Unitatea de învățare 13 – *2 ore*

Aproximarea funcțiilor

13.1. Funcţii de aproximare prin interpolare

13.2. Interpolarea liniară

13.3. Polinoame de interpolare

13.4. Algoritmul interpolării liniare bidimensionale

Cunoștințe și deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unități de învățare vei cunoaște:

- modalităţile de aproximare a funcţiilor;
- caracteristicile interpolării liniare;
- caracteristicile interpolării liniare bidimensionale.

Numeroase probleme practice din domeniul ingineriei sunt finalizate prin înregistrări de date numerice sub formă discretă. Aceste date conţin atât informaţii despre variabilele independente cât şi despre variabilele dependente.

În tabelul 13.1 este prezentat un exemplu de înregistrări de date din domeniul chimic, respectiv variaţia concentraţiei etilenei cu temperatura la un reactor de piroliză a etanului. Variabila independentă este temperatura de operare a reactorului de piroliză iar variabila dependentă este concentraţia etilenei la ieşirea din reactor.

Tabelul 13.1

Variaţia concentraţiei etilenei cu temperatura

Nr. crt.	Temperatură [°C]	Concentraţia etilenei [% masă]
1	825	29,38
2	828	29,45
3	832	31,53
4	835	31,84
5	839	32,07
6	842	32,46
7	846	33,14

Tabelul 13.2 conţine informaţii experimentale privind caracteristica statică a elementului sensibil al traductorului de debit cu diafragmă. Variabila independentă este debitul iar variabila dependentă este căderea de presiune pe diafragmă.

Tabelul 13.2

Valori experimentale obţinute
la un traductor de debit cu diafragmă

Nr. crt.	Debit [m^3/h]	Căderea de presiune [mm col H_2O]
1	0,0	0
2	16,14	250
3	22,07	500
4	30,28	1000
5	35,72	1250
6	38,25	1500
7	41,08	1750
8	42,15	2000
9	46,74	2250
10	49,37	2500

13.1. Funcţii de aproximare prin interpolare

În cazul general al unui sistem monovariabil, caracterizat prin variabila independentă *u* şi variabila dependentă *y*, figura 13.1, datele experimentale sunt puse sub forma tabelului 13.3.

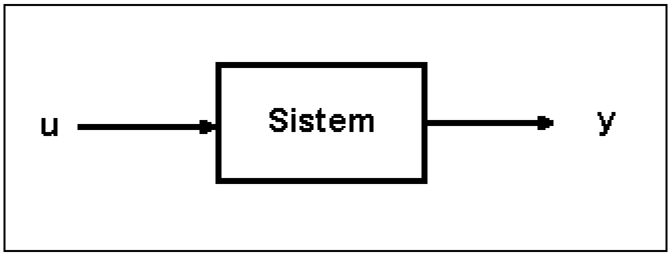


Fig. 13.1. Sistem monovariabil.

Valorile variabilei independente *u* sunt notate cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iar valorile corespunzătoare variabilei de iesire *y* sunt notate cu $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Dependenţa $f(x)$ reprezintă o funcţie monovariabilă discretă, respectiv o funcţie definită numai în punctele specificate în tabelul 13.3.

Tabelul 13.3

Valorile de definire ale funcţiei $f(x)$

Nr. crt.	Valoarea variabilei independente *u*	Valoarea iesirii *y*
1	x_1	f_1
2	x_2	f_2
$\vdots$		
i	x_i	f_i
$\vdots$		
m	x_m	f_m

Prin aproximarea funcţiilor prin interpolare se înţelege generarea unei funcţii $g(x)$ care permite estimarea funcţiei $f(x)$ pentru argumente în care $f(x)$ nu este definită. Pentru funcţiile de aproximare $g(x)$ se folosesc cu precădere combinaţii de funcţii simple din cadrul unor clase de funcţii $\{g_i(x)\}$,

$$g(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \ldots + a_n g_n(x). \tag{13.1}$$

Clasele de funcţii cele mai utilizate sunt:

– clasa monoamelor, $\{x^i\}$, $i = 0,1,\ldots,n$;
– clasa funcţiilor trigonometrice, $\{\sin kx, \cos kx\}$, $k = 0,1,\ldots,n$;
– clasa funcţiilor exponentiale, $\{e^{b_i x}\}$, $i = 0,1,\ldots,n$.

Combinaţiile liniare ale monoamelor conduc la funcţii de aproximare polinomiale de gradul n

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n. \tag{13.2}$$

Combinaţiile din clasa funcţiilor trigonometrice permit aproximări de forma

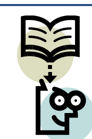
$$g(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx + \\ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx. \tag{13.3}$$

O formă compactă a relaţiei (5.3) este

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx. \tag{13.4}$$

În mod asemănator, combinaţiile liniare ale funcţiilor exponenţiale conduc la funcţia de aproximare

$$g(x) = a_0 e^{b_0 x} + a_1 e^{b_1 x} + \ldots + a_n e^{b_n x} = \sum_{i=0}^{n} a_i e^{b_i x}. \tag{13.5}$$



Test de autoevaluare

1. Ce reprezintă aproximarea funcţiilor prin interpolare?
2. Care sunt cele mai utilizate clase de funcţii în interpolare?

