Formulário MDIO 2020/2021

1 Relax4

1.1 Formato do input

```
n
m
org dst custo cap (m vezes)
vert (n vezes)
```

- `n`: número de vértices
- `m`: número de arcos do grafo
- `org`: vértice de origem do arco
- `dst`: vértice de destino
- `custo`: custo de transporte
- `cap`: capacidade do arco
- `vert`: oferta/procura no vértice, positivo e negativo respetivamente

2 Transportes: Introdução

2.1 Modelo geral

- Dado um grafo $G=(V,A)$, pretende-se:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\ \text{suj. a} \quad & -\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = b_j,\ \forall j \in V & (1) \\ & 0 \le x_{ij} \le u_{ij},\ \forall (i,j) \in A & (2) \end{aligned}$$

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: fluxo de *um único tipo de entidades* no arco orientado (i,j);

Dados:

- c_{ij}: custo unitário de transporte no arco orientado (i,j);
- b_j: oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) no vértice j;
- u_{ij}: capacidade do arco orientado (i,j).

- Restrições (1) designam-se por *restrições de conservação de fluxo*.
- Restrições (2) designam-se por *restrições de capacidade*.

2.2 Caracterização das soluções básicas

A uma base podemos associar uma árvore (grafo com vértices não orientados) que suporta todos os vértices.

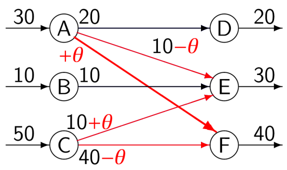
2.2.1 Propriedades da árvore de suporte de um grafo G = (V, A)

- é um grafo ligado (existe um caminho entre cada par de vértices)
- sem ciclos
- com $|A|=|V|-1$ (número de arcos = número de vértices - 1)

2.3 Método dos multiplicadores

1. Fixar o valor de qualquer multiplicador em 0
2. Arcos básicos: $c_{ij}=u_i-u_j$
3. Arcos não-básicos: $\delta_{ij}=c_{ij}-(u_i-u_j)$

2.4 Pivô



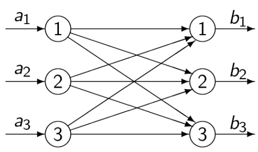
Qual o valor máximo de θ? $\theta_{max}=\min\{10,40\}=10$

3 Transportes: Grafos Bipartidos

Um grafo $G=(V,A)$ é bipartido se o conjunto de vértices V puder ser dividido em dois conjuntos disjuntos, V_1 e V_2 (i.e., $V1\cup V2=V, V1\cap V2=\emptyset$), de tal modo que todos os arcos $(i,j)\in A$ tenham origem num vértice $i\in V_1$ e destino num vértice $j\in V_2$.

3.1 Representações

	1	2	3	
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	x_{23} c_{23}	a_2
3	x_{31} c_{31}	x_{32} c_{32}	x_{33} c_{33}	a_3
	b_1	b_2	b_3	



	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
origem 1	1	1	1							$= a_1$
origem 2				1	1	1				$= a_2$
origem 3							1	1	1	$= a_3$
destino 1	-1			-1			-1			$= -b_1$
destino 2		-1			-1			-1		$= -b_2$
destino 3			-1			-1			-1	$= -b_3$
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	

3.2 Solução inicial

3.2.1 Método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW $\Longrightarrow$
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa

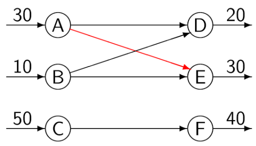
3.2.2 Método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo $\Longrightarrow$
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa

3.2.3 Seleção da variável básica com valor 0 (quando faltar uma var. básica)

- Nem todas as variáveis podem ser escolhidas!
- No seguinte exemplo, escolher a variável x_{AE} dá origem a um grafo que não é uma árvore.

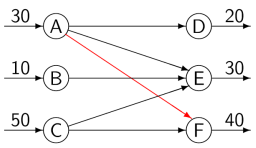
	D	E	F
A	*	0	
B	*	*	
C			*



- Os arcos associados às variáveis formam um ciclo (*i.e.*, as colunas do modelo de PL são linearmente dependentes, e portanto não formam uma base)

3.3 Pivô

	D	E	F	
A	$20_{\ 3}$	$10-\theta_{\ 6}$	$+\theta_{\ 5}$	30
B	$_{2}$	$10_{\ 5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	$10+\theta_{\ 2}$	$40-\theta_{\ 3}$	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

4 Transportes: Redes sem capacidades

…(nada?)

5 Transportes: Redes com capacidades

5.1 Caracterização das soluções básicas

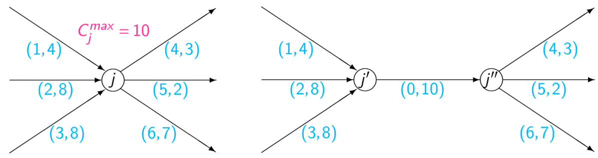
Iguais às referidas no 2.2, mas agora as variáveis no limite superior são também consideradas como não-básicas, para além das iguais a 0.

Uma variável não-básica é atrativa quando:

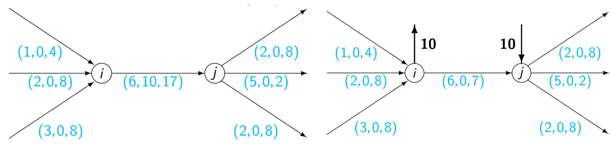
- $x_{ij} = 0$ (variável aumenta de valor) e $\delta_{ij} < 0$
- $x_{ij} = u_{ij}$ (variável decrementa de valor) e $\delta_{ij} > 0$

5.2 Transformações

5.2.1 Capacidade num vértice



5.2.2 Limite inferior num arco



6 Programação Inteira: Modelos

6.1 Expressões lógicas

Expressão lógica	Restrição binária
$a \Rightarrow b$	$a \leq b$
$\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$	$(1-b) \leq (1-a)$
$\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$	$a \leq b$
$a \Rightarrow \bar{b}$	$a + b \leq 1$
$b \Rightarrow \bar{a}$	$a + b \leq 1$
$a \dot{\vee} b$ (ou exclusivo)	$a + b = 1$
seleccionar *exactamente* uma das opções	$a + b + \ldots + z = 1$
seleccionar, *no máximo*. uma das opções	$a + b + \ldots + z \leq 1$
$a.b \Rightarrow c$	$a + b - 1 \leq c$

7 Programação Inteira: Planos de corte

…

8 Programação Inteira: Partição e avaliação