Unitatea de învăţare 1 - *2 ore*

Precizia calculelor numerice. Aplicaţii

Cunoştinţe şi deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unităţi de învăţare vei înţelege:

- ce sunt erorile şi de ce tipuri sunt;
- exprimarea numerelor în diferite baze de numeraţie şi conversia dintr-o bază în alta;
- efectuarea operaţiilor în virgulă mobilă.

În această unitate de învăţare sunt prezentate concepte privind erorile, exemple ale acestora, precum si reprezentarea numerelor in diferite baze de numeratie si conversia acestora intre baze.

1. Precizia calculelor numerice

Problema aproximărilor erorilor, a preciziei legate de calculul numeric, a prezentat dintotdeauna o importanţă deosebită în inginerie precum si ştiinta şi matematica aplicată. O recunoaştere a acestui fapt este şi aceea că toate domeniile de bază din domeniile amintite acorda precizia cuvenită preciziei calculelor. Activitatea concretă a omului nu poate fi imaginată fără soluţionarea de probleme, presupunand aspecte de aproximare, de erori şi de precizie. Toate aceste aspecte au caştigat în importantă o dată cu dezvoltarea şi utilizarea calculatorului în toate domeniile de activitate umană. Fără a neglija importanţa soluţiilor matematice oferite de matematică, cele mai multe probleme de inginerie în general nu cunosc decât soluţii numerice. În activitatea concretă a soluţiilor numerice, utilizatorul tehnicii de calcul moderne este obligat sa ţină seama de problemele privitoare la aproximare şi erori, de influenţa acestora asupra preciziei rezultatelor obţinute. Un prim aspect care trebuie luat în vedere este acela ca modelele matematice cu care se operează constituie ele insele aproximări ale proceselor şi fenomenelor reale. Deşi aceste modele matematice sunt perfecţionate de la o etapă la alta, renunţandu-se treptat la o parte din ipotezele şimplificatoare, diferenţa dintre acestea şi sistemul fizic la care se referă nu va putea fi niciodată eliminată ci numai simplificată. Modelele matematice cu care se operează în inginerie reprezintă întotdeauna aproximari ale realitătii. Datele de intrare ale modelelor matematice au ca sursă primară, într-un fel sau altul, măsurile fizice care în mod inevitabil sunt însoţite de erori. Rezultatul unei măsurări trebuie să fie astfel prezentat încât sa fie însoţit şi de o apreciere asupra preciziei valorii numerice cu ajutorul căreia este exprimat. Erorile care însoţesc modelele matematice şi datele de intrare sunt denumite curent inerente. Pentru cele mai multe modele matemetice aplicate în inginerie nu sunt cunoscute soluţiile analitice ci cele numerice. Aplicarea unui algoritm numeric la tratarea unui model matematic presupune introducerea unor noi abateri, cum sunt de exemplu aproximarile pe intervale ale derivatei sau integralei, acestea fiind originea a ceea ce este cunoscut sub denumirea de erori de trunchiere. Calculatoarele au memorie şi registre de calcul finite, fapt pentru care numai o multime discretă de numere reale poate fi generată, tratată şi memorată. Din acestă cauză este imposibil să fie reprezentate cantităţi infinitenzimale sau infinit de mari. Ca urmare, la executarea unui program de către un calculator, inervine o categorie suplimentară de erori şi anume erorile de rotunjire. Acestea sunt urmarea firească a faptului că rezultatul oricărei operaţii aritmetice nu poate fi reţinut în registrele de calcul şi în locaţiile de memorie ale calculatorului decât sub forma unui număr finit de cifre.

1.1. Erori absolute si relative

Fie un număr real *x*. Prin aproximanta numărului *x* se întelege orice număr raţional $\bar{x}$ care poate fi utilizat în calcule în locul lui *x*. Eroarea e_x este definită cu ajutorul relaţiei [2]

$$e_x = x - \bar{x}. \tag{1.1}$$

Eroarea absolută a unei aproximante este

$$a_x = |\bar{x} - x| > 0 \tag{1.2}$$

Cunoaşterea erorii absolute a unei aproximante permite a se da o încadrare a numărului real *x* între anumite limite :

$$\bar{x} - a_x \leq x \leq \bar{x} + a_x \qquad (1.3)$$

Eroarea relativă a aproximatei $\bar{x}$ a numărului real este definită ca raportul dintre eroarea absolută a aproximatei $\bar{x}$ şi valoarea absolută a numărului *x*

