Unitatea de învățare 3 – *2 ore*

Calcul matriceal

Definiţii si notaţii

Cunoștințe și deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unități de învățare vei cunoaște:

- noțiunile de vector transpus și conjugat, produs scalar, vectori ortogonali, vector normalizat, matrice diagonală, matrice tridiagonală, matrice triunghiulară, etc.;
- operațiile de factorizare a matricelor: factorizarea LR și factorizarea QR, fiind detaliați algoritmii utilizați în factorizarea LR.

În această unitate de învățare sunt prezentate definițiile și notațiile de bază pentru cunoașterea calculului vectorial și matriceal, noțiunile și operațiile elementare necesare algoritmilor de factorizare a matricelor, și anume algoritmul Doolitle și algoritmul Crout.

<u>Vector transpus si conjugat</u>. În spaţiul vectorial n-dimensional $\boldsymbol{C^n}$, peste corpul numerelor complexe C, un vector coloană $\boldsymbol{X}$, un vector transpus $\boldsymbol{X^T}$ şi conjugatul transpus $\boldsymbol{X^*}$ se notează astfel:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{X}^T = [x_1, x_2, \ldots x_n]; \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{X}^* = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \overline{x_n}]. \tag{3.3}$$

<u>Exemplul 1.</u> Fie vectorul

$$X = \begin{bmatrix} 1+i3 \\ 2-i \\ 3+2i \end{bmatrix}.$$

Să se determine vectorul transpus X^T şi conjugatul transpus X^*.

<u>*Rezolvare*</u>. Aplicând (3.2) si (3.3) se obţine:

$$X^T = \begin{bmatrix} 1+3i & 2-i & 3+2i \end{bmatrix};$$

$$X^* = \begin{bmatrix} 1-3i & 2+i & 3-2i \end{bmatrix}.$$

<u>***Produsul scalar***</u>. Pentru doi vectori ***x*** şi ***y*** se defineşte produsul scalar

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} * \mathbf{y}, \tag{3.4}$$

respectiv

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \times \mathbf{y}. \tag{3.5}$$

Proprietăţile produsului scalar. Fie *c* un număr complex şi vectorii ***x*, *y*** şi ***z***. Între acestea există următoarele relaţii:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\overline{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}}); \tag{3.6}$$

$$(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = c\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}); \tag{3.7}$$

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}); \tag{3.8}$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0. \tag{3.9}$$

<u>*Exemplul 2*</u>. Fie vectorii ***X*** şi ***Y*** definiţi prin

$$X = \begin{bmatrix} 1+3i \\ 2-i \\ 3+2i \end{bmatrix}; \qquad Y = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+2i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Să se determine produsul scalar (X, Y).

<u>*Rezolvare*</u>. Aplicând (3.5) se obţine succesiv:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = [1-3i \;\; 2+i \;\; 3-2i] \times \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+2i \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$(1-3i)\times(1-i)+(2+i)\times(1+2i)+(3-2i)\times(2-0i)=4-3i\,.$$

După cum se observă, produsul scalar al celor doi vectori este un număr complex.

<u>Vectori ortogonali</u>. Doi vectori $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{y}$ sunt ortogonali dacă produsul scalar satisface relaţia

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0\,. \tag{3.10}$$

<u>Norma unui vector</u>. Norma unui vector $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$ este o funcţie notată cu $\|\boldsymbol{x}\|$**,** definită pe $\boldsymbol{C}^n$ cu valori reale, care satisface proprietăţile:

$$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n\,; \tag{3.11}$$

$$\|\boldsymbol{x}\| = 0, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\,; \tag{3.12}$$

$$\|\alpha\,\boldsymbol{x}\| = \alpha \cdot \|\boldsymbol{x}\|, \quad \forall \alpha \in C, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n\,; \tag{3.13}$$

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n, \quad \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}^n\,. \tag{3.14}$$

Una dintre cele mai utilizate norme este *norma p*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p},\; p \geq 1\,. \tag{3.15}$$

Daca în relaţia (3.15), $p=2$ se obţine *norma euclidiană*, adică distanţa dintre vectorul dat şi vectorul nul (originea). Norma este o măsură a dimensiunii sau lungimii vectorului

$$\|\boldsymbol{x}\|_E = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,. \tag{3.16}$$

<u>Vector normalizat</u>. Un vector normalizat sau vector unitate este vectorul a cărui lungime este egală cu unitatea. Mulţimea finită de vectori x_1, x_2, …, x_n este o *mulţime ortogonală* dacă produsul scalar $(x_i, x_j) = 0$ pentru $i \neq j$ şi este *ortonormală* dacă în plus fiecare vector are lungimea egală cu unitatea.

<u>Spaţiu vectorial</u>. Un spaţiu vectorial este *n-dimensional* dacă şi numai dacă spaţiul respectiv conţine *n* vectori liniar independenţi şi orice mulţime de *n+1* vectori din acel spaţiu este liniar dependentă.

