Unitatea de învățare 12 – *2 ore*

Ecuații neliniare *(continuare)*

12.1. Algoritmi pentru determinarea unei soluții. Algoritmi cu convergență sigură.

Algoritmul bisecțiilor succesive.

Algoritmul poziției false.

12.2. Algoritmi pentru determinarea unei soluții. Algoritmi cu convergență condiționată.

Algoritmul Newton-Raphson.

Algoritmul Traub.

Cunoștințe și deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unități de învățare vei cunoaște:

- tipurile de algoritmi utilizați în rezolvarea ecuațiilor neliniare;
- algoritmii cu convergență sigură și anume bisecția succesivă și algoritmul poziției false;
- algoritmii cu convergență condiționată: algoritmul Newton-Raphson și algoritmul Traub.

12.1. Algoritmi pentru determinarea unei soluții. Algoritmi cu convergență sigură. *(continuare)*

Algoritmul bisecțiilor succesive

Se consideră funcţia $f(x)$, continuă, definită pe un domeniu $D \in \Re$ şi intervalul $[x_1, x_2]$, interval care conţine zeroul funcţiei α. Această ultimă condiţie este materializată prin

$$f(x_1) * f(x_2) < 0 . \tag{12.1}$$

Algoritmul iterativ presupune determinarea unui nou punct x_3, ca medie aritmetică a celor două puncte luate în considerare, figura 12.1

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} . \tag{12.2}$$

Dacă $|f(x_3)|$ este suficient de mic,

$$|f(x_3)| \le \varepsilon_1 \tag{12.3}$$

calculul se consideră încheiat, x_3 fiind soluţia ecuaţiei $f(x) = 0$.

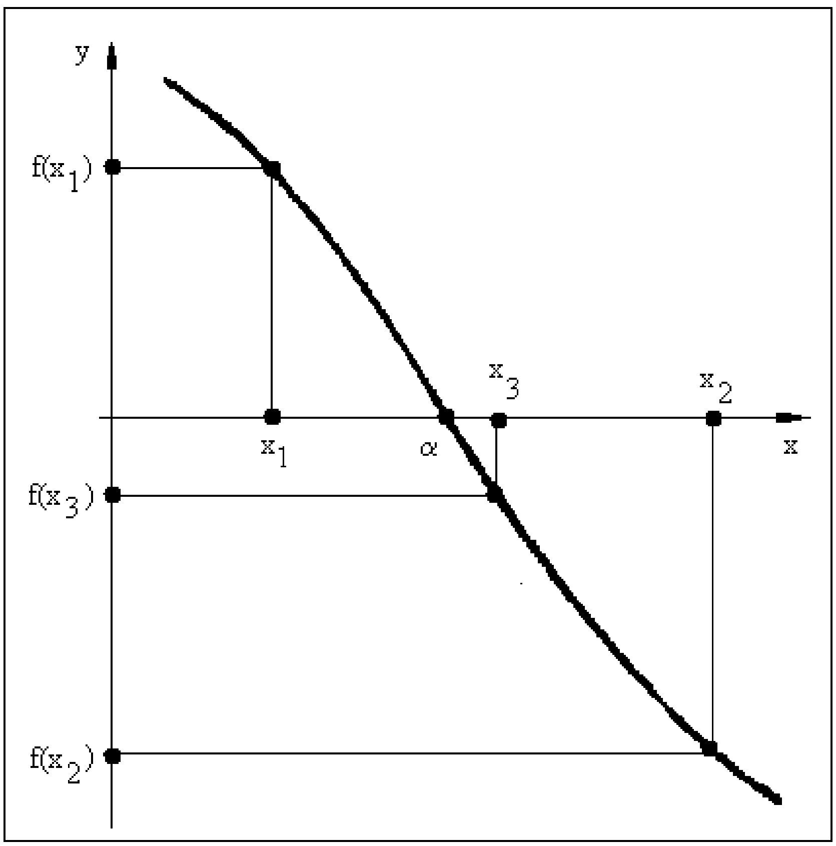

Fig. 12.1. Ilustrarea grafică a metodei bisecţiei succesive.

În caz contrar se continuă calculul folosind unul din cele două subintervale obţinute prin bisecţie. Pentru a stabili în care din cele doua subintervale se găseşte zeroul funcţiei, se testează produsul valorilor funcţiei în punctele x_1 şi x_3 sau în punctele x_3 şi x_2.

