

Chapitre 12

Extension des réseaux de forces

Résumé : Ce chapitre expose les principes de l'extension de la méthode des réseaux de forces. Dans un premier temps, la simplification de l'appareil pour permettre la paramétrisation des géométries étudiées est décrite. La considération de la géométrie des joints, et donc de l'appareil, puis des critères de résistance exprimés au niveau des joints, points essentiels pour l'intégration de la méthode des réseaux de forces au cadre du calcul à la rupture sont ensuite exposés. Les branches partielles additionnelles, qui constituent un raffinement du réseau pour permettre l'exploration de nouvelles solutions d'équilibre sont introduites. Enfin, différentes stratégies de détermination des chargements extrêmes définissant les domaines de chargements potentiellement supportables sont proposées.

Sommaire

12.1	Extension de la méthode des réseaux de forces	213
12.2	Simplification de l'appareil et paramétrisation de la géométrie	213
12.3	Considération des joints	214
12.4	Critères de résistance des joints	215
12.5	Branches partielles additionnelles	215
12.6	Recherche des chargements extrêmes	217
12.6.1	Recherche par optimisation sous contraintes	217
12.6.2	Stratégies de résolution	218

12.1 Extension de la méthode des réseaux de forces

L'extension de la méthode des réseaux de forces proposée dans cette thèse permet d'étudier la stabilité d'une structure clavée à partir de son domaine des chargements potentiellement supportables, calculé rigoureusement dans le cadre du calcul à la rupture.

Le diagramme de la méthode étendue est donné sur la figure 12.1. Les différents points nécessaires à l'extension sont exposés successivement dans ce chapitre.

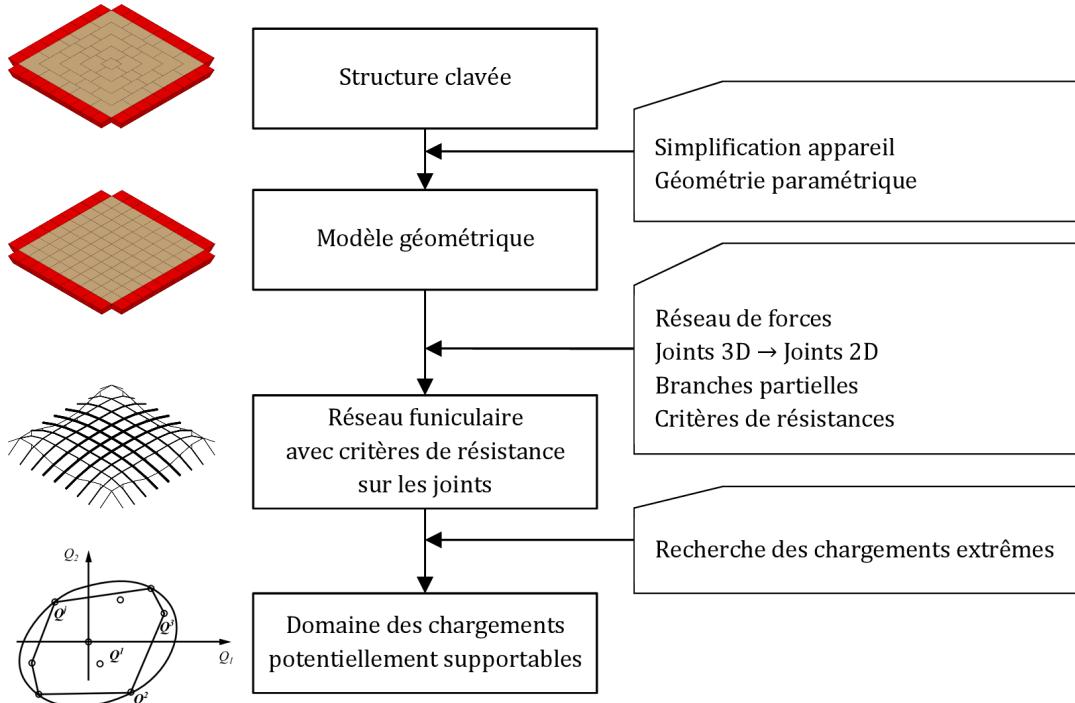


Fig 12.1 – Diagramme de la méthode des réseaux funiculaires

12.2 Simplification de l'appareil et paramétrisation de la géométrie

Les voûtes en pierre de taille ne présentent généralement pas un appareil suffisamment régulier pour permettre de décrire de façon paramétrique simple la géométrie de l'intrados, de l'extrados et des joints.

La simplification de l'appareil consiste à insérer des joints fictifs complémentaires par rapport aux joints existants, et éventuellement à modifier légèrement la position de ces derniers, tout en respectant les principes de coupe des pierres guidant l'orientation des joints, de manière à pouvoir décrire de manière paramétrique simple l'ensemble de la géométrie.

Cette procédure est décrite sur le cas particulier des voûtes plates, soit appareillées sur le plan de la voûte en berceau, soit appareillées sur le plan de la voûte en arc-de-cloître, dans le chapitre consacré à l'étude mécanique de ces structures (section 16.1,

fig. 16.4 et fig. 16.5). Par ailleurs, deux cas possibles d'appareils paramétriques sont donnés sur la figure 12.2 dans le cas d'un dôme.

Parallèlement, la géométrie curviligne des claveaux est simplifiée sous la forme de polyèdres, c'est-à-dire de solides dont les faces sont des polygones plans. Cette seconde simplification vise à ne traiter que des joints sous la forme de polygone plans, ou d'assemblages de polygones plans.

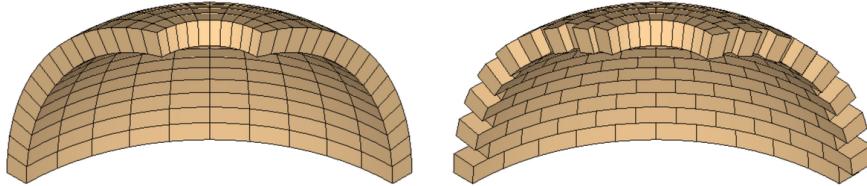


Fig 12.2 – Dôme avec oculus – exemples de deux appareils paramétriques

La création des modèles géométriques étudiés dans cette thèse repose sur la possibilité de trouver un paramétrage permettant de décrire la géométrie de la voûte et de ses joints. Si cela n'est pas possible, il faut alors importer manuellement ou à l'aide d'un logiciel externe la géométrie⁽¹⁾. Nous n'abordons pas de cas de ce type dans cette thèse.

12.3 Considération des joints

L'utilisation des critères de résistances sur les joints dans le cadre du calcul à la rupture nécessite de connaître une expression des efforts s'appliquant sur les joints. Cette expression peut prendre la forme d'un champ de contrainte, des efforts généralisés, ou encore de la résultante des actions de contact. Nous nous plaçons dans ce dernier cas ici. La position des résultantes des actions de contact sur les joints (les *centres de pression*), et la décomposition des forces résultantes dans les repères locaux des joints doivent donc être connus.

Un centre de pression peut se trouver en n'importe quel point à l'intérieur du polygone formant le joint⁽²⁾. Cependant, l'hypothèse de l'intersection des forces en un point a pour conséquence de réduire les positions possibles des centres de pression d'une surface à un segment, ce que nous détaillerons ultérieurement.

Le calcul de la position du centre de pression met en jeu l'intersection d'une droite (la ligne d'action de la résultante des actions de contact du joint) avec le plan du polygone définissant le joint. Il est possible de remplacer le polygone du joint (joint 3D) par d'une part un segment (joint 2D), et d'autre part les caractéristiques géométriques du polygone (aire, modules statiques, hauteur, largeur). Cette substitution ne modifie pas les résultats obtenus : centre de pression, et décomposition de cette dernière dans

(1). La géométrie signifie ici seulement la position des centres de gravité des blocs, leur masse et les joints réduits 2D définis dans la suite.

(2). Un centre de pression peut également se trouver en dehors de l'intérieur du polygone formant le joint, s'il se trouve à l'intérieur de son enveloppe convexe. Cette propriété n'est pas exploitée dans cette thèse.

le repère local du joint. Elle a deux avantages. Le premier est d'accélérer les calculs en substituant l'intersection d'une droite avec un plan par l'intersection de deux droites, et la seconde est de réduire la taille de l'information à stocker concernant chaque joint.

L'implémentation et la justification géométrique de cette démarche sera présentée en détail dans le chapitre suivant (section 13.2 p. 223).

12.4 Critères de résistance des joints

Une fois la prise en compte des joints réalisées (section précédente), et l'expression des forces dans le repère local des joints connues, le calcul du multiplicateur de charge lié au critère de résistance considéré découle directement des expressions rappelées dans l'état de l'art (section 3.1.1 p. 41).

Les critères de résistances utilisés sont formulés uniquement au niveau des joints, la résistance interne de la pierre étant donc considérée implicitement infinie. En effet bien que la résistance du joint (interface mortier-pierre, ou interface pierre-pierre) fasse intervenir la résistance de la pierre, la résistance de la pierre à l'intérieur des blocs n'est pas considérée.

Le fait de ne pas considérer la résistance interne des blocs se traduit par une surestimation de la résistance des blocs notamment lorsque les blocs présentent des angles aigus (*p. ex.* influence de l'inclinaison des joints sur la stabilité des plates-bandes, section 15.3.3).

12.5 Branches partielles additionnelles

Le réseau de forces est basé sur l'hypothèse que les lignes d'actions des forces appliquées à chaque bloc s'intersectent en un point. Ce point est un noeud du réseau de forces. Cette hypothèse est suffisante mais non nécessaire pour assurer l'équilibre du moment, et diminue l'ensemble des solutions d'équilibre qui peuvent être produites avec la méthode (voir section 11.2).

