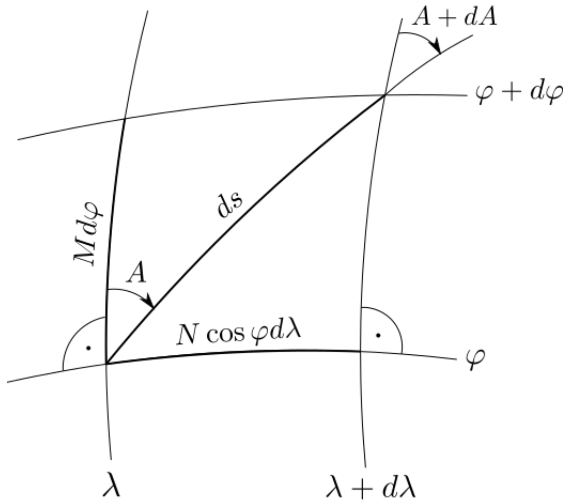
Przeniesienie współrzędnych geodezyjnych na powierzchni elipsoidy – zadanie wprost (**algorytm Kivioja**)

Aby wykonać zadanie wprost przeniesienia współrzędnych, możemy wykorzystać algorytm całkowania numerycznego zaproponowany w 1971 r. w pracy [1]. Jest to nieskomplikowany algorytm polegający na wykorzystaniu równań różniczkowych pierwszego rzędu dla linii geodezyjnej przedstawionych w równaniu 1., wynikających bezpośrednio z elementarnego trójkąta na powierzchni elipsoidy, przedstawionego na rysunku 1:



Rysunek 1: Elementarny trójkąt na powierzchni elipsoidy

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos A}{M}, \qquad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos\varphi}. \tag{1}$$

Długości promieni przekrojów w kierunku południka M i I wertykału N można obliczyć ze wzorów:

Algorytm wykorzystuje również równanie Clairauta linii geodezyjnej:

$$N \cos\varphi \sin A = c = \text{const} \tag{2}$$

wyrażające własność linii geodezyjnej mówiącą o tym, że iloczyn promienia równoleżnika $p = N \cos\varphi$ i sinusa jej azymutu w danym punkcie jest wartością stałą dla całej linii.

[1] L. Kivioja, „Computation of geodetic direct and indirect problems by computers accumulating increments from geodetic line elements," Bulletin Géodésique (1946-1975), vol. 99, no. 1, pp. 55–63, 1971.

Korzystając z własności $\frac{dp}{ds} = \cos A \sin \varphi$ i różniczkując równanie 2 względem s otrzymamy równanie różniczkowe pierwszego rzędu dla azymutu:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\sin A \operatorname{tg} \varphi}{N}. \tag{3}$$

Realizacja równań 1, 2, 3 dla krótkich odcinków pozwala rozwiązać skutecznie zadanie wprost przeniesienia współrzędnych. Algorytm Kivioji stosujemy dla linii o długości do 150 kilometrów.

Mając dane współrzędne φ_1, λ_1 punktu początkowego P_1 oraz długość linii geodezyjnej s i jej azymut A_{1-2} w punkcie początkowym, możemy przystąpić do realizacji algorytmu.

1. Pierwszym krokiem jest podzielenie linii geodezyjnej na n elementów ds

$$ds = \frac{s}{n}, \tag{4}$$

   gdzie $ds < (1 \div 1.5)$ km, bądź $ds_i = 1$ km, a ostatni element $ds_n < 1$ km.

2. Obliczamy główne promienie krzywizny M i N w punkcie wyjściowym P_1 oraz stałą c linii geodezyjnej.

$$M_i = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi_i\right)^3}}; \qquad N_i = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_i}}$$

3. Pierwsze przybliżenie przyrostu szerokości i azymutu:

$$d\varphi_i = \frac{ds_i \cdot \cos A_i}{M_i}, \tag{5}$$

$$dA_i = \frac{ds \sin A_i \operatorname{tg} \varphi_i}{N_i}, \tag{6}$$

4. Obliczenie szerokości i azymutu w punkcie środkowym (m) odcinka, na podstawie przyrostów:

$$\varphi_{im} = \varphi_i + \frac{1}{2} d\varphi_i. \tag{7}$$

$$A_{im} = A_i + \frac{1}{2} dA_i. \tag{8}$$

5. Obliczenie promieni krzywizn w kierunkach głównych w punkcie m:

$$M_{im} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi_{im}\right)^3}}; \qquad N_{im} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_{im}}}$$

6. Ostateczne przyrosty szerokości, długości i azymutu:

$$d\varphi_{im} = \frac{ds \cdot \cos A_{im}}{M_{im}} \tag{9}$$

$$d\lambda_{im} = \frac{ds \cdot \sin A_{im}}{N_{im} \cos \varphi_{im}} \tag{10}$$

$$dA_{im} = \frac{ds \cdot \sin A_{im} \tan \varphi_{im}}{N_{im}} \tag{11}$$

7. Obliczamy współrzędne końca odcinka ds oraz azymut na końcu odcinka linii geodezyjnej jako:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + d\varphi_{im} \tag{12}$$
$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + d\lambda_{im} \tag{13}$$
$$A_{i+1} = A_i + dA_m \tag{14}$$

   Punkty 2 – 7 powtarzamy n razy. Wyniki dla punktu $i = n + 1$ są wynikami dla końca linii geodezyjnej.

8. Azymut odwrotny obliczamy jako:

$$A = A_{n+1} + 180^\circ \tag{15}$$

9. Ostatecznie dla punktu P_2 otrzymujemy:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \sum_{i=1}^{n} d\varphi_i \tag{16}$$
$$\lambda_2 = \lambda_1 + \sum_{i=1}^{n} d\lambda_i, \tag{17}$$
$$A_2 = A_1 + \sum_{i=1}^{n} dA_i \pm 180^\circ. \tag{18}$$

10. Dla kontroli można porównać wartość stałej c równania Clairauta (2) w punkcie początkowym i końcowym badanej linii geodezyjnej.