În spaţiul C^n, vectorii

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ . \ . \ . \ , \ v_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

sunt liniar independenţi şi ortogonali şi formează o bază a spaţiului n-dimensional $\boldsymbol{C}^n$**.** Aceasta înseamnă că, dacă există o asemenea mulţime de vectori independenţi, fiecare vector al spaţiului poate fi exprimat printr-o combinaţie liniară a vectorilor independenţi [3].

Fie un vector $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$ cu $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$. Dacă acesta se poate exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor din baza $v_1, v_2, \ldots, v_n$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \tag{3.17}$$

atunci spatiul celor *n* vectori din baza $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si orice combinatie liniara a acestora definesc un *spaţiu vectorial n-dimensional.*

<u>Matrice dreptungiulară</u>. O matrice ***A*** de dimensiune $(m \times n)$ este un tablou rectangular de numere reale sau complexe , având *m* linii şi *n* coloane

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

<u>Matricea coloană</u> este o matrice particulară, în care $n = 1$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Matricea linie este definită drept matricea pentru care $m = 1$

$$\boldsymbol{A} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]. \tag{3.20}$$

Matricea pătrată este o matrice particulară, având $m = n$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Matricea diagonală este definită prin proprietăţile

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & i \neq j \\ a_{ii} \neq 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots. n \tag{3.22}$$

şi are forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

Matricea tridiagonală este un caz particular al matricei diagonale şi are forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & c_n & a_n \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Matricea unitate este definită prin relaţiile

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & i \neq j \\ a_{ii} = 1 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n \tag{3.25}$$

şi are forma

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Matricea triunghiulară are două forme: matricea superior triunghiulară şi matricea inferior triunghiulară.

Matricea superior triunghiulară este definită prin

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & i \ge j \\ a_{ij} \ne 0, & i < j \end{cases}, \quad i = 1,\dots,n, \quad j = 1,\dots,n \tag{3.27}$$

şi are forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Matricea inferior triunghiulară este catracterizata prin

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & i < j \\ a_{ij} \ne 0, & i \ge j \end{cases}, \quad i = 1,\dots,n, \quad j = 1,\dots,n \tag{3.29}$$

şi are forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

Matricea transpusă a unei matrice ***A***, de dimensiuni $(m \times n)$, se notează $\boldsymbol{A}^{T}$ şi se calculează cu relaţiile

$$a_{ij}^{T} = a_{ji}, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n. \tag{3.31}$$

Unele din proprietăţile matricei transpuse sunt următoarele:

a) transpusa sumei a două matrice verifică relaţia

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{T} = \boldsymbol{A}^{T} + \boldsymbol{B}^{T}; \tag{3.32}$$

b) transpusa produsului satisface relaţia

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})^{T} = \boldsymbol{B}^{T} \times \boldsymbol{A}^{T}. \tag{3.33}$$

Matricea simetrică este definită prin proprietatea

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,n\,, \tag{3.34}$$

respectiv

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T\,.$$

Matricea ortogonală este o matrice pătrată care satisface relaţia

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T\,. \tag{3.35}$$

În aceste condiţii produsul $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ devine

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}\,, \tag{3.36}$$

proprietate ce semnifică faptul că, dacă $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ sunt vectorii coloană ai matricei ortogonale ***A***, atunci

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}, & i \neq j \\ \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_i = 1 \end{cases}, \quad i = 1,\ldots,n\,. \tag{3.37}$$

Matricea Hessenberg este caracterizata prin elementele

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & j < i-1 \\ a_{ij} \neq 0, & j \geq i-1 \end{cases}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,n \tag{3.38}$$

şi are forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.39}$$

Norma unei matrice pătrate este un număr pozitiv, notat $\|\boldsymbol{A}\|$, care satisface condiţiile:

$$\|\boldsymbol{A}\| > 0; \quad \|\boldsymbol{A}\| = 0 \text{, numai dacă } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}; \tag{3.40}$$

$$\|k\boldsymbol{A}\| = |k| \cdot \|\boldsymbol{A}\| \text{ pentru orice număr complex } k \in \mathbf{C} \tag{3.41}$$

$$\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|; \tag{3.42}$$

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\|\,. \tag{3.43}$$

Test de autoevaluare

1. Să se definească produsul scalar a doi vectori și să se enumere proprietățile acestuia.
2. Să se arate care sunt cele două forme ale matricei triunghiulare.
3. Să se definească un spațiu vectorial n-dimensional.

Lucrare de verificare

1. **Să se calculeze transpusa matricei** $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$.
2. **Fie vectorii *X* şi *Y* definiţi prin**

$$X = \begin{bmatrix} 1+3i \\ 2-i \\ 3+2i \end{bmatrix}; \qquad Y = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+2i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Să se determine produsul scalar (X, Y).