L'utilisation de *branches partielles additionnelles*, qui reposent sur un redécoupage de chaque bloc en deux sous-blocs, et donc sur un raffinement du réseau, permet de contourner partiellement cette limitation inhérente à la méthode, et ainsi d'avoir accès à de nouvelles solutions d'équilibre. En effet, la condition d'intersection est toujours respectée pour chaque noeud, mais comme il y a plus d'un noeud par bloc, les droites d'actions des forces qui s'appliquent à un bloc ne sont plus nécessairement concourantes. Ce raffinement du réseau permet de considérer des cas d'équilibres similaires au cas (b) de la figure 11.2 p. 207, en plus du cas (a) classique. Cependant les cas (c) et (d) de cette même figure restent hors de portée de l'extension des réseaux de forces présentée ici.

Les branches partielles additionnelles peuvent être utilisées seulement pour certaines typologies. Elles peuvent être appliquées aux réseaux de noeuds à quatre branches, avec les branches perpendiculaires deux à deux en projection sur le plan horizontal. Elles ne peuvent pas être appliquées aux réseaux de noeuds à trois branches

Chapitre 12. Extension des réseaux de forces

parce que la résolution de l'équilibre horizontal après le raffinement ne serait plus possible.

Le raffinement du réseau suit le principe suivant. Dans la méthode des réseaux de forces traditionnelle, un seul nœud est créé pour chaque bloc B . Il est localisé au centre de gravité du bloc dans le réseau de masse. Nous divisons chaque bloc en deux sous-blocs b_1 et b_2 , correspondant également à deux nouveaux nœuds dans le réseau de masse, avec leur masse respective. Ces nœuds sont joints par une nouvelle branche, que nous appelons *branche partielle additionnelle*. Cette branche correspond à des forces intérieures au bloc B . Les branches qui reliaient le bloc B à ses blocs voisins doivent ensuite être raccordées à l'un ou l'autre des nœuds créés pour les sous-blocs b_1 et b_2 .

Ce processus correspond à un raffinement du réseau de forces, qui contient à la fin du processus plus de nœuds et de branches que le réseau initial, bien que le nombre de blocs réels et de joints n'ait pas été modifiés.

La figure 12.3 illustre le cas de sous-blocs dont les centres de gravité sont situés sur une verticale, obtenus par la division d'un bloc par un plan horizontal.

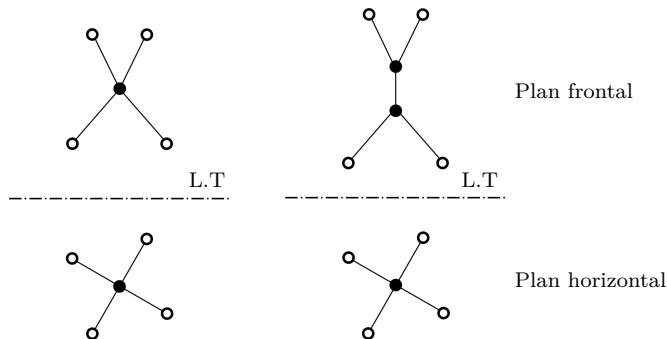


Fig 12.3 – Nœud à quatre branches avant (à gauche) et après (à droite) le raffinement du réseau

La figure 12.4 illustre le cas de sous-blocs dont les centres de gravité ne sont pas situés sur une verticale, obtenu par la division de deux blocs d'un arc par des plans verticaux par exemple. Ce procédé sera utilisé pour l'étude des plates-bandes à joints en X.

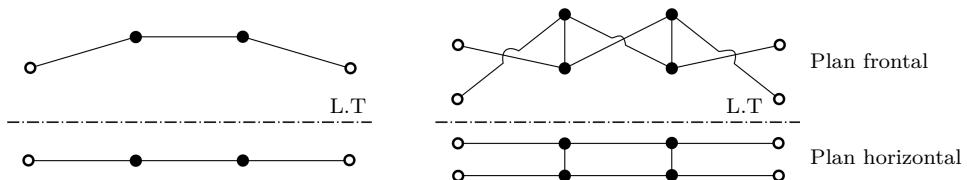


Fig 12.4 – Arc avant (à gauche) et après (à droite) le raffinement du réseau

Il peut être utile pour des raisons de clarté des figures de choisir un décalage vertical arbitraire entre les deux nœuds pour pouvoir les distinguer visuellement. Ce décalage vertical n'a pas d'effet sur l'équilibre puisque le chargement est vertical.

12.6 Recherche des chargements extrêmes

12.6.1 Recherche par optimisation sous contraintes

L'état de contrainte réel d'une structure ne peut être déterminé sans introduire des informations complémentaires (loi de comportement, historique du chargement). Dans le cadre du calcul à la rupture, la recherche de l'état de contrainte réel est abandonnée au profit de la recherche des chargements extrêmes constituant la frontière du domaine des chargements supportables.

La construction par l'intérieur du domaine des chargements potentiellement supportables met en jeu la considération successives de différents chargements \underline{Q} , pour lesquels on cherche le chargement extrême $F(\underline{Q})\underline{Q}$ sur un trajet de chargement radial. Les deux formulations équivalentes établies dans le cadre général du calcul à la rupture (équation 2.16), puis dans le cas particulier des structures clavées (équation 3.14) sont rappelées ci-dessous :

$$F(\underline{Q}) = \max_{\lambda/\lambda\underline{Q} \in K} \lambda \quad (12.1)$$

$$F(\underline{Q}) = \max_{\zeta} \lambda_{\mathcal{J}}(\zeta) = \max_{\zeta} \min_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(\zeta) \quad (12.2)$$

Pour chaque chargement \underline{Q} considéré, la recherche du chargement extrême $F(\underline{Q})\underline{Q}$ nécessite de résoudre un problème d'optimisation sous contraintes : la maximisation d'une fonction de coût f dépendant d'un vecteur de paramètres ζ , tout en respectant une ou plusieurs contraintes (au sens mathématique du terme) c_1, c_2 etc.

$$\max_{\zeta, c_1 > 0, c_2 > 0} f(\zeta) \quad (12.3)$$

La fonction f à maximiser ici est :

$$f(\zeta) = \min_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(\zeta) \quad (12.4)$$

Cette fonction remplace la fonction quadratique faisant intervenir directement la position de tous les noeuds habituellement utilisée dans le cadre de la méthode des réseaux de forces (qui est minimisée au lieu d'être maximisée) :

$$g(\zeta) = \sum (z_i(\zeta)^2 - z_G^2) \quad (12.5)$$

La fonction f , bien qu'elle soit classique dans le cadre du calcul à la rupture appliquée aux structures clavées (*p. ex. Delbecq, 1983*), n'avait pas été considérée jusqu'à maintenant dans les implémentations des réseaux de forces (O'Dwyer, 1999 ; Block, 2009 ; Marmo et Rosati, 2017).

Le problème d'optimisation pour la recherche des chargements extrêmes ne correspond pas à un problème d'optimisation de forme. Dans notre cas, la géométrie du problème est fixe, et le problème d'optimisation vise à trouver la solution d'équilibre correspondant à la fonction de coût (le multiplicateur de rupture) le plus élevé. Dans le cas de l'optimisation de forme, la géométrie de la structure étudiée fait partie des paramètres du problème d'optimisation.

12.6.2 Stratégies de résolution

Les algorithmes d'optimisation n'ont pas été étudiés dans le cadre de cette thèse. Nous avons focalisé notre attention sur la formulation du problème d'optimisation, pour que ce dernier puisse être rapidement⁽³⁾ résolu par un algorithme utilisant la méthode du gradient réduit généralisé (« Generalized Reduced Gradient »).

Pour permettre l'extension de la méthode des réseaux de forces et y intégrer la considération des joints, nous avons substitué à la fonction (g) présentant un optimum global, une fonction (f) présentant de multiples optimums locaux. Cela introduit des difficultés numériques pour obtenir rapidement la solution du problème d'optimisation permettant de trouver le chargement extrême.

De plus la recherche du domaine des chargements potentiellement stables nécessite la résolution répétée du problème d'optimisation pour chaque chargement \underline{Q} pour construire point par point la frontière du domaine des chargements supportables.

Enfin, l'introduction des forces partielles augmente le nombre de paramètres ζ dont dépend l'équilibre. Le nombre de paramètres supplémentaires est égal au nombre de noeuds intérieurs, ce qui conduit à la multiplication par 2 ou 3 du nombre de paramètres dans les cas que nous étudions.

Pour résoudre ces difficultés numériques, nous avons utilisé trois techniques simultanément. Ces techniques consistent :

1. à diminuer le nombre de paramètres, en postulant que la variation spatiale des paramètres varie régulièrement et peut être approximée par un polynôme ;
2. à remplacer la fonction de coût par une nouvelle fonction donnant un résultat approché mais convergeant plus rapidement vers l'optimum : méthode des puissances, méthode de l'intervalle ;
3. à exploiter la propriété de convexité du domaine des chargements potentiellement supportables pour repérer les chargements correspondant à un optimum local, mais non à l'optimum global, et nécessitant donc des calculs complémentaires.

L'implémentation de ces techniques et la discussion de leurs résultats sont présentées à partir du chapitre suivant.

(3). « Rapidement » signifie ici de l'ordre de la minute pour les problèmes que nous étudions.

