Unitatea de învățare 4 – *2 ore*

Calcul matriceal - *continuare*

Factorizarea matricelor. Factorizarea LR.

4.1. Factorizarea matricelor

4.2. Factorizarea LR

Cunoștințe și deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unități de învățare vei cunoaște:

- noțiunile de factorizare, matrice inferior triunghiulară, matrice superior triunghiulară;
- operațiile de factorizare a matricelor: factorizarea LR și factorizarea QR, fiind detaliați algoritmii utilizați în factorizarea LR.

În această unitate de învățare sunt prezentate noțiunile și operațiile elementare necesare algoritmilor de factorizare a matricelor, și anume algoritmul Doolitle și algoritmul Crout pentru factorizarea LR.

4.1. Factorizarea matricelor

Operaţiile de factorizare a matricelor sunt utilizate în scopul rezolvării unor sisteme de ecuaţii, valorilor şi vectorilor proprii etc. Factorizarea matricelor este o operaţie de descompunere a unei matrice $\boldsymbol{A}$ în două matrice particulare, $\boldsymbol{A}_1$ şi $\boldsymbol{A}_2$, între cele trei matrice existând relaţia

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2 . \tag{4.1}$$

În funcţie de particularităţile celor două matrice obţinute, factorizarea poate fi clasificată astfel:

- factorizare **LR** ;
- factorizare **QR**.

4.2. Factorizarea LR

Fie matricea $\boldsymbol{A} \in \Re^{n \times n}$. Prin factorizarea **LR** se înţelege o descompunere a matricei $\boldsymbol{A}$ de forma

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R} \tag{4.2}$$

în care $\boldsymbol{L}$ este o matrice inferior triunghiulară iar $\boldsymbol{R}$ este o matrice superior triunghiulară.

În formă extinsă, proprietatea (4.2) este exprimată prin relaţia

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Algoritmii utilizaţi în cadrul factorizării $\boldsymbol{LR}$ sunt *algoritmul Doolitle* şi *algoritmul Crout*.

Algoritmul Doolitle impune ca matricea $\boldsymbol{L}$ să fie inferior triunghiulară şi să conţină diagonala unitate [3]

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

iar matricea $\boldsymbol{R}$ să fie superior triunghiulară

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

<u>*Exemplul 1.*</u> Fie matricea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Să se factorizeze **LR** matricea ***A***.

<u>*Rezolvare*</u>. Factorizarea $\boldsymbol{LR}$ impune descompunerea

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}.$$

Aplicând relaţiile de calcul de la înmulţirea a două matrice

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} r_{kj} \tag{4.6}$$

se obţine:

$$a_{11} = l_{11} * r_{11} + l_{12} * r_{21} = 1 * r_{11} + 0 * 0 \ ; \qquad r_{11} = a_{11} = -4 \ ;$$

$$a_{12} = l_{11} * r_{12} + l_{12} * r_{22} = 1 * r_{12} + 0 * r_{22} \ ; \qquad r_{12} = a_{12} = 4 \ ;$$

$$a_{21} = l_{21} * r_{11} + l_{22} * r_{21} = l_{21} * r_{11} + 1 * 0 \ ; \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{r_{11}} = \frac{2}{-4} = -0{,}5 \ ;$$

$$a_{22} = l_{21} * r_{12} + l_{22} * r_{22} = l_{21} * r_{12} + 1 * r_{22} \ ;$$

$$r_{22} = a_{22} - l_{21} * r_{12} = -6 - \left(-0{,}5 * 4\right) = -4 .$$

Generalizarea algoritmului Doolitle. Relaţiile de calcul pentru algoritmul Doolitle sunt următoarele:

- Se generează matricele nule

$$l_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n \ ; \tag{4.7}$$

$$r_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n . \tag{4.8}$$

- Pentru $i = 1, \dots, n$ se calculează succesiv

$$l_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, n \ ; \tag{4.9}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{kj}, \, i > 1 \\ a_{ij}, \quad i \le 1 \end{cases}, \quad j = i, \dots, n \ ; \tag{4.10}$$

$$l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{jk} r_{ki}}{r_{ii}}, \quad j = i + 1, \dots, n . \tag{4.11}$$

Exemplul 2. Fie matricea

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Să se factorizeze matricea ***A*** utilizând factorizarea Dolitle.

Rezolvare. Factorizarea $\boldsymbol{LR}$ impune descompunerea

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}.$$

Aplicarea relaţiilor (4.8) – (4.11) conduce la următoarele rezultate:

Pentru $i = 1$ se obţine succesiv:

$$r_{1j} = a_{1j} - \sum_{k=1}^{0} l_{1k} r_{kj} = a_{1j}, \quad j = 1,2 \;;$$

$$r_{11} = a_{11} - 0 = a_{11} = -4 \;;$$

$$r_{12} = a_{12} - 0 = a_{12} = 4 \;;$$

$$l_{j1} = \frac{a_{j1} - \sum_{k=1}^{0} l_{jk} r_{k1}}{r_{11}} = \frac{a_{j1}}{r_{11}}, \quad j = 2 \;;$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{r_{11}} = \frac{2}{-4} = -0{,}5.$$

Pentru $i = 2$ se obţine :

$$r_{2j} = a_{2j} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k} r_{kj}, \quad j = 2 \;;$$

$$r_{22} = a_{22} - a_{21} r_{12} = -6 - (-0{,}5 * 4) = -4.$$

Soluţia problemei este

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

respectiv

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} ; \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Algoritmul Crout impune ca matricea $\boldsymbol{L}$ să fie inferior triunghiulară [7]

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{12} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

iar matricea $\boldsymbol{R}$ sa fie superior triunghiulară şi să conţina diagonala unitate

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Relaţiile de calcul pentru algoritmul Crout sunt următoarele:

- Se generează matricele nule

$$l_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n \; ; \tag{4.14}$$

$$r_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n \, . \tag{4.15}$$

- Pentru $i = 1, \dots, n$ se calculează succesiv

$$r_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, n \; ; \tag{4.16}$$

$$l_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{jk} r_{ki} \, , i > 1 \\ a_{ij} \, , \quad i \le 1 \end{cases}, \quad j = i, \dots, n \; ; \tag{4.17}$$

$$r_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{kj}}{l_{ii}}, \quad j = i + 1, \dots, n \, . \tag{4.18}$$

Test de autoevaluare

1. Să se definească factorizarea matricelor.
2. Care este particularitatea factorizării LR?
3. Care sunt trăsăturile pricipale ale algoritmilor Doolitle și Crout, utilizați la factorizarea LR?

Lucrare de verificare

1. **Să se factorizeze LR matricea** $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ **, folosind algoritmul Crout.**
2. **Fie matricea** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$**. Să se factorizeze LR matricea A cu ajutorul algoritmului Doolitle.**