Unitatea de învățare 14 – *2 ore*

Ecuații diferențiale

Cunoștințe și deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unități de învățare vei cunoaște:

- metoda lui Euler pentru rezolvarea numerică a ecuației diferențiale ordinare de ordinul unu ca problemă Cauchy;
- metoda Runge – Kutta de ordinul patru.
-

14.1. Metoda lui Euler pentru rezolvarea ecuației diferențiale ca problemă Cauchy

Pentru ecuația diferențială ordinară de ordinul unu $y^{'} = f(x, y)$, unde *f* este o funcție dată, trebuie gasită soluția $y = y(x)$. Dacă în plus, există și condiția inițială $y(x_0) = y_0$, unde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ sunt date, atunci se poate spune că există o problemă Cauchy.

În cele ce urmează este prezentată metoda lui Euler. Se dorește aflarea soluției aproximative a problemei Cauchy.

Se consideră intervalul $[a, b]$, unde $a = x_0$ și se împarte acest interval în *n* părți egale cu nodurile $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Fie

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Rezultă $x_1 = x_0 + h$

și

$$y' \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}.$$

Din egalitatea $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ se obține $\frac{y_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0)$, adică $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$. Valoarea y_1 va fi o valoare aproximativă pentru curba teoretică a ecuației diferențiale de ordinul unu în punctul x_1 , adică $y_1 \approx y(x_1)$. Atunci când se cunoaște punctul (x_k, y_k), punctul următor se obține prin formulele $x_{k+1} = x_k + h$ și $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$. Aceasta înseamnă că, pentru a rezolva problema Cauchy trebuie întocmit următorul tabel

x	x_0	x_1	...	x_n
$y(x)$	y_0	y_1	...	y_n

Se poate demonstra că dacă numărul nodurilor crește, adică *h* tinde către zero, atunci metoda lui Euler este o metodă convergentă. Într-adevăr, pentru orice $k = \overline{1, n}$ se evaluează expresia $|y(x_k) - y_k|$, unde $y(x_k)$ este valoarea teoretică a curbei integrale $y = y(x)$ în punctul $x = x_k$,

iar y_k este valoarea numerică aproximativă în punctul $x = x_k$.

Din problema Cauchy

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ și } y(x_0) = y_0 \tag{14.1}$$

se obține

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt + y_0 \tag{14.2}$$

Algoritmul corespunzător metodei Euler este următorul [7]:

- date de intrare: a, b, n, f, y_0 ;
- fie

$$h := \frac{b-a}{n} ;$$

$$x[0] := a ;$$

$$y[0] \coloneqq y_0;$$

- pentru $i = \overline{0, n-1}$ execută

$$x[i+1] \coloneqq x[i] + h;$$
$$y[i+1] \coloneqq y[i] + h \cdot f(x[i], y[i])$$

- tipărește x, y (adică $x[i]$ și $y[i]$ pentru $i = \overline{0, n}$).

Metoda lui Euler se poate extinde și pentru sisteme de ecuații diferențiale ordinare. Se pune problema rezolvării numerice a următoarei probleme Cauchy:

$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}$ cu $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$, unde f_1 și f_2 sunt funcții date, iar x_0, y_0, z_0 sunt numere date.

În acest caz metoda lui Euler are forma:

$$x_1 = x_0 + h$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f_1(x_0, y_0, z_0)$$

$$z_1 = z_0 + h \cdot f_2(x_0, y_0, z_0) \ ,$$

unde $h = \frac{b-a}{n}$, luând nodurile: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

În general, se utilizează relațiile:

$$x_{k+1} = x_k + h \tag{14.3}$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f_1(x_k, y_k, z_k) \tag{14.4}$$

$$z_{k+1} = z_k + h \cdot f_2(x_k, y_k, z_k) \tag{14.5}$$

14.2. Metoda lui Runge-Kutta de ordinul patru

Pentru rezolvarea problemei Cauchy

$$y' = f(x, y) \text{ și } y(x_0) = y_0 \tag{14.6}$$

se utilizează următoarea metodă: intervalul $[a, b]$ se divide în *n* părți egale cu punctele $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, cu pasul $h = \frac{b-a}{n}$. Dacă se cunoaște punctul (x_k, y_k), atunci punctul de coordonate (x_{k+1}, y_{k+1}) se calculează în felul următor [7]

$$x_{k+1} = x_k + h \tag{14.7}$$

$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad (14.8)$$

unde

$$k_1 = h \cdot f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h \cdot f(x_k + h, y_k + k_3).$$

Această metodă are o acuratețe mare.

Algoritmul corespunzător metodei Runge-Kutta este următorul:

- date de intrare: a, b, n, f, y_0 ;
- fie:

$$h := \tfrac{b-a}{n} \;; \quad x[0] := a \;; \quad y[0] := y_0 \;;$$

- pentru $i = \overline{0, n-1}$ executa

$$x[i+1] := x[i] + h \;;$$

$$K_1 := h \cdot f(x[i], y[i]) \;;$$

$$K_2 := h \cdot f\left(x[i] + \frac{h}{2}, y[i] + \frac{K_1}{2}\right) \;;$$

$$K_3 := h \cdot f\left(x[i] + \frac{h}{2}, y[i] + \frac{K_2}{2}\right) \;;$$

$$K_4 := h \cdot f(x[i] + h, y[i] + K_3) \;;$$

$$y[i+1] := y[i] + \frac{1}{6} \cdot (K_1 + 2 \cdot K_2 + 2 \cdot K_3 + K_4) \;;$$

- tipărește x, y .

De menționat este faptul că și această metodă se poate extinde pentru sisteme de ecuații diferențiale cu problemă Cauchy.

Fie

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \text{ cu } \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases} .$$

În acest caz se folosesc următoarele formule numerice:

$$x_{k+1} = x_k + h \ ;$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \, ;$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \, ,$$

unde

$$k_1 = h \cdot f_1(x_k, y_k, z_k) \, ;$$

$$l_1 = h \cdot f_2(x_k, y_k, z_k) \, ;$$

$$k_2 = h \cdot f_1\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}, z_k + \frac{l_1}{2}\right) \ ;$$

$$l_2 = h \cdot f_2\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}, z_k + \frac{l_1}{2}\right) \ ;$$

$$k_3 = h \cdot f_1\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}, z_k + \frac{l_2}{2}\right) \ ;$$

$$l_3 = h \cdot f_2\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}, z_k + \frac{l_2}{2}\right) \ ;$$

$$k_4 = h \cdot f_1(x_k + h, y_k + k_3, z_k + l_3) \, ;$$

$$l_4 = h \cdot f_2(x_k + h, y_k + k_3, z_k + l_3) \, .$$

Lucrare de verificare

Să se rezolve prin metoda Euler și metoda Runge-Kutta ecuația diferențială

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \, ,$$

în condițiile $y(0) = 20; x \in [0; 40]$. Să se compare valoarea obținută pentru $y(24)$.