13.2. Interpolarea liniară

Se consideră o funcţie discretă $f(x)$, definită prin valorile din tabelul 13.3, respectiv perechile de puncte (x_j, f_j), $j = 1, \dots, m$. Se cere să se determine funcţia de aproximare

$$g(x) = a_0 + a_1 x \, , \tag{13.6}$$

funcţie care aproximează pe $f(x)$ pentru $x_1 < \alpha < x_2$.

Pentru intervalul considerat, aspectul funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ sunt prezentate în figura 13.2.

Din reprezentarea grafică se observă ca $g(x_1) = f(x_1)$ şi $g(x_2) = f(x_2)$. Pe baza acestei observaţii şi a relaţiei (13.6) se poate scrie sistemul

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 = f(x_2) \end{cases}, \tag{13.7}$$

a cărui soluţie este

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \\ a_1 = f(x_1) - \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} * x_1 \end{cases}. \tag{13.8}$$

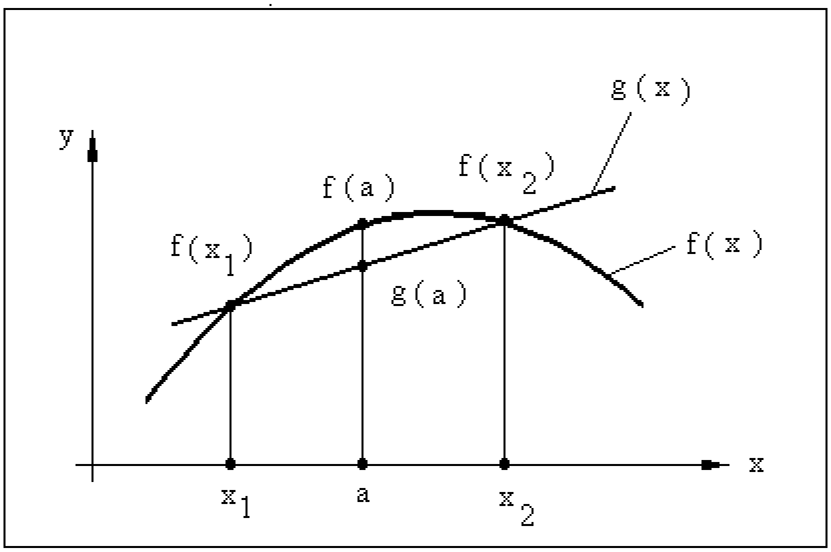


Fig. 13.2. Interpolarea liniară.

Valoarea aproximată a funcţiei $f(x)$ în punctul α va fi

$$g(\alpha) = a_0 + a_1\alpha \,, \tag{13.9}$$

valoare diferită de valoarea funcţiei $f(x)$ în punctul α.

Etapele algoritmului interpolării liniare. Algoritmul de interpolare liniară este secvenţial şi cuprinde:

- etapa încadrării argumentului ;
- etapa calculului coeficienţilor funcţiei de aproximare ;
- etapa calculării valorii interpolate.

- **Pasul 1**. Etapa încadrării argumentului

$$x_i \le v \le x_{i+1} \; i = 1, \ldots, n-1 \quad \begin{cases} da & \begin{cases} x_1 = x_i \\ x_2 = x_{i+1} \end{cases} \\ nu & \{STOP \end{cases} . \tag{13.10}$$

- **Pasul 2**. Calculul coeficienţilor funcţiei de aproximare

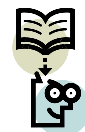
$$a_0 = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} \ ; \tag{13.11}$$

$$a_1 = f_1 - \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} * x_1 . \tag{13.12}$$

- **Pasul 3**. Calculul valorii interpolate

$$g(v) = a_0 + a_1 v \ ; \tag{13.13}$$

STOP.



Test de autoevaluare

Prezentaţi etapele algoritmului interpolării liniare.

13.3. Polinoame de interpolare

Polinoamele de interpolare sunt cele mai utilizate în tehnica aproximării funcţiilor. În principiu, etapele aproximării unei funcţii discrete prin interpolare sunt următoarele:

– calculul parametrilor $a_0, a_1, \ldots, a_n$ prezenţi în structura funcţiei de aproximare (13.2);
– evaluarea funcţiei de aproximare $g(x)$ pentru argumentul dorit.