Chapitre 13

Implémentation numérique

Résumé : Ce chapitre présente l'implémentation numérique et l'utilisation pratique de l'extension de la méthode des réseaux de forces proposée. Dans un premier temps, le logiciel utilisé et le traitement des équations d'équilibre et des noeuds d'appuis est présenté. Ensuite, la redéfinition des joints 3D sous forme de segments 2D, qui permet la simplification des calculs et du stockage des données sans perte de généralité est exposée. Par ailleurs, le raffinement du réseau à l'aide des branches partielles nécessite une adaptation des équations matricielles, détaillée ici. Enfin, les stratégies d'optimisation numérique, qui sont l'enjeu numérique le plus important pour la recherche des chargements extrêmes et donc pour la faisabilité pratique de la méthode que nous proposons, sont introduites, ainsi qu'une étude des vitesses de convergence pour la stratégie la plus efficace (modification de la fonction de coût utilisé pour la recherche des chargements extrêmes).

Sommaire

13.1	Implémentation de l'extension des réseaux de forces	220
13.1.1	Visual Basic for Applications et Microsoft Excel	220
13.1.2	Équilibre horizontal	220
13.1.3	Équilibre vertical	221
13.2	Redéfinition des joints	223
13.3	Raffinement du réseau et branches partielles	225
13.3.1	Modification des équations d'équilibre	225
13.3.2	Écriture alternative des équations d'équilibre	226
13.3.3	Vérification de l'équilibre a posteriori	226
13.4	Recherche des chargements extrêmes	227
13.4.1	Optimisation sous contraintes	227
13.4.2	Polynômes de Lagrange	227
13.4.3	Multiplicateurs de charges modifiés par puissances d'entiers	228
13.4.4	Coefficient de sécurité géométrique modifié	233
13.4.5	Convexité du domaine des chargements supportables . . .	235
13.4.6	Bilan des stratégies	236

13.1 Implémentation de l'extension des réseaux de forces

13.1.1 Visual Basic for Applications et Microsoft Excel

L'implémentation des réseaux funiculaires a été réalisée en langage objet, avec VBA (Visual Basic for Applications) et Microsoft Excel. Le logiciel créé a été nommé Manacoh (Masonry Network Analysis for Construction History). Le choix du langage de programmation pour l'implémentation est antérieur au commencement de la thèse : la première version du logiciel a été développée dans le cadre d'un travail de recherche sur la stabilité des dômes en maçonnerie (Ciblac et Fantin, 2016). Un des objectifs de ce travail était de produire un logiciel facile d'accès pour les étudiants et les ingénieurs, ne nécessitant pas de compétences particulières autres que celles généralement maîtrisées par les ingénieurs de bureau d'études. La première version du logiciel de 2014 est disponible à l'adresse <http://combiencaporte.blogspot.fr/p/masonry-network-analysis-for.html>. La nouvelle version du logiciel développée dans le cadre de cette thèse sera disponible à cette adresse : <http://bestrema.fr/manacoh/>.

Les noeuds, les branches, les aires, les paramètres, les polynômes de Lagrange sont implémentés sous forme objet, à l'aide des classes `cNod`, `cBra`, `cAre`, `cDOFPoly` etc.

À titre d'exemple, chaque objet de classe `cBra` (une branche du réseau) fait référence à deux objets de classe `cNod` (un noeud de tête et un noeud de queue), et à deux objets de classe `cAre` (les aires situées à gauche et à droite de la branche dans le plan horizontal). Réciproquement chaque objet de classe `cNod` (un noeud) contient une liste des objets `cBra`, représentant les branches partant ou aboutissant à ce noeud.

Les feuilles du classeur Microsoft Excel servent à la fois au stockage des données, à l'écriture des matrices d'équilibre, et à l'inversion de ces dernières. Une des feuilles du classeur sert d'interface graphique pour les échanges avec l'utilisateur.

Au lancement du programme, les données existantes résultant d'un éventuel calcul précédent sont chargées depuis les feuilles Microsoft Excel dans VBA, les objets correspondants créés, puis les opérations exécutées depuis VBA.

L'implémentation de la méthode des réseaux de forces classique repose directement sur l'écriture des matrices données dans l'état de l'art présentant la méthode. Nous présentons dans la suite de cette partie uniquement les points particuliers de notre implémentation de la méthode.

13.1.2 Équilibre horizontal

Comme nous l'avons vu lors de la présentation de l'application de l'équilibre horizontal pour la construction des réseaux de forces (p. 67), les valeurs des m forces horizontales dans les branches du réseau, réunies dans le vecteur ζ de dimension m , dépendent de n_{dof} paramètres ($n_{dof} < m$) réunis dans le vecteur ζ_{dof} . La construction du vecteur ζ_{dof} , c'est-à-dire le choix des composantes le formant, et non le choix des valeurs de ses composantes, peut être guidé par plusieurs stratégies.

Block (2009) utilise les propriétés des figures réciproques pour identifier les n_{dof} paramètres composant le vecteur ζ_{dof} . Nous utilisons pour cette thèse deux approches plus directes, mais n'exploitant pas les propriétés des figures réciproques.

Dans le cas des géométries paramétriques, les n_{dof} paramètres composant le vecteur ζ_{dof} sont choisies parmi les m paramètres composant le vecteur ζ dès la création de la géométrie, de manière à représenter un ensemble de grandeurs caractéristiques du système étudié. Par exemple dans le cas des dômes, les forces horizontales des branches parallèles aux méridiens seront choisies. Dans le cas des voûtes plates, les forces horizontales des branches d'appuis seront choisies.

Dans le cas de géométries quelconques où les paramètres ζ_{dof} ne sont pas choisis lors de la création de la géométrie, ou si le nombre de paramètres choisis par l'utilisateur est insuffisant, les n_{dof} paramètres ζ_{dof} (ou les paramètres manquants) sont choisis à l'aide d'une procédure itérative qui construit progressivement la matrice \mathbf{K} colonne par colonne tout en vérifiant que les différentes colonnes restent indépendantes (à tout instant le rang de la matrice \mathbf{K} en cours de construction doit être égal à son nombre de colonnes). Si l'ajout d'une nouvelle colonne donne un système dépendant, la force horizontale correspondant à la dernière colonne ajoutée doit être prise comme paramètre, et la colonne correspondante retirée de la matrice \mathbf{K} en cours de construction.

Par ailleurs, la matrice $\mathbf{K}_{unk}^{-1} \mathbf{K}_{dof}$ qui relie les paramètres ζ_{dof} aux autres forces horizontales ζ_{unk} ne dépend que de la position des noeuds du réseau projeté dans le plan horizontal et de la connectivité du réseau. Comme ces derniers restent fixes, la matrice $\mathbf{K}_{unk}^{-1} \mathbf{K}_{dof}$ peut être calculée lors du premier calcul de l'équilibre horizontal, et stockée pour être réutilisée pour les autres étapes du calcul. Cette stratégie est adoptée dans notre implémentation, mais n'est valable que parce que nous ne nous intéressons pas aux problèmes d'optimisation de formes. Dans ce type d'étude, la matrice $\mathbf{K}_{unk}^{-1} \mathbf{K}_{dof}$ change à chaque itération du calcul.

13.1.3 Équilibre vertical

Écriture matricielle

La matrice \mathbf{D}_i^{-1} relie la position des noeuds d'appuis et le chargement d'une part, avec la position des noeuds intérieurs d'autre part. Comme la matrice \mathbf{D}_i dépend des forces horizontales dans les branches ζ , l'inversion de la matrice \mathbf{D}_i doit avoir lieu à chaque étape du calcul.

Position des noeuds d'appuis

Les altitudes des noeuds d'appuis sont données par le vecteur \mathbf{z}_b de dimension n_b . La construction de la matrice carrée et inversible \mathbf{D}_i suppose que \mathbf{z}_b soit connu, et les altitudes des noeuds d'appuis sont donc une donnée d'entrée de l'équilibre vertical et non une donnée de sortie.

Cependant, il est possible d'exprimer l'altitude z_b d'un noeud d'appui particulier comme une combinaison linéaire des altitudes des noeuds intérieurs z_i , bien que ces derniers ne soient pas encore connues avant l'application de l'équilibre vertical. Par

Chapitre 13. Implémentation numérique

exemple, l'altitude d'un nœud d'appui peut être choisie égale à l'altitude du nœud intérieur lié au nœud d'appui, pour imposer que la force d'appui correspondante soit horizontale. Ce type de condition est utile pour modéliser les conditions de symétrie. Les flèches courbes sur la figure 13.1 à droite indiquent l'égalité des altitudes des nœuds d'appuis avec les nœuds intérieurs dans le cas d'une lune d'un dôme hémisphérique.

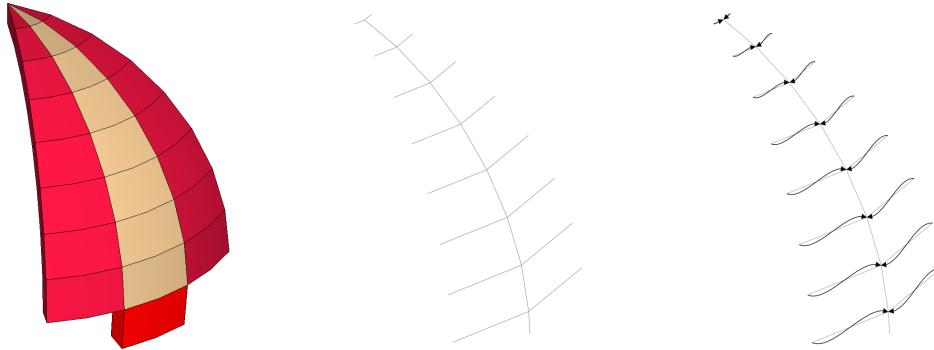


Fig 13.1 – Lune d'un dôme hémisphérique, réseau de masse, conditions de symétrie sur les nœuds d'appuis

Dans le cas où l'altitude d'un nœud d'appui est égale à celle du nœud intérieur correspondant, cette contrainte est implémentée en ajoutant simplement la colonne de \mathbf{D}_b correspondant à l'altitude z_b en question à la colonne de \mathbf{D}_i correspondant à l'altitude z_i recherchée. La valeur de z_b est (temporairement) prise égale à zéro pour annuler la contribution de la colonne correspondante dans \mathbf{D}_b , de telle manière que l'équation 4.38 puisse être appliquée sans modification. Enfin, lorsque les résultats sont stockés, la valeur de z_b est prise égale à z_i . Cette procédure pourrait être implémentée de façon plus élégante à l'aide de matrices de permutations.

