Formulário MDIO 2020/2021

1 Relax4

1.1 Formato do input

```
n
m
org dst custo cap (m vezes)
vert (n vezes)
```

- **n**: número de vértices
- **m**: número de arcos do grafo
- **org**: vértice de origem do arco
- **dst**: vértice de destino
- **custo**: custo de transporte
- **cap**: capacidade do arco
- **vert**: oferta/procura no vértice, + e − respetivamente

2 Transportes: Introdução

2.1 Caracterização das soluções básicas

A uma base podemos associar uma árvore (grafo com vértices não orientados) que suporta todos os vértices.

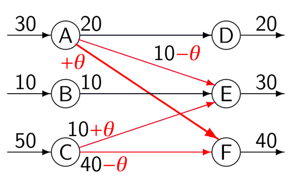
2.1.1 Propriedades da árvore de suporte de um grafo G = (V, A)

- é um grafo ligado (existe um caminho entre cada par de vértices)
- sem ciclos
- com $|A| = |V| - 1$ (nº de arcos = nº de vértices - 1)

2.2 Método dos multiplicadores

1. Fixar o valor de qualquer multiplicador em 0
2. Arcos básicos: $c_{ij} = u_i - u_j$
3. Arcos não-básicos: $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$

2.3 Pivô



Qual o valor máximo de θ? $\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

3 Transportes: Grafos Bipartidos

Um grafo $G = (V, A)$ é bipartido se o conjunto de vértices V puder ser dividido em dois conjuntos disjuntos, V_1 e V_2 (i.e., $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$), de tal modo que todos os arcos $(i, j) \in A$ tenham origem num vértice $i \in V_1$ e destino num vértice $j \in V_2$.

3.1 Solução inicial

3.1.1 Método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW $\Longrightarrow$
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa

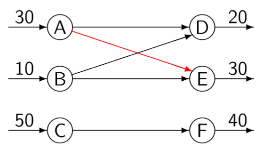
3.1.2 Método do custo mínimo

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo $\Longrightarrow$
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa

3.1.3 Seleção da variável básica com valor 0 (quando faltar uma var. básica)

- Nem todas as variáveis podem ser escolhidas!
- No seguinte exemplo, escolher a variável x_{AE} dá origem a um grafo que não é uma árvore.

	D	E	F
A	*	0	
B	*	*	
C			*

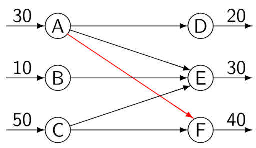


- Os arcos associados às variáveis formam um ciclo (*i.e.*, as colunas do modelo de PL são linearmente dependentes, e portanto não formam uma base)

3.2 Pivô

	D	E	F	
A	20 $_3$	$10-\theta$ $_6$	$+\theta$ $_5$	30
B	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
C	$_1$	$10+\theta$ $_2$	$40-\theta$ $_3$	50
	20	30	40	

$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$



- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

4 Transportes: Redes c/ capacidades

4.1 Caracterização das soluções básicas

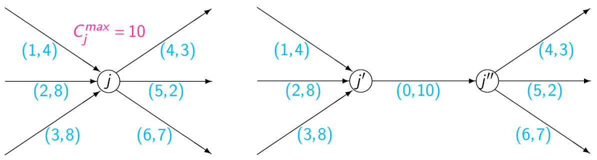
Iguais às referidas no 2.2, mas agora as variáveis no limite superior são também consideradas como não-básicas, para além das iguais a 0.

