Troisième partie

Réseaux de forces pour les constructions clavées

Chapitre 11

Motivation et enjeux

Résumé : Ce chapitre présente les raisons pour lesquelles une extension de la méthode des réseaux de forces nous a semblée nécessaire. Dans un premier temps, la similitude conceptuelle entre le réseau de forces et le polygone funiculaire est soulignée. Les conséquences et limitations introduites par les deux hypothèses fondamentales, nécessaires pour appliquer la méthode des réseaux des forces, sont ensuite exposées. Enfin, le besoin d'une extension de la méthode est considéré du point de vue de la coupe des pierres, et du calcul à la rupture.

Sommaire

11.1 Réseaux de forces et lignes de pression

La proximité lexicale en anglais entre le réseau de forces (« thrust network ») et la ligne de pression (« thrust line ») est trompeuse. Le réseau de forces est l'extension sous forme de réseau du polygone funiculaire, et non celle de la ligne de pression. Nous présentons dans cette section ces extensions.

11.1.1 Extension du polygone funiculaire sous forme de réseau

Revoyons pour commencer la définition du polygone funiculaire et celle de la ligne de pression, qui ont été données dans l'état de l'art pour les constructions clavées.

Définition 3. Rappel de la définition vue dans l'état de l'art :
Un *polygone funiculaire* d'un arc clavé est un polygone dont les sommets sont les points d'intersection des lignes d'action des forces en équilibre s'appliquant à chaque claveau.

Définition 4. Rappel de la définition vue dans l'état de l'art :
Une *ligne de pression* d'un arc clavé est la suite des points d'application des résultantes des actions de contact (ou centres de pression) sur ses joints.

Les centres de pression étant donnés par les intersections des joints avec les lignes d'action des résultantes des actions de contact, la *ligne de pression* est donc la suite des intersections des joints avec les segments ou les prolongations des segments du polygone funiculaire.

Par construction, les lignes d'action des résultantes des actions de contact sur les joints passent par les branches du réseau de forces. Les nœuds du réseau de forces sont les points d'intersections des branches, et donc des lignes d'action des forces. Ainsi, le réseau de forces correspond exactement au concept de polygone funiculaire, étendu sous forme de réseau.

A contrario, la ligne de pression ne peut pas être étendue en 3D sous la forme d'un réseau. En effet, en 2D la ligne de pression d'un système de blocs n'est pas une courbe, mais une suite de points situés sur les plans passant par les joints des blocs. L'extension de cette suite de points en 3D est un nuage de points, comprenant l'ensemble des centres de pression (fig. 11.1).

Il est courant en 2D de tracer un segment pour relier les points de la ligne de pression, de manière à former une courbe. Cependant, en dehors des points d'application des forces sur les joints, les autres points de la courbe ainsi formée n'ont pas de sens physique. Il n'est d'ailleurs pas possible de transformer le nuage de points en 3D en un réseau : pour chaque bloc en contact sur quatre faces, il existe quatre centres de pression, entre lesquels on peut tracer six segments distincts. Il faudrait donc des hypothèses complémentaires pour définir un réseau correspondant à la ligne de pression.

L'extension sous forme de réseau du polygone funiculaire a un caractère pratique, plus qu'un caractère théorique. En effet, la statique graphique présentée par Culmann (1864) aborde déjà le cas des forces dans l'espace, et approfondi le cas des « forces formant une gerbe » (Culmann, 1880), c'est-à-dire des forces qui passent en un même point. Cependant la difficulté d'application de la statique graphique en 3D a conduit les ingénieurs à utiliser cette dernière essentiellement en 2D, c'est-à-dire pour les systèmes de forces coplanaires. La méthode des réseaux de forces permet donc d'obtenir des résultats déjà théoriquement accessibles grâce à la statique graphique, mais de manière beaucoup plus commode.

