# Formulário MDIO 2020/2021

# 1 Relax4

## 1.1 Formato do input

```
n
m
org dst custo cap (m vezes)
vert (n vezes)
```

- `n`: número de vértices
- `m`: número de arcos do grafo
- `org`: vértice de origem do arco
- `dst`: vértice de destino
- `custo`: custo de transporte
- `cap`: capacidade do arco
- `vert`: oferta/procura no vértice, + e − respetivamente

# 2 Transportes: Introdução

## 2.1 Modelo geral

- Dado um grafo $G = (V, A)$, pretende-se:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} & \\ \text{suj. a} \quad & -\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = b_j, \ \forall j \in V & (1) \\ & 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \ \forall (i,j) \in A & (2) \end{aligned}$$

**Variáveis de decisão:**

- $x_{ij}$: fluxo de *um único tipo de entidades* no arco orientado $(i,j)$;

**Dados:**

- $c_{ij}$: custo unitário de transporte no arco orientado $(i,j)$;
- $b_j$: oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) no vértice $j$;
- $u_{ij}$: capacidade do arco orientado $(i,j)$.

- Restrições (1) designam-se por *restrições de conservação de fluxo.*
- Restrições (2) designam-se por *restrições de capacidade.*

## 2.2 Caracterização das soluções básicas

A uma base podemos associar uma árvore (grafo com vértices não orientados) que suporta todos os vértices.

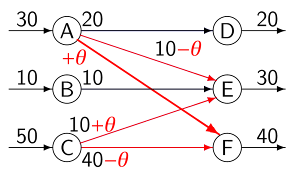
### 2.2.1 Propriedades da árvore de suporte de um grafo G = (V, A)

- é um grafo ligado (existe um caminho entre cada par de vértices)
- sem ciclos
- com $|A| = |V| - 1$ (nº de arcos = nº de vértices - 1)

## 2.3 Método dos multiplicadores

1. Fixar o valor de qualquer multiplicador em 0
2. Arcos básicos: $c_{ij} = u_i - u_j$
3. Arcos não-básicos: $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$

## 2.4 Pivô




Qual o valor máximo de $\theta$? $\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

# 3 Transportes: Grafos Bipartidos

Um grafo $G = (V, A)$ é bipartido se o conjunto de vértices $V$ puder ser dividido em dois conjuntos disjuntos, $V_1$ e $V_2$ (i.e., $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$), de tal modo que todos os arcos $(i, j) \in A$ tenham origem num vértice $i \in V_1$ e destino num vértice $j \in V_2$.

## 3.1 Solução inicial

### 3.1.1 Método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW $\Longrightarrow$
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa

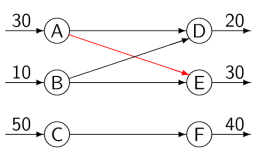
### 3.1.2 Método do custo mínimo

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo $\Longrightarrow$
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa

### 3.1.3 Seleção da variável básica com valor 0 (quando faltar uma var. básica)

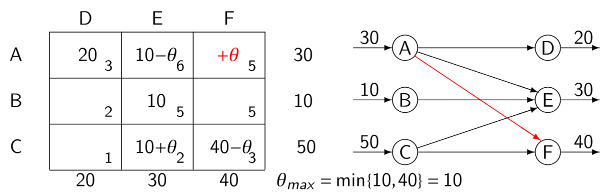
- Nem todas as variáveis podem ser escolhidas!
- No seguinte exemplo, escolher a variável $x_{AE}$ dá origem a um grafo que não é uma árvore.

| | D | E | F |
|---|---|---|---|
| A | * | 0 | |
| B | * | * | |
| C | | | * |




- Os arcos associados às variáveis formam um ciclo (*i.e.*, as colunas do modelo de PL são linearmente dependentes, e portanto não formam uma base)

### 3.2 Pivô




- A variável $x_{AF}$ entra na base e $x_{AE}$ sai da base.

# 4 Transportes: Redes c/ capacidades

## 4.1 Caracterização das soluções básicas

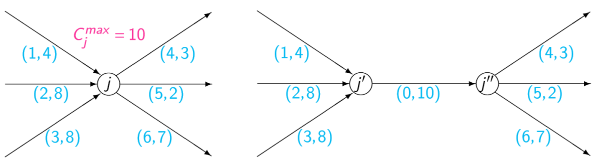
Iguais às referidas no 2.2, mas agora as variáveis no limite superior são também consideradas como não-básicas, para além das iguais a 0.

