

Lineare Optimierung

Team1 - Gruppe2

29. Januar 2016

1 Linear

Die Bedeutung des Begriffes *linear* ist kontextabhängig. Aber da wir uns mit linearen Optimierungsproblemen beschäftigen, wollen wir den Begriff im Kontext von linearen Ungleichungen und Gleichungen, die zur Beschreibung von linearen Problemen formuliert werden können, schärfen.

1.1 Lineare Abbildungen

Wenn wir an *linear* denken, stellen wir uns meistens eine Gerade im \mathbb{R}^2 vor, die wir durch eine Polynomfunktion ersten Grades der Form $f(x) = ax + d$ darstellen. Allerdings spricht man genau dann von einer **linearen Funktion**, wenn folgendes erfüllt ist:

Definition 1 Sei f eine Funktion und seien A, B, C ein Körper \mathbb{K} (z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \dots$), dann ist $f : A \rightarrow B$ eine **lineare Abbildung**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ und alle Skalare $k \in C$ gilt:

$$\begin{aligned}f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2), \\f(kx_1) &= kf(x_1).\end{aligned}$$

Versuchen wir die Definition mit einem Beispiel zu überprüfen. Stellen wir uns die Frage, ob die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x/2$ linear ist. Wir setzen $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ und $k = 4$ und erhalten:

$$\begin{aligned}f(5) &= f(2) + f(3) = 7.5, \\f(8) &= 4f(2) = 12.\end{aligned}$$

Wie man sieht erfüllt f beide Bedingungen und ist somit nach der Definition 1 eine lineare Abbildung. Aber wie sieht eine nichtlineare Abbildung aus? Gehen wir wieder von einer Polynomfunktion der Form $g(x) = ax + d$ mit $d > 0$ aus. Wir erweitern f aus dem

vorherigen Beispiel um den Koeffizienten $d = 1$ und erhalten dadurch $g(x) = 3x/2 + 1$. Wir übernehmen die Übergabewerte aus dem vorherigen Beispiel und erhalten:

$$\begin{aligned} g(5) &= g(2) + g(3) \\ 8.5 &= 9.5 \text{ (f.A.)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(8) &= 4g(2) \\ 13 &= 16 \text{ (f.A.)}. \end{aligned}$$

Anmerkung: Bei Abbildungen der Form $f(x) = ax + d$ handelt es sich um **affine Abbildungen**, die oft auch als linear bezeichnet werden. Siehe Abschnitt 1.2.

Allerdings haben wir oft mit linearen Gleichungen zu tun, die mehr als eine unbekannte Variable haben, wie z.B. $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{i-1}x_{i-1} + a_ix_i$ mit $a, x \in \mathbb{K}$. Wie verhält sich die Linearität mit mehreren unbekannten Variablen? Für die einfache Handhabung der Gleichungen mit mehreren Variablen verwenden wir nun die Vektorenschreibweise. Dazu betrachten wir jetzt Abbildungen zwischen Vektorräumen der Form $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Definition 2 Sei F eine Abbildung und seien A, B Vektorräume (z.B. \mathbb{K}^m), dann ist $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine **lineare Abbildung**, wenn für alle Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ und für alle Skalare $k \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= F(\mathbf{a}) + F(\mathbf{b}), \\ F(k\mathbf{a}) &= kF(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Wir sind aber hauptsächlich an linearen Abbildungen der Form $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$ interessiert. Dazugehörige lineare Gleichungen und Ungleichungen können wir wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= b \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} &\leq b \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} &\geq b \end{aligned}$$

Der Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{K}^m$ enthält die Koeffizienten und $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^m$ die unbekannten Variablen. Die rechte Seite mit $b \in \mathbb{K}$ drückt das Ergebnis der Zeilen- und Spaltenvektormultiplikation der linken Seite aus. Nun überprüfen wir, ob derartige Abbildungen linear sind. Sei $F : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 c_i x_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$ und $\mathbf{a}^T = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b}^T = (2, 1, 2)$, $\mathbf{c}^T = (2, 1, 3)$, $k = -2$. Beim Einsetzen der Werte in den Funktionen aus der Definition 2 erhalten wir:

$$F \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 18$$

$$F \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2F \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -14$$

In diesem Fall sind beide Bedingungen erfüllt und somit ist unsere Abbildung linear. Wie man sieht, unabhängig von der Anzahl der unbekannten Variablen, ist eine Funktion der Form $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$ nur dann linear laut den Definitionen 1 und 2, wenn sie als Summe der unbekannten Variablen dargestellt wird. Die unbekannten Variablen dürfen aber mit einem Koeffizienten multipliziert werden.

1.2 Affine Abbildungen

Im vorherigen Abschnitt haben wir lineare Abbildungen kennengelernt und festgestellt, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + d$ keine lineare Abbildung ist, da sie die Definition 1 nicht erfüllt.

Wenn wir in der Ebene \mathbb{R}^2 bleiben, dann bilden die Graphen der Abbildung $f(x) = ax + d$ und der linearen Abbildung $g(x) = ax$ jeweils eine Gerade (siehe Abbildung 1). Der wesentliche und entscheidende Unterschied ist, dass in der Ebene lineare Abbildungen immer durch den Ursprung gehen, affine Abbildungen dagegen nicht. Im Grunde teilen affine Abbildungen viele Eigenschaften der linearen Abbildungen. Vereinfacht gesagt, kann man unter einer affinen Abbildung eine lineare Abbildung verstehen, die zusätzlich einer *Verschiebung* weg vom Ursprung unterliegt, wie z.B. bei $f(x)$.

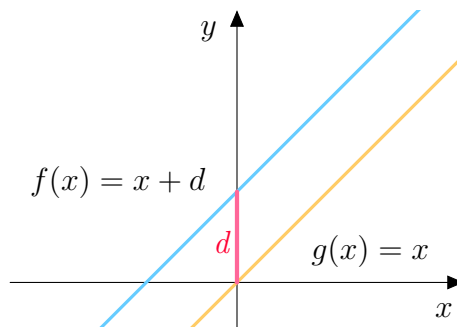


Abbildung 1: Gegenüberstellung von Graphen einer affinen (blau) und linearen (orange) Abbildung im \mathbb{R}^2 .

Diese Vorstellung können wir allgemein auch auf für uns interessante Abbildungen $F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$ der Form $F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d$ übertragen, die man als **affine Abbildungen** bezeichnet. Aufgrund vieler Gemeinsamkeiten mit linearen Abbildungen, werden sie daher auch als *linear* bezeichnet. Affine Abbildungen sind ein wichtiger Bestandteil linearer Optimierungsprobleme, denn oft handelt es sich bei Funktionen, die wir optimieren wollen, um affine Abbildungen. Was solche *Zielfunktionen* sind, wird in den nächsten Abschnitten genauer behandelt.

2 Lineares Optimierungsprogramm

Ein lineares Optimierungsprogramm (LP) beschreibt ein Modell, um lineare Problemstellungen zu optimieren. Die Komponenten dieses Programms sind eine lineare *Zielfunktion* und lineare Funktionen als *Nebenbedingungen*. Die Aufgabe liegt in der Maximierung (oder Minimierung) der Zielfunktion unter Einhaltung der Nebenbedingungen. Die linearen Nebenbedingungen werden durch Gleichungen und Ungleichungen ausgedrückt.

2.1 Notation

$$\begin{array}{ll}\text{Zielfunktion:} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max! \\ \text{Nebenbedingungen:} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{Bx} = \mathbf{d} \\ & \text{mit } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ (Nichtnegativität)}\end{array}$$

Wenn ein lineares Optimierungsproblem genau in dieser Form ausgedrückt wird, dann nennt man diese Form die **allgemeine Form** eines Linearen Programms.

2.2 Zielfunktion

Der Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ umfasst die unbekannten Komponenten bzw. **Entscheidungsvariablen**, für die wir eine Belegung finden wollen, sodass die Zielfunktion maximiert oder minimiert wird. Durch die Bedingung $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ wollen wir ausdrücken, dass die Entscheidungsvariablen des Vektors keinen negativen Wert annehmen dürfen (**Nichtnegativität**). Der Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{K}^n$ beschreibt die *Koeffizienten der Zielfunktion*. Aus Konvention wird die Zielfunktion maximiert. Um das *Minimum* einer Zielfunktion zu berechnen, kann man die Zielfunktion mit negativ Eins multiplizieren und dann maximieren. Der Ausdruck $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min!$ wird in $-\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max!$ umgeformt. Nachstehend betrachten wir Beispiele zu Zielfunktionen im \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T &= (-1, 2, -2) \\ \mathbf{x}^T &= (x_1, x_2, x_3) \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max! \quad \dots \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min! \quad \dots \quad -\mathbf{c}^T \mathbf{x} &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \max!\end{aligned}$$

2.3 Nebenbedingungen

Da es mehrere Gleichungen und Ungleichungen geben kann, werden diese, um mühselige Schreibarbeit zu vermeiden und es in ein algorithmisch verarbeitbares Format zu bringen, durch eine Matrix- und Vektorenschreibweise ersetzt.

Dazu fasst man die Koeffizienten in eine Matrix zusammen, wo jede Zeile der Matrix

alle Koeffizienten der linken Seite einer Gleichung oder Ungleichung repräsentiert. Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ beschreibt die Koeffizienten der Ungleichungen, wobei es genau n Koeffizienten pro Zeile gibt, weil der Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ der Entscheidungsvariablen auch nur n Komponenten hat. Genauso verwenden wir die Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{p \times n}$ für die Gleichungen. In Summe haben wir somit $m+p$ Nebenbedingungen.