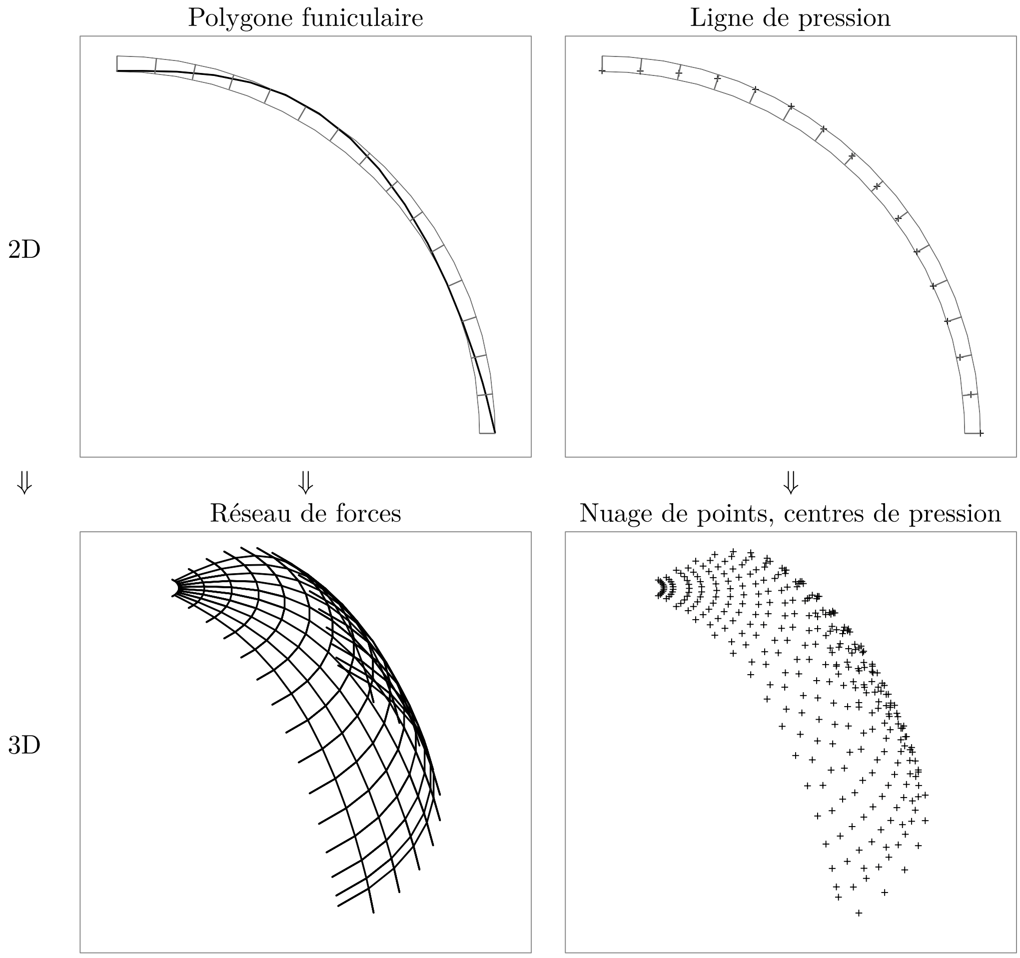


Fig 11.1 – Extensions 2D à 3D du polygone funiculaire et de la ligne de pression

11.1.2 Réseau funiculaire

O'Dwyer et Block utilisent tous les deux directement le réseau de forces pour déterminer la stabilité des structures qu'ils étudient (O'Dwyer, 1999; Block, 2009). Ils vérifient que le réseau de forces est inclus à l'intérieur de l'enveloppe définie par l'intrados et l'extrados de la voûte, et non que les centres de pressions se trouvent à l'intérieur des joints.

Leur approche est justifiée pour deux raisons. Premièrement, cette approche est conservative. Pour les structures à géométrie régulière, si le réseau de forces est compris à l'intérieur de la maçonnerie, alors les centres de pression seront également à l'intérieur de la maçonnerie. Une approche conservative, qui produit des structures plus stables que le résultat calculé, ne pose pas de problème pour la création de nouvelles structures.

