

Chapitre 16

Étude des voûtes plates

Résumé : Ce chapitre traite de l'influence de la coupe des pierres sur la stabilité des voûtes plates. Trois types de voûtes sont analysées : les voûtes plates appareillées sur le plan du berceau, les voûtes plates appareillées sur le plan de la voûte en arc-de-cloître, et enfin la voûte plate d'Abeille. Les domaines des chargements potentiellement supportables, qui sont utilisés pour quantifier la stabilité, sont déterminés avec les réseaux de forces. L'intégration des résultats de modèles aux éléments finis est envisagée.

Sommaire

16.1	Description des voûtes étudiées	277
16.1.1	Étude de trois appareils	277
16.1.2	Paramétrisation des appareils	278
16.1.3	Définition des voûtes étudiées	279
16.2	Influence des choix de modélisation	280
16.2.1	Application de la méthode des réseaux de forces	280
16.2.2	Raffinement du réseau	281
16.2.3	Interpolation polynomiale des paramètres	283
16.3	Influence de la coupe des pierres	285
16.3.1	Résultats de la voûte unidirectionnelle	285
16.3.2	Résultats de la voûte bidirectionnelle	286
16.3.3	Résultats de la voûte d'Abeille	291
16.3.4	Conclusion	294
16.4	Modèle aux éléments finis	294

16.1 Description des voûtes étudiées

16.1.1 Étude de trois appareils

Nous étudions dans ce chapitre l'effet de la coupe des pierres sur une voûte plate construite sur un plan carré. Le paramètre de la coupe des pierres dont nous étudions l'effet ici est l'appareil global de la voûte. Trois modèles sont étudiés, présentant successivement un appareil :

- sur le plan de la voûte en berceau (« barrel vault »), appelée voûte unidirectionnelle dans la suite pour simplifier les descriptions (fig. 16.1) ;
- sur le plan de la voûte en arc-de-cloître (« pavillon vault »), appelée voûte bidirectionnelle dans la suite pour simplifier les descriptions (fig. 16.2) ;
- sur le plan de la voûte d'Abeille, du nom de son inventeur (fig. 16.3).

La voûte unidirectionnelle n'est appuyée que sur deux côtés du carré qu'elle couvre, alors que la voûte bidirectionnelle et la voûte d'Abeille sont appuyées sur les quatre côtés du carré. Les appuis sont représentés par des blocs de couleur rouge sur les figures 16.1, 16.2 et 16.3.

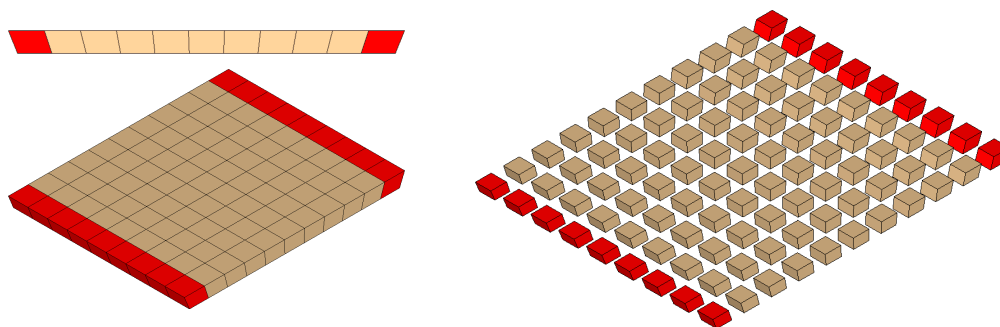


Fig 16.1 – Voûte plate à joints inclinés appareillée sur le plan du berceau (voûte plate unidirectionnelle), vue assemblée (à g.) et éclatée (à d.)

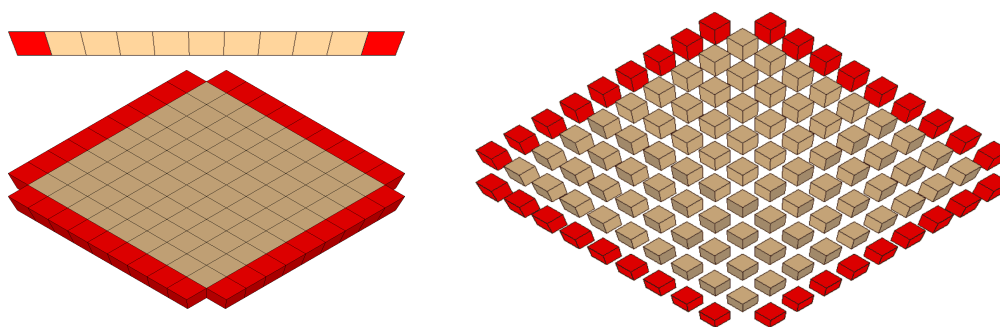


Fig 16.2 – Voûte plate à joints inclinés appareillée sur le plan de la voûte en arc-de-cloître (voûte plate bidirectionnelle), vue assemblée (à g.) et éclatée (à d.)