Weiters ist jede Nebenbedingung durch einen Wert aus \mathbb{K} (rechte Seite) beschränkt. Für Ungleichungen werden diese im Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ und für die Gleichungen im Vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{K}^p$ festgehalten. Um eine Nebenbedingung zu erhalten muss man nur die jeweilige Zeile einer Matrix mit dem Spaltenvektor der Entscheidungsvariablen multiplizieren. Der dazugehörige Wert für die rechte Seite kann aus dem entsprechenden Vektor der rechten Seite abgelesen werden, wo der Zeilenindex der Matrix gleich dem Zeilenindex des Vektoren ist. Abschließend betrachten wir einige Beispiele zu den Nebenbedingungen im \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T &= (x_1, x_2) \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}^T &= \mathbf{d}^T = (4, 5) \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \dots & \quad \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \dots & \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_2 = 4 \\ & & x_2 = 5 \end{array} \\ \mathbf{Bx} \leq \mathbf{b} \quad \dots & \quad \begin{array}{rcl} & + & 3x_2 \leq 4 \\ x_1 & + & x_2 \leq 5 \end{array}\end{aligned}$$

Anmerkung: In der Notation 2.1 haben wir keine Nebenbedingung der Form $\mathbf{Cx} \geq \mathbf{e}$, weil wir solche Nebenbedingung durch die Multiplikation mit minus Eins auch in die Form $-\mathbf{Cx} \leq -\mathbf{e}$ bringen können.

2.4 Vorzeichenbeschränkung

Es wurde bereits erwähnt, dass die Standardform Einscheindungsvariablen größer oder gleich Null verlangt. Falls aber eine EntscheidungsvARIABLE negativ beschränkt ist, z.B. $x_i \leq 0$, dann ersetzt man die Variable x_i durch eine andere $y_i = -x_i$ und es gilt wieder $y_i \geq 0$. Zum Beispiel aus $x_i = -3$ würde $y_i = -x_i = 3$ werden.

3 Standardform

Die Standardform beschreibt eine weitere Notationsmöglichkeit, lineare Programme zu formulieren. Voraussetzung dafür ist eine lineare Zielfunktion und die ausschließliche

Verwendung von Nebenbedingungen in Form von Ungleichungen mit einem *Kleiner-Gleich-Zeichen*. Weiteres müssen alle Entscheidungsvariablen vorzeichenbeschränkt und nicht negativ sein. Des Weiteren dürfen keine redundanten Nebenbedingungen verwendet werden. Das bedeutet, wenn $\mathbf{A}^{m \times n}$ die Matrix aller Nebenbedingungen beschreibt, dann muss der $\text{rang}(\mathbf{A})=n$ sein, bzw. müssen alle n Zeilen der Matrix linear unabhängig sein.

3.1 Notation

$$\begin{array}{ll} \text{Zielfunktion:} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max! \\ \text{Nebenbedingungen:} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \text{mit } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ (Nichtnegativität)} \end{array}$$

Anmerkung Die Bedeutung der Variablen in dieser Notation ist die selbe wie in der beim LP.

3.2 Transformation zur Standardform

Manchmal ist es notwendig ein Programm in andere Formen zu transformieren, um es z.B. mittels Algorithmen weiterverarbeiten zu können. Hiermit wollen wir uns die Überführung eines linearen Programms in allgemeiner Form in die Standardform näher anschauen.

Wichtig: Ein lineares Optimierungsproblem in der allgemeinen Form kann immer in der Standardform transformiert werden.

Alle Gleichungen des LP in allgemeiner Form müssen in Ungleichungen umgeformt werden. Eine Gleichung der Form $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ wird in $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ und $-\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq -b$ umgeformt. Ein Beispiel dazu ist:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= b \quad \text{wird umgeformt zu} \dots \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\leq b \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leq -b \end{aligned}$$

Schließlich müssen redundante Nebenbedingungen entfernt werden. Sie müssen alle linear unabhängig sein. Gehen wir dazu von den folgenden Ungleichungen aus:

$$\begin{array}{rcl} 2x_2 & \leq & 2 \\ x_2 & \leq & 6 \\ x_1 + 4x_2 & \leq & 1 \end{array} \quad \dots \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Wenn wir in der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} (der linken Seite aller Ungleichungen) zur ersten Zeile die zweite Zeile mal -1 addieren, dann erhalten wir:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Der $\text{rang}^1(\mathbf{A}) = 2$, weil die ersten und zweite Zeile jeweils als Linearkombination der anderen Zeile dargestellt werden können. D.h die erste oder zweite Ungleichung ist redundant, eine davon muss somit entfernt werden.

4 Erweiterte Standardform

Wenn man die Ungleichungen aus der Standardform in Gleichungen umwandelt, erhält man die *Erweiterte Standardform*.

4.1 Notation

Zielfunktion: $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max!$
 Nebenbedingungen: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
 mit $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (Nichtnegativität)

4.2 Schlupfvariablen

Bei der Umformung der Ungleichungen, werden sogenannte **Schlupfvariablen** eingeführt, damit die Gleichheitsbedingung der Gleichungen erfüllt bleibt. Betrachten wir dazu die folgende Ungleichung $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15$. Wie man sieht ist jede Belegung für das Tupel (x_1, x_2, x_3) gültig, solange der Wert auf der linken Seite kleiner oder gleich 15 ist. Eine gültige Lösung für die Ungleichung wäre z.B. $(1,1,1)$ mit $6 \leq 15$.

Gehen wir jetzt einen Schritt weiter und machen aus der Ungleichung eine Gleichung, wodurch wir $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 15$ mit $6 = 15$ erhalten. Was müssen wir tun, um den Ausdruck zu korrigieren, sodass wir weiterhin unsere Lösung verwenden können? Wir führen eine *zusätzliche Variable* u ein, welche die Differenz aus der rechten und linken Seite *auffangen* soll: $3x_1 + x_2 + 2x_3 + u = 15$. Dadurch erhalten wir $6 + u = 15$ mit $u = 9$.

Die Konsequenz daraus ist, dass für jede Schlupfvariable die wir einführen, diese entsprechend zum Vektor der Entscheidungsvariablen dazugegeben werden müssen. Bei n Entscheidungsvariablen und z Schlupfvariablen erhalten wir $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^{n+z}$. Ähnlich wirkt es sich logischerweise auf die Koeffizienten Vektoren bzw. Matrizen aus. Beim Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{K}^{n+z}$ werden z Komponenten am Vektorende mit dem Wert 0 hinzugefügt. Zur Koeffizientenmatrix der Nebenbedingungen fügen wir z Spalten hinzu und erhalten $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times (n+z)}$, wobei m die Anzahl aller Nebenbedingungen in Form von Gleichungen sind. Wichtig ist, dass für jede Nebenbedingung in Form einer Ungleichung *genau eine* Schlupfvariable dazugegeben wird. Zeilenweise betrachtet, steht dann nur in jener dazugehörigen neuen Spalte eine 1, wenn die Schlupfvariable der Nebenbedingung gehört. Ansonsten steht in den Spalten dieser Zeile eine 0. Das folgende Beispiel mit 2 Nebenbedingungen im \mathbb{R}^2 soll das Konzept der Einführung von Schlupfvariablen verdeutlichen:

¹Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der Zeilen, die nicht nur aus 0 bestehen.

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2) \quad \text{mit Schlupfvariablen} \quad \mathbf{x}'^T = (x_1, x_2, s_3, s_4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit Schlupfvariablen} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = (1, 2) \quad \text{mit Schlupfvariablen} \quad \mathbf{c}'^T = (1, 2, 0, 0)$$

$$\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}s_3 & + & a_{14}s_4 & = & x_1 & + & x_2 & + & s_3 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}s_3 & + & a_{24}s_4 & = & 2x_1 & + & 3x_2 & & + & s_4 \end{matrix}$$

5 Zulässiger Bereich

In diesem Abschnitt wollen wir den zulässigen Lösungsbereich linearer Optimierungsprobleme diskutieren. Ausgehend von der Erweiterten Standardform wäre der zulässige Lösungsbereich definiert durch

$$S = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \} \quad \text{mit} \quad S \subset \mathbb{K}^n$$

Es kommt somit jede positive Belegung der Komponenten des Entscheidungsvektors \mathbf{x} in Frage, die das Gleichungssystem der Nebenbedingungen $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, bei gegebenem \mathbf{A} und \mathbf{b} , erfüllen.

Im Grunde machen Nebenbedingungen nichts anderes, als den zulässigen Bereich einzugrenzen, aus dem wir jeden beliebigen Punkt \mathbf{x} auswählen können. Versuchen wir uns dies grafisch in der Ebene \mathbb{R}^2 vorzustellen. Dazu betrachten wir die Abbildung 2.

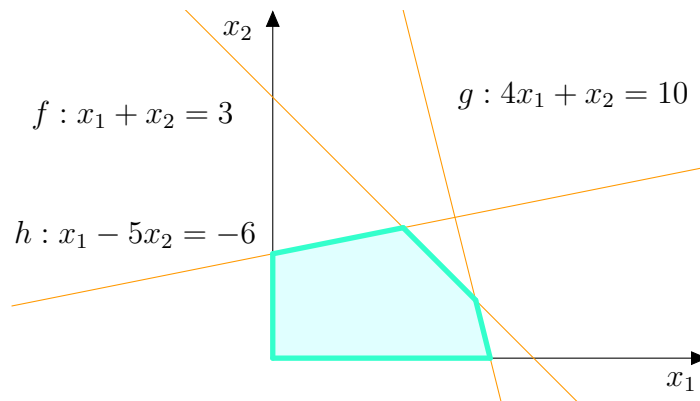


Abbildung 2: Ein zulässiger Bereich im \mathbb{R}^2 .