Deuxièmement l'utilisation du réseau de forces est bien adaptée pour les processus d'optimisation mathématique qui permettent de trouver des solutions d'équilibre adaptées. En effet, la résolution numérique des problèmes d'optimisation est la difficulté principale pour l'utilisation pratique de la méthode des réseaux de forces. L'utilisation des centres de pression conduit à des difficultés supplémentaires pour la résolution numérique. Le gain en précision obtenu en considérant les joints est la plupart du temps faible par rapport à la complexité plus grande de l'optimisation que cela entraîne. L'imprécision de l'utilisation des réseaux de forces par rapport à celles des centres de pression est brièvement envisagée dans la conclusion de la thèse de Block (2009).

L'utilisation des réseaux de forces sans considération des centres de pression sur les joints semble s'être imposée pour la recherche de nouvelles formes en compression. Cependant, dans le cadre de l'étude des structures existantes, ou des structures présentant une stéréotomie particulière, la considération des centres de pression est essentielle pour obtenir des résultats exploitables dans le cadre du calcul à la rupture.

Dans l'ensemble de ce document, le réseau de forces et les centres de pression seront toujours dessinés conjointement. La différence entre les deux sera alors visible par la distance existante entre les réseaux et les nuages de points. Cette différence est conséquente dans certains cas (poussée minimale d'un arc, fig. 1.2 p. 25 ; voûtes d'Abeille, fig. 16.18 p. 293), et négligeable dans d'autres cas (poussée maximale d'un arc fig. 1.2 p. 25).

Pour conclure, en anglais le terme « pressure network » ou « force network » semble plus correct pour désigner le réseau de forces, plutôt que « thrust network ». En français, le terme *réseau funiculaire* pourrait être utilisé parallèlement à l'appellation classique du *réseau de forces*.

11.2 Hypothèse de l'intersection des forces

11.2.1 Rappels sur l'équilibre d'un bloc

Considérons un polyèdre, en contact sur n faces. Le polyèdre est soumis à $n+1$ systèmes de forces : n systèmes de forces s'appliquant sur les joints et le chargement correspondant à la gravité. Chacun de ces systèmes de forces peut être représenté par une force unique agissant le long d'une ligne d'action.

Une solution d'équilibre pour ce polyèdre est un ensemble de forces tel que la somme des forces et des moments appliqués au polyèdre est nulle. Si l'équilibre des forces est assuré, alors le fait que les lignes d'actions s'intersectent en un point est une condition suffisante pour assurer l'équilibre des moments [(1)].

Considérons un exemple simple sans faire intervenir les réseaux de forces pour le moment : un bloc unique soumis à quatre forces sur ses faces latérales, et à son poids propre. Quatre solutions d'équilibre différentes sont données sur la figure 11.2. Seule

(1). Démonstration : le moment de chaque force par rapport à ce point d'intersection est nulle, et la somme des moments est donc également nulle.

la solution (a) sur cette figure a pour propriété que l'ensemble des lignes d'actions des forces s'intersectent en un point. Dans les solutions d'équilibre (b) (c) et (d), où les conditions d'équilibre des forces et des moments sont satisfaites, les lignes d'actions des forces ne s'intersectent pas en un point.

Cet exemple introductif illustre le fait que l'intersection des forces en un point est une condition suffisante, mais non nécessaire pour assurer l'équilibre des moments.

