Wydział Geodezji i Kartografii

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Odwzorowanie Gaussa-Krügera: układy współrzędnych płaskich stosowanych w Polsce

Wybrane Zagadnienia Geodezji Wyższej

Maciej Grzymała
maciej.grzymala@pw.edu.pl
Wydział Geodezji i Kartografii, Politechnika Warszawska
Warszawa, 2023

1 Algorytm przeliczenia współrzędnych φ i λ na płaszczyznę odwzorowania Gaussa-Krügera

Oznaczenia

- a, b – dłuższa i krótsza półoś elipsoidy;
- e, e' – pierwszy mimośród, drugi mimośród;
- φ, λ – szerokość i długość geodezyjna;
- x_{gk}, y_{gk} – współrzędne prostokątne lokalne na płaszczyźnie Gaussa-Krügera;
- λ_0 – długość geodezyjna południka zerowego;
- σ – długość łuku południka;

1.1 Przeliczenie wprost: $(x_{gk}, y_{gk}) = f(\varphi, \lambda)$

Dane

- φ, λ – współrzędne geodezyjne punktu;
- λ_0 – długość geodezyjna południka zerowego;
- a, e^2 – parametry elipsoidy;

Szukane

- x_{gk}, y_{gk} – współrzędne prostokątne lokalne na płaszczyźnie Gaussa-Krügera;

Algorytm

1. Parametry elipsoidy:

$$b^2 = a^2(1 - e^2); \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2};$$

2. Wielkości pomocnicze:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0; \quad t = \tan\varphi; \quad \eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2\varphi; \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}};$$

3. Długość łuku południka:

$$\sigma = a \cdot (A_0\varphi - A_2 \sin 2\varphi + A_4 \sin 4\varphi - A_6 \sin 6\varphi + \dots);$$

gdzie:

$$A_0 = 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256}; \quad A_2 = \frac{3}{8}\left(e^2 + \frac{e^4}{4} + \frac{15e^6}{128}\right); \quad A_4 = \frac{15}{256}\left(e^4 + \frac{3e^6}{4}\right); \quad A_6 = \frac{35e^6}{3072};$$

4. Współrzędne prostokątne lokalne na płaszczyźnie Gaussa-Krügera:

$$x_{gk} = \sigma + \frac{\Delta\lambda^2}{2} N \sin\varphi\cos\varphi \left\{1 + \frac{\Delta\lambda^2}{12}\cos^2\varphi \cdot \left(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4\right) + \frac{\Delta\lambda^4}{360}\cos^4\varphi \cdot \left(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2\right) + \dots\right\};$$

$$y_{gk} = \Delta\lambda N \cos\varphi \cdot \left\{1 + \frac{\Delta\lambda^2}{6}\cos^2\varphi \cdot \left(1 - t^2 + \eta^2\right) + \frac{\Delta\lambda^4}{120}\cos^4\varphi \left(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2\right) + \dots\right\};$$

1.2 Przeliczenie odwrotne: $(\varphi, \lambda) = f(x_{gk}, y_{gk})$

Dane

- x_{gk}, y_{gk} – współrzędne prostokątne lokalne na płaszczyźnie Gaussa-Krügera;
- λ_0 – długość geodezyjna południka zerowego;
- a, e^2 – parametry elipsoidy;

Szukane

- φ, λ – współrzędne geodezyjne punktu;

Algorytm

1. Iteracyjne wyznaczenie pierwszego przybliżenia szerokości geodezyjnej φ_1:

$$\varphi_1^{i=0} = \frac{x_{gk}}{aA_0}; \quad \sigma^i = f(\varphi_1^i) \text{ – na podstawie wzoru pkt. 2.3.3;}$$

$$\varphi_1^i = \varphi_1^{i-1} + \frac{x_{gk} - \sigma^{i-1}}{aA_0}; \quad \text{Warunek zakończenia iteracji: } |\varphi_1^i - \varphi_1^{i-1}| < 0''.000001$$

2. Wielkości pomocnicze (obliczone w funkcji φ_1):

$$N_1; \quad M_1; \quad t_1; \quad \eta_1;$$

3. Współrzędne geodezyjne:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{y_{gk}^2 t_1}{2M_1N_1} \cdot \left\{1 - \frac{y_{gk}^2}{12N_1^2} \cdot \left(5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2 - 4\eta_1^4\right) + \frac{y_{gk}^4}{360N_1^4} \cdot \left(61 + 90t_1^2 + 45t_1^4\right) + \ldots\right\};$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{y_{gk}}{N_1 \cos\varphi_1} \cdot \left\{1 - \frac{y_{gk}^2}{6N_1^2} \cdot \left(1 + 2t_1^2 + \eta_1^2\right) + \frac{y_{gk}^4}{120N_1^4} \cdot \left(5 + 28t_1^2 + 24t_1^4 + 6\eta_1^2 + 8\eta_1^2 t_1^2\right) + \ldots\right\};$$