Il est également possible d'utiliser des conditions de symétrie sur les altitudes des nœuds d'appuis (fig. 13.2 pour le cas d'une voûte plate). Aucune modification particulière des matrices d'équilibre n'est nécessaire dans ce cas.

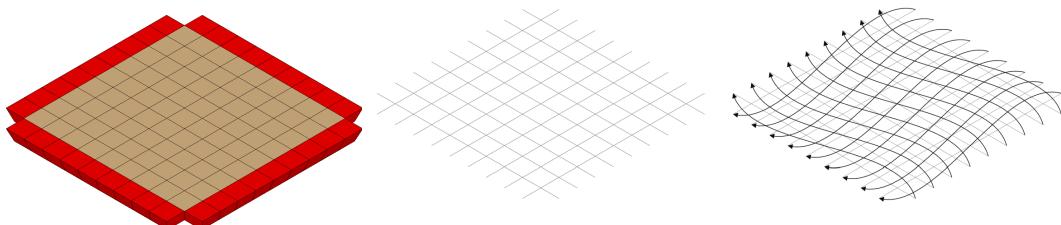


Fig 13.2 – Voûte plate, réseau de masse, conditions de symétrie sur les nœuds d'appuis

13.2 Redéfinition des joints

À chaque étape de la recherche d'un réseau de forces correspondant à un chargement extrême, il est nécessaire de recalculer la position du centre de pression de chaque joint. Ce centre est défini par l'intersection entre une droite (la ligne d'action de la force) et un plan (le plan du joint). Il est possible de réduire ce calcul à l'intersection entre deux droites.

En effet, d'une part la ligne d'action de la force s'appliquant sur un joint passe par la branche du réseau correspondant à ce joint. D'autre part la branche du réseau, quelle que soit sa forme, est contrainte à rester dans le plan vertical P_v passant par les centres de gravité des deux blocs en contact au joint. Par conséquent l'intersection entre la ligne d'action et le plan du joint est nécessairement placée sur l'intersection entre le plan vertical P_v et le plan du joint. L'intersection de ces deux plans est une droite. Cette droite est représentée par la donnée des deux points extrêmes correspondant aux bords du joints, généralement, mais non nécessairement, un point situé sur l'extrados, et un point situé sur l'intrados.

Le segment joignant ces deux points représente l'ensemble des positions possibles pour le centre de pression à l'intérieur du joint, pour les cas d'équilibre générés à l'aide d'un réseau de forces. Ce segment peut être déterminé lors de la génération de la géométrie à étudier, et gardé en mémoire pour être utilisé lors de la recherche des chargements extrêmes. Par construction, l'intersection de la ligne d'action de la résultante des forces avec le polygone plan du joint ou avec le joint réduit sous forme de segment est identique.

Considérons un exemple. Un dôme hémisphérique est découpé selon ses parallèles et mériadiens afin de former des voussoirs. Un voussoir aura deux types de joints : les joints relatifs aux branches des mériadiens (« meridian branches »), et les joints relatifs aux branches des parallèles (« parallel branches ») ou branches d'anneau (« hoop branches »). Les joints des mériadiens sont des surfaces coniques qui sont approximées par leur plan tangent, de manière à être ramenés à l'hypothèse des joints plans polygonaux de notre étude. La génération des segments représentant les joints est donné sur la figure 13.4. Le résultat pour l'ensemble des joints est donné sur la figure 13.5. Les points définissant les segments des joints des mériadiens (en bleu sur la figure) sont tous sur l'intrados ou l'extrados, mais ce n'est pas nécessairement le cas pour les joints des parallèles (en rouge).

Possible inexistence du joint réduit La génération des joints n'est généralement pas problématique tant que les dimensions des blocs sont faibles devant les rayons de courbure locaux de la structure. Il existe cependant des cas où l'intersection entre le joint et le plan vertical passant par la branche est nulle. Un exemple de ce type est donné sur une vue de dessus pour une voûte hélicoïdale formé de blocs allongés (fig. 13.6). Nous avons également rencontré cette problématique dans le cas des voûtes en arc de cloître. Dans ce genre de situation, la considération d'un découpage plus fin des blocs permet généralement de se replacer dans une situation où le joint réduit existe.

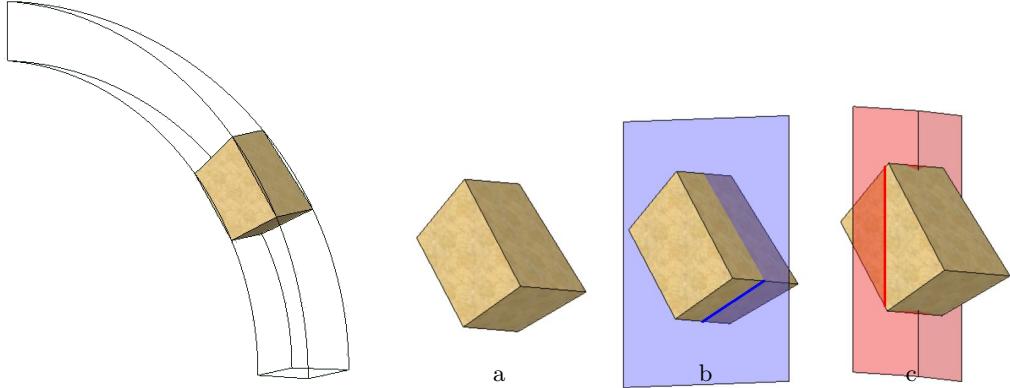


Fig 13.3 – Voussoir d'une lune de dôme hémisphérique, après découpage selon parallèles et méridiens

Fig 13.4 – Réduction des joints à un segment ; voussoir (a), joint méridien (b), joint parallèle (c)

Nota : La figure 13.3 montre un voussoir simplifié, où les joints des méridiens sont des quadrilatères. La courbe au niveau de l'intrados et l'extrados a complètement disparu. Nous utilisons pour notre logiciel Manacoh une approximation des joints des méridiens avec des polygones à six côtés, qui permettent de tenir compte de la courbe. Ceci n'est pas indiqué sur cette figure pour des raisons de clarté.

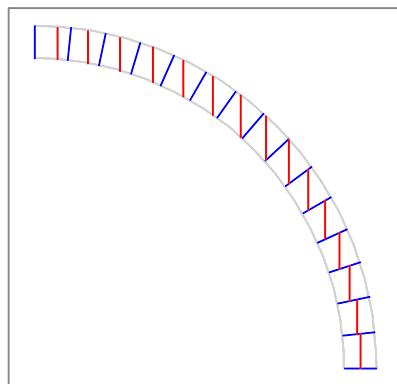


Fig 13.5 – Joints des branches méridiennes (en bleu) et des branches parallèles (en rouge), pour une lune d'un dôme hémisphérique

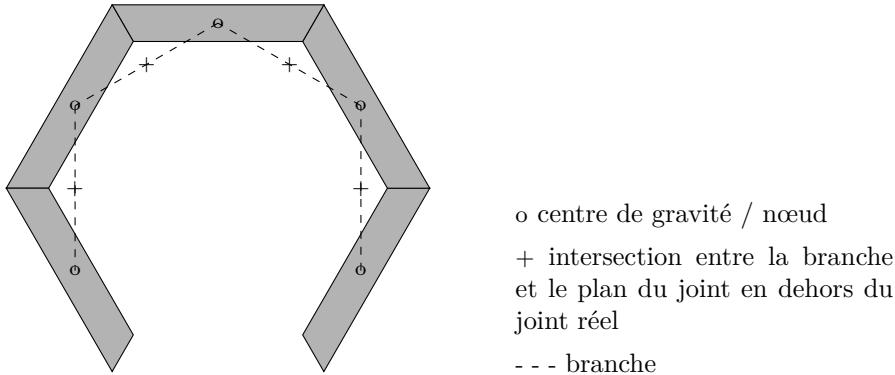


Fig 13.6 – Projection sur le plan horizontal d'une voûte hélicoïdale à cinq claveaux, où la réduction des joints est vide

13.3 Raffinement du réseau et branches partielles

13.3.1 Modification des équations d'équilibre

Soit n_0 et m_0 le nombre de noeuds et de branches avant le raffinement du réseau de masse. Les indices i et b désignent respectivement les noeuds et branches intérieures, et les noeuds et branches d'appui, comme précédemment. Soit p l'indice pour les branches partielles, et s l'indice pour les autres branches.

Le nombre total de branches du réseau après raffinement est $m = m_s + m_p$. Il se décompose en m_s branches normales ($m_s \geq m_0$), et $m_p = n_{0,i}$ branches partielles supplémentaires créées pendant le raffinement du réseau. Le nombre de noeuds a doublé : $n = 2n_0$. La matrice de connectivité \mathbf{C} contient des lignes correspondant aux branches partielles additionnelles en plus des lignes habituelles correspondant à chaque branche (avant raffinement). La numérotation des branches et des noeuds peut être choisie pour que la matrice \mathbf{C} de m colonnes et de $2n_0$ lignes puissent s'écrire sous forme de matrice par blocs :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{si} & \mathbf{C}_{sb} \\ \mathbf{C}_{pi} & \mathbf{C}_{pb} \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

Par hypothèse, les composantes horizontales de la force dans une branche partielle additionnelle est nulle, d'où leur nom « partielle » parce que seules des forces verticales sont transmises par ces branches. Cette hypothèse est arbitraire, et le moyen d'assurer l'équilibre sera étudié dans la section 13.3.3 ci-dessous.