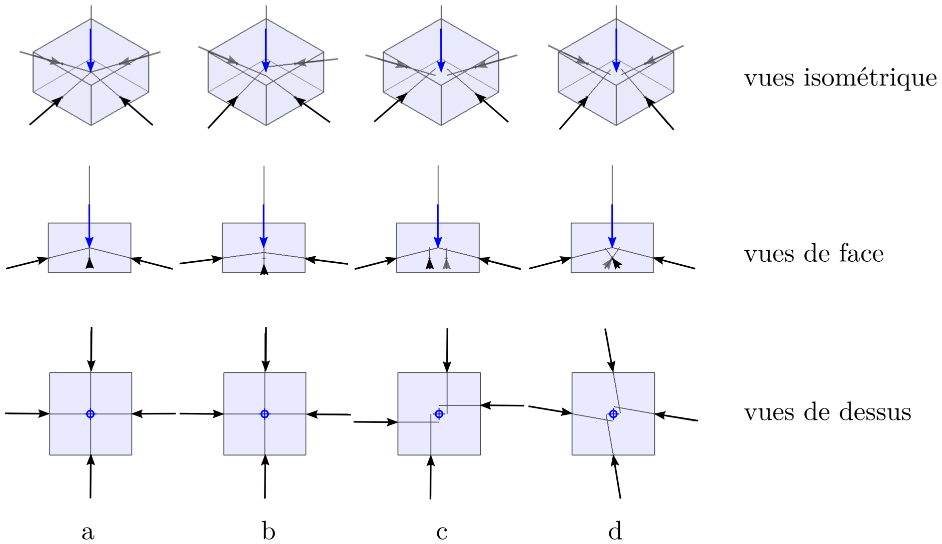


Fig 11.2 – Cas d'équilibres avec ou sans intersection des forces en un point

11.2.2 L'intersection, condition non nécessaire

La première hypothèse nécessaire à la mise en place de la méthode des réseaux de forces est celle de l'intersection des lignes d'actions des forces en un point (section 4.3.2 p. 62). Comme nous venons de le voir, cette condition est suffisante pour assurer l'équilibre des moments, mais elle n'est pas nécessaire (au sens mathématique du terme).

L'hypothèse de l'intersection des forces en un point est donc une hypothèse simplificatrice qui réduit l'espace des solutions d'équilibre qui peuvent être explorées avec les réseaux de forces. Cette hypothèse simplificatrice est néanmoins fondamentale pour la méthode car elle se trouve à la base de la définition des réseaux : en l'absence d'intersection les réseaux de forces ne peuvent être définis. Elle est importante d'une part pour la faisabilité de la méthode, et d'autre part pour les limitations qu'elle implique pour les résultats obtenus.

Les conséquences de l'hypothèse d'intersection des forces varient suivant les systèmes de blocs étudiés, et sont présentées maintenant.

11.2.3 Absence de conséquence en 2D

Pour une structure plane ou étudiée en 2D, le réseau de forces est le polygone funiculaire de la statique graphique. La condition d'intersection des forces est une condition nécessaire et suffisante d'équilibre, car chaque sommet est le point de rencontre de trois forces en équilibre. L'hypothèse d'intersection des forces ne réduit pas le domaine des solutions d'équilibre qui peuvent être étudiées (fig. 11.4 cas C).

11.2.4 Directions fixes des forces projetées sur le plan horizontal

Les directions des branches projetées sur le plan horizontal sont données par la projection des centres de gravité des blocs sur le plan horizontal. Comme ces derniers sont fixes, les directions des branches projetées sur le plan horizontal, et donc les directions des lignes d'actions des forces projetées sur le plan horizontal, sont également fixes.

Cela a plusieurs conséquences.

Premièrement, l'angle d'incidence de la composante horizontale des forces sur les joints est fixe. Le réseau de forces d'une voûte d'Abeille ne peut donc pas faire intervenir d'efforts de cisaillement dans le plan horizontal, car la ligne d'action de la force est située dans un plan vertical perpendiculaire au joint (2). Brocato et Mondardini (2014) ont mis en évidence des solutions d'équilibre pour les voûtes d'Abeille à l'aide de la méthode des éléments finis (3), en tenant compte du clavage particulier de ces voûtes plates. Les solutions d'équilibre trouvées mettent en jeu des efforts de cisaillement importants dans le plan horizontal entre les différents voussoirs, en raison des conditions d'appuis de la voûte (différentes de celles qui seront étudiées dans le cadre de cette thèse). Ces efforts de cisaillement se traduisent par un angle d'incidence différent de 90°, qui ne peut pas être reproduit avec les réseaux de forces.

