Metoda Vincentego – zadanie odwrotne*

Maciej Grzymała
Wydział Geodezji i Kartografii
Politechnika Warszawska

1. Oznaczenia

a, b – dłuższa i krótsza półoś elipsoidy;
e, f – pierwszy mimośród, spłaszczenie elipsoidy;
φ, λ – szerokość i długość geodezyjna;
$\Delta\lambda$ – różnica długości geodezyjnej;
s – długość linii geodezyjnej;
A_{AB}, A_{BA} – azymut prosty i odwrotny;
α – azymut linii geodezyjnej na równiku;
U – szerokość zredukowana;
L – różnica długości na sferze pomocniczej;
σ – odległość kątowa pomiędzy punktami na sferze;
σ_m – odległość kątowa na sferze od równika do punktu środkowego linii geodezyjnej;

2. Dane

φ_A, λ_A – współrzędne geodezyjne punktu A;
φ_B, λ_B – współrzędne geodezyjne punktu B;
a, e^2 – parametry elipsoidy;

3. Szukane

s_{AB} – długość linii geodezyjnej pomiędzy punktami A i B;
A_{AB}, A_{BA} – azymut prosty i odwrotny linii geodezyjnej;

4. Algorytm

1. Wyznaczenie krótkiej półosi oraz spłaszczenia elipsoidy:

$$b = a\sqrt{1-e^2}; \qquad f = 1 - \frac{b}{a}; \tag{1}$$

2. Różnica długości geodezyjnych:

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A \tag{2}$$

* T. Vincenty (1975). Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations. *Survey Review* XXII, 176, April 1975

3. Obliczenie szerokości zredukowanych:

$$\tan(U_A) = (1-f)\tan\varphi_A; \qquad \tan U_B = (1-f)\tan\varphi_B \tag{3}$$

4. Iteracyjne obliczenie L: równania (5) — (8).
   W pierwszym przybliżeniu przyjmujemy:

$$L = \Delta\lambda \tag{4}$$

5. Odległość sferyczna między punktami σ:

$$\sin\sigma = \sqrt{(\cos U_B \sin L)^2 + (\cos U_A \sin U_B - \sin U_A \cos U_B \cos L)^2}; \tag{5}$$

$$\cos\sigma = \sin U_A \sin U_B + \cos U_A \cos U_B \cos L; \tag{6}$$

$$\sigma = \arctan\left(\frac{\sin\sigma}{\cos\sigma}\right); \tag{7}$$

6. Obliczenie azymutu linii geodezyjnej na równiku α:

$$\sin\alpha = \frac{\cos U_A \cos U_B \sin L}{\sin\sigma}; \tag{8}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha; \tag{9}$$

7. Odległość kątowa punktu środkowego linii geodezyjnej od równika σ_m:

$$\cos 2\sigma_m = \cos\sigma - \frac{2\sin U_A \sin U_B}{\cos^2\alpha}; \tag{10}$$

8. Obliczenie poprawionej wartości różnicy długości geodezyjnych na sferze pomocniczej L:

$$C = \frac{f}{16}\cos^2\alpha[4 + f(4 - 3\cos^2\alpha)]; \tag{11}$$

$$L = \Delta\lambda + (1-C)f\sin\alpha\left\{\sigma + C\sin\sigma\left[\cos 2\sigma_m + C\cos\sigma(-1 + 2\cos^2 2\sigma_m)\right]\right\}; \tag{12}$$

   Warunkiem zakończenia iteracji jest $|L_{i+1} - L_i| < 0".000001$.

9. Obliczenie długości linii geodezyjnej s_{AB} oraz azymutów A_A i A_B:

$$u^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}\cos^2\alpha; \tag{13}$$

$$A = 1 + \frac{u^2}{16384}\left\{4096 + u^2\left[-768 + u^2\left(320 - 175u^2\right)\right]\right\}; \tag{14}$$

$$B = \frac{u^2}{1024}\left\{256 + u^2\left[-128 + u^2\left(74 - 47u^2\right)\right]\right\}; \tag{15}$$

$$\Delta\sigma = B\sin\sigma\left\{\cos 2\sigma_m + \frac{1}{4}B\left[\cos\sigma(-1 + 2\cos^2 2\sigma_m) - \frac{1}{6}B\cos 2\sigma_m(-3 + 4\sin^2\sigma)(-3 + 4\cos^2 2\sigma_m)\right]\right\}; \tag{16}$$

$$s_{AB} = bA(\sigma - \Delta\sigma); \tag{17}$$

$$A_{AB} = \arctan\left(\frac{\cos U_B \sin L}{\cos U_A \sin U_B - \sin U_A \cos U_B \cos L}\right); \tag{18}$$

$$A_{BA} = \arctan\left(\frac{\cos U_A \sin L}{-\sin U_A \cos U_B + cos U_A \sin U_B \cos L}\right) + \pi; \tag{19}$$