Uma variável não-básica é atrativa quando:

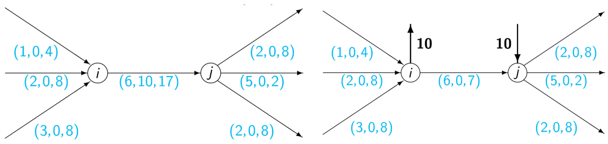
- $x_{ij} = 0$ (variável aumenta de valor) e $\delta_{ij} < 0$
- $x_{ij} = u_{ij}$ (variável decrementa de valor) e $\delta_{ij} > 0$

4.2 Transformações

4.2.1 Capacidade num vértice



4.2.2 Limite inferior num arco



5 Programação Inteira: Modelos

5.1 Expressões lógicas

Expressão lógica	Restrição binária
$a \Rightarrow b$	$a \leq b$
$\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$	$(1-b) \leq (1-a)$
$\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$	$a \leq b$
$a \Rightarrow \overline{b}$	$a + b \leq 1$
$b \Rightarrow \overline{a}$	$a + b \leq 1$
$a \dot{\vee} b$ (ou exclusivo)	$a + b = 1$
seleccionar *exactamente* uma das opções	$a + b + \ldots + z = 1$
seleccionar, *no máximo.* uma das opções	$a + b + \ldots + z \leq 1$
$a.b \Rightarrow c$	$a + b - 1 \leq c$

6 PI: Planos de corte

6.1 Algoritmo de planos de corte

1. Otimizar *relaxação linear*
2. Enquanto a solução não for inteira:
   - identificar um plano de corte
   - adicionar plano de corte ao conjunto de restrições
   - reotimizar (usando o método simplex dual)

6.2 Plano de corte de Chvátal-Gomory

1. Pegar na restrição da var. básica com a maior mantissa
2. Pegar na parte fracionária da restrição e meter $\geq$

Para inserir na tabela simplex:

1. Inverter de modo a ficar com $\leq$
2. Introduzir var. de folga de modo a ficar com $=$

6.2.1 Exemplo

1. $$x_1 + \frac{1}{4}s_1 + \frac{3}{2}s_2 = \frac{5}{2}$$
2. $$\frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \geq \frac{1}{2}$$
3. $$-\frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{2}s_2 \leq -\frac{1}{2}$$
4. $$-\frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{2}s_2 + s_3 = -\frac{1}{2}$$

7 PI: Partição e avaliação

7.1 Partição do domínio

Dado um pai com uma solução fracionária:

1. selecionar variável x_j fracionária
2. criar 2 nós filhos, $x_j \leq \lfloor x_j \rfloor$ e $x_j \geq \lceil x_j \rceil$

7.2 Solução incumbente

É a melhor solução inteira encontrada até um dado passo da pesquisa (x_{SI}) com valor de função objetivo z_{SI}.

7.3 Avaliação do nó (prob. maximização)

7.3.1 [Início] Determinar sol. ótima PL ($x_{\mathsf{PL}} \rightarrow z_{\mathsf{PL}}$)

- se for inteira, é a melhor sol. inteira no domínio do nó
- se não, pode haver na subárvore uma sol. inteira $\leq z_{\mathsf{PL}}$

7.3.2 [Opção 1] Abandonar o nó (podar a subárvore) se:

- o problema for impossível (domínio vazio)
- a solução x_{PL} for inteira (atualizar incumbente se $z_{\mathsf{PL}} > z_{\mathsf{SI}}$)
- a solução x_{PL} for fracionária e não puder haver na subárvore uma solução inteira melhor do que a solução incumbente $z_{\mathsf{PL}} \leq z_{\mathsf{SI}}$

7.3.3 [Opção 2] Fazer partição (explorar a subárvore):

- se a solução x_{PL} for fracionária e ainda puder haver na subárvore uma solução inteira melhor do que a solução incumbente $z_{\mathsf{PL}} > z_{\mathsf{SI}}$

7.4 Limites para o valor do ótimo

$z_I^* \in [\mathsf{LI}, \mathsf{LS}]$, $z_I^* \rightarrow$ solução ótima inteira

7.5 Limite superior

Num problema de maximização o LS é apenas um valor de referência, não está associado a nenhuma solução inteira admissível. O valor do ótimo da relaxação linear (z_{RL}) é um limite superior para o valor do ótimo inteiro z_I^*:

$$z_I^* \leq z_{\mathsf{RL}}$$

Para problemas de minimização é o oposto (lim. inferior).

7.6 Limite inferior

O valor de qualquer solução inteira admissível é um limite inferior para z_I^*.

Para problemas de minimização é o oposto (lim. superior).