Wir sehen, dass die Graphen der Abbildungen f , g und h gemeinsam mit den beiden Achsen x_1 , x_2 (Nichtnegativitäts Bedingung) einen Bereich in der Ebene begrenzen, sichtbar durch die dick umrandete blaue Fläche. Die Menge an Punkten in dieser Fläche, inklusive dem Rand, wird als der *zulässige Bereich* bezeichnet. Die Punkte, in denen sich die Abbildungen schneiden, nennt man Eckpunkte der Menge S . In der Abbildung

2 haben wir genau fünf Eckpunkte, die durch die Schnittpunkte der Abbildungen f, g, h und der beiden Achsen $x_1 = 0, x_2 = 0$ zustande kommen.

Aber da wir bei den Abbildungen Gleichheitsbedingungen haben, liegen die für uns interessante Punkte genau entlang der Flächenkanten (dicker blauer Rahmen). Nur bei Ungleichungen (z.B. wenn man $=$ durch \leq ersetzt) wären die Punkte innerhalb des Rahmens auch gültige Lösungen für \mathbf{x} . Im nächsten Abschnitt untersuchen wir weitere wichtige Eigenschaften der Lösungsmenge S .

5.1 Konvexe Körper

Eine zulässige Menge $S \subset \mathbb{K}^n$ muss **konvex** sein. Das bedeutet, wenn zwei beliebige Punkte aus der Menge S ausgewählt werden, dann muss ihre Verbindungsstrecke wieder in S liegen.

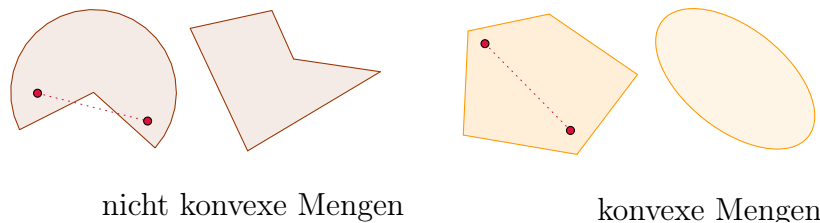


Abbildung 3: Konvexe und nicht konvexe Mengen

Des Weiteren ist der Durchschnitt zweier konvexen Mengen wieder konvex. Die Eigenschaft ist besonders wichtig, wenn wir z.B. die Standardform in die Erweiterte Standardform transformieren. Durch die Einführung zusätzlicher Schlupfvariablen bleibt die zulässige neue Menge S' konvex.

Im vorherigen Abschnitt haben wir außerdem von Eckpunkten einer zulässigen Mengen gesprochen. Dabei nennt man Eckpunkte einer konvexen Menge *Extremalpunkte*, wenn durch die Konvexkombination der Extremalpunkte jeder Punkt innerhalb der konvexen Menge erzeugt werden kann, mit Ausnahme der Extremalpunkte selbst. Die Konvexkombination ist definiert als

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{mit } \mathbf{x}_i \in \mathbb{K}^n, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \text{wobei } \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq 1.$$

Betrachten wir dazu die Abbildung 4, in dem wir $k=3$ Extremalpunkte haben mit $E = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$. Der Punkt \mathbf{x}_4 liegt innerhalb der zulässigen Menge und \mathbf{x}_5 liegt auf der Kante, welche die Punkte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 verbindet.

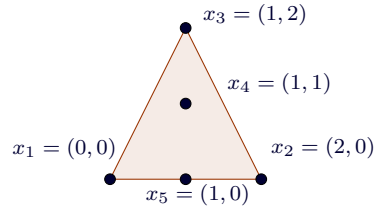


Abbildung 4: Eine konvexe Menge mit drei Eckpunkten x_1, x_2, x_3 .

Wir wollen nun die Punkte $\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5$ als Konvexkombination der Menge E darstellen, dazu stellen wir zuerst die Gleichungen auf und überlegen uns dann bei welchen Belegungen für λ_i diese erfüllt werden.

$$\mathbf{x}_4 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_5 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir könnten diese lineare Gleichungssysteme zwar mit dem gaußschen Eliminationsverfahren lösen, doch in diesem Fall reicht es wenn wir diese durch probieren lösen. Setzt man $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, dann bekommen wir \mathbf{x}_4 . Nehmen wir dagegen die Belegung $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, \frac{1}{2}, 0)$, erhalten wir \mathbf{x}_5 . Somit lassen sich beide Punkte durch die Eckpunkte darstellen.

Dabei bezeichnet man die Menge aller Konvexkombinationen als konvexe Hülle von endlichen Punkten einer konvexen Menge. Demnach ist mit der konvexen Hülle unserer Menge $E = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ die Menge aller Punkte gemeint, die durch die Konvexkombination der Punkte aus E erzeugt werden können.

5.2 Polytop

Wir haben bereits gesehen, wie die Nebenbedingungen den zulässigen Bereich bestimmen. Dabei handelt es sich bei jeder linearen Nebenbedingung um eine Hyperebene im Raum \mathbb{K}^n , die jeweils die Lösungsmenge ihrer Ungleichung bzw. Gleichung repräsentiert. Im \mathbb{R} wäre die Hyperebene ein Punkt, im \mathbb{R}^2 eine Gerade, wie in der Abbildung 5 zu sehen ist, im \mathbb{R}^3 eine Ebene usw.

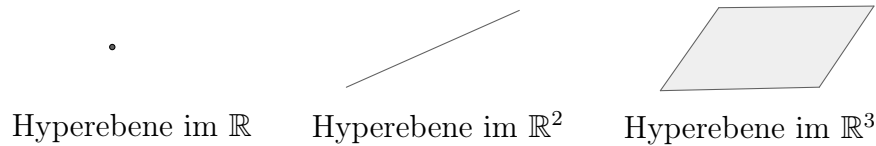


Abbildung 5: Darstellung der Hyperebenen vom eindimensionalen bis zum dreidimensionalen Raum.

Durch die Hyperebenen, bzw. unseren Nebenbedingungen, wird der gesamte verfügbare Raum \mathbb{K}^n deart eingegrenzt, sodass wir einen Teilraum erhalten, der konvex ist. Das ist vergleichbar damit, wenn wir z.B. bei einem quadratischen Kuchen (Raum) von allen 6 Seiten eine lineare Schicht abtragen würden. Es dürfen keine Kerben bzw. nach innen gebeugte Flächen entstehen, es müssen stets die Eigenschaften konvexer Körper erfüllt sein. Solche konvexe Teilräume werden konvexe **Polytope** genannt.

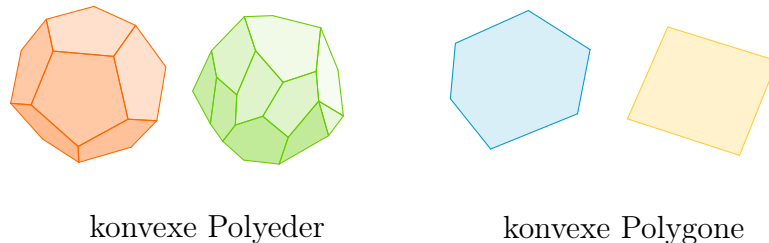


Abbildung 6: Figuren von konvexen Polytopen im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 .

5.3 Beschränktheit

Die Menge eines LP ist beschränkt, wenn der Wert der Zielfunktion nicht beliebig wachsen oder fallen kann, aufgrund von einschränkenden Bedingungen. D.h. die maximale oder minimale Größe die ein Zielwert annehmen kann, hängt vom beschränkten zulässigen Bereich ab. Allgemein ausgedrückt gilt [5]:

Definition 3 Für eine beschränkte Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ muss eine Konstante $d \in \mathbb{R}$ existieren, sodass für alle $\mathbf{x} \in S$ gilt $|\mathbf{x}| \leq d$.

Untersuchen wir und überprüfen wir dazu das nachstehende Beispiel mit dieser Definition.

ZF: $x_1 + x_2 \rightarrow \max!$
 NB: $x_1 \leq 4$,
 $3 \leq x_2 \leq 5$,
 mit $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Unsere zulässige Menge ist bestimmt durch $S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq 4, 3 \leq x_2 \leq 5\}$. Die erste Komponente x_1 kann höchstens 4 annehmen und die andere x_2 kann maximal 5 sein. Unsere Konstante d muss somit mindestens $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{41}$ sein. Somit muss für alle $\mathbf{x} \in S$ gelten $|\mathbf{x}| \leq \sqrt{41} = d$, was bei diesem einfachen Beispiel der Fall ist.

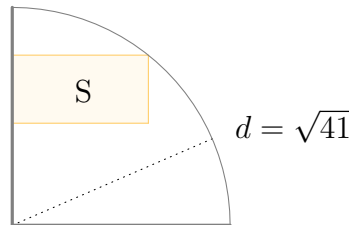


Abbildung 7: Geometrische Darstellung der beschränkten Menge S . Jeder Punkt aus S liegt innerhalb des Viertelkreises mit Radius d .

Eine Menge ist dagegen **unbeschränkt**, wenn der Zielfunktionswert beliebig groß oder klein werden kann und somit einen Wert aus dem Bereich $(-\infty, +\infty)$ annehmen kann, je nachdem ob es sich um ein Minimierungs- oder Maximierungsproblem handelt. Betrachten wir dazu ein weiteres Beispiel eines LPs.

$$\begin{aligned} \text{ZF: } & x_1 + x_2 \rightarrow \max! \\ \text{NB: } & x_1 \geq 4, \\ & \text{mit } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Hier ist die zulässige Menge $S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 4, x_2 \geq 0\}$, wie man ganz einfach sieht, unbeschränkt. Denn $|\mathbf{x}| \leq \infty = d$ ist für alle Punkte aus S erfüllt, wo die erste Komponente $x_1 > 3$ ist und die andere x_2 positiv. Die Konsequenz daraus ist, dass es unendlich viele Lösungen gibt.

