Statistika Non Parametrik
TSD - Ganjil 2022/2023

Pertemuan 6 :

Uji Keselarasan / Kesesuaian / GoF

Outline

1. Uji Chi-square
2. Uji Kolmogorov-Smirnov
3. Uji distribusi Uniform (dengan uji Chi-Sq)
4. Uji distribusi Binomial (dengan uji Chi-Sq)
5. Uji distribusi Poisson (dengan uji Chi-Sq)
6. Uji distribusi Uniform (dengan uji KS) (This Week)
7. Uji distribusi Binomial (dengan uji KS) (This Week)
8. Uji distribusi Poisson (dengan uji KS) (This Week)
9. Uji distribusi Normal (dengan uji Chi-Sq, KS, Liliefors) (This Week)

Uji Kolmogorov-Smirnov

Uji Kolmogorov-Smirnov

K-S 1 variable digunakan untuk membandingkan distribusi pengamatan dengan distribusi teoritis pada 1 variabel dengan skala ordinal

K-S 2 variabel digunakan untuk mencari sebab dan akibat berbeda dari 2 variabel dengan skala ordinal

Jika X adalah variable yang akan diuji dengan menggunakan UJI KS, maka terlebih dahulu harus diurutkan dari yang paling kecil hingga paling besar.

$$KS_{\text{hitung}} = \mathbf{max}|D|$$

$$D = F_{\text{observed}} - F_{\text{expected}}$$

Daerah penolakan

Tolak H_0 apabila $KS_{\text{hitung}} > KS_{\text{tabel}}$

Contoh 3

Rasa sakit pada saat melahirkan ditunjukkan dengan nilai skor (1-5) oleh 10 orang wanita. Tunjukkan apakah ada perbedaan dalam pemilihan skor rasa sakit. Dengan taraf signifikansi 5%.

Skor	1	2	3	4	5	**Jumlah**
Jumlah Ibu	0	1	0	5	4	**10**

Jawab

- **Perumusan hipotesis**

H_0 : Tidak ada perbedaan dalam pemilihan skor rasa sakit

H_1 : Terdapat perbedaan dalam pemilihan skor rasa sakit

- **Statistik uji**

Skor	1	2	3	4	5	Jumlah
Jumlah Ibu	0	1	0	5	4	**10**
p observed	0	0.1	0	0.5	0.4	**1**
p expected	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	**1**
F Observed	0	0.1	0.1	0.6	1	
F Expected	0.2	0.4	0.6	0.8	1	
(Fo-Fe)	-0.2	-0.3	-0.5	-0.2	0	
|Fo-Fe|	0.2	0.3	**0.5**	0.2	0	
			KS hitung			

$$KS_{\text{hitung}} = \mathbf{max}|D| = 0,5$$

- **Taraf Signifikansi**

$\alpha = 5\%$

- **Daerah penolakan**

Berdasarkan Tabel diperoleh

$$KS_{\text{tabel}} = \boxed{0,409}$$

- **Kesimpulan**

Karena $KS_{\text{hitung}} > KS_{\text{tabel}}$ maka TOLAK H_0

Artinya penelitian ini berhasil memperlihatkan bahwa **terdapat perbedaan dalam pemilihan skor rasa sakit**

Tabel Nilai Kritis Uji Kolmogorov-Smirnov

n	α = 0,20	α = 0,10	α = 0,05	α = 0,02	α = 0,01
1	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	0,684	0,776	0,842	0,900	0,929
3	0,565	0,636	0,708	0,785	0,829
4	0,493	0,565	0,624	0,689	0,734
5	0,447	0,509	0,563	0,627	0,669
6	0,410	0,468	0,519	0,577	0,617
7	0,381	0,436	0,483	0,538	0,576
8	0,359	0,410	0,454	0,507	0,542
9	0,339	0,387	0,430	0,480	0,513
10	0,323	0,369	$\boxed{0,409}$	0,457	0,486
11	0,308	0,352	0,391	0,437	0,468
12	0,296	0,338	0,375	0,419	0,449
13	0,285	0,325	0,361	0,404	0,432

Uji distribusi Uniform (dengan KS)

Uji distribusi Uniform (dengan KS)

- **Perumusan hipotesis**

  H_0 : data sampel berasal dari suatu populasi berdistribusi Uniform

  H_1 : data sampel tidak berasal dari suatu populasi berdistribusi Uniform

- **Statistik uji**

$$KS_{\text{hitung}} = \mathbf{max}\left|D\right|$$

- **Daerah penolakan**

  Tolak H_0 apabila $KS_{\text{hitung}} > KS_{\text{tabel}}$

- Pada pengujian keselarasan untuk distribusi Uniform, nilai peluangnya adalah $p_i = \frac{1}{r}$, i = 1, 2, ... , r.