Se consideră o funcţie discretă $f(x)$, definită prin valorile din tabelul 13.3, respectiv perechile de puncte (x_j, f_j), $j = 1, \ldots, m$. Se cere să se determine funcţia de aproximare

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n . \tag{13.14}$$

Funcţia de aproximare $g(x)$ coincide cu funcţia discretă $f(x)$ în $n+1$ puncte. Scriind cele $n+1$ relaţii între funcţiile $g(x)$ şi $f(x)$ se obţine sistemul

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n = f(x_2) \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + \ldots + a_n x_3^n = f(x_3) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_0 + a_1 x_{n+1} + a_2 x_{n+1}^2 + \ldots + a_n x_{n+1}^n = f(x_{n+11}) \end{cases} . \qquad (13.15)$$

Sistemul (13.15) se aduce la forma matriceală

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \\ f(x_{n+1}) \end{bmatrix}, \qquad (13.16)$$

soluţia fiind disponibilă prin metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare.

<u>Etapele algoritmului de interpolare polinomială</u>. Algoritmul de interpolare polinomială este secvenţial şi cuprinde:

- etapa încadrării argumentului ;
- etapa calculului coeficienţilor funcţiei de aproximare ;
- etapa calculării valorii interpolate.

- **Pasul 1**. Etapa încadrării argumentului

$$x_i \le v \le x_{i+1} \; i = 1, \ldots, m-n+1 \quad \begin{cases} da & \alpha_j = x_{i+j-1}, \quad j = 1, \ldots, n+1 \\ nu & STOP \end{cases} \qquad (13.17)$$

- **Pasul 2**. Calculul coeficienţilor funcţiei de aproximare prin rezolvarea sistemului de ecuaţii liniare

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+1}^2 & \ldots & \alpha_{n+1}^n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\alpha_1) \\ f(\alpha_2) \\ \vdots \\ f(\alpha_{n+1}) \end{bmatrix}. \qquad (13.18)$$

- **Pasul 3**. Calculul valorii interpolate

$$g(v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \ldots + a_n v^n \; ; \qquad (13.19)$$

STOP.

13.4. Algoritmul interpolării liniare bidimensionale

Fie funcţia discretă $f(x,y)$, definită prin tabelul 13.4, în care variabila *x* are *nx* valori discrete iar variabila *y* are *ny* valori discrete. Ambele variabile independente au valori ordonate crescător.

Tabelul 13.4

Tabelul de valori asociat funcţiei discrete $f(x,y)$

		Variabila y			
		y_1	y_2	…	y_{ny}
Variabila x	x_1	f_{11}	f_{12}	…	$f_{1,nx}$
	x_2	f_{12}	f_{22}	…	$f_{2,nx}$
	…	…	…	…	…
	x_{nx}	$f_{1,nx}$	$f_{2,nx}$	…	$f_{nx,nx}$

Se cere să se determine o valoare interpolată a funcţiei $f(x,y)$ în punctul de coordonate $x_i \le v_x \le x_{i+1}$, respectiv $y_j \le v_y \le y_{j+1}$, utilizând funcţia de aproximare

$$g(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy\,. \qquad (13.20)$$

Algoritmul de interpolare bidimensională este secvenţial şi cuprinde următoarele etape: încadrarea argumentului v_x =i v_y, calculul coeficienţilor funcţiei de aproximare şi calculul valorii interpolate.

- **Pasul 1**. Încadrarea argumentului v_x

$$x_i \le v_x \le x_{i+1}\ i = 1,\ldots,nx-1 \quad \begin{cases} da & \begin{cases} x_1 = x_i \\ x_2 = x_{i+1} \\ Salt\ la\ Pasul\ 2 \end{cases} \\ nu & \{STOP \end{cases}. \qquad (13.21)$$

- **Pasul 2**. Încadrarea argumentului v_y

$$y_j \le v_y \le y_{j+1}\ i = 1,\ldots,ny-1 \quad \begin{cases} da & \begin{cases} y_1 = y_j \\ y_2 = y_{j+1} \\ Salt\ la\ Pasul\ 3 \end{cases} \\ nu & \{STOP \end{cases}. \qquad (13.22)$$

- **Pasul 3**. Selectarea valorilor funcţiei discrete

$$f_{11} = f(x_i, y_j); \qquad f_{12} = f(x_i, y_{j+1});$$

$$f_{21} = f(x_{i+1}, y_j); \qquad f_{22} = f(x_{i+1}, y_{j+1}).$$

- **Pasul 4**. Calculul coeficienţilor funcţiei de aproximare prin rezolvarea sistemului de ecuaţii liniare

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1 y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{bmatrix}. \qquad (13.23)$$

- **Pasul 5**. Calculul valorii interpolate

$$g(v_x, v_y) = a_0 + a_1 v_x + a_2 v_y + a_3 v_x v_y \,. \tag{13.24}$$

Test de autoevaluare

1. Care sunt etapele algoritmului de interpolare polinomială şi în ce constau acestea?

2. Prezentaţi în detaliu algoritmul interpolării liniare bidimensionale.