Deuxièmement, il existe des cas géométriques où la branche passe nécessairement en dehors du joint, car la projection horizontale du joint n'est pas coupée par la projection de la branche. Ce cas se produit lorsque le rayon de courbure est faible par rapport à la taille des blocs, nous donnerons un exemple dans le cas d'un escalier hélicoïdal formé de blocs allongés (fig. 13.6). Il n'existe alors pas de réseau de forces représentant une solution d'équilibre dont les centres de pression sont tous situés à l'intérieur des joints.

11.2.5 Conjugaison des directions du réseau

Le transfert d'une force verticale dans une branche du réseau implique que la force horizontale dans la branche ne soit pas nulle. L'amplitude de l'effort vertical pour un effort horizontal constant dépendra de l'altitude des nœuds du réseau. Le transfert des forces horizontales et des forces verticales n'est donc pas dissocié.

Cela implique une conjugaison des branches du réseau qui transfèrent nécessairement des efforts verticaux dès lors qu'il existe des efforts horizontaux dans les branches. Des arcs parallèles ne peuvent pas se comporter de façon indépendante les uns des autres si des branches orthogonales avec des forces horizontales non nulles les relient.

(2). La ligne d'action est plus exactement perpendiculaire à l'intersection du joint avec le plan horizontal passant par le centre de pression.

(3). Éléments finis volumiques pour les blocs avec loi de comportement élastique, et éléments finis de type joint dilatant avec un critère de Mohr-Coulomb et écoulement associé entre les blocs.

Cette conjugaison des directions du réseau s'illustre sur les exemples suivants.

Plate-bande Considérons une voûte plate sur plan carré, en appui sur ses quatre côtés, et chargée uniformément. Il est possible de construire une solution d'équilibre simple, en considérant la voûte plate comme la superposition de deux plates-bandes perpendiculaires qui portent chacune la moitié du chargement. Cependant, ce cas d'équilibre impliquant la non unicité de l'intersection des forces s'appliquant à chaque claveau ne peut pas être reproduit avec un réseau de forces. Nous verrons qu'il faut introduire un raffinement du réseau (les branches partielles) pour permettre la création de réseaux représentant ce cas d'équilibre simple (section 16.3 p. 285).

L'analogie entre la voûte plate et les plates-bandes provient d'une remarque de Frézier sur les voûtes plates d'Abeille. Cette analogie et ses limites seront étudiées en détail dans la section 16.3 consacrée à l'étude des voûtes plates et de l'influence de leur coupe des pierres.

Voûte hélicoïdale L'étude des voûtes hélicoïdales illustre également la conjugaison des directions du réseau. Voir section 17.1 p. 299.

Voûte d'Abeille Il existe des polyèdres pour lesquels il n'existe pas de solution d'équilibre (fig. 11.4 cas B). Par exemple, considérons le cas des voussoirs de la voûte d'Abeille, avec comme critère de stabilité la compression seule sur les faces, et un critère de glissement (fig. 11.3). Si le voussoir est suffisamment long et ses faces latérales suffisamment inclinées, il n'est plus possible d'obtenir d'intersection.

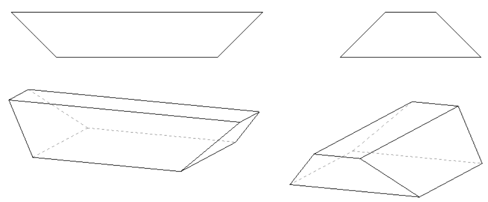
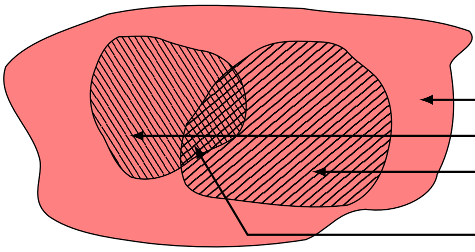


Fig 11.3 – Voussoirs d'une voûte d'Abeille



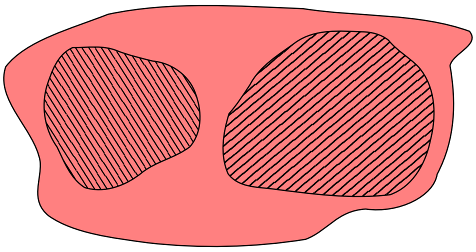
Cas A – Des solutions stables avec intersection des forces en un point existent