Contoh 4 (KS)

Diketahui data pada table di bawah. Apakah sebaran nilai tersebut Uniform? Gunakan alpha = 0.05.

Nilai	A	B	C	D	E
Frekuensi	14	18	32	20	16

Jawab

- **Hipotesis**

  H_0 : data sampel berasal dari suatu populasi berdistribusi Uniform

  H_1 : data sampel tidak berasal dari suatu populasi berdistribusi Uniform

- **Statistik uji**

  r = banyaknya karakteristik yang diamati

  $$p_i = \frac{1}{r} = \frac{1}{5}$$

  $$KS_{\text{hitung}} = \mathbf{max}|D| = 0{,}08$$

Uniform						
Nilai	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**Total**
Frekuensi	14	18	32	20	16	**100**
p observed	0.14	0.18	0.32	0.2	0.16	**1**
p expected	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	**1**
F observed	0.14	0.32	0.64	0.84	1	
F expected	0.2	0.4	0.6	0.8	1	
F obs - F exp	-0.06	-0.08	0.04	0.04	0	
|F obs - F exp|	0.06	**0.08**	0.04	0.04	0	
		KS Hitung				

- **Daerah penolakan**

  Gagal tolak H_0 karena $KS_{\text{hitung}} = 0{,}08 < KS_{\text{tabel}} = 0{,}134$

- **Kesimpulan** : Data sampel berdistribusi Uniform

Tabel Nilai Kritis Uji Kolmogorov-Smirnov

n	α = 0,20	α = 0,10	α = 0,05	α = 0,02	α = 0,01
1	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	0,684	0,776	0,842	0,900	0,929
3	0,565	0,636	0,708	0,785	0,829
4	0,493	0,565	0,624	0,689	0,734
5	0,447	0,509	0,563	0,627	0,669
95	0,108	0,124	0,137	0,154	0,165
100	0,106	0,121	$\boxed{0,134}$	0,150	0,161

Uji distribusi Binomial (dengan KS)

Uji distribusi Binomial

$$Pi = P(x = i) = \begin{pmatrix} r \\ I \end{pmatrix} p^{(i)} q^{(r-i)}$$

p = peluang sukses terjadi

$$q = 1 - p$$

- **Perumusan hipotesis**

  H_0 : data sampel berasal dari suatu populasi berdistribusi Binomial

  H_1 : data sampel tidak berasal dari suatu populasi berdistribusi Binomial

Uji distribusi Binomial

- **Statistik uji**

$$KS_{\text{hitung}} = \mathbf{max}\left|D\right|$$

- **Daerah penolakan**

Tolak H_0 apabila $KS_{\text{hitung}} > KS_{\text{tabel}}$

Contoh 7

Uji kerapuhan 280 batang nylon ditekukkan pada 5 titik dan dicatat banyaknya patahan (0, 1, 2, 3, 4, 5). Uji apakah data berasal dari populasi berdistribusi Binomial dengan parameter $p = 0{,}5$.

Banyak patahan	0	1	2	3	4	5	TOTAL
Banyak batang nylon	2	5	3	2	1	2	15

Jawab

- **Hipotesis**

  H_0 : data sampel berasal dari suatu populasi berdistribusi Binomial

  H_1 : data sampel tidak berasal dari suatu populasi berdistribusi Binomial

- **Statistik uji**

  r = banyaknya karakteristik yang diamati

  $$KS_{\text{hitung}} = \mathbf{max}|D| = 0,268$$

Binomial							
Banyak patahan (i)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**TOTAL**
Banyak Batang Nylon	**2**	**5**	**3**	**2**	**1**	**2**	**15**
p observed	0.133333	0.333333	0.2	0.133333	0.066667	0.133333	**1**
F observed	0.133333	0.466667	0.666667	0.8	0.866667	1	
combin	5	1	10	1	10	5	
p^i	1	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	
q^(r-i)	0.03125	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	
p expected	0.15625	0.03125	0.3125	0.03125	0.3125	0.15625	**1**
F expected	0.15625	0.1875	0.5	0.53125	0.84375	1	
|Fo-Fe|	0.022917	0.279167	0.166667	**0.26875**	0.022917	0	
				KS hitung			