Uma variável não-básica é atrativa quando:

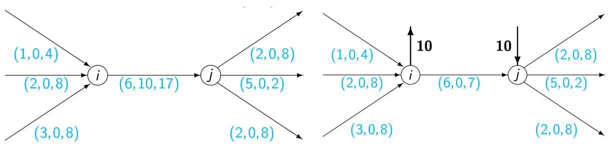
- $x_{ij}=0$ (variável aumenta de valor) e $\delta_{ij}<0$
- $x_{ij}=u_{ij}$ (variável decrementa de valor) e $\delta_{ij}>0$

## 4.2 Transformações

### 4.2.1 Capacidade num vértice




### 4.2.2 Limite inferior num arco




# 5 Programação Inteira: Modelos

## 5.1 Expressões lógicas

| Expressão lógica | Restrição binária |
|---|---|
| $a \Rightarrow b$ | $a \le b$ |
| $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$ | $(1-b) \le (1-a)$ |
| $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$ | $a \le b$ |
| $a \Rightarrow \overline{b}$ | $a+b \le 1$ |
| $b \Rightarrow \overline{a}$ | $a+b \le 1$ |
| $a \dot{\vee} b$ (ou exclusivo) | $a+b=1$ |
| seleccionar *exactamente* uma das opções | $a+b+\ldots+z=1$ |
| seleccionar, *no máximo.* uma das opções | $a+b+\ldots+z \le 1$ |
| $a.b \Rightarrow c$ | $a+b-1 \le c$ |

# 6 PI: Planos de corte

Estratégia do método dos planos de corte:

1. determinar a solução ótima do problema de PL
2. cortar partes do domínio em que não há sol. inteiras e reotimizar, até obter uma sol. inteira (que é ótima!)

Algoritmo de planos de corte:

1. Otimizar *relaxação linear*
2. Enquanto a solução não for inteira:
   - identificar um plano de corte
   - adicionar plano de corte ao conjunto de restrições
   - reotimizar (usando o método simplex dual)

# 7 PI: Partição e avaliação

## 7.1 Partição do domínio

Dado um pai com uma solução fracionária:

1. selecionar variável $x_j$ fracionária
2. criar 2 nós filhos, $x_j \le \lfloor x_j \rfloor$ e $x_j \ge \lceil x_j \rceil$

## 7.2 Solução incumbente

É a melhor solução inteira encontrada até um dado passo da pesquisa ($x_{\mathrm{SI}}$) com valor de função objetivo $z_{\mathrm{SI}}$.

## 7.3 Avaliação do nó (prob. maximização)

### 7.3.1 [Início] Determinar sol. ótima PL ($x_{\mathrm{PL}} \to z_{\mathrm{PL}}$)

- se for inteira, é a melhor sol. inteira no domínio do nó
- se não, pode haver na subárvore uma sol. inteira $\le z_{\mathrm{PL}}$

### 7.3.2 [Opção 1] Abandonar o nó (podar a subárvore) se:

- o problema for impossível (domínio vazio)
- a solução $x_{\mathrm{PL}}$ for inteira (atualizar incumbente se $z_{\mathrm{PL}} > z_{\mathrm{SI}}$)
- a solução $x_{\mathrm{PL}}$ for fracionária e não puder haver na subárvore uma solução inteira melhor do que a solução incumbente $z_{\mathrm{PL}} \le z_{\mathrm{SI}}$

### 7.3.3 [Opção 2] Fazer partição (explorar a subárvore):

- se a solução $x_{\mathrm{PL}}$ for fracionária e ainda puder haver na subárvore uma solução inteira melhor do que a solução incumbente $z_{\mathrm{PL}} > z_{\mathrm{SI}}$

## 7.4 Limites para o valor do ótimo

$z_I^* \in [\mathrm{LI}, \mathrm{LS}]$, $z_I^* \to$ solução ótima inteira

## 7.5 Limite superior

Num problema de maximização o LS é apenas um valor de referência, não está associado a nenhuma solução inteira admissível. O valor do ótimo da relaxação linear ($z_{\mathrm{RL}}$) é um limite superior para o valor do ótimo inteiro $z_I^*$:

$$z_I^* \le z_{\mathrm{RL}}$$

Para problemas de minimização é o oposto (lim. inferior).

## 7.6 Limite inferior

O valor de qualquer solução inteira admissível é um limite inferior para $z_I^*$.

Para problemas de minimização é o oposto (lim. superior).