Solutions d'équilibre

Solutions d'équilibre **stables**

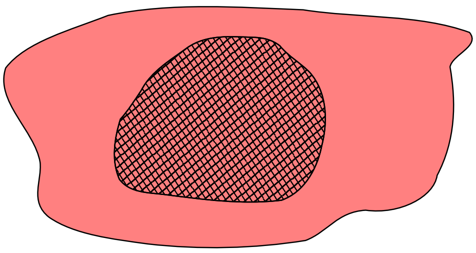
Solutions d'équilibre avec intersection des forces en un point

Solutions d'équilibre stables avec intersection des forces en un point



Cas B – Aucune solution stable avec intersection des forces en un point

exemple : étude réseau de forces (sans raffinement réseau) d'une voûte plate d'Abeille avec angle de frottement limite faible



Cas C – Toute solution stable présente la propriété d'intersection des forces en un point

exemple : étude 2D d'un arc

Fig 11.4 – Domaines des solutions d'équilibre ; intersections possibles des solutions d'équilibre stables, avec ou sans la propriété d'intersection des forces en un point

11.3 Verticalité des charges

La deuxième hypothèse nécessaire à la mise en place de la méthode des réseaux de forces est celle de la verticalité des charges s'appliquant sur les nœuds (section 4.3.2 p. 62).

Cette hypothèse n'est pas nécessaire pour la méthode des densités de forces, mais elle est essentielle pour la méthode des réseaux de forces. Block (2009) indique que des charges horizontales complémentaires peuvent être ajoutées au système, en ajoutant des branches complémentaires dans le réseau pour implémenter ces charges horizontales. Cependant, en raison de la première hypothèse d'intersection des forces, cela induit que la hauteur du point d'application des forces horizontales du chargement extérieur dépend de la solution d'équilibre en cours de considération. Il s'agit donc de *charges suiveuses*. Étant donné que nous considérerons des solutions d'équilibre dans lesquelles les nœuds ne sont pas compris à l'intérieur de la maçonnerie, l'utilisation de charges horizontales de ce type est problématique.

Nous n'utilisons pas dans cette thèse de charges horizontales additionnelles pour cette raison.

11.4 Besoins d'une extension de la méthode

11.4.1 Pour la coupe des pierres

L'histoire des plates-bandes dans l'architecture française que nous avons ébauchée dans la partie II montre l'attention apportée par les architectes et les tailleurs de pierre à la question de l'inclinaison à donner aux joints des plates-bandes. L'étude de l'influence des différentes coupes des pierres sur le comportement mécanique des plates-bandes suppose de pouvoir prendre en considération la géométrie des joints.

Bien que représentant les forces passant à travers les joints, les réseaux de forces n'intègrent pas l'information de la géométrie des joints. Ce dernier point nécessite donc une extension de la méthode des réseaux de forces.

De plus, dans le cas de structures clavés particulières, comme par exemple les voûtes d'Abeille, les réseaux de forces ne peuvent pas fournir de solutions d'équilibre admissibles du point de vue du critère de Mohr-Coulomb en raison de l'orientation des joints. Il existe donc un intérêt à pouvoir étendre les solutions d'équilibre accessible.

11.4.2 Pour le calcul à la rupture

Les solutions d'équilibre produites par la méthode des réseaux de forces peuvent être utilisées pour étudier la stabilité des structures clavées dans le cadre du calcul à la rupture. L'application rigoureuse des théorèmes du calcul à la rupture nécessite d'introduire les critères de résistances des joints et les multiplicateurs de rupture présentés dans la partie I consacrée à l'état de l'art.

Comme dans le cas de l'influence de la coupe des pierres, l'intégration des réseaux de forces au cadre du calcul à la rupture nécessite donc l'expression des résultats au niveau des joints, et par conséquent la considération de la géométrie de ces derniers.