- **Daerah penolakan**

  Gagal tolak H_0 karena $KS_{\text{hitung}} = 0,268 < KS_{\text{tabel}} = 0,338$

- **Kesimpulan** : Data sampel berdistribusi Binomial

Tabel Nilai Kritis Uji Kolmogorov-Smirnov

n	α = 0,20	α = 0,10	α = 0,05	α = 0,02	α = 0,01
1	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	0,684	0,776	0,842	0,900	0,929
3	0,565	0,636	0,708	0,785	0,829
4	0,493	0,565	0,624	0,689	0,734
5	0,447	0,509	0,563	0,627	0,669
6	0,410	0,468	0,519	0,577	0,617
7	0,381	0,436	0,483	0,538	0,576
8	0,359	0,410	0,454	0,507	0,542
9	0,339	0,387	0,430	0,480	0,513
10	0,323	0,369	0,409	0,457	0,486
11	0,308	0,352	0,391	0,437	0,468
12	0,296	0,338	0,375	0,419	0,449
13	0,285	0,325	0,361	0,404	0,432
14	0,275	0,314	0,349	0,390	0,418
15	0,266	0,304	0,338	0,377	0,404
16	0,258	0,295	0,327	0,366	0,392
17	0,250	0,286	0,318	0,355	0,381

Uji distribusi Poisson (dengan KS)

Uji distribusi Poisson

$$P_i = P(x = i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , \lambda \approx \hat{\lambda} = rata - rata$$

- **Perumusan hipotesis**

  H_0 : data sampel berasal dari suatu populasi berdistribusi Poisson

  H_1 : data sampel tidak berasal dari suatu populasi berdistribusi Poisson

Contoh 8

- Banyak pasien di ruang tunggu dalam kurun waktu atau interval per 30 detik. Uji apakah banyak pasien menunggu dalam interval per 30 detik mengikuti distribusi Poisson dengan parameter $\lambda = 3$?

Banyak pasien teramati	0	1	2	3	4	5	6	7	Total
Banyak interval	4	1	2	2	4	4	6	2	25

Jawab

- **Hipotesis**

  H_0 : data sampel berasal dari suatu populasi berdistribusi Poisson

  H_1 : data sampel tidak berasal dari suatu populasi berdistribusi Poisson

- **Statistik uji**

  r = banyaknya karakteristik yang diamati

  $$KS_{\text{hitung}} = \mathbf{max}|D| = 0,295$$

Poisson											
Banyak pasien teramati	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Total**		lambda
oi	4	1	2	2	4	4	6	2	**25**		3
e(-lambda)	0.049787	0.049787	0.049787	0.049787	0.049787	0.049787	0.049787	0.049787			
lambda^x	1	3	9	27	81	243	729	2187			
x!	1	1	2	6	24	120	720	5040			
pi	0.049787	0.149361	0.224042	0.224042	0.168031	0.100819	0.050409	0.021604	**0.988095**		
p observed	0.16	0.04	0.08	0.08	0.16	0.16	0.24	0.08			
F observed	0.16	0.2	0.28	0.36	0.52	0.68	0.92	1			
F expected	0.049787	0.199148	0.42319	0.647232	0.815263	0.916082	0.966491	0.988095			
|Fo-Fe|	0.110213	0.000852	0.14319	0.287232	**0.295263**	0.236082	0.046491	0.011905			
					KS Hitung						

- **Daerah penolakan**

  Tolak H_0 karena $KS_{\text{hitung}} = 0,295 > KS_{\text{tabel}} = 0,264$

- **Kesimpulan** : Data sampel tidak berdistribusi Binomial

n	α = 0,20	α = 0,10	α = 0,05	α = 0,02	α = 0,01
1	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	0,684	0,776	0,842	0,900	0,929
3	0,565	0,636	0,708	0,785	0,829
4	0,493	0,565	0,624	0,689	0,734
5	0,447	0,509	0,563	0,627	0,669
6	0,410	0,468	0,519	0,577	0,617
7	0,381	0,436	0,483	0,538	0,576
24	0,212	0,242	0,269	0,301	0,323
25	0,208	0,238	$\boxed{0,264}$	0,295	0,317
26	0,204	0,233	0,259	0,290	0,311

Uji distribusi Normal (dengan Chi-Square, KS, dan Liliefors)

Uji Liliefors

Asumsi :

- sampel terdiri n pengamatan bebas
- skala pengukuran minimal yang mungkin digunakan nominal
- hasil pengamatan diklasifikasikan dalam r kategori yang tidak saling tumpang tindih

Uji Liliefors

- **Hipotesis:**

  H_0 : data sampel berasal dari distribusi normal

  H_1 : data sampel tidak berasal dari distribusi normal

- **Statistik uji**:

$$L_0 = \sup_x \left| F(z_i) - S(z_i) \right|$$

- **Daerah penolakan**:

  tolak Ho jika $L_0 > L_{\alpha, n}$

  $L_{\alpha, n}$ adalah nilai kritis untuk uji Liliefors

Uji Liliefors

Langkah-langkah:

1. Ubah x_i , i = 1, 2, ... , n ke dalam bentuk z_i , i = 1, 2, ... , n , melalui transformasi
2. Hitung $F(z_i) = P(z < z_i)$
3. Hitung proporsi $z_1, z_2, \ldots, z_n$ yang $< z_i$; katakan $S(z_i)$ maka

$$S(z_i) = \frac{\text{banyaknya } z_1, z_2, \cdots, z_n \text{ yang} \leq z_i}{n}$$

4. Hitung $|F(z_i) - S(z_i)|$
5. Tentukan $L_0 = \underset{x}{Sup}|F(z_i) - S(z_i)|$
6. Bandingkan nilai L_0 dengan $L_{\alpha,n}$

Contoh 9

Berikut diberikan data :

23 27 33 40 48 48 57 59 62 68 69 70

yang diambil dari suatu populasi, akan diuji hipotesis nol bahwa sampel ini berasal dari populasi dengan distribusi normal pada $\alpha = 0.05$.

Jawab

Penyelesaian

PERUMUSAN HIPOTESIS :

H_0 : data sampel berasal dari distribusi normal

H_1 : data sampel tidak berasal dari distribusi normal

STATISTIK UJI : $L_0 = \underset{x}{Sup}\left|F(z_i) - S(z_i)\right|$

DAERAH KRITIS : tolak Ho jika $L_0 > L_{\alpha,\, n}$

Untuk α = 0.05 dan n = 12 dari tabel nilai kritis uji Liliefors $L_{0.05\ ,\ 12}$ = 0,242

Perhitungan :

Dari data di atas diperoleh : lihat table di slide selanjutnya

Jawab

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
data (urut)	23	27	33	40	48	48	57	59	62	68	69	70
mean												
50.33333												
std.dev												
16.54928												
z	-1.65163	-1.40993	-1.04738	-0.6244	-0.14099	-0.14099	0.402837	0.523688	0.704965	1.067519	1.127944	1.18837
F(z)	0.049305	0.07928	0.147463	0.266183	0.443938	0.443938	0.656466	0.699752	0.759584	0.857131	0.870328	0.882656
S(z)	0.083333	0.166667	0.25	0.333333	0.416667	0.5	0.583333	0.666667	0.75	0.833333	0.916667	1
|F(z)-S(z)|	0.034029	0.087387	0.102537	0.06715	0.027271	0.056062	0.073133	0.033086	0.009584	0.023798	0.046338	**0.117344**
												Lo

Dari tabel di atas tampak pada = 70 memberikan nilai terbesar sehingga L_0 = 0,117.

Dari tabel nilai kritis uji Liliefors $L_{0,05\,,\;12}$ = 0,242 berarti $L_0 < L_{0,05\,,\;12}$ maka hipotesis nol diterima.

Kesimpulannya adalah bahwa populasi asal berdistribusi normal

Catatan :

Untuk pengujian keselarasan ini data harus dalam keadaan terurut dari kecil ke besar.

Tabel Nilai Kritis Untuk Uji Liliefors

Ukuran Sampel	Taraf Nyata (α)				
	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20
n = 4	0.417	0.381	0.352	0.319	0.300
5	0.405	0.337	0.315	0.299	0.285
6	0.364	0.319	0.294	0.277	0.265
7	0.348	0.300	0.276	0.258	0.247
8	0.331	0.285	0.261	0.244	0.233
9	0.311	0.271	0.249	0.233	0.223
10	0.294	0.258	0.239	0.224	0.215
11	0.284	0.249	0.230	0.217	0.206
12	0.275	$\boxed{0.242}$	0.223	0.212	0.199
13	0.268	0.234	0.214	0.202	0.190
14	0.261	0.227	0.207	0.194	0.183
15	0.257	0.220	0.201	0.187	0.177
16	0.250	0.213	0.195	0.182	0.173
17	0.245	0.206	0.289	0.177	0.169
18	0.239	0.200	0.184	0.173	0.166
19	0.235	0.195	0.179	0.169	0.163
20	0.231	0.190	0.174	0.166	0.160
25	0.200	0.173	0.158	0.147	0.142
30	0.187	0.161	0.144	0.136	0.131
n > 30	$\frac{1.031}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.886}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.805}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.768}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.736}{\sqrt{n}}$

Sumber : Sudjana (1992)

Latihan Soal

Kerjakan Contoh 9 menggunakan Uji Chi-Square dan Uji KS

Terima Kasih