2 Układ współrzędnych płaskich PL-2000

Układ współrzędnych prostokątnych płaskich 2000 oparty jest na odwzorowaniu G-K. Obszar Polski podzielony jest na 4 pasy południkowe, o szerokości 3° każdy (południki osiowe 15°, 18°, 21°, 24°), oznaczone odpowiednio numerami 5, 6, 7 i 8. Współczynnik zniekształcenia skali w południku osiowym każdego pasa równy jest 0.999923 ($m_0 = 0.999923$). Układ przeznaczony do opracowań w skalach większych od 1:10000, a w szczególności mapy zasadniczej.

$$x_{2000} = m_0 \cdot x_{gk} \tag{1}$$

$$y_{2000} = m_0 \cdot y_{gk} + \mathrm{nr} \cdot 1\,000\,000 + 500\,000 \tag{2}$$

3 Układ współrzędnych płaskich PL-1992

Układ współrzędnych prostokątnych płaskich 1992 oparty jest na odwzorowaniu G-K. Obszar Polski objęty jest jednym pasem południkowym o szerokości 10° (południk osiowy 19° długości geodezyjnej wschodniej). Współczynnik zniekształcenia skali w południku osiowym każdego pasa równy jest 0.9993 ($m_0 = 0.9993$). Układ przeznaczony do opracowań w skali 1:10000 i skalach mniejszych oraz do tworzenia Topograficznej Bazy Danych.

$$x_{1992} = m_0 \cdot x_{gk} - 5\,300\,000 \tag{3}$$

$$y_{1992} = m_0 \cdot y_{gk} + 500\,000 \tag{4}$$

4 Zadanie 1. Przeliczenie współrzędnych do układów PL-1992 i PL-2000

Mając dane współrzędne geodezyjne φ, λ czterech punktów, z ćwiczenia nr 3, wyznaczone na podstawie zadania wprost przeniesienia współrzędnych na elipsoidzie, metodą Kivioji, oblicz współrzędne płaskie tych punktów w układach PL-1992 oraz PL-2000. Wyznaczając współrzędne punktów w układzie PL-2000 należy pamiętać o odpowiedniej strefie odwzorowania Gaussa-Krügera. W przypadku, gdy nie wszystkie z danych punktów będą leżeć wewnątrz tego samego 3-stopniowego pasa odwzorowania G-K, należy przyjąć strefę odpowiednią dla punktu nr 1 (tak, aby współrzędne wszystkich 4 punktów wyznaczyć w tym samym układzie współrzędnych płaskich).

5 Zadanie 2. Redukcje odwzorowawcze

Wykonaj redukcję długości i azymutu, obliczonych na powierzchni układu PL-2000/PL-1992 na powierzchnię elipsoidy. (Schemat wykonywania zadania, dla uproszczenia, zapisano dla współrzędnych w układzie PL-2000. Obliczenia dla układu PL-1992 należy wykonać analogicznie):

1. Oblicz długości odcinków między punktami, w odpowiednich parach: 1-2, 2-3, 3-4, 4-1, na płaszczyźnie układu PL-2000 (z tw. Pitagorasa, $s_{\text{układ}}$);

2. Wykonaj redukcje długości z płaszczyzny układu PL-2000 na elipsoidę:

1. Oblicz długość odcinka na płaszczyźnie G-K (s_{gk}):
   - $s_{gk} = s_{\text{układ}}/m_0^{\text{układ}}$,
   - albo z tw. Pitagorasa na podstawie współrzędnych płaskich punktów na płaszczyźnie G-K.
2. Oblicz redukcję długości:
   $$r_{AB} = s_{AB} \cdot \frac{y_A^2 + y_A y_B + y_B^2}{6R_m^2} \tag{5}$$
   gdzie: R_m – średni promień krzywizny dla odcinka ($R_m = \sqrt{N_m \cdot M_m}$ obliczone dla φ_m – szerokość geodezyjna środkowego punktu odcinka); y – współrzędne y obu punktów na płaszczyźnie G-K; s_{AB} – długość odcinka (dowolnie, czy na płaszczyźnie, czy na elipsoidzie).
3. Oblicz długość odcinka na elipsoidzie:
   $$s_{elip} = s_{gk} - r \tag{6}$$
4. Tak obliczone długości odcinków porównaj z długościami odcinków: danych w zadaniu 3 i z obliczonymi na podstawie zadania odwrotnego w zadaniu 3.