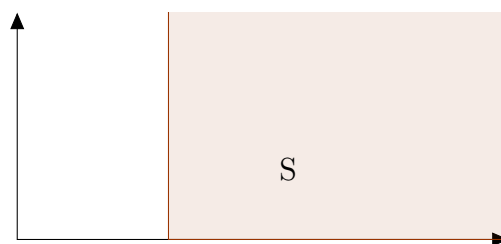


Abbildung 8: Geometrische Darstellung der unbeschränkten Menge S , die nach oben offen ist.

5.4 Lösbarkeit

Ein LP hat eine eindeutige Lösung, wenn die Zielfunktion den zulässigen Bereich S tangiert. Die Lösung ist dabei ein Eckpunkt, wo sich die Hyperebenen schneiden.

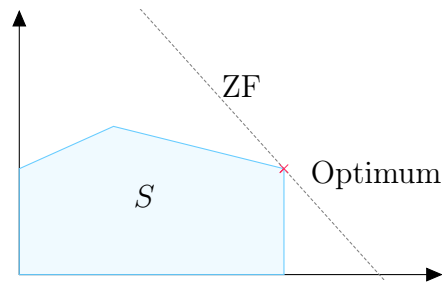


Abbildung 9: Zulässige Menge S mit eindeutiger Lösung

Ein LP hat keine eindeutige Lösung, wenn die Zielfunktion alle Punkte einer Kante eines zulässigen Bereichs S schneidet. In diesem Fall liefern alle Punkte der Kante eine optimale Lösung.

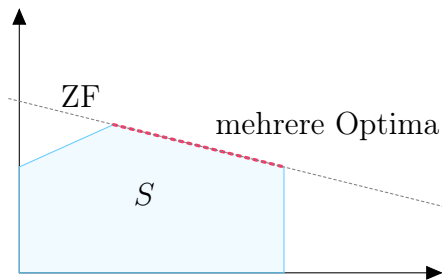


Abbildung 10: Zulässige Menge S mit nicht eindeutiger Lösung

Ein LP ist unlösbar, wenn Nebenbedingungen in Konflikt stehen. Betrachten wir dazu das folgende LP:

$$\begin{aligned} \text{ZF: } & x_1 + x_2 \rightarrow \max! \\ \text{NB: } & x_1 \geq 4, \\ & x_1 \leq 3, \\ & x_2 \geq 4, \\ & \text{mit } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

In diesem Beispiel widersprechen sich die erste und zweite Nebenbedingung, da einerseits verlangt wird, dass der Wert $x_1 \geq 4$ ist, und andererseits muss $x_1 \leq 3$ sein. Somit ist die dazugehörige Menge $S = \{\}$.

6 Grundkonzepte der Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir die Vorgehensweise zum Lösen Linearer Programme näher erläutern.

6.1 Allgemein

Bei Linearen Programmen geht man davon aus, dass die optimale Lösung an einer Ecke des Polytops angenommen wird. Das gilt aber nicht immer, denn es kann auch ein Punkt entlang der Kante des Polytops das gesuchte Optimum sein. Eine optimale Ecke oder ein optimaler Punkt werden als *Basislösung* bezeichnet, vorausgesetzt der Punkt lässt sich als Konvexkombination der Ecken darstellen und die Ecke ist ein Extrempunkt des Polytops und somit müssen beide im zulässigen Bereich enthalten.

Um das Optimum zu finden, muss man sich zunächst eine Startecke auswählen. Meistens kann man den Ursprung als Startecke wählen, wobei es natürlich von den Nebenbedingungen abhängt, ob dies möglich ist oder nicht. Im nächsten Schritt legt man seine Zielfunktion in die Startecke. Nun beginnt die Suche nach einem besserem Optimum. Dazu bewegen wir unsere Zielfunktion entlang der Kanten zu den anderen Ecken des Polyeders. Aber während die Zielfunktion andere Punkte besucht, bleibt ihre *Steigung stets gleich*, d.h. die Zielfunktion wird *parallel* verschoben. Man verschiebt die Zielfunktion solange weiter, solange der *Zielfunktionswert* dabei wächst. Wenn wir im idealen Fall eine Ecke erreichen, indem das Optimum liegt, dann haben wir unsere Basislösung gefunden, und die Verschiebung der Zielfunktion endet hier.

Betrachten wir dazu das Beispiel im \mathbb{R}^2 in der Abbildung 12, um sich diese Vorgehensweise bildlich besser vorstellen zu können. Die Menge der Eckpunkten (x_1, x_2) dieses konvexen Polygons ist $\{A = (0, 0), B = (0, 2), C = (2, 3), D = (5, 2), E = (6, 0)\}$. Das bedeutet S ist die konvexe Hülle von der Menge der Eckpunkten. Begrenzt ist diese Menge somit durch die Abbildungen der drei Nebenbedingungen, die durch die Punkte B und C, C und D, und D und E verlaufen. Aufgrund der nicht Negativität gilt $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$, daher ist der zulässige Bereich nach unten ebenfalls begrenzt. Die Zielfunktion lautet $z = x_1 + x_2$, die maximiert werden soll.

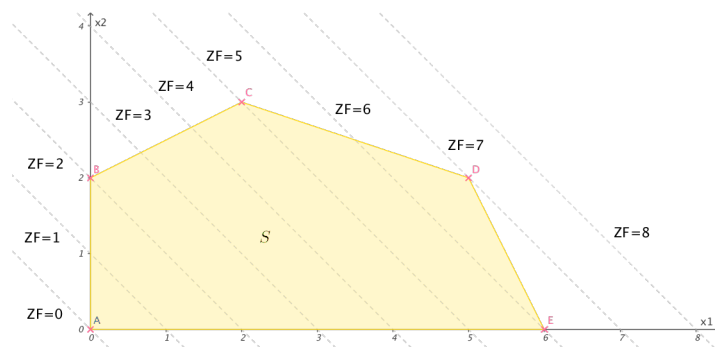


Abbildung 11: Konvexe Menge im \mathbb{R}^2 mit Höhengschichtlinien der Zielfunktion

Die graustrichlierten Höhengschichtlinien repräsentieren die Zielfunktion in verschiedenen Punkten. Wie man sieht, verlaufen alle Höhengschichtlinien parallel, weil die Steigung der Zielfunktion in den verschiedenen Punkten gleich bleibt. Wenn wir die Zielfunktion

nach x_2 auflösen, erhalten wir die Funktion $x_2 = -x_1 + z$, die die Form einer affinen Abbildung hat. Somit kann man die Höhenschichtlinien als Verschiebung der Zielfunktion entlang der x_2 Achse interpretieren. Die zusätzliche Höhe der Verschiebung, ausgehend von der ursprünglichen Lage, hängt vom ZF-Wert z ab. Außerdem gilt, dass alle Punkte einer Höhenschichtlinie den selben ZF-Wert ergeben, wenn man deren Koordinaten in die Zielfunktion einsetzt. Daher stehen die einzelnen Höhenschichtlinien für einen ZF-Wert, wie das auch durch die Beschriftung in der Abbildung verdeutlicht wurde.

Um das Optimum zu finden nehmen wir zunächst eine Startecke an. Dazu bietet sich die Ecke im Ursprung A an. Das ist eine gültige Wahl, weil das Eck im zulässigen Bereich liegt. An dieser Stelle beträgt der ZF-Wert 0. Nun erhöhen wir die x_2 Komponente um den ZF-Wert zu verbessern. Durch die Erhöhung bzw. Senkung der Koordinaten wird die Zielfunktion parallel verschoben. Allerdings geht das nur bis zur Ecke B . Hier beträgt der Wert 2. Nun müssen wir beide Komponenten erhöhen, damit wir den Wert weiter verbessern können und dabei noch im zulässigen Bereich bleiben. Im Punkt C beträgt der Wert nun 5. Jetzt müssen wir x_1 weiter erhöhen und x_2 senken. Hierbei bewegen wir uns entlang der Kante zwischen den Ecken C und D . Zu beachten ist, dass unser ZF-Wert bis jetzt nur gestiegen ist. Während wir uns zum Punkt D bewegen steigt unser ZF-Wert immer weiter an. In der Ecke D erreichen wir unser Optimum mit dem Wert 7. Würden wir in die selben Richtung weiter so verfahren, würde zwar der ZF-Wert ansteigen, aber das Optimum wird außerhalb des zulässigen Bereichs liegen. Was wir machen könnten ist in die Richtung des Eckpunkts E weiterzugehen. Allerdings wird das zur Senkung des ZF-Wertes führen. Somit liegt das Optimum im Punkt $(x_1, x_2) = (5, 2)$, sodass der Zielfunktionswert $z = x_1 + x_2 = 7$ beträgt.

6.2 Simplex Algorithmus

Der Simplex Algorithmus funktioniert im Grunde ähnlich wie im obigen Abschnitt dargestellt. Der Simplex Algorithmus untersucht nicht alle Punkte um das Optimum zu finden. Nachdem eine Startecke angenommen wird, besucht er nur noch Ecken die einen besseren Zielfunktionswert liefern als den bisherigen. D.h. der Wert sinkt nicht und kann nur steigen. Sobald kein Zuwachs des Zielfunktionswertes mehr möglich ist, terminiert der Algorithmus.