De exemplu, dacă este satisfacută relaţia

$$f(x_1) * f(x_3) < 0, \tag{12.4}$$

atunci α aparţine subintevalului $[x_1, x_3]$, în caz contrar, subintervalul selectat va fi $[x_3, x_2]$.

În ipoteza în care subintervalul selectat a fost $[x_1, x_3]$, se fac atribuirile

$$x_2 = x_3 \tag{12.5}$$

şi calculul se reia cu noul interval $[x_1, x_2]$.

Calculul, se consideră încheiat dacă se atinge precizia impusă pentru zeroul funcţiei (12.3). Pentru funcţii cu pante foarte mici, limita ε_1 poate fi atinsă într-un interval destul de larg, ceea ce conduce la o eroare apreciabilă în evaluarea zeroului funcţiei, figura 12.2. Aceasta situaţie poate fi evitată dacă se impune condiţia

$$|x_2 - x_1| \le \varepsilon_2 . \tag{12.6}$$

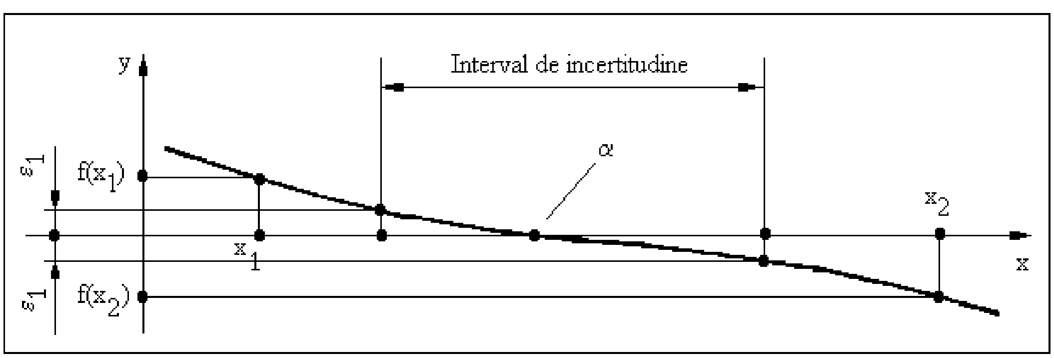

Fig. 12.2. Metoda bisecţiilor succesive aplicată la funcţii cu pantă foarte mică.

Îndeplinirea simultană a condiţiilor (12.3) şi (12.6) conduce la un efort de calcul apreciabil. Eliminarea situaţiilor prohibitive în ceea ce priveşte timpul de calcul, se face prin limitarea numărului de iteraţii, $n \le N_{max}$.

Algoritmul poziției false

Fie funcţia $f(x)$, continuă, definită pe un domeniu $D \in \Re$ şi intervalul $[x_1, x_2]$ care conţine zeroul funcţiei, α

$$f(x_1) * f(x_2) < 0\,, \qquad (12.7)$$

Prin punctele $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ se construieşte o secanta care intersectează axa Ox în punctul x_3, figura 12.3.

