Unitatea de învățare 5 – *2 ore*

Calcul matriceal - *continuare*

5.1. Matrice reflector elementar.

5.2. Factorizarea QR.

Cunoștințe și deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unități de învățare vei cunoaște:

- noțiunea de matrice reflector elementar, utilizată în factorizarea QR;
- operațiile de factorizare a matricelor, fiind detaliați algoritmii utilizați în factorizarea QR.

În această unitate de învățare sunt prezentate noțiunile și operațiile implicate în factorizarea QR a matricelor și anume matricea reflector elementar și algoritmul de triangularizare ortogonală a unei matrice.

5.1. Matrice reflector elementar

În cadrul factorizării **QR** se utilizează conceptul de *matrice reflector elementar*. O *<u>matrice reflector elementar</u>* de ordin *n* şi rang *k*, a unei matrice pătrate de ordinul *n*, este definită prin relaţia [4]

$$\boldsymbol{U}_k = \boldsymbol{I}_n - \frac{\boldsymbol{u}_k \boldsymbol{u}_k^T}{\beta_k}, \quad \frac{\left\|\beta_k\right\|^2}{2} \neq 0. \tag{5.1}$$

Matricea $\boldsymbol{U_k}$ are proprietatea de simetrie şi ortogonalitate. Vectorul *n* dimensional $\boldsymbol{u_k}$ este definit prin

$$\boldsymbol{u}_k^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & u_{kk} & u_{k+1,k} & \dots & u_{nk} \end{bmatrix} \in \Re^n, \tag{5.2}$$

respectiv un vector cu primele $k-1$ elemente nule, $u_{ik} = 0, i = 1,\dots,k-1$.

Relaţiile de calcul pentru reflectorul elementar sunt:

$$\sigma = sign(x_k) * \sqrt{\sum_{i=k}^{m} x_i^2} \;; \tag{5.3}$$

$$u_{kk} = x_k + \sigma \;; \tag{5.4}$$

$$u_{ik} = x_i, \quad i = k+1, \ldots, m; \tag{5.5}$$

$$\beta_k = \sigma * u_{kk} \;;$$

$$\rho_k = -\sigma \;. \tag{5.6}$$

Exemplul 1. Să se determine reflectorul elementar de ordinul $n = 3$ şi rang $k = 1$ pentru matricea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Deoarece rangul matricei reflector este $k = 1$, vectorul corespunzator din matricea ***A*** va fi

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se aplică succesiv relaţiile (5.3) – (5.6):

$$\sigma = sign(x_1) * \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{3} x_1^2\right)} = +\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = 1{,}414 \;;$$

$$u_{11} = x_1 + \sigma = 1 + 1{,}414 = 2{,}414 \;;$$

$$u_{i1} = x_i, \quad i = 2{,}3 \;;$$

$$u_{21} = 0 \;;$$

$$u_{31} = 1 \;;$$

$$\beta_1 = \sigma * u_{11} = 1{,}414 * 2{,}414 = 3{,}414 \;;$$

$$\rho_1 = -\sigma = -1{,}414 .$$

În consecinţă vectorul $\boldsymbol{u}_1$ are componentele:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 2{,}414 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se observă că ultimele două componente ale vectorului ***u*₁** coincid cu ultimele două elemente ale vectorului ***x***. De asemenea, deoarece $k = 1$, lipsesc primele $k-1$ elemente nule ale vectorului ***u*₁**.

Aplicând relaţia (5.1) rezultă succesiv

$$\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^T = \begin{bmatrix} 2{,}414 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2{,}414 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}827 & 0 & 2{,}414 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2{,}414 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^T}{\beta_1} = \frac{\begin{bmatrix} 5{,}827 & 0 & 2{,}414 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2{,}414 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{3{,}414} = \begin{bmatrix} 1{,}707 & 0 & 0{,}707 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}707 & 0 & 0{,}293 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{I}_3 - \frac{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^T}{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1{,}707 & 0 & 0{,}707 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}707 & 0 & 0{,}293 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}707 & 0 & -0{,}707 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}707 & 0 & 0{,}707 \end{bmatrix}.$$

Se observă că matricea $\boldsymbol{U}_1$ este simetrică şi are determinantul egal cu unitatea, fapt ce conduce la concluzia că matricea este ortogonală.