6.2.1 Simplextableau

Das Simplextableau ermöglicht ein Lineares Programm systematisch zu lösen. Grundlage dafür bildet die Erweiterte Standardform.

		x_1	\dots	x_j	s_{j+1}	\dots	s_{j+m}	z	b
Simplextableau	NB_1	a_{11}	\dots	a_{1j}	1	\dots	0	0	b_1
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
	NB_m	a_{m1}	\dots	a_{mj}	0	\dots	1	0	b_m
	ZF	c_1	\dots	c_j	c_{j+1}	\dots	c_{j+m}	1	z

Im Großen und Ganzen ist das Tableau selbsterklärend. Zuerst werden die einzelnen Zeilen bzw. Nebenbedingungen der Matrix \mathbf{A} in der Tabelle übertragen und rechts der senkrechten Trennlinie werden die dazugehörigen Werte des Vektors \mathbf{b} übertragen. In der letzten Zeile wird die Zielfunktion eingetragen. Die vorletzte Spalte z repräsentiert den Zielfunktionswert, der Wert selbst steht unten rechts. Im Simplextableau haben wir zwischen den ursprünglichen Entscheidungsvariablen $x_1 \dots x_j$ und den Schlupfvariablen $s_{j+1} \dots s_{j+m}$ unterschieden, um für eine bessere Nachvollziehbarkeit zu sorgen und nachstehende Erläuterungen zu erleichtern, denn in der Erweiterten Standardform werden sie gemeinsam in einer Matrix beschrieben. Nachstehend wird anhand eines Beispiels gezeigt, wie man von der Erweiterten Standardform zum Simplextableau gelangt.

$$\begin{aligned} \text{ZF: } & z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max! \\ \text{NB: } & \begin{array}{rcll} x_1 & +x_2 & +s_1 & \leq 2 \\ 2x_1 & & +s_2 & \leq 4 \end{array} \\ & \text{mit } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Die Nebenbedingungen können direkt übertragen werden, die Spalte z kann ebenfalls direkt eingetragen werden. Die Zielfunktion muss aber umgeformt werden und zwar müssen beide Variablen auf die andere Seite neben z gebracht werden, wodurch wir $-x_1 - 3x_2 + z = 0$.

	x_1	x_2	s_1	s_2	z		
Simplextableau	NB_1	1	1	1	0	0	2
	NB_2	2	0	0	1	0	4
	ZF	-1	-3	0	0	1	0

6.2.2 Algorithmus

Bevor man mit dem Simplex Algorithmus beginnen kann, müssen alle Bedingungen, wie sie in der Erweiterten Standardform verlangt werden, erfüllt sein. Betrachten wir dazu das vorher eingeführte Beispiel, um anhand dessen die einzelne Schritte des Algorithmus zu erläutern.

	x_1	x_2	s_1	s_2	z	
	1	1	1	0	0	2
	2	0	0	1	0	4
ZF	-1	-3	0	0	1	0

Der *1. Schritt* ist eine geeignete **Startecke** zu finden. Dazu können wir die Variablen x_1, x_2 Null setzen. Danach kann man die Koordinaten direkt aus dem Tableau ablesen. Hierbei ist $s_1 = 2$ und $s_2 = 4$. Somit erhalten wir die gültige Startecke $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, 2, 4)$, weil diese im zulässigen Bereich liegt. Das ist unter anderem dadurch erkennbar, dass keine der Komponenten im negativen Bereich liegt. Die Variablen x_1, x_2 sind *Nicht-Basisvariablen*, weil wir sie Null gesetzt haben. Dagegen sind s_1, s_2 unsere *Basisvariablen*, denn in deren Spalten existiert genau eine 1 und sonst nur 0, und die Spalten der Basisvariablen sind linear unabhängig. Deswegen können wir den Wert auf der rechten Seite aus jener Zeile für eine Variable ablesen, in der eine 1 steht. Die maximale

Anzahl der Basisvariablen ist durch die Anzahl der (nicht redundanter) Nebenbedingungen bestimmt. Die Spalte z hat ebenfalls den Zwecke, den Wert der Zielfunktion rechts unten abzulesen.

Die nächsten Schritte haben das Ziel, einen besseren Zielfunktionswert zu finden. Um das zu erreichen, wird aus der Menge der Basisvariablen eine Variable entfernt, und dafür eine andere aus der Menge der Nicht-Basisvariablen hinzugefügt. Dieser Schritt ist vergleichbar mit Verschiebung der Zielfunktion aus der bisherigen Ecke zur nächstgelegenen Ecke mit einem besseren ZF-Wert.

Im *2.Schritt* suchen wir in der Zeile der Zielfunktion den *kleinsten negativen Koeffizienten*, den die Aufnahme dessen Variable zu den Basisvariablen wird die höchste Steigerung des ZF-Wertes bringen, im Vergleich zu allen anderen Nicht-Basisvariablen. Die Spalte mit solchem Koeffizienten bezeichnet man als die **Pivotspalte**. Weil $-3 < -1$ gilt, ist die Spalte von x_2 unsere Pivotspalte.

	x_1	x_2	s_1	s_2	z	
	1	1	1	0	0	2
	2	0	0	1	0	4
ZF	-1	-3	0	0	1	0

Der *3.Schritt* sucht die **Pivotzeile** um das *Pivotelement* zu finden. Dazu bildet man zunächst die Quotienten aus den Koeffizienten der rechten Seite und der Pivotspalte aller Nebenbedingungen. Wir bilden somit $Q_i = b_i/x_{i2}$, allerdings nur für jene Nebenbedingungen, dessen Koeffizienten in der Pivotspalte $x_{i2} > 0$ sind.² Die Pivotzeile ist dann jene mit dem *kleinsten Quotienten*. In unserem Fall ist es die erste Zeile. Die zweite Zeile wird nicht Berücksichtigt, da $x_{22} \leq 0$ ist. Durch die Pivotzeile wird entschieden, welche der Basisvariablen rausgenommen wird, um Platz für die neue Basisvariable zu machen.

x_1	x_2	s_1	s_2	z		Q_i
1	1	1	0	0	2	$\frac{2}{1}$
2	0	0	1	0	4	/
ZF	-1	-3	0	0	1	0

Im *4.Schritt* nimmt man die Variable der Pivotspalte zu den Basisvariablen auf und nimmt dafür die Variable der Pivotzeile raus. In unserm Fall wollen wir die Variable x_2 aufnehmen und die Variable s_1 aus der Menge der Basisvariablen rausnehmen. Zunächst müssen wir das **Pivotelement** bestimmen, das ist der Wert wo sich die Pivotspalte und Pivotzeile überschneiden.

	x_1	x_2	s_1	s_2	z	
	1	1	1	0	0	2
	2	0	0	1	0	4
ZF	-1	-3	0	0	1	0

²Wenn alle Koeffizienten der Pivotspalte negativ sind, dann ist die zulässige Menge unbeschränkt.

Hat man das Pivotelement identifiziert, muss man als nächstes dafür Sorgen, dass das Element den Wert 1 hat und alle anderen Koeffizienten in der Pivotspalte 0 sind. Dies macht man mithilfe elementarer Zeilenumformungen. In unserem Fall hat unser Pivotelement bereits den Wert 1. Allerdings in der letzten Zeile der Pivotspalte haben wir einen Koeffizienten ungleich 0, nämlich -3. Dazu addieren wir die 1. Zeile mal 3 zu der letzten Zeile. Hierbei erhalten wir:

$$\begin{array}{ccccc|c}
 x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & z & \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
 \hline
 ZF & 2 & 0 & 3 & 0 & 1
 \end{array}$$

Nun können wir x_2 zu den Basisvariablen aufnehmen. Die Variable s_1 setzen wir dafür auf 0. Somit sind in der derzeitigen Konstellation die Variablen x_2, s_2 in der Menge der Basisvariablen, alle anderen gehören zu den Nicht-Basisvariablen. Jetzt können wir die Werte der Basisvariablen direkt ablesen. Die momentane optimale Lösung liegt im Punkt $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 2, 0, 4)$. Demnach beträgt unser Zielfunktionswert $z = 6$, ist also um ganze 6 Einheiten gestiegen.

Im letzten *Schritt 5* überprüft man, ob der Zielfunktionswert verbessert werden kann. Dazu sucht man nach negativen Koeffizienten der Nicht-Basisvariablen in der letzten Zeile der ZF. Existiert ein negativer Koeffizient, dann gibt es ein besseres Optimum und man kehrt wieder zum 2. Schritt zurück.³ Andernfalls terminiert der Algorithmus. Es kann natürlich auch schon vor Beginn des Algorithmus passieren, dass sich der Zielwert nicht optimieren lässt. In unserem Fall haben wir das endgültige Optimum gefunden. Wenn wir unsere ursprüngliche Zielfunktion $z = x_1 + 3x_2$ betrachten, dann liegt ihr Optimum in den Koordinaten $(x_1, x_2) = (0, 2)$ mit $z = 6$.

Anmerkung: Da sich die Spalte z bei den Zeilenumformungen nicht verändert und diese sonst auch keine Auswirkungen auf die anderen Spalten hat, kann man diese im Simplextableau weglassen, um Schreibarbeit zu sparen.

6.2.3 Weiteres Bsp.: Negative rechte Seite & Reelle Zahlen

In diesem Beispiel betrachten wir einen Fall, indem wir die Startecke nicht so einfach durch das Nullsetzen der Nicht-Basisvariablen in der gegebenen Anfangskonstellation erhalten und wo wir Ergebnisse erhalten, die keine ganze Zahlen sind. Gegeben ist das Lineare Programm⁴,

³Würde man die Zielfunktion zurück in ihrer ursprünglichen Form $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ bringen, d.h. man bringt die Variablen wieder auf die rechte Seite, dann wären negative Variablen auf der linken Seite positive auf der rechten Seite. Da negative Variablen nicht im zulässigen Bereich liegen, können wir nur solange optimieren, solange die Koeffizienten positiv auf der rechten Seite bzw. negativ auf der linken Seite sind.