3. Wykonaj redukcje azymutów obliczonych na podstawie współrzędnych płaskich, na elipsoidę:

1. Oblicz kąt kierunkowy α – odpowiednik azymutu na płaszczyźnie. (Chcąc wykonać redukcje azymutów wprost, obliczenia należy zrobić dla pierwszego punktu z pary, jako wierzchołka kąta, natomiast chcąc dodatkowo wykonać redukcję azymutów odwrotnych, należy powtórzyć je dla wierzchołka w punkcie drugim):
   $$\tan \alpha_{AB} = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right) \tag{7}$$
2. Oblicz zbieżność południków γ:
   - Na podstawie współrzędnych geodezyjnych φ, λ:
     $$\gamma = \Delta\lambda \sin\varphi + \frac{\Delta\lambda^3}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi\cdot(1+3\eta^2+2\eta^4) + \frac{\Delta\lambda^5}{15}\sin\varphi\cos^4\varphi\cdot(2-t^2) \tag{8}$$
     gdzie: $\Delta\lambda$, t_1, η_1 zob. 1
   - Na podstawie współrzędnych płaskich:
     $$\gamma = \frac{y}{N_1}t_1\{1 - \frac{y^2}{3N_1^2}(1+t_1^2-\eta_1^2-2\eta_1^4) + \frac{y^4}{15N_1^4}(2+5t_1^2+3t_1^4)\} \tag{9}$$
     gdzie: N_1 (promień przekroju w kierunku I wertykału) oraz t_1 obliczone są dla **pierwszego przybliżenia szerokości geodezyjnej φ_1, zob. 1**

3. Oblicz redukcję kierunków δ_{AB}:

$$\delta_{AB} = \frac{(x_B - x_A)(2y_A + y_B)}{6R_m^2} \tag{10}$$

$$\delta_{BA} = \frac{(x_A - x_B)(2y_B + y_A)}{6R_m^2} \tag{11}$$

   gdzie x i y to współrzędne na płaszczyźnie G-K i R_m średni promień Ziemi dla środkowego punktu odcinka.

4. Oblicz azymut odcinka na powierzchni elipsoidy, jako:

$$A_{AB} = \alpha_{AB} + \gamma_A + \delta_{AB} \tag{12}$$

   i odpowiednio dla azymutu odwrotnego:

$$A_{BA} = \alpha_{BA} + \gamma_B + \delta_{BA} \tag{13}$$

5. Obliczone w ten sposób azymuty odcinków porównaj z azymutami z zadania 3. (danymi, obliczonymi z zadania wprost i odwrotnego)

3. Obliczenie pola powierzchni "trapezu"na płaszczyźnie Pole powierzchni figury na płaszczyźnie wyrazić można stosując tzw. wzory Gaussa:

$$2P = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_{i+1} - y_{i-1}) \tag{14}$$

dla kontroli:

$$-2P = \sum_{i=1}^{n} y_i(x_{i+1} - x_{i-1}) \tag{15}$$

(równania dotyczą przypadku, kiedy punkty numerowane są zgodnie z ruchem wskazówek zegara. W sytuacji odwrotnej, należy wziąć pod uwagę wartości bezwzględne)

Należy obliczyć pole powierzchni danego "trapezu"na płaszczyźnie układów PL-2000 oraz PL-1992. Posługując się np. biblioteką `pyproj` języka python, należy również przeliczyć współrzędne punktów do układu PL-LAEA – układu równopolowego (kody EPSG układów współrzędnych płaskich można znaleźć na stronie: `https://epsg.org/home.html`). Należy zatem policzyć dodatkowo pole powierzchni figury na podstawie współrzędnych płaskich w tym układzie, sprawdzając tym samym wiernopolowość odwzorowania (pole powierzchni należy porównać z polem figury na elipsoidzie, wyznaczonym w zadaniu 3).

6 Wytyczne

Możliwości wykonania analiz w tym ćwiczeniu jest bardzo dużo. Nie trzeba robić ich wszystkich, aczkolwiek od ilości porównań i, przede wszystkim, wyciągniętych z nich wniosków, będzie zależeć ocena końcowa z tego ćwiczenia. Zatem, podsumowując, nie ilość, ale jakość wykonanych obliczeń i wyciągniętych wniosków z tego ćwiczenia, będzie stanowić wartość największą.