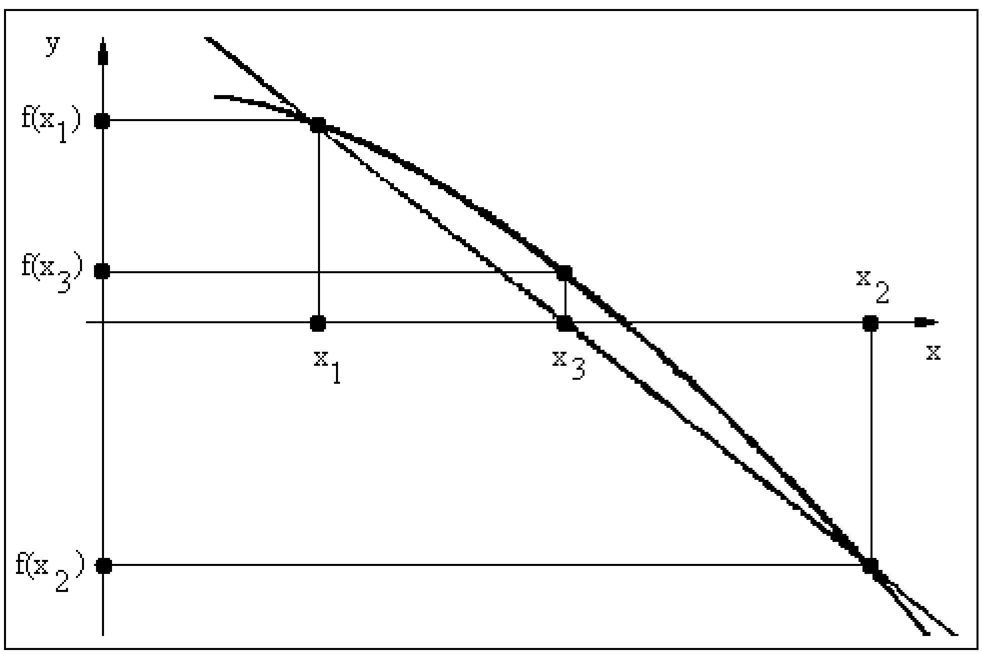

Fig. 12.3. Ilustarea algoritmului poziţiei false.

Secanta este o funcţie liniară de x,

$$g(x) = ax + b\,, \qquad (12.8)$$

care trece prin punctele $(x_1, f(x_1))$ şi $(x_2, f(x_2))$, respectiv

$$\begin{cases} ax_1 + b = f(x_1) \\ ax_2 + b = f(x_2) \end{cases}, \tag{12.9}$$

Soluţia algebrică a sistemului (12.9) este

$$\begin{cases} a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ b = \dfrac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} \end{cases}, \tag{12.10}$$

Intersecţia secantei cu abscisa este

$$g(x_3) = 0,$$

respectiv utilizând structura (12.8) a funcţiei $g(x)$ şi coeficienţii (12.10)

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \tag{12.11}$$

Valoarea funcţiei în punctul de coordonate $(x_3, f(x_3))$ este mai mică în valoare absolută decât valorile funcţiei în punctele utilizate la construcţia secantei. Dacă $f(x_3)$ atinge precizia impusă

$$|f(x_3)| \le \varepsilon \tag{12.12}$$

atunci calculul se consideră încheiat,

În caz contrar se determină subintervalul ce conţine zeroul funcţiei şi se construieşte o nouă secantă, deplasând convenabil punctele x_1 sau x_2

$$x_2 \leftarrow x_3, \quad f(x_1) * f(x_3) < 0, \tag{12.13}$$

sau

$$x_1 \leftarrow x_3, \quad f(x_2) * f(x_3) < 0. \tag{12.14}$$

Metoda secantei converge mai rapid către zeroul funcţiei decât metoda bisecţiilor succesive.

Test de autoevaluare

1. Să se prezinte etapele de calcul ale algoritmului bisecțiilor successive.
2. Care este avantajul utilizării algoritmului poziției false?

12.2. Algoritmi cu convergenţă condiţionată

În aceasta categorie, mult mai numeroasă, se înscriu algoritmii Newton-Raphson, Cebâşev, Ward, Bailey, Traub.

Algoritmul Newton-Raphson.

Fie funcţia $f(x)$, continuă şi derivabilă pe un domeniu $\boldsymbol{D} \subset \Re$. Pentru funcţia f se cunoaşte şi expresia funcţiei derivată, $f'(x)$. Fie x_1 un punct aparţinând domeniului de definiţie al funcţiei şi în acelaşi timp o primă aproximare a soluţiei α a ecuaţiei $f(x)=0$.

În punctul de coordonate $(x_1, f(x_1))$ se construieşte tangenta la curba $y = f(x)$. Ecuaţia tangentei este

$$y = a_0 + a_1 x, \tag{12.15}$$

unde

$$a_1 = \frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_1}. \tag{12.16}$$

Tangenta definită prin (12.15) trece prin punctul de coordonate $(x_1, f(x_1))$, respectiv are ecuaţia

$$f(x_1) = a_0 + x_1 * f'(x_1), \tag{12.17}$$

fapt ce conduce la

$$a_0 = f(x_1) - x_1 * f'(x_1). \tag{12.18}$$

Utilizând (12.15), (12.16) şi (12.18), ecuaţia tangentei devine

$$y = f(x_1) - x_1 * f'(x_1) + x * f'(x_1). \tag{12.19}$$

Punctul de intersecţie al tangentei cu axa *Ox* constituie o nouă aproximare *x_2* a soluţiei ecuaţiei $f(x) = 0$

$$0 = f(x_1) - x_1 * f'(x_1) + x_2 * f'(x_1), \tag{12.20}$$

respectiv

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{12.21}$$

Noul punct *x_2* reprezintă o aproximare mai bună a soluţiei α a ecuaţiei $f(x) = 0$. Calculul se consideră încheiat când este îndeplinită condiţia

$$|f(x_2)| \le \varepsilon. \tag{12.22}$$

Dacă (12.22) nu este îndeplinită, se fac atribuirile :

$$\begin{cases} x_1 \leftarrow x_2 \\ f(x_1) \leftarrow f(x_2) \end{cases} \tag{12.23}$$