⁴Aufgabenstellung aus [5] S. 345

$$\begin{aligned}
\text{ZF: } & -4x_1 - 3x_2 + 180 \rightarrow \max! \\
\text{NB: } & x_1 + x_2 \leq 20, \\
& x_1 + x_2 \geq 10, \\
& x_2 \leq 2x_1, \\
& \text{mit } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

das wir nun gleich direkt in der Erweiterten Standardform überführen. Dazu müssen wir die 2. NB mit -1 multiplizieren, um das Größer-Gleich- in ein Kleiner-Gleich-Zeichen zu ändern. Im nächsten Schritt wandeln wir alle Ungleichungen in Gleichungen um, indem wir für jede NB eine Schlupfvariable (x_3, x_4, x_5) einführen. Auch bei der ZF führen wir eine Variable z ein, und bringen alles bis auf den Koeffizienten 180 auf die andere Seite, wodurch wir $4x_1 + 3x_2 + z = 180$ erhalten. Allerdings lassen wir die Spalte z weg, da sie ohnehin keine Auswirkung auf den Algorithmus und Ergebniss hat. Am Ende erhalten wir somit das folgende Simplextableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	1	1	0	0	20
	-1	-1	0	1	0	-10
	-2	1	0	0	1	0
ZF	4	3	0	0	0	180

Nun müssen wir eine geeignete Startecke suchen. Dazu setzten wir zunächst die Entscheidungsvariablen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, sodass wir den Punkt $(0,0,20,-10,0)$ als Startecke erhalten. Allerdings haben wir ein Problem! Den laut unserer Definition der Erweiterten Standardform erwarten wir $\mathbf{b} \geq 0$, d.h. alle Werte der NB auf der rechten Seite müssen positiv sein, und mit $x_4 = -10$ liegt unsere Startecke somit außerhalb des zulässigen Bereichs. Hierzu gibt es die Möglichkeit die *Groß-M-Methode* zu verwenden, die im Grunde versucht die negativen Werte durch Einführung von Variablen wegzubekommen, um das Weiterrechnen zu ermöglichen. Für dieses Beispiel versuchen wir die Nebenbedingungen bloß mithilfe elementarer Zeilenumformungen in einer gültigen Form zu bringen.

Dazu addieren wir zur 2.NB die 1.NB. Zur 3.NB addieren wir die 1.NB multipliziert mit 2. Abschließend addieren wir zur ZF die 1.NB mal -4 und erhalten:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	1	1	0	0	20
	0	0	1	1	0	10
	0	3	2	0	1	40
ZF	0	-1	-4	0	0	100

Hier sind x_1, x_4, x_5 unsere Basisvariablen und x_2, x_3 werden Null gesetzt. Unsere zulässige Startecke ist somit $(10,0,10,0,20)$. Nun können wir mit dem Simplex-Algorithmus

beginnen. Zunächst suchen wir das *Pivotelement*. In der dritten Spalte der ZF ist der kleinste negative Koeffizient einer Nicht-Basisvariable mit -4. Mithilfe dieser Pivotspalte und der rechten Seite **b** berechnen wir nun die Quotienten, um die Pivotzeile zu ermitteln. D.h wir berechnen b_i/x_{i3} für Nebenbedingungen mit $x_{i3} > 0$. Weil $10/1$ kleiner ist als $20/1$ und $40/2$, ist die zweite Zeile die Pivotzeile. Somit haben wir unser Pivotelement (Rot umrandet) gefunden. Nun wollen wir x_3 zu den Basisvariablen dazu- und x_4 dafür rausnehmen. Dazu müssen alle anderen Koeffizienten in der Spalte des Pivotelements mithilfe von Zeilenumformungen auf 0 gebracht werden. Das erreicht man indem man zur 1.NB die 2.NB mal -1 addiert, zur 3.NB die 2.NB mal -2 addiert und schließlich zur ZF die 2.NB mal 4 addiert. Das Ergebnis davon ist:

$$\begin{array}{ccccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 10 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 10 \\
 0 & \boxed{3} & 0 & -2 & 1 & 20 \\
 \hline
 ZF & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \quad 140
 \end{array}$$

Wir konnten unseren Zielwert um 40 steigern. Da aber in der Zeile der ZF ein negativer Koeffizient bei der Nicht-Basisvariable x_2 auftritt, können wir weiter nach einer besseren Lösung suchen. Aufgrund des Koeffizienten -1 in der letzten Zeile, ist die zweite Spalte die Pivotspalte. Weil $20/3$ kleiner als $10/1$ ist, ist die dritte Zeile unsere Pivotzeile. Den Quotienten für die zweite Zeile berücksichtigen wir nicht, weil der Koeffizient x_{22} nicht größer 0 ist. Da x_4 bereits zu den Nicht-Basisvariablen gehört, wollen wir x_5 durch x_2 ersetzen, sodass x_1, x_2, x_3 unsere Basisvariablen bilden. Dazu müssen wir das Pivotelement zunächst auf 1 bringen. Das machen wir indem wir die 3.NB durch 3 dividieren. Dann addieren wir zur 1.NB die neue 3.NB mal -1. Zur letzten Zeile ZF addieren wir die neue 3.NB und erhalten:

$$\begin{array}{ccccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 10 \\
 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{20}{3} \\
 \hline
 ZF & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \quad \frac{440}{3}
 \end{array}$$

Wenn man die letzte Zeile betrachtet, dann sieht man keine negativen Koeffizienten für alle Variablen x_1, \dots, x_5 mehr, d.h. unser Algorithmus endet hier, weil wir keine bessere Lösung mehr finden können. Der Zielwert konnte um ca. 6 auf 146,66. gesteigert werden. Wenn wir die Werte aus der Tabelle ablesen, liegt das Maximum demnach im Punkt $(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}, 10, 0, 0)$, mit $x_4 = x_5 = 0$ als unsere Nicht-Basisvariablen und mit $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{20}{3}, x_3 = 10$ als den Basisvariablen.

Kehren wir wieder zu unserer ursprünglichen Zielfunktion $z = -4x_1 - 3x_2 + 180$ zurück, und fragen uns, bei welchem x_1, x_2 z den maximalen Wert unter Berücksichtigung aller gegebenen Nebenbedingungen annimmt. Die Antwort : In den Koordinaten $(x_1, x_2) = (\frac{10}{3}, \frac{20}{3})$ nimmt die Zielfunktion ihr Maximum an.

Zu beachten ist auch, dass beide Komponenten dabei rationale Zahlen sind. Hier können solche Lösungen je nach Fragestellung problematisch sein. Wenn es darum gegangen wäre wie viel wir z.B. von den Produkten A und B produzieren müssen, damit wir einen maximalen Umsatz oder Gewinn erzielen, dann reicht es nicht zu sagen von Produkt A produzieren wir 3,33 und von B 6,66 Stück. 0,33 oder 0,66 einer Einheit bzw. ein nicht fertiges Stück kann man nicht produzieren, entweder man fertigt eine ganze zusätzliche Einheit oder gar nicht.

7 Linearisierung von Abbildungen

Manchmal treten Zielfunktionen und Nebenbedingungen auf, die nicht linear sind, aber dennoch in linearer Form umgewandelt werden können. Nachstehend werden einige Möglichkeiten aufgezeigt.

7.1 Betragsfunktionen

Fall 1 Angenommen wir haben eine Nebenbedingung, wo auf der linken Seite die Betragsfunktion auftritt, die durch den Wert auf der rechten Seite nach oben beschränkt ist:

$$|\mathbf{a}^T \mathbf{x}| \leq \max$$

Von der Definition der Betragsfunktion wissen wir, dass der Absolutwert einer Zahl x positiv ist. Wenn $x \geq 0$ ist, dann ist $|x| := x$ und wenn $x < 0$ ist, dann ist $|x| := -x$. Genau diese Tatsache können wir ausnützen und die obige NB in zwei lineare NB umwandeln.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{x} &\leq \max \\ -(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) &\leq \max \end{aligned}$$

Allerdings funktioniert dasselbe *nicht* für Nebenbedingungen, die nach unten beschränkt sind:

$$|\mathbf{a}^T \mathbf{x}| \geq \min$$

Angenommen wir probieren es trotzdem, wodurch wir $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq \min$ und $-(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) \geq \min$ erhalten. Das Problem tritt auf, wenn der Ausdruck $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ positiv ist. Nach der Betragsfunktion muss auch \min positiv oder 0 sein. Der Ausdruck $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ erfüllt unter diesen Annahmen zwar die erste neue NB, aber nicht die zweite, denn hier ist der Ausdruck aufgrund des Minuszeichens negativ und kann somit nicht größer oder gleich \min sein.