$$\varepsilon_x = \frac{|\bar{x} - x|}{|x|} = \frac{a_x}{|x|}. \qquad (1.4)$$

Dacă se asociază numărul *x* valorii reale a unei mărimi fizice şi aproximata $\bar{x}$ rezultatului măsurării, este clar ca valoarea lui *x* nu se cunoaşte. Din această cauză numărul *x* de la numitorul relaţiei (1.4) este înlocuit cu aproximata sa $\bar{x}$, astfel încât

$$\varepsilon_x = \frac{a_x}{|\bar{x}|}.$$

1.2. Erori de trunchiere

Eroarea de trunchiere este deosebit de frecventă în cadrul metodelor de calcul numeric. Ea intervine ori de câte ori un calcul numeric infinit este înlocuit cu unul finit, ceea ce constituie de fapt o trăsătură a majorităţii algoritmilor prezentaţi în capitolele următoare.

Foarte multe modele matematice din inginerie nu au soluţii analitice ci doar numerice. Aplicarea unui algoritm numeric la tratarea unui model matematic presupune introducerea unor noi erori, cum sunt de exemplu aproximările pe intervale ale derivatei sau integralei. Aceste erori sunt cunoscute sub denumirea de erori de trunchiere [3].

Exemplul 1.1. Pentru calculul sinusului unui unghi *x* în radiani poate fi folosită seria lui Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots \qquad (1.5)$$

Deorece seria este infinită, nu pot fi utilizaţi în calcul toţi termenii acesteia, ci numai un număr finit de termeni, de exemplu primii patru sau cinci. Termenii omişi, care sunt în număr infinit, introduc o eroare în rezultatul calculelor.

Să considerăm situaţia în care sunt luaţi în considerare succesiv, termenii de rang $1,2,\ldots,5$. În tabelul 1.1 sunt prezentate valorile estimatei numărului $sin1$ şi a erorii relative a acesteia. Se consideră ca valoare exactă $sin1 = 0{,}8414709$.

Tabelul 1.1

Variaţia estimatei şi a erorii relative a numărului $sin1$

Număr termeni	Estimata numărului $sin1$	Eroarea relativă [%]
1	1,0000000	18,83
2	0,8333333	0,96
3	0,8416666	$2{,}32 * 10^{-2}$
4	0,8414682	$3{,}20 * 10^{-4}$
5	0,8414710	$1{,}18 * 10^{-5}$

<u>*Exemplul 1.2*</u>. Se consideră algoritmului Newton-Raphson pentru rezolvarea ecuaţiilor neliniare. Acest algoritm are la baza descompunerea în serie Taylor a funcţiei *f(x)*

$$f(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f'(x_{i-1})}{1!}(x - x_{i-1}) + \frac{f''(x_{i-1})}{2!}(x - x_{i-1})^2 + \ldots \quad (1.6)$$

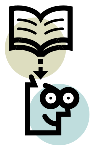
Astfel, dacă se iau în consideraţie numai primii doi termeni din seria Taylor, se obţine

$$x_i = x_{i-1} - f(x_{i-1})/f'(x_{i-1}) \quad . \quad (1.7)$$

Luând în consideraţie numai primii doi termeni din seria Taylor, rezultatul a fost trunchiat, eroarea de trunchiere fiind în acest caz

$$(x_i - x_{i-1})^2 f''(\xi)/2, \quad (1.8)$$

unde $\xi \in (x_i, x_{i-1})$.



Test de autoevaluare

Determinaţi eroarea relativă maximă pentru x, în cazurile:

a) $x_1 = 2{,}3 \pm 0{,}2$;

b) $x_2 = 22{,}3 \pm 0{,}2$;

c) $x_3 = 203{,}3 \pm 0{,}2$.

Care din aceste trei numere are precizia relativă cea mai bună?

Lucrare de verificare

1. **Ce sunt erorile de trunchiere. Dati exemple de astfel de erori.**
2. **Definiti erorile absolute si relative.**
3. **Calculaţii eroarea relativă maximă pentru:**

$$E = \frac{x_1 \cdot x_{2^2}}{x_3},$$

unde x_1, x_2, x_3 sunt valorile din problema 1 de la testul de autoevaluare anterior.