukupna␣log-izvjesnost␣za␣zadani␣model:␣%f\n',
   total_loglik_zadani);
fprintf('Ukupna␣log-izvjesnost␣za␣slucajni␣model:␣%f\n',
   total_loglik_slucajni);
fprintf('Ukupna␣log-izvjesnost␣za␣prvi␣trenirani␣model:␣%f\n',
   total_loglik_prvi_trenirani);
fprintf('Ukupna␣log-izvjesnost␣za␣drugi␣trenirani␣model:␣%f\n',
    total_loglik_drugi_trenirani);
```

Rezultati

```
11. zadatak
Ukupna log-izvjesnost za zadani model: -5579.356946
Ukupna log-izvjesnost za slucajni model: -5811.518021
Ukupna log-izvjesnost za prvi trenirani model: -5570.796460
Ukupna log-izvjesnost za drugi trenirani model: -5571.107381
```

IZVJEŠTAJ

Kao što se može primijetiti, log-izvješća za obučene modele i zadani model izuzetno su slična, dok se log-izvješće za nasumični model znatno razlikuje. Ove razlike u modelima objašnjavaju se njihovim početnim postavkama. Zadani model i obučeni modeli vrlo su blizu optimalnim parametrima, dok su parametri za nasumični model potpuno slučajni te je potrebno više iteracija kako bi se približili optimalnim parametrima.

Validacija modela treba provoditi na skupu podataka za validaciju, a ne na skupu podataka na kojem je model treniran. U praksi, skup podataka za validaciju koristi se kako bi se provjerilo kako se model prilagođava i generalizira na nepoznate podatke.