În cazul în care derivata $f'(x)$ îşi schimbă semnul, calculul trebuie oprit, deoarece a fost localizat un extrem local.

Algoritmul Traub

Performanţele algoritmului Newton-Raphson sunt limitate de necesitatea cunoaşterii expresiei derivatei funcţiei $f(x)$. Acest inconvenient este luat în considerarea de către algoritmul Traub, care realizează performanţele algoritmului Newton-Raphson şi, în acelaşi timp, nu necesită expresia funcţiei derivată.

Dezvoltând în serie Taylor funcţia $f(x)$ în vecinătatea punctului $(x_i, f(x_i))$ cu primii trei termeni se obţine

$$f_L(x) \cong f(x_i) + (x - x_i) * f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} f''(x_i). \tag{12.24}$$

Intercecţia aproximatei (4.37) cu axa *Ox* conduce la ecuaţia de gradul 2

$$\frac{(x - x_i)^2}{2} f''(x_i) + (x - x_i) * f'(x_i) + f(x_i) = 0\,, \tag{12.25}$$

a cărei soluţie analitică este

$$x - x_i = \frac{-f'(x_i) \pm \sqrt{(f'(x_i))^2 - 2 * f'(x_i) * f''(x_i)}}{f''(x_i)}. \tag{12.26}$$

Soluţia (4.39) se poate aranja sub forma

$$x = x_i + \frac{-f'(x_i) \pm \sqrt{(f'(x_i))^2 - 2 * f'(x_i) * f''(x_i)}}{f''(x_i)}. \tag{12.27}$$

Prin compararea (4.40) cu relaţia de calcul din cadrul algoritmului Newton-Raphson

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \tag{12.28}$$

se ajunge la concluzia că numărătorul relaţiei (12.34) are semnificaţia unei derivate de ordinul întâi şi că relaţiile (12.28) şi 12.34) sunt echivalente.

Algoritmul Traub estimează derivata de ordinul unu şi doi din valorile funcţiei $f(x)$ în trei puncte: x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, relaţiile de calcul utilizate fiind următoarele:

$$\frac{df}{dx}\Big|_{2-1} = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{x_{i-1} - x_{i-2}}; \qquad (12.29)$$

$$\frac{df}{dx}\Big|_{1-0} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}; \qquad (12.30)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_{2-0} = \frac{\frac{df}{dx}\Big|_{1-0} - \frac{df}{dx}\Big|_{2-1}}{x_i - x_{i-2}}; \qquad (12.31)$$

Estimarea derivatei de ordinul unu în afara domeniului $[x_{i-2}, x_i]$se face prin dezvoltare în serie Taylor a funcţiei derivată

$$f'(x) \cong f'(a) + (x-a) * f''(a). \qquad (12.32)$$

Aplicarea estimării (4.38) la domeniul $[x_i, x_{i+1}]$ conduce la următoarea formă a exprsiei derivatei de ordinul întâi

$$\frac{df}{dx}\Big|_{i,i+1} = \frac{df}{dx}\Big|_{i-1,i} + (x_i - x_{i-1})\frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_{i-2,i}. \qquad (12.33)$$

Utilizând

$$\tilde{f}'_{i,i+1} = -\frac{df}{dx}\Big|_{i,i+1} \pm \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\Big|_{i,i+1}\right)^2 - 2 * f(x_i) * \frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_{i-2,i}}. \qquad (12.34)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\tilde{f}'_{i-2,i}}. \qquad (12.35)$$

Test de autoevaluare

3. Să se prezinte etapele de calcul ale algoritmului Newton-Raphson.
4. Când este necesară utilizarea algoritmului Traub?

Lucrare de verificare

Să se rezolve următoarea ecuație:

$$x^4 - 26x^3 + 131x^2 - 226x + 120 = 0,$$

utilizând unul dintre algoritmii prezentați în această unitate de învățare.