Par rapport à l'appareil réel d'une voûte plate appareillée sur le plan d'un berceau (fig. 10.3 sous-figures 1 et 2) ou appareillée sur le plan de la voûte en arc-de-cloître (fig. 10.3 sous-figures 3 et 4), l'appareil des voûtes étudiées est simplifié en divisant les claveaux et régularisé en ajustant leur taille pour obtenir des blocs dont les faces

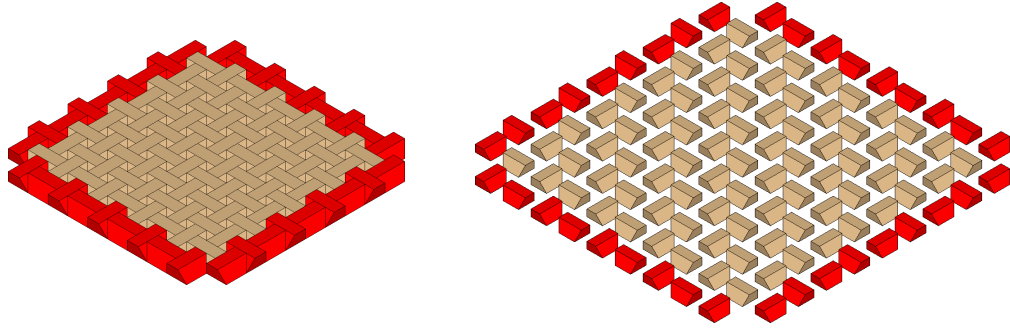


Fig 16.3 – Voûte plate d'Abeille, vue assemblée (à g.) et éclatée (à d.)

inférieures (intrados) et supérieures (extrados) sont des carrés (fig. 16.4). La simplification introduit des joints fictifs dans la coupe des pierres de la voûte, qui respectent les règles régissant l'orientation des joints existants dans l'appareil réel (fig. 16.5). La régularisation affecte légèrement la position des joints réels.

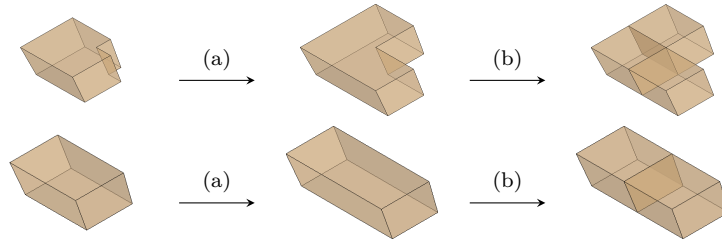


Fig 16.4 – Régularisation (a) et simplification (b) de la découpe des claveaux

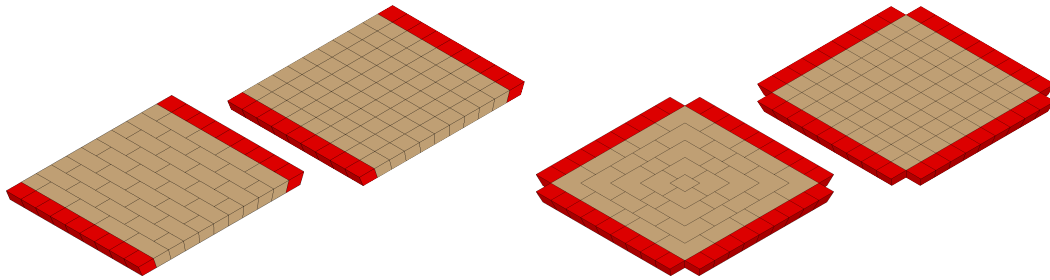


Fig 16.5 – Appareil régularisé des voûtes plates uni- et bidirectionnelles, avant et après simplification par introduction de joints fictifs

16.1.2 Paramétrisation des appareils

Nous choisissons des caractéristiques similaires à celles déjà choisies pour les plates-bandes pour décrire les appareils des voûtes plates :

- géométrie :
 - nombre de claveaux k_x et k_y selon chaque direction principale ;
 - portées $L_{m,x}$ et $L_{m,y}$ mesurées à mi-hauteur ;
 - hauteur h ;

- angle φ des joints des sommiers avec la verticale ;
- propriétés mécaniques :
 - masse volumique de la pierre ρ_0 ;
 - résistance admissible des joints à la compression σ_0 ;
 - coefficient de frottement de Coulomb des joints μ , correspondant à un angle de frottement de $\tan^{-1} \mu$.

La coupe des pierres des voûtes plates, autre que les voûtes d'Abeille, est obtenue à partir de ces paramètres par application de la *méthode des divisions égales*, décrite notamment par Frézier (1738) (voir section 6.3.5 p. 110). Cette méthode de coupe a l'avantage, pour le calcul analytique, de diviser la voûte plate en $k_x k_y$ claveaux de même poids, dont l'intersection des joints avec le plan horizontal de la voûte plate (pris à mi-hauteur) est la même quelle que soit l'inclinaison des joints. De plus, lorsque l'angle φ varie :

- la position de l'intersection des joints avec le plan horizontal de la voûte plate (pris à mi-hauteur) est inchangée ;
- le poids de chaque claveau est inchangé ;
- le poids total de la voûte plate est inchangé.

Les portées libres $L_{i,x}$ et $L_{i,y}$ de la voûte plate, mesurées à l'intrados, se déduisent des paramètres donnés ci-dessus avec $L