Test de autoevaluare

1. Să se definească matricea reflector elementar.
2. În cadrul cărei operații cu matrici se utilizează matricea reflector elementar?

5.2. Factorizarea QR.

Factorizarea **QR** reprezintă descompunerea matricei $\boldsymbol{A} \in \Re^{m \times n}$ conform relaţiei

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{R}' \tag{5.7}$$

unde $\boldsymbol{Q}' \in \Re^{m \times n}$ este o matrice cu coloane ortogonale iar $\boldsymbol{R}'$ este o matrice pătrată superior triunghiulară. Dacă matricea este pătrată, $\boldsymbol{A} \in \Re^{n \times n}$, cele două matrice vor fi şi ele pătrate, $\boldsymbol{Q} \in \Re^{n \times n}$, respectiv $\boldsymbol{R} \in \Re^{n \times n}$.

În formă extinsă, descompunerea **QR** este dată de

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Pentru matricea $\boldsymbol{Q}$ se impune ca

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I} \tag{5.9}$$

respectiv

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{5.10}$$

sau

$$\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1}. \tag{5.11}$$

Aceasta ultimă proprietate se concretizează în relaţiile

$$\begin{cases} q_i^T q_j = 0, & i \neq j \\ q_i^T q_i = 1 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, n, \tag{5.12}$$

în care q_i respectiv q_j reprezintă coloana i sau j din cadrul matricei $\boldsymbol{Q}$.

Proprietatea (3.9) a matricei $\boldsymbol{Q}$ este exprimată astfel

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Elementele de calcul utilizate pentru calculul matricelor ***Q*** şi ***R*** sunt *matrice ortogonală* şi *matrice reflector elementar*.

Factorizarea ***QR*** a matricei ***A*** decurge în două etape [3] :

- obţinerea matricea ***R*** prin triangularizarea ortogonală a matricei ***A***;
- calculul matricei ***Q*** utilizând matricele reflectori elementari $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \dots, \boldsymbol{U}_m$.

Deoarece ambele etape de factorizare au la baza conceptul de *matrice reflector elementar*, în cele ce urmeaza se va trata utilizarea acestui concept pentru determinarea matricelor ***Q*** şi ***R***.

<u>Triangularizarea ortogonala a matricei A</u>. Procedura de triangularizare ortogonală a matricei $\boldsymbol{A} \in \Re^{n \times n}$ se desfăşoară în *n* etape. Se notează cu $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}$ matricea iniţială. Matricea obţinută după prima etapă de triangularizare va fi $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{U}_1$ fiind matricea reflector elementar de ordin *n* şi indice $k = 1$. După cea de a doua etapă se va obţine matricea $\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{U}_2 \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{U}_2 \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{A}_1$, iar după etapa $n+1$ se va obţine matricea $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_{n+1} = \boldsymbol{U}_n \boldsymbol{U}_{n-1} \dots \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{A}_1$, respectiv matricea superior triunghiulară. În consecinţă, matricea ***R*** se obţine din succesiunea de transformări

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_{n+1} = \boldsymbol{U}_n \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{U}_n \boldsymbol{U}_{n-1} \dots \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}, \quad (5.14)$$

în care

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_n \boldsymbol{U}_{n-1} \dots \boldsymbol{U}_1. \quad (5.15)$$

<u>*Algoritmul de triangularizare*</u> poate fi dezvoltat cu prelucrarea directă a matricei ***A*** şi are următoarele etape:

- pentru $k = 1, \dots, n$ se calculează

a) $\sigma = sign(a_{kk}) * \sqrt{\sum_{i=k}^{m} a_{ik}^2}$; (5.16)

b) $u_{kk} = a_{kk} + \sigma$; (5.17)

c) $u_{ik} = a_{ik}, \quad i = k+1,\dots,m$; (5.18)

d) $\beta_k = \sigma * u_{kk}$; (5.19)

e) $a_{kk} = -\sigma$; (5.20)

f) pentru $j = k+1,\dots,n$ se calculează

f1) $$\tau = \frac{\sum_{i=k}^{m} u_{ik} a_{ij}}{\beta_k} \; ; \qquad (5.21)$$

f2) $$a_{ij} = a_{ij} - \tau * u_{ik}, \quad i = k,\dots,n. \qquad (5.22)$$

Exemplul 3. Să se triangularizeze ortogonal matricea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare Conform relaţiilor (5.16) – (5.22), calculul decurge iterativ în $k = 3$ iteraţii.