Suite à cette hypothèse, les branches partielles ne doivent pas être considérées pour la résolution de l'équilibre dans le plan horizontal. La matrice \mathbf{C}_{si} est ainsi substituée à la matrice \mathbf{C}_i dans les équations (4.25), (4.26) et (4.27) pour assurer l'application de cette hypothèse. Après résolution de l'équilibre dans le plan horizontal, les forces horizontales dans les branches non-partielles dépendent de $n_{dof} = m - m_p - n_i$ paramètres, à condition que la matrice \mathbf{K} avant le raffinement du réseau était de rang maximal.

La méthode usuelle des réseaux de forces ne peut pas être utilisée directement pour l'équilibre vertical, parce qu'elle nécessite que les forces horizontales soient non

nulles pour son application, ce qui n'est pas le cas dans les branches partielles additionnelles. Nous introduisons donc $m_p = n_{0,i}$ nouveaux paramètres \mathbf{w}_p^* qui sont les valeurs des forces verticales dans les branches partielles. Ces nouveaux paramètres forment un troisième type de paramètres pour les réseaux de forces : 1. force horizontale, 2. position verticale d'un nœud d'appui, 3. force verticale dans une branche partielle.

Les équations exprimant l'équilibre vertical (4.32) (4.36) (4.37) (4.38) deviennent :

$$C_{0i}^t \mathbf{w}_0^* = -\mathbf{p}_z - C_{pi}^t \mathbf{w}_p^* \quad (13.2)$$

$$\mathbf{D}_{0i} = C_{0i}^t L_H^{-1} L_H^* C_{0i} \quad (13.3)$$

$$\mathbf{D}_{0b} = C_{0i}^t L_H^{-1} L_H^* C_{0b} \quad (13.4)$$

$$\mathbf{D}_{0i} \mathbf{z}_i = -\mathbf{p}_z - C_{pi}^t \mathbf{w}_p^* - \mathbf{D}_{0b} \mathbf{z}_b \quad (13.5)$$

La position des noeuds du réseau \mathbf{z}_i est donc fonction des charges verticales \mathbf{p}_z , des paramètres habituels \mathbf{z}_b et ζ_{dof} , et des nouveaux paramètres \mathbf{w}_p^* .

13.3.2 Écriture alternative des équations d'équilibre

La modification de la résolution de l'équilibre vertical suite au raffinement du réseau dans les équations (13.2) à (13.5) est entièrement compris dans le terme $-C_{pi}^t \mathbf{w}_p^*$. Il exprime que la composante verticale de la force dans une branche partielle (la seule non nulle dans cette branche) agit d'un sous-bloc à l'autre.

Par ailleurs, l'équilibre horizontal est résolu simplement en négligeant les branches partielles lors de cette étape.

Une écriture alternative des équations d'équilibre peut donc être utilisée. Il s'agit d'utiliser les matrices habituelles de la méthode des réseaux de forces lors de la résolution de l'équilibre horizontal et de l'équilibre vertical, sans tenir compte des branches verticales, et d'ajouter à ces équations l'effet des branches verticales. Cet ajout est réalisé par des charges verticales fictives $p_{z,p} = \pm w_p^*$ sur chaque nœud intérieur du réseau. Ces charges sont réunies dans un vecteur $\mathbf{p}_{z,p}$.

13.3.3 Vérification de l'équilibre a posteriori

Chaque branche partielle applique sur les blocs qu'elle relie deux forces verticales opposées avec un bras de levier l_H , qui correspond à la distance horizontale entre les nœuds des blocs b_i . Ces forces forment un couple si le bras de levier l_H n'est pas nul, et appliquent au bloc B un moment $w_p^* l_H$, qui correspond à un chargement extérieur inexistant.

Si les nœuds des branches partielles, c'est-à-dire les nouveaux nœuds créés pour chaque sous-blocs, sont alignés sur une droite verticale, alors ce chargement extérieur est nul. En d'autres termes, la force horizontale dans la branche partielle est nulle, et le fait que les forces des branches partielles aient été négligées pour l'équilibre horizontal est dans ce cas sans conséquence.

Si les nœuds des branches partielles ne sont pas alignés sur une verticale, chaque bloc est soumis à un chargement extérieur inexistant : le moment $w_p^*l_H$.

Dans le cas où un autre système de forces équilibré, respectant le critère de résistance, et correspondant au chargement extérieur opposé $-w_p^*l_H$ peut être construit, alors la combinaison de ce système de forces et du réseau de forces donne une solution d'équilibre, dans laquelle le chargement extérieur inexistant s'annule.

Cependant, il ne peut être garanti que ce second système de forces équilibré puisse être trouvé pour toute structure. Le champ d'application de cette méthode est donc limitée à des cas particuliers, comme les voûtes plates d'Abeille où le bras de levier l_H est nul, et les plates-bandes à joints en X où des systèmes de forces équilibrés complémentaires peuvent être trouvés (Voir section 15.4.3 p. 265).

13.4 Recherche des chargements extrêmes

13.4.1 Optimisation sous contraintes

Nous avons vu dans la section 12.6 p. 217, que la recherche d'un chargement extrême $F(\underline{Q})\underline{Q}$ relatif au chargement \underline{Q} sur un trajet de chargement radial est réalisée par résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes d'une fonction f dépendant d'un vecteur de paramètres ζ . La fonction f est de la forme :

$$f(\zeta) = \min_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j(\zeta) \quad (13.6)$$

avec λ_j le multiplicateur de charge local du joint j , et \mathcal{J} l'ensemble des joints, tels que définis dans la section 3.1.2 p. 42.

Nous présentons dans cette section les moyens mis en œuvre dans le cadre de cette thèse pour permettre en pratique la recherche de l'optimum global de la fonction f .

13.4.2 Polynômes de Lagrange

Les paramètres contenus dans le vecteur ζ dont dépend une solution d'équilibre sont de trois types : force horizontale du réseau projeté, altitude d'un nœud d'appui, force verticale dans une branche partielle.

A l'intérieur de chacun de ces groupes, il est possible de former d'autres sous-groupes : par exemple pour un dôme de distinguer les forces horizontales correspondant aux forces d'anneaux, des forces horizontales correspondant aux forces méridiennes. Les valeurs que prennent les paramètres d'un sous-groupe pour la solution optimum présentent dans certains cas une certaine régularité. Cette observation peut être exploitée dans le but de réduire le nombre de paramètres du problème d'optimisation en utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Soit $k = k_0 + k_1$ paramètres qui présentent une régularité attendue (ou potentielle). k_0 polynômes de Lagrange $L_j(X)$ de degré $k_0 - 1$ sont définis en utilisant les valeurs ζ_j des k_0 premiers paramètres. Les pôles x_j sont les coordonnées tels que $L_j(x_j) = 1$ et $L_j(x_i) = 0$ si $i \neq j$. Ces pôles sont régulièrement espacés dans le réseau de masse de manière à éviter les problèmes de divergence. La variable X est

une coordonnée cartésienne, cylindrique ou sphérique choisie pour correspondre à la régularité géométrique de la structure.

$$L_j(X) = \prod_{i \neq j} \frac{(X - x_i)}{(x_j - x_i)} \quad \forall j \in [1; k_0] \quad (13.7)$$

Les valeurs ζ_q des k_1 paramètres restants sont alors exprimées en utilisant la propriété des polynômes de Lagrange :

$$\zeta_q = \sum_{j \in [1; k_0]} \zeta_j L_j(X) \quad \forall q \in [k_0 + 1; k] \quad (13.8)$$

L'utilisation de l'interpolation repose sur le postulat de la régularité des valeurs prises par les paramètres pour la solution optimum. Ce postulat peut se trouver contredit, comme par exemple dans le cas des forces d'appuis des voûtes plates (section 16.2.3 p. 283). Dans ce cas, le chargement extrême calculé avec interpolation est nettement inférieur à celui qui aurait été calculé (lorsque cela est possible) sans interpolation. La comparaison des domaines des chargements supportables avec et sans interpolation a été réalisée sur le cas particulier des voûtes plates (section 16.2.3).

13.4.3 Multiplicateurs de charges modifiés par puissances d'entiers

En pratique, même dans le cas d'un faible nombre de paramètres, il est fréquent que la méthode du gradient réduit généralisé ne permette pas de trouver le maximum global de la fonction f . Marco Czarnecki⁽¹⁾ nous a suggéré de remplacer la fonction f de l'équation 13.6 par la fonction approchée g_p , utilisant un entier p :

$$g_p(\zeta) = \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} |\lambda_j(\zeta)|^{-p} \right)^{-1/p} \quad (13.9)$$

Cette fonction présente la propriété suivante :

$$\forall \zeta, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} g_p(\zeta) = f(\zeta) \quad (13.10)$$

Nous avons utilisé une version modifiée de la fonction g_p pour des raisons de calculs numériques. En effet lorsque $\lambda_j(\zeta)$ est grand pour tous les joints (si la structure est « très stable »), alors pour p grand $\sum_{j \in \mathcal{J}} |\lambda_j(\zeta)|^{-p}$ est évalué numériquement comme valant zéro, et il n'est alors plus possible de faire le calcul numérique de g_p en raison d'une erreur de division par zéro. La modification consiste à normaliser les multiplicateurs de charge locaux avec le multiplicateur de charge global $f(\zeta)$ de la solution d'équilibre en cours de considération. Nous définissons la nouvelle fonction f_p ainsi :

$$f_p(\zeta) = \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} \left| \frac{\lambda_j(\zeta)}{f(\zeta)} \right|^{-p} \right)^{-1/p} \times f(\zeta) \quad (13.11)$$

(1). Marco Czarnecki, Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier, UMR 5030 CNRS, Université Montpellier 2.