Fall 2 Angenommen wir haben eine nichtlineare Zielfunktion, die minimiert werden soll, mit nicht negativen Koeffizienten c_i der Form [4]

$$\sum_{i=1}^n c_i |x_i| + \sum_{j=n+1}^m c_j x_j \rightarrow \min$$

Hier können einzelne Entscheidungsvariablen als Betragsfunktionen auftreten. Man weiß aber, dass sich jede Zahl als die Differenz zweier nicht-negativer Zahlen darstellen lässt. D.h. man kann jede Entscheidungsvariable x_i in einem positiven und negativen Anteil zerlegen:

$$x_i = x_i^+ - x_i^- \quad \text{mit } x_i^+, x_i^- \geq 0$$

Dabei muss eines dieser beiden Anteile 0 sein, d.h. wenn x_i positiv ist, dann ist $x_i^- = 0$ und wenn x_i negativ ist, dann ist $x_i^+ = 0$. Weiters lässt sich folgendes ausdrücken [4][1]:

$$|x_i| = x_i^+ + x_i^-$$

Auch hier kann man ähnliche Überlegungen anstellen. Eines der beiden Anteile muss hier ebenfalls bei der Minimierung 0 werden. Um die Zielfunktion zu linearisieren, ersetzt man nun die Betragsfunktionen durch die Summe ihrer Anteile, also alle $|x_i|$ durch $x_i^+ + x_i^-$ ersetzen. Die Konsequenz daraus ist, dass für jede Betragsfunktion die ersetzt wird, eine zusätzliche Entscheidungsvariable hinzugefügt wird. Auch in den Nebenbedingungen müssen betroffene Entscheidungsvariablen durch ihre Anteile ersetzt werden. Dazu ein Beispiel:

<p>ZF: $3 x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min!$</p> <p>NB: $2x_1 + x_2 \geq 2,$</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_3 = 3,$</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_1, x_2, x_3 \geq 0$</p>	<p>...</p>	<p>ZF: $3(x_1^+ + x_1^-) + 2x_2 + x_3^+ + x_3^- \rightarrow \min!$</p> <p>NB: $2(x_1^+ + x_1^-) + x_2 \geq 2,$</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_3^+ + x_3^- = 3,$</p> <p style="padding-left: 20px;">$x_1^+, x_1^-, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0$</p>
--	------------	--

Fall 3 Angenommen wir haben nach oben beschränkte Nebenbedingungen, ähnlich wie unter *Fall 2*, ohne negativen Koeffizienten c_i der Form:

$$\sum_{i=1}^n c_i |x_i| + \sum_{j=n+1}^m c_j x_j \leq b \quad \text{z.B.:} \quad c_1 |x_1| + c_2 |x_2| + c_3 x_3 \leq b$$

Auch hier gilt dasselbe: Alle Betragsfunktionen $|x_i|$ müssen durch $x_i^+ + x_i^-$ ersetzt werden, und zwar in allen Nebenbedingungen und in der Zielfunktion. Siehe dazu wieder Fall 2.

Fall 4 Nehmen wir an, wir haben Zielfunktionen, wo eine Betragsfunktion auftritt, die den Betrag einer Summe von Entscheidungsvariablen multipliziert mit ihren Koeffizienten ($c_i x_i$) bildet. Solche Zielfunktionen lassen sich linearisieren wenn sie die folgende Form haben [2]:

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right| + \sum_{j=n+1}^m c_j x_j \rightarrow \min \quad \text{z.B.:} \quad |c_1 x_1 + c_2 x_2| + c_3 x_3 \rightarrow \min$$

$$-\left|\sum_{i=1}^n c_i x_i\right| + \sum_{j=n+1}^m c_j x_j \rightarrow \max \quad \text{z.B.:} \quad -|c_1 x_1 + c_2 x_2| + c_3 x_3 \rightarrow \max$$

Hierzu *substituiert man die Betragsfunktion* in der Zielfunktion durch eine neue Variable u' und führt folgende zwei neue Nebenbedingungen ein:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i x_i &\leq u' \\ -\sum_{i=1}^n c_i x_i &\leq u' \end{aligned}$$

Das Beispiel $-|c_1 x_1 + c_2 x_2| + c_3 x_3 \rightarrow \max$ kann somit umgeschrieben werden in

$$-u' + c_3 x_3 \rightarrow \max$$

Zusätzlich zu den bestehenden Nebenbedingungen kommen die Ungleichungen

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \leq u' \quad \text{und} \quad -(c_1 x_1 + c_2 x_2) \leq u'$$

dazu, wo auf der linken Seite der substituierte Ausdruck ohne der Betragsstriche steht, einmal mit und einmal ohne dem Minus vor dem Ausdruck.

7.2 Minimum- und Maximumsfunktionen

Angenommen wir haben eine Zielfunktion, wo das Minimum einer Menge von Funktionen maximiert werden soll, also:

$$\min(F_1(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x})) \rightarrow \max \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$$

Um die Zielfunktion zu linearisieren substituiert man die Minimumsfunktion durch eine Variable u' und bildet neue Nebenbedingungen, wo alle Funktionen in der Menge der Minimumsfunktion nach unten durch u' beschränkt werden, d.h. man erhält [1]:

$$\begin{aligned} u' &\rightarrow \max \\ F_1(\mathbf{x}) &\geq u' \\ &\vdots \\ F_k(\mathbf{x}) &\geq u' \end{aligned}$$

Für $\max(F_1(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x})) \rightarrow \min$ ist die Herangehensweise ähnlich, hier wird die Maximumsfunktion durch eine Variable ersetzt und die Nebenbedingungen werden nach oben beschränkt, d.h. man erhält:

$$\begin{aligned} u' &\rightarrow \min \\ F_1(\mathbf{x}) &\leq u' \\ &\vdots \\ F_k(\mathbf{x}) &\leq u' \end{aligned}$$

Im nachstehenden Max-Min Beispiel wird diese Vorgehensweise nochmals dargestellt:

$$\begin{array}{ll}
\text{ZF: } & \min(x_1 + x_2 - 2, x_1 + 3x_2) \rightarrow \max, \\
\text{NB: } & 2x_2 + x_1 \leq 10, \\
& x_1 \leq 5, \\
& \text{mit } x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
\quad \dots \quad
\begin{array}{ll}
\text{ZF: } & u' \rightarrow \max, \\
\text{NB: } & 2x_2 + x_1 \leq 10, \\
& x_1 \leq 5, \\
& x_1 + x_2 - 2 \geq u', \\
& x_1 + 3x_2 \geq u', \\
& \text{mit } x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}$$

8 Sensitivitätsanalyse

In diesem Abschnitt wollen wir uns damit beschäftigen, welche Auswirkungen Änderungen an Koeffizienten der Zielfunktionen und der Nebenbedingungen auf die optimale Lösung haben können. Dabei geht es vor allem um die Verbesserung der optimalen Lösung, ohne dass es notwendig ist, die optimale Lösung erneut zu berechnen. Man möchte bewerten, wie sensibel bzw. sensitiv die optimale Lösung auf Änderungen reagiert.[3]

8.1 Schattenpreise

Nachdem die optimale Lösung mithilfe des Simplexalgorithmus berechnet wurde, ausgehend von der Erweiterten Standardform, und das Tableau sich im entgültigen Zustand befindet, handelt es sich bei den Werten der Schlupvariablen in der Zeile der Zielfunktionen um die Schattenpreise. Die Schattenpreise geben den absoluten Wert an, um den der Zielfunktionswert steigen kann, wenn der Koeffizient b_i der dazugehörigen Nebenbedingung auf der rechten Seite um 1 erhöht bzw. gelockert wird. Analog gilt das für die andere Richtung, denn möchte man den Zielfunktionswert minimieren, kann man die Nebenbedingung strenger machen, indem b_i gesenkt wird. Betrachten wir hierzu das bereits ausgerechnete Beispiel aus dem Abschnitt 6.2.2 in der Endkonfiguration:

	x_1	x_2	s_1	s_2	
	1	1	1	0	2
	2	0	0	1	4
ZF	2	0	3	0	6

Im Beispiel sind die umrandeten Werte der Variablen s_1, s_2 in der ZF-Zeile die Schattenpreise. Da s_1 für die 1. NB eingeführt worden ist, kann man durch die Erhöhung der rechten Seite dieser NB den ZF-Wert um 3 steigern. Allerdings ist $s_2 = 0$ und eine Erhöhung oder Verkleinerung um 1 der rechten Seite in der 2. NB hat somit keine Auswirkung auf den endgültigen maximalen ZF-Wert. Angenommen wir wollen nun die 1. NB lockern, d.h. wir müssen am Ende einen ZF-Wert von 9 erhalten. Überprüfen wir das:

	x_1	x_2	s_1	s_2	
	1	1	1	0	3
	2	0	0	1	4
ZF	-1	-3	0	0	0

Die rechte Seite der 1.NB wurde auf 3 erhöht. Das Pivotelement ist markiert. Wir addieren nun zur letzten Zeile die 1.NB mal 3 und erhalten:

	x_1	x_2	s_1	s_2	
	1	1	1	0	3
	2	0	0	1	4
ZF	2	0	3	0	9

Wie wir sehen hat die Erhöhung der rechten Seite tatsächlich zu einem Anstieg des ursprünglichen maximalen ZF-Werts geführt. Außerdem ist zu erwähnen, dass es sich bei den Schattenpreisen bzw. den Schlupfvariablen in der ZF-Zeile des Simplextableaus um die Lösung des dualen Programms zum gegebenen primalen LP handelt, und diese können daher auch als die dualen Variablen interpretiert werden.

8.2 Parametersensitivität

8.3 Zielfunktion

Es besteht die Möglichkeit, die Koeffizienten der Zielfunktion, also c_1, \dots, c_i , zu verändern, um einen besseren Zielfunktionswert zu erhalten. Bei der Sensitivitätsanalyse möchten man untersuchen, welche Veränderungen (z.B. als Intervall angegeben) bei den c_i möglich sind, ohne dass die optimale Ecke verlassen wird. In der nachstehenden Abbildung sehen wir drei Zielfunktionen, mit unterschiedlicher Steigung und dem optimalen Punkt C. Bei der roten Zielfunktion handelt es sich um die Ausgangszielfunktion. Dreht man die rote Funktion im Uhrzeigersinn, so erhalten wir die grüne ZF, die einen besseren ZF-Wert erreicht. Übertreibt man die Drehung, so kann man die blaue Funktion erhalten. Dabei ist nun der Punkt D der neue optimale Punkt, aber mit deutlich schlechterem ZF-Wert im Vergleich zu den anderen.