Iteraţia $k = 1$.

Calcule pentru coloana $k = 1$:

$$\sigma = sign(a_{11}) * \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i1}^2\right)} = +\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = 1{,}414 \; ;$$

$$u_{11} = a_{11} + \sigma = 1 + 1{,}414 = 2{,}414 \; ;$$

$$u_{i1} = x_i, \quad i = 2{,}3 \; ;$$

$$u_{21} = a_{21} = 0 \; ;$$

$$u_{31} = a_{31} = 1 \; ;$$

$$\beta_1 = \sigma * u_{11} = 1{,}414 * 2{,}414 = 3{,}414 \; ;$$

$$\rho_1 = -\sigma = -1{,}414 ;$$

$a_{11} = \rho_1 = -1{,}414$.

Calcule pentru coloana $j = 2$:

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^{3} u_{i1} a_{i2}}{\beta_1} = \frac{u_{11}a_{12} + u_{21}a_{22} + u_{31}a_{32}}{\beta_1} =$$

$$= \frac{2{,}414 * 1 + 0 * (-1) + 1 * 2}{3{,}414} = 1{,}293;$$

$$a_{i2} = a_{i2} - \tau * u_{i1}, \quad i = 1, \ldots, 3;$$

$$a_{12} = a_{12} - \tau * u_{11} = 1 - 1{,}293 * 2{,}414 = -2{,}121;$$

$$a_{22} = a_{22} - \tau * u_{21} = -1 - 1{,}292 * 0 = -1;$$

$$a_{32} = a_{32} - \tau * u_{31} = 2 - 1{,}293 * 1 = 0{,}707.$$

Calcule pentru coloana $j = 3$:

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^{3} u_{i1} a_{i3}}{\beta_1} = \frac{u_{11}a_{13} + u_{21}a_{23} + u_{31}a_{33}}{\beta_1} =$$

$$= \frac{2{,}414 * 1 + 0 * 1 + 1 * 3}{3{,}414} = 1{,}585;$$

$$a_{i3} = a_{i3} - \tau * u_{i1}, \quad i = 1, \ldots, 3;$$

$$a_{13} = a_{13} - \tau * u_{11} = 1 - 1{,}585 * 2{,}414 = -2{,}826;$$

$$a_{23} = a_{23} - \tau * u_{21} = 1 - 1{,}585 * 0 = 1;$$

$$a_{33} = a_{33} - \tau * u_{31} = 3 - 1{,}585 * 1 = 1{,}414.$$

După iteraţia $k = 1$, elementele matricei $\boldsymbol{A}$ sunt

$$A = \begin{bmatrix} -1{,}414 & -2{,}121 & -2{,}826 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0{,}707 & 1{,}414 \end{bmatrix}.$$

<u>Iteraţia</u> $k = 2$.

Calcule pentru coloana $k = 2$:

$$\sigma = sign(a_{22})*\sqrt{\left(\sum_{i=2}^{3} a_{i2}^2\right)} = -\sqrt{(-1)^2 + (0{,}707)^2} = -1{,}224 \;;$$

$$u_{22} = a_{22} + \sigma = -1 - 1{,}224 = -2{,}224\,;$$

$$u_{i2} = x_i\,, \quad i = 3\,;$$

$$u_{32} = a_{32} = 0{,}707 \;;$$

$$\beta_2 = \sigma * u_{22} = -1{,}224 * (-2{,}224) = 2{,}723\,;$$

$$\rho_2 = -\sigma = 1{,}224\,;$$

$$a_{22} = \rho_2 = 1{,}224\,.$$

Calcule pentru coloana $j = 3$:

$$\tau = \frac{\sum_{i=2}^{3} u_{i2} a_{i3}}{\beta_2} = \frac{u_{22} a_{23} + u_{32} a_{33}}{\beta_2} =$$

$$= \frac{-2{,}224 * 1 + 0{,}707 * 1{,}414}{2{,}723} = -0{,}449\,;$$

$$a_{i3} = a_{i3} - \tau * u_{i2}\,, \quad i = 2{,}3\,;$$

$$a_{23} = a_{23} - \tau * u_{22} = 1 - (-0{,}449) * (-2{,}224) = 0\,;$$

$$a_{33} = a_{33} - \tau * u_{32} = 1{,}414 - (-0{,}449) * 0{,}707 = 1{,}732$$

După iteraţia $k = 2$, elementele matricei $\boldsymbol{A}$ sunt

$$A = \begin{bmatrix} -1{,}414 & -2{,}121 & -2{,}826 \\ 0 & 1{,}224 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}732 \end{bmatrix}.$$

<u>Iteraţia</u> $k = 3$.

Calcule pentru coloana $k = 3$:

$$\sigma = sign(a_{33})*\sqrt{\left(\sum_{i=3}^{3} a_{i3}^2\right)} = +\sqrt{1{,}732^2} = 1{,}732 \;;$$

$$u_{33} = a_{33} + \sigma = 1{,}732 + 1{,}732 = 3{,}464\,;$$

$$\beta_3 = \sigma * u_{33} = 1{,}732 * 3{,}464 = 6;$$

$$\rho_3 = -\sigma = -1{,}732;$$

$$a_{33} = \rho_3 = -1{,}732.$$

După iteraţia $k = 3$, elementele matricei $\boldsymbol{A}$ sunt:

$$A = \begin{bmatrix} -1{,}414 & -2{,}121 & -2{,}826 \\ 0 & 1{,}224 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}732 \end{bmatrix}.$$

<u>Calculul matricei Q</u>. Aspectele fundamentale ale calculului matricei ***Q*** sunt date de relaţiile :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}; \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_{n+1} = \boldsymbol{U}_n \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{U}_n \boldsymbol{U}_{n-1} \ldots \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{UA} . \tag{5.24}$$

Din relaţia (2.73), prin înmulţire la stânga cu U^{-1} se obţine

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{UA} = \boldsymbol{A}. \tag{5.25}$$

Combinând (2.66) cu (2.82) rezultă

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R} \tag{5.26}$$

sau

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{U}^{-1} = \left(\boldsymbol{U}_n \boldsymbol{U}_{n-1} \ldots \boldsymbol{U}_2 \boldsymbol{U}_1\right)^{-1} =$$

$$= \boldsymbol{U}_1^{-1} \boldsymbol{U}_2^{-1} \ldots \boldsymbol{U}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{U}_n^{-1} = \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{U}_2 \ldots \boldsymbol{U}_{n-1} \boldsymbol{U}_n . \tag{5.27}$$

*<u>Algoritmul de calcul a matricei **Q**</u>* poate fi dezvoltat cu prelucrarea directă a matricei ***A*** şi are următoarele etape:

- pentru $j = 1, \ldots, n$ se calculează

$$q_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, m \ ; \tag{5.28}$$

$$q_{jj} = 1. \tag{5.29}$$

- pentru $k = n, n-1, \ldots, 1$ se calculează

- pentru $j = 1,\dots,n$ se calculează

$$\tau = \frac{\sum_{i=k}^{m} u_{ik} q_{ij}}{\beta_k} \; ; \qquad (5.30)$$

$$q_{ij} = q_{ij} - \tau * u_{jk}, \quad i = k,\dots,m. \qquad (5.31)$$

Test de autoevaluare

1. Care sunt etapele care trebuie parcuse pentru factorizarea QR a unei matrice?
2. În ce constă triangularizarea ortogonală a unei matrice?

Lucrare de verificare

1. **Să se triangularizeze ortogonal matricea $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.**
2. **Să se factorizeze QR matricea $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.**