Chapitre 13. Implémentation numérique

La fonction f_p présente une propriété équivalente à celle de la fonction g_p :

$$\forall \zeta, \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(\zeta) = f(\zeta) \quad (13.12)$$

L'existence des propriétés suivantes est conjecturée, mais n'a pas été prouvée du point de vue théorique :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \max_{\zeta} f_p(\zeta) = \max_{\zeta} f(\zeta) \quad (13.13)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \zeta_p^* = \zeta^* \quad (13.14)$$

Cette conjecture permet de calculer avec p grand un estimatif du multiplicateur de charge $\max_{\zeta} f(\zeta)$, en maximisant la fonction f_p au lieu de maximiser la fonction f . L'avantage est que la recherche du maximum de la fonction f_p est plus simple numériquement que la recherche du maximum de la fonction f . La précision de cet estimatif en fonction p et la notion de simplicité de maximisation sont étudiées sur des cas particuliers ci-dessous.

La convergence de la suite numérique $(\max f_p)_p$ avec $p \in \{10; 50; 100; 150; 200; 250; 300; 350; 400; 450\}$ est étudiée dans la suite sur des cas particuliers. Soit n le nombre de paramètres (dimension du vecteur paramètre ζ). Nous notons ci-dessous avec l'exposant * la valeur des paramètres qui permettent d'obtenir le maximum d'une fonction :

- soit ζ^* la valeur du vecteur paramètre ζ tel que $f(\zeta^*) = \max f$

- soit ζ_p^* la valeur du vecteur paramètre ζ tel que $f_p(\zeta_p^*) = \max f_p$

Nous utilisons de plus la notation suivante pour mesurer l'écart entre ζ^* et ζ_p^*

$$\frac{\|\zeta_p^* - \zeta^*\|}{\|\zeta^*\|} = \sum_{i \in [1, n]} \frac{|\zeta_{p,i}^* - \zeta_i^*|}{\zeta_i^*} \quad (13.15)$$

Convergence arc en plein-cintre

Nous considérons le *coefficient de sécurité statique*⁽²⁾ d'un arc en plein cintre chargé uniformément par son poids propre. Les paramètres suivants sont considérés :

- arc composé de 24 claveaux ;
- rayon intrados 8 m, rayon extrados 12 m ;
- masse volumique⁽³⁾ 1000 kg/m³ ;
- résistance à la compression 10 MPa.

Il est possible d'obtenir une bonne approximation du coefficient de sécurité statique théorique en raison du faible nombre de paramètres (3, réduits à 2 en utilisant les conditions de symétrie) : $f(\zeta^*) = \max f = 56,709048$ (fig. 13.8).

La figure 13.9 montre que pour cet exemple, pour $p > 50$ l'erreur relative sur l'optimum est inférieure à 0,1% ce qui en pratique est déjà largement suffisant vu les incertitudes usuelles sur la géométrie des arcs et des voûtes. Cette figure montre

(2). Le coefficient de sécurité statique a été défini dans la section 3.2.1 p. 43.

(3). Le poids des claveaux est obtenu en multipliant leur masse par la gravité prise égale à 10 m.s⁻². Cela revient à utiliser l'approximation usuelle dans le bâtiment « 1 kg = 1 daN ». L'incidence de cette approximation sur les domaines des chargements potentiellement supportables est abordée p. 252.

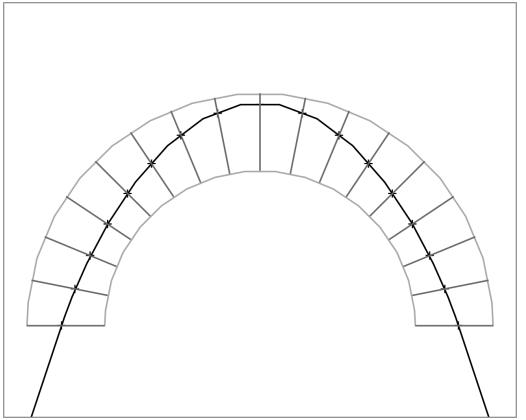


Fig 13.7 – Centres de pression et polygone funiculaire

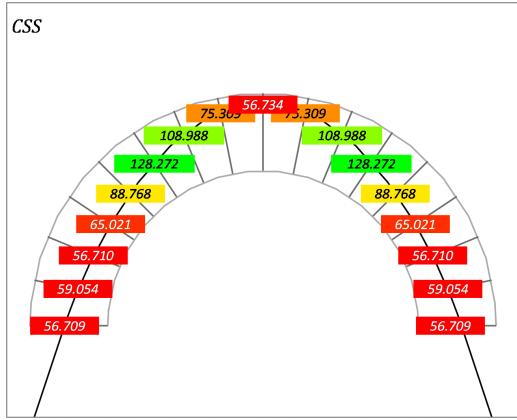


Fig 13.8 – Coefficient de sécurité statique théorique

également que la suite $(f(\zeta_p^*))_p$ converge plus rapidement vers $\max f$ que la suite $(f_p(\zeta_p^*))_p$. Cette remarque est importante, car elle exprime qu'en pratique la maximisation est calculée en utilisant la fonction de coût f_p , puisque le résultat final à retenir n'est pas $\max f_p = f_p(\zeta_p^*)$ mais $f(\zeta_p^*)$.

Nous donnons également pour l'exemple actuel la vitesse de convergence pour servir de point de comparaison dans la suite (fig. 13.10). Sur ces figures, nous notons :

$$\Delta f_p(\zeta_p^*) = 2 \frac{|f_p(\zeta_p^*) - f_{p-50}(\zeta_{p-50}^*)|}{|f_p(\zeta_p^*) + f_{p-50}(\zeta_{p-50}^*)|} \quad (13.16)$$

$$\Delta f(\zeta_p^*) = 2 \frac{|f(\zeta_p^*) - f(\zeta_{p-50}^*)|}{|f(\zeta_p^*) + f(\zeta_{p-50}^*)|} \quad (13.17)$$

$$\Delta \zeta_p = 2 \frac{|\zeta_p^* - \zeta_{p-50}^*|}{|\zeta_p^* + \zeta_{p-50}^*|} \quad (13.18)$$

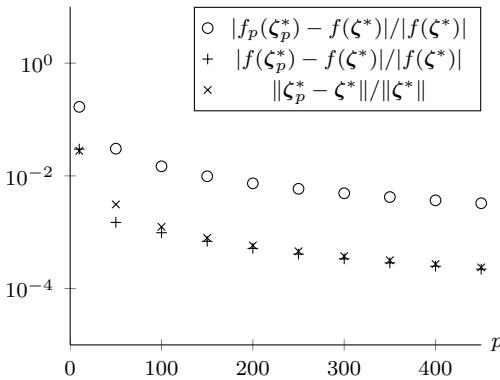


Fig 13.9 – Convergence de $\max f_p$ vers $f(\zeta^*) = \max f$, arc en plein-cintre

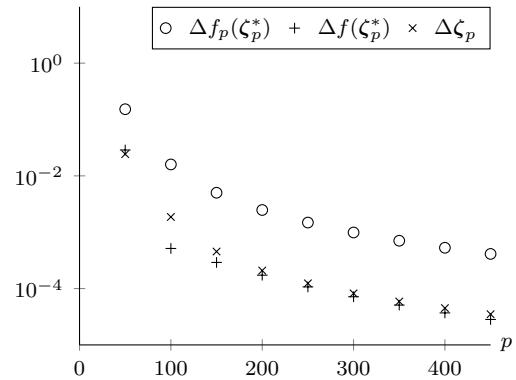


Fig 13.10 – Convergence de $(\max f_p - \max f_{p-1})$ vers 0, arc en plein-cintre

Convergence dôme elliptique

Nous considérons le coefficient de sécurité statique d'un dôme elliptique chargé uniformément par son poids propre. Les paramètres suivants sont considérés :

- découpage en 9×9 claveaux d'un quart de dôme ;
- rayon moyen $r_x = r_z = 10\text{ m}$, $r_y = 2r_z = 10\text{ m}$;
- épaisseur $t = \frac{1}{10}r_z = 1\text{ m}$;
- masse volumique⁽⁴⁾ 1000 kg/m^3 ;
- résistance à la compression 10 MPa .

Le découpage en blocs est représenté sur la figure 13.11. Les blocs rouges figurent les blocs d'appui. Les résultats des joints de tête, qui sont artificiellement réduits à une surface d'aire nulle en raison de la forme triangulaire des claveaux à la clé, ne seront pas considérées.

Les forces d'anneau ne sont pas considérées⁽⁵⁾. Il y a 9 paramètres pour les forces horizontales, et 9 paramètres pour les positions des nœuds d'appuis, soit un total de $n = 9 + 9 = 18$ paramètres. L'optimum $f(\zeta^*)$ ne peut pas être calculé directement et de façon fiable avec f en raison du nombre n de paramètres qui est plus grand que sur l'exemple de l'arc en plein-cintre. Nous considérons donc la vitesse de convergence (fig. 13.13).