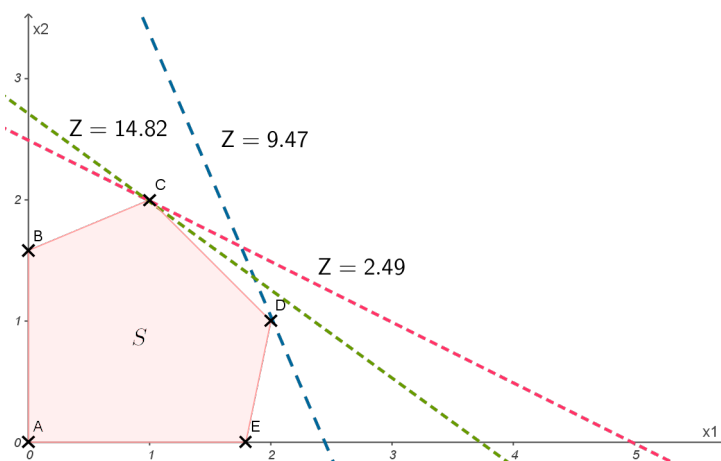


Abbildung 12: Zielfunktion mit unterschiedlichen Steigungen

8.4 Nebenbedingungen

Ähnlich kann man so bei den Nebenbedingungen vorgehen, in dem man die Koeffizienten der rechten Seite $b_1 \dots b_i$ verändert. Allerdings muss man darauf achten, dass in diesem Fall die duale Lösung des LPs (Schlupfvariablen in der ZF-Zeile des Simplextableau in der Endkonfiguration) nicht einen neuen optimalen Eckpunkt annimmt, also wenn die duale Lösung neue koordinaten hat.

9 Vitaminbeispiel

Zunächst definieren wir die Entscheidungsvariablen:

$$x_1 := \textit{Champignons}$$

$$x_2 := \textit{Erbsen}$$

$$x_3 := \textit{Äpfel}$$

$$x_4 := \textit{Sojabohnen}.$$

Dann erhalten wir folgende Gleichungen:

$$x_{B1} = 0,9x_1 + 8x_2 + 0,4x_3 + 9,7x_4$$

$$x_{B2} = 4,2x_1 + 2,7x_2 + 0,3x_3 + 4,9x_4$$

$$x_{B6} = 0,7x_1 + 1,2x_2 + x_3 + 10x_4$$

$$x_C = 50x_1 + 20x_2 + 100x_3 + 10x_4$$

$$x_E = x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 15x_4$$

Dabei ist x_k die Menge von Vitamin k in Milligramm, mit $k \in V = \{B1, B2, B6, C, E\}$, die wir konsumieren wenn wir x_1 kg Champignons, x_2 kg Erbsen, x_3 kg Äpfel und x_4 kg Sojabohnen zu uns nehmen.

Nun möchten wir die empfohlene Tagesdosis möglichst gut nur durch diese vier Lebensmittel decken und daher bestimmen, wie viel von welchem Lebensmittel wir zu uns nehmen sollen. Dies ist auf zwei Arten möglich. Die erste und vor allem aufwändige Art wie man das Beispiel lösen könnte basiert auf folgende Interpretation: Man versucht zumindest die Tagesdosis zu decken und dabei möglichst wenig von diesen Lebensmitteln zu kaufen um die Kosten gering zu halten. Auf diese Weise kann man die optimale Menge der Lebensmittel unabhängig von der absoluten Abweichung bestimmen. Die zweite Art, wie wir sehen werden, löst beide Aufgaben auf einmal und ist daher effizienter.

Daher erhalten wir folgendes "doppel" Minimierungsproblem. Die erste Minimierungsfunktion ist gegeben durch:

$$\sum_{i=1}^4 x_i \rightarrow \min$$

mit den folgenden Nebenbedingungen:

$$x_{B1} \geq 1,1$$

$$x_{B2} \geq 1,4$$

$$x_{B6} \geq 1,4$$

$$x_C \geq 80$$

$$x_E \geq 12$$

Löst man dieses Problem mittels des Excel Solvers, so beträgt insgesamt die Mindestmenge dieser vier Lebensmittel die wir kaufen müssen um mindestens die Tagesdosis zu decken 1,2573709kg, wobei davon 0kg Champignons, 0,568kg Erbsen, 0,686kg Äpfel und 0,003kg Sojabohnen sind, d.h.

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= 0,568 \\x_3 &= 0,686 \\x_4 &= 0,003.\end{aligned}$$

Nun möchten wir ein Optimierungsproblem modellieren, bei dem die summierte absolute Abweichung der konsumierten Milligramm an Vitaminen zu der empfohlenen Dosis minimiert wird.

Dazu definieren wir zunächst j_k als empfohlene Tagesdosis (RDA) von Vitamin k mit $k \in V$ und erhalten somit folgende Minimierungsfunktion für unsere Aufgabe:

$$\begin{aligned}\sum_{k \in V} |x_k - j_k| &= |x_{B1} - 1,1| + |x_{B2} - 1,1| + |x_{B6} - 1,4| + |x_C - 80| + |x_E - 12| \quad (1) \\&\rightarrow \min\end{aligned}$$

Diese Minimierungsfunktion muss jedoch linearisiert werden. Dafür ersetzen wir alle Absolutbeträge $|x_k - j_k|$ durch y_k . Dann können wir unsere Minimierungsfunktion umschreiben zu:

$$\sum_{k \in V} y_k \rightarrow \min \quad (2)$$

Weiters müssen wir abschließend folgende Nebenbedingungen aufgrund der Entfernung der Absolutbeträge einführen:

$$\begin{aligned}y_{B1} &\geq x_{B1} - j_{B1} & y_{B1} &\geq -(x_{B1} - j_{B1}) \\y_{B2} &\geq x_{B2} - j_{B2} & y_{B2} &\geq -(x_{B2} - j_{B2}) \\y_{B6} &\geq x_{B6} - j_{B6} & y_{B6} &\geq -(x_{B6} - j_{B6}) \\y_C &\geq x_C - j_C & y_C &\geq -(x_C - j_C) \\y_E &\geq x_E - j_E & y_E &\geq -(x_E - j_E)\end{aligned} \quad (3)$$

Wenn wir nun das Minimierungsproblem (2) mit den Nebenbedingungen (3) mittels Excel Solver lösen, dann erhalten wir, dass 4,106 Milligramm die minimale summierte absolute Abweichung der konsumierten Milligramm an Vitaminen zu der empfohlenen

Dosis ist.

Die zweite und kürzere Art berechnet die absolute summierte Abweichung und die optimale Menge der Lebensmittel mittels eines Minimierungsproblems. Dabei wird wie in der ersten Art die Funktion (1) mit den Nebenbedingungen (2) minimiert. Der Unterschied zur ersten Berechnungsweise ist jener, dass man bei der zweiten Berechnungsweise jene Variablenzellen im Excel Solver ändert die den Variablen y_k mit $k \in V$ und x_1 bis x_4 entsprechen.

Nun möchten wir ein Optimierungsproblem modellieren, die die summierte relative Abweichung der konsumierten Milligramm an Vitaminen zu der empfohlenen Dosis minimiert und im Zuge dessen gleich die optimale Menge der Lebensmittel berechnet. Das heißt wir wollen die folgende Funktion minimieren:

$$\sum_{k \in V} \frac{|x_k - j_k|}{j_k} = \frac{11|x_{B1} - 1,1|}{10} + \frac{5|x_{B2} - 1,1|}{7} + \frac{5|x_{B6} - 1,4|}{7} + \frac{|x_C - 80|}{80} + \frac{|x_E - 12|}{12}$$

$$\rightarrow \min$$

Da wir nun $y_k = |x_k - j_k|$ mit $k \in V$ haben, setzen wir dies in unsere Zielfunktion ein und erhalten daher folgende Minimierungsfunktion,

$$\sum_{k \in V} \frac{y_k}{j_k} = \frac{11y_{B1}}{10} + \frac{5y_{B2}}{7} + \frac{5y_{B6}}{7} + \frac{y_C}{80} + \frac{y_E}{12} \quad (4)$$

$$\rightarrow \min$$

mit den selben Nebenbedingungen die auch im absoluten Fall gegeben sind also (3). Wenn wir nun das Minimierungsproblem (4) mit den Nebenbedingungen (3) mittels Excel Solver lösen, dann erhalten wir für die summierte relative Abweichung 61,194629%. Dabei ändern wir jene Variablenzellen im Excel Solver, die den Variablen y_k mit $k \in V$ und x_1 bis x_4 entsprechen. Für die optimale Lebensmittelmenge erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,212kg \\ x_2 &= 0,0126kg \\ x_3 &= 0,6859kg \\ x_4 &= 0,0550kg \end{aligned}$$

Literatur

- [1] LP Modeling Tricks. http://www.ms.unimelb.edu.au/~moshe/620-362/Lecture_Notes/lp_tricks.pdf. Letzter Zugriff: 20.01.2016.
- [2] LP-Solve. <http://lpsolve.sourceforge.net/5.1/absolute.htm>. Letzter Zugriff: 20.01.2016.
- [3] Peter Buchholz. Lineare Optimierung. http://ls4-www.cs.tu-dortmund.de/download/buchholz/MA0/MA0_10.pdf. Letzter Zugriff: 20.01.2016.
- [4] Horst A Eiselt and C-L Sandblom. *Linear programming and its applications*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] Gerald Teschl and Susanne Teschl. *Mathematik für Informatiker: Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra*. Springer-Verlag, 2007.
- [6] Gabriele Uchida. Der Simplex Algorithmus - Vorlesungsunterlagen, WS 2015.
- [7] Gabriele Uchida. Lineare Optimierung - Vorlesungsunterlagen, WS 2015.