Unitatea de învățare 9 – *2 ore*

Sisteme de ecuații liniare - *continuare*

Cunoștințe și deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unități de învățare vei cunoaște:

- caracteristicile algoritmilor iterativi de soluționare a sistemelor de ecuații liniare;
- etapele de calcul pentru algoritmii Jacobi și Gauss-Siedel.

În această unitate de învățare sunt prezentați algoritmii ce fac parte din categoria algoritmilor iterativi de soluționare a sistemelor de ecuații liniare și anume, algoritmul Jacobi și algoritmul Gauss – Siedel.

9.1. Algoritmul Jacobi

Se consideră sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{9.1}$$

şi o aproximare a soluţiei sistemului de ecuaţii, $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Algoritmul Jacobi impune următoarea descompunere a matricei ***A***

$$\begin{cases} \boldsymbol{N} = \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}) \end{cases}, \tag{9.2}$$

unde matricea ***D*** este matricea diagonală, $\boldsymbol{D} = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$;

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ a_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \tag{9.3}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \tag{9.4}$$

Algoritmul Jacobi conţine următoarele relaţii de calcul :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9.5}$$

Criteriul de convergenţă al algoritmului poate fi exprimat prin

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9.6}$$

Metoda Jacobi este convergentă atunci când matricea ***A*** a sistemului este diagonal dominantă, respectiv

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| < \left|a_{ii}\right|, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{9.7}$$

<u>Exemplul 1</u>. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases},$$

cunoscând soluţia iniţială $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ şi precizia $\varepsilon = 10^{-3}$.

<u>Rezolvare</u>. Relaţia de recurenţă (9.5) se particularizează în

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} a_{1j} x_j^{(k)}}{a_{11}} \\[2ex] x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} a_{2j} x_j^{(k)}}{a_{22}} \\[2ex] x_3^{(k+1)} = \dfrac{b_3 - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq 3}}^{n} a_{3j} x_j^{(k)}}{a_{33}} \end{cases}.$$

Aplicând succesiv relaţiile particulare anterioare, se obţin soluţiile din tabelul 9.1.

Tabelul 9.1

Rezultate numerice obtinute cu algoritmul Jacobi

Iteratia	x_1	x_2	x_3	Iteratia	x_1	x_2	x_3
0	4	5	6	14	1,0452	2,0658	9,4650
1	-7,0000	-1,6666	1,0000	15	0,9876	1,9876	0,9794
2	4,6666	7,3333	-3,3333	16	1,0329	2,0150	1
3	0	1	-0,6666	17	0,9849	1,9780	1,0178
4	3,6666	3,2222	1	18	1,0041	2,0041	1,0068
5	-0,2222	0,2222	2,4444	19	0,9890	1,9949	1
6	1,3333	2,3333	1,5555	20	1,0050	2,0073	0,9940
7	0,1111	1,5925	1	21	0,9986	1,9986	0,9977
8	1,4074	2,5925	0,5185	22	1,0036	2,0016	1
9	0,8888	1,8888	0,8148	23	0,9983	1,9975	1,0019
10	1,2962	2,1358	1	24	1,0004	2,0004	1,0007
11	0,8641	1,8024	1,1604	25	0,9987	1,9994	1
12	1,0370	2,0370	1,0617	26	1,0005	2,0008	0,9993
13	0,9012	1,9547	1	27	0,9998	1,9998	0,9997

Se observă că, după 27 de iteraţii, soluţia sistemului de ecuaţii este $\begin{cases} x_1 = 0{,}9998 \\ x_2 = 1{,}9998 \\ x_3 = 0{,}9997 \end{cases}$, cu o eroare de $2 * 10^{-4}$.

Test de autoevaluare

1. Precizați modul de descompunere a unei matrice A, asociată unui sistem de ecuații liniare, în cazul rezolvării sistemului respectiv prin metoda Jacobi.
2. Care este relația de recurență asociată algoritmului Jacobi?

9.2. Algoritmul Gauss-Siedel

Se consideră sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{9.8}$$

şi o aproximare a soluţiei sistemului de ecuaţii, $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Algoritmul Gauss-Siedel este definit prin relaţia de recurenţă

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9.9}$$

Criteriul de convergenţă al algoritmului este exprimat prin relaţia

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9.10}$$

Datorită modului în care sunt utilizate valorile necunoscutelor în cadrul iteraiei curente $k+1$, metoda Gauss-Siedel converge mai rapid decât metoda Jacobi.

<u>Exemplul 2</u>. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases},$$

cunoscând soluţia iniţială $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ şi precizia $\varepsilon = 10^{-3}$.

<u>Rezolvare.</u> Sistemul se aduce la forma

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{3} a_{1j} x_j^{(k)}}{a_{11}} \;;\; x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{3} a_{2j} x_j^{(k)}}{a_{22}} \;;\; x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 3}}^{3} a_{3j} x_j^{(k)}}{a_{33}}.$$

Aplicând succesiv relaţiile (6.10) se obţin soluţiile din tabelul 9.2.

Tabelul 9.2

Rezultatele obţinute cu algoritmul Gauss-Siedel

Iteratia	x_1	x_2	x_3
0	1	1	1
1	1,3333	1,8333	0,9583
2	1,6094	1,9652	0,9913
3	1,0144	1,9927	0.9981

Datorită modului în care sunt utilizate valorile necunoscutelor în cadrul unei iteraţii, metoda Gauss-Siedel converge mult mai rapid decât metoda Jacobi.

Test de autoevaluare

1. Care este relația de recurență asociată algoritmului Gauss-Siedel?
2. Din punctul de vedere al convergenței, care dintre cei doi algoritmi prezentați pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare este mai rapid?

Lucrare de verificare

1. **Să se rezolve următorul sistem de ecuații liniare, folosind algoritmul Jacobi**

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ -x - 2y + z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}.$$

2. **Să se rezolve următorul sistem de ecuații liniare, folosind algoritmul Gauss-Siedel**

$$\begin{cases} 3x + 3y - 2z = -2 \\ 4x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + 2z = 1 \end{cases}.$$