La vitesse de convergence de $(f_p(\zeta_p^*))_p$ est comparable à celle vue précédemment pour l'arc en plein-cintre. En revanche, la vitesse de convergence de $(f(\zeta_p^*))_p$ et de $(\zeta_p^*)_p$ n'est pas régulière. Une hypothèse pour expliquer ce phénomène est donnée dans l'exemple suivant, concernant la plate-bande.

Convergence plate-bande à joints en X

Nous considérons la plate-bande à joints en X construite aux Grands ateliers de l'Isle d'Abeau, dont le modèle est présenté dans la section 15.3.1 p. 257. Après application des conditions de symétrie, le système présente un total de $n = 8$ paramètres, y compris les branches partielles transmettant des forces verticales entre les demi-blocs.

L'optimum $f(\zeta^*)$ ne peut pas être calculé directement et de façon fiable avec f en raison du nombre n de paramètres qui est plus grand que sur l'exemple de l'arc en plein-cintre. Nous considérons donc la vitesse de convergence (fig. 13.14).

Pour un chargement donné, nous appelons multiplicateur de rupture *indéterminé* un multiplicateur de rupture qui peut être trouvé avec plusieurs valeurs des paramètres, et donc plusieurs réseaux de forces différents.

Ce phénomène pourrait expliquer que les vitesses de convergence de $(f_p(\zeta_p^*))_p$ et $(f(\zeta_p^*))_p$ soient comparables à celles vues précédemment pour l'arc en plein-cintre, et

(4). Le poids des claveaux est obtenu en multipliant leur masse par la gravité prise égale à 10 m.s^{-2} . Cela revient à utiliser l'approximation usuelle dans le bâtiment « $1\text{ kg} = 1\text{ daN}$ ». L'incidence de cette approximation sur les domaines des chargements potentiellement supportables est abordée p. 252.

(5). Aucune force ne transite par la branche d'anneau représentée en tête du dôme sur les figures. Nous utilisons cette branche uniquement pour que l'ensemble des branches soient connectées et permettent l'exploration des graphes représentatifs des réseaux, et imposons une force nulle dans les branches d'anneaux.

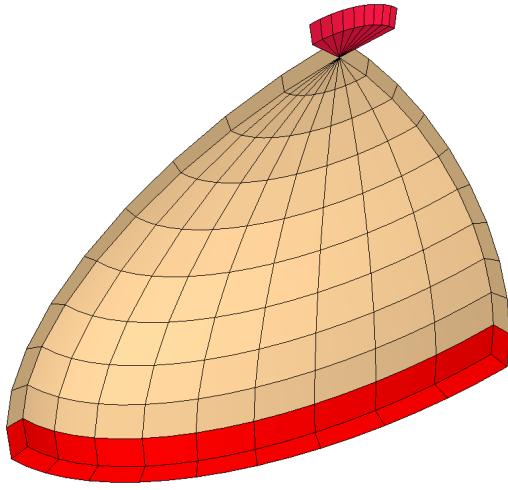


Fig 13.11 – Dôme elliptique, avec blocs d'appuis en rouge

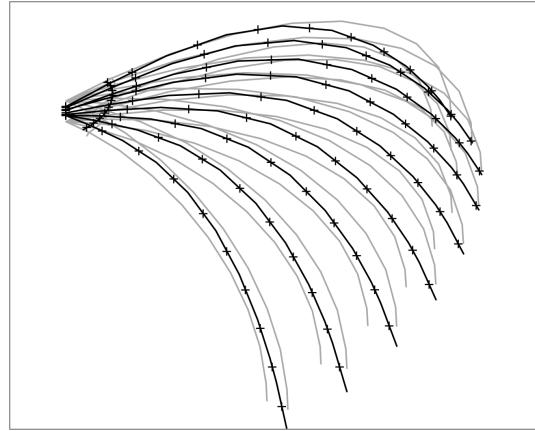


Fig 13.12 – Réseau de forces

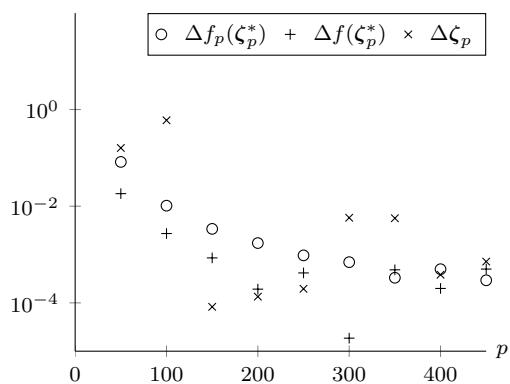


Fig 13.13 – Convergence de $(\max f_p - \max f_{p-1})$ vers 0, dôme elliptique

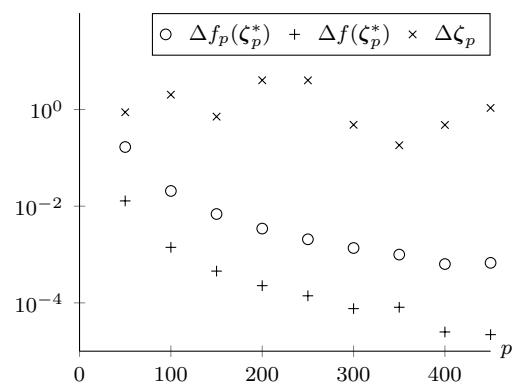


Fig 13.14 – Convergence de $(\max f_p - \max f_{p-1})$ vers 0, plate-bande à joints en X

Chapitre 13. Implémentation numérique

que pourtant la suite des paramètres optimaux calculés $(\zeta_p^*)_p$ ne converge pas. Cette non-convergence se traduit par des réseaux de forces optimaux calculés visuellement différents suivant la valeur de p (fig. 13.15).

Nous avons tenté pour cet exemple de lever l'indétermination du multiplicateur de rupture en imposant que la somme de la poussée sur les deux faces d'un claveau d'appui vaille 300 daN, ce qui réduit l'espace des paramètres explorés. Même avec cette condition, utilisée pour créer les figures mentionnées ci-dessus, il reste une indétermination sur le multiplicateur de rupture, probablement lié aux branches partielles.

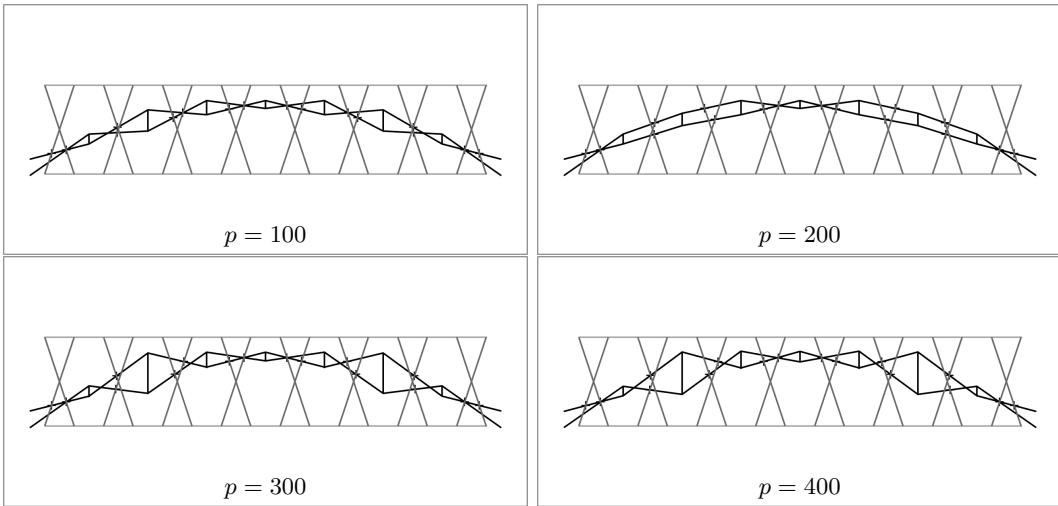


Fig 13.15 – Réseaux de forces optimaux correspondant aux charges extrêmes calculés pour $p \in \{100; 200; 300; 400\}$; plate-bande à joints en X

Bilan

La reformulation de la fonction à optimiser f avec une fonction f_p utilisant des puissances élevées fonctionne, au sens où la convergence est plus stable : le solveur intégré de Microsoft Excel ne s'arrête pas sur des maximums locaux, mais semble bien aller jusqu'au maximum global de la fonction f_p . L'ordre de grandeur à prendre pour p sur la base de ces exemples est de 100 à 200 environ.

Cette modification de la fonction de coût est indépendante du type de coefficient de sécurité considéré. Il s'applique ainsi aussi bien au coefficient de sécurité statique (considéré dans les exemples ci-dessus) qu'au coefficient de sécurité géométrique.

13.4.4 Coefficient de sécurité géométrique modifié

La modification du coefficient de sécurité géométrique présentée ici est spécifique à ce coefficient, et n'est pas utilisable pour les autres coefficients de sécurité du calcul à la rupture.

On considère un intervalle $[x_0; x_1]$ représentant un joint dont le centre est $x_m = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$. Les valeurs prises par le coefficient de sécurité géométrique local $\lambda_j = \text{CSG}_j$ suivant la position x du centre de pression sur l'intervalle du joint est

Chapitre 13. Implémentation numérique

représentée sur la figure 13.16. Pour éviter la division par zéro en x_m , la fonction λ_j est remplacée par la fonction quadratique centrée $\tilde{\lambda}_j$ sur cet intervalle, et représentée sur la figure 13.17 :

$$\tilde{\lambda}_j(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_0)}{(x_m - x_1)(x_m - x_0)} = \frac{[(x - x_m)^2 + x_0x_1 - x_m^2]}{(x_m - x_1)(x_m - x_0)} \quad (13.19)$$

La fonction $x \rightarrow \tilde{\lambda}_j(x)$ donnée ci-dessus est normalisée de telle manière à ce que le maximum, atteint au milieu de l'intervalle x_m , vaille $\tilde{\lambda}_j(x_m) = 1$.

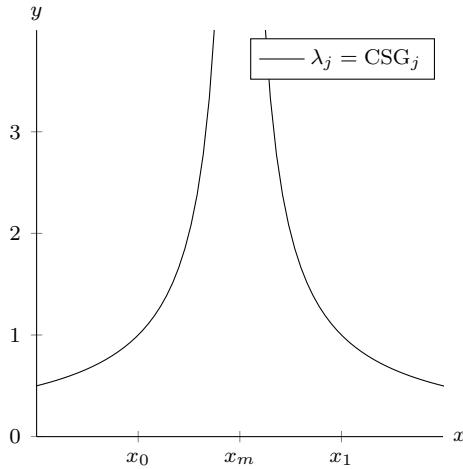


Fig 13.16 – Coefficient de sécurité local sur un joint

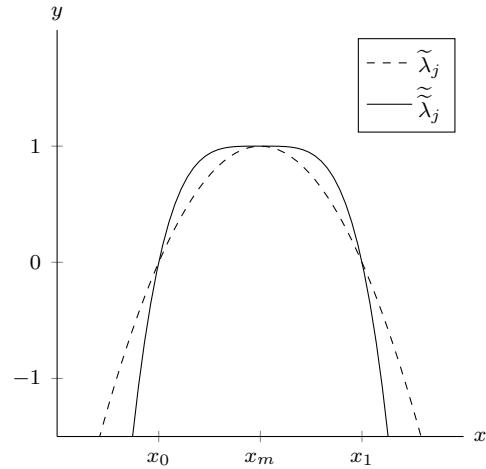


Fig 13.17 – Fonctions polynomiales remplaçant le coefficient de sécurité local

Nous remplaçons la fonction $f = \min \lambda_j$ pour l'optimisation par la fonction $\tilde{f} = \sum \tilde{\lambda}_j$, afin de faire disparaître la forte non linéarité liée à la fonction \min utilisée par f . Cette première fonction ne donne pas de résultat satisfaisant, car elle donne une importance trop grande aux joints dont le coefficient de sécurité local n'est pas proche du coefficient de sécurité global en cours de calcul.

En effet, la recherche du coefficient de sécurité géométrique d'une structure clavée revient à la recherche du réseau de forces dont les centres de pression sont **globalement** les mieux centrés à l'intérieur des joints. Le fait qu'un des centres de pression soit parfaitement centré sur un joint n'a pas d'intérêt, seule la position du centre de pression le plus excentré sur son joint compte. Cette observation nous a conduit dans un second temps à modifier $\tilde{\lambda}_j$ en une autre fonction $\tilde{\tilde{\lambda}}_j$.

Pour chercher des solutions où le centre de l'intervalle représentant le joint ait moins d'importance, on cherche une fonction simple qui ait la même forme globale que $\tilde{\lambda}_j$, mais avec un maximum plus plat. Posons la fonction polynomiale de degré 4 $\tilde{\tilde{\lambda}}_j$ telle que :

$$\tilde{\tilde{\lambda}}_j(x) = \tilde{\lambda}(x) \left(a\tilde{\lambda}(x) + b \right) \quad (13.20)$$

Les paramètres a et b sont choisis de façon à ce que la fonction ait un fond plat en $x = x_m$ (soit $\tilde{\tilde{\lambda}}'_j(x) = 0$ si et seulement si $x = x_m$) et soit normalisée ($\tilde{\tilde{\lambda}}_j(x_m) = 1$).

Chapitre 13. Implémentation numérique

Ces deux conditions imposent que :

$$-2a + b = 0 \quad (\text{condition sur } \tilde{\lambda}') \quad (13.21)$$

$$-a + b = 1 \quad (\text{condition sur } \tilde{\lambda}) \quad (13.22)$$

Par conséquent la fonction $\tilde{\lambda}$ recherchée, représentée sur la figure 13.17, a la forme suivante :

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}(x) (\tilde{\lambda}(x) + 2) \quad (13.23)$$

En remplaçant cette fois la fonction $f = \min \lambda_j$ pour l'optimisation par la fonction $\tilde{f} = \sum \tilde{\lambda}_j$, on trouve de meilleures solutions lors de la recherche du coefficient de sécurité géométrique lorsque le nombre de joints est important. Cette méthode est cependant moins efficace, et moins générale, que la méthode utilisant les puissances présentée à la section précédente. Elle n'est donc pas utilisée dans la suite.

13.4.5 Convexité du domaine des chargements supportables

La recherche du chargement extrême $F(Q)\underline{Q}$ correspondant au chargement \underline{Q} sur un trajet de chargement radial repose sur la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes.

Un des principaux problèmes rencontrés lors de l'optimisation, est qu'il n'est pas possible de savoir si la solution \tilde{F} calculée par le problème d'optimisation est égale la meilleure possible F , ou même si cette dernière est proche de la meilleure possible F . En effet, l'optimum calculé peut être un optimum local et non un optimum global. Par ailleurs, lorsque le processus d'optimisation converge lentement et est arrêté avant la fin du processus, la distance entre la solution obtenue \tilde{F} et l'optimum global F n'est pas connue.

Pour contourner ce problème, il est possible d'exploiter la propriété de convexité du domaine des chargements potentiellement supportables, pour repérer les solutions \tilde{F} qui ne peuvent pas être l'optimum global F , et qui doivent être affinées.

Ainsi, sur la figure 13.18, les chargements considérés \underline{Q} sont indiqués par les points, et les plus grands chargements supportables $\tilde{F}(\underline{Q})\underline{Q}$ obtenus sur un trajet radial sont indiqués par des flèches. La convexité du domaine des chargements potentiellement supportables indique que les chargements supportables $\tilde{F}_a(\underline{Q}_a)\underline{Q}_a$ et $\tilde{F}_b(\underline{Q}_b)\underline{Q}_b$ sont situés strictement à l'intérieur du domaine, et qu'ils ne correspondent donc pas à des chargements extrêmes. A contrario, le chargement $\tilde{F}_c(\underline{Q}_c)\underline{Q}_c$ est situé sur la frontière du domaine en cours de calcul. Dans cet exemple, il est certain qu'il est possible de trouver des chargements supportables plus grands que $\tilde{F}_a(\underline{Q}_a)\underline{Q}_a$ et $\tilde{F}_b(\underline{Q}_b)\underline{Q}_b$.

À partir de ces observations, la stratégie suivante a été adoptée lors des calculs des domaines des chargements supportables. L'approche par l'intérieur du domaine sur la base d'un ensemble de chargements $(\underline{Q}_1, \dots, \underline{Q}_n)$ suit la procédure suivante :

1. Première étape. Pour tous les chargements \underline{Q}_i , calcul d'un premier estimatif $\tilde{F}_{i,1}$ du multiplicateur de rupture, qui permet d'obtenir un premier domaine K_1 approché par l'intérieur du domaine K des chargements supportables

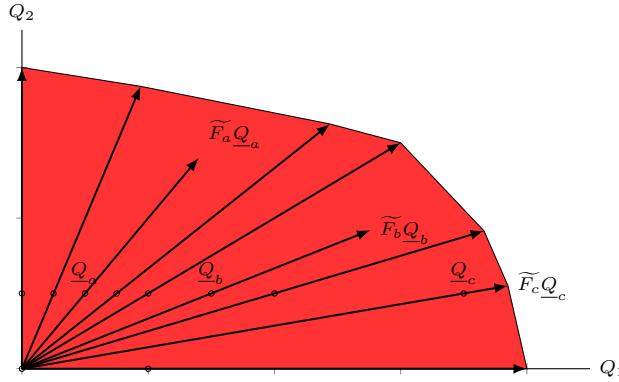


Fig 13.18 – Exploitation de la propriété de convexité du domaine des chargements supportables

2. Deuxième étape.

- Pour tous les chargements \underline{Q}_i tels que $\widetilde{F}_{i,1}\underline{Q}_i$ n'est pas situé sur la frontière du domaine K_1 , calcul d'un nouvel estimatif $\widetilde{F}_{i,2}$ du multiplicateur de rupture.
 - Pour les autres chargments \underline{Q}_i on prend $\widetilde{F}_{i,2} = \widetilde{F}_{i,1}$
 - On obtient ainsi un nouveau domaine K_2 approché du domaine K des chargements supportables
3. Étape j . Répéter deuxième étape tant que tous les chargements $\widetilde{F}_{i,j}\underline{Q}_i$ ne sont pas situés sur le domaine approché K_{j-1} .

13.4.6 Bilan des stratégies

Les techniques présentées ci-dessus permettent de mettre au point des stratégies appropriées pour les processus d'optimisation.

La stratégie qui nous a paru la plus efficace sur les exemples traités (plates-bandes à joints en X et voûtes plates) a été de complexifier progressivement les modèles, et de repartir de solutions intermédiaires.

Ainsi, l'augmentation du degré n des polynômes d'interpolation, et de l'entier p de la fonction modifiée permet de trouver de meilleures solutions (domaine des chargements supportables plus grand), mais augmente les temps de calcul. Nous sommes donc partis de degré des polynômes faibles ($n = 2$ ou 3), avec une valeur $p = 50$, pour calculer un premier domaine. Dans un second temps, en partant des solutions déjà calculées, le degré des polynôme est augmenté, ainsi que la valeur de p .

L'arrêt de la recherche de nouvelles solutions a été basé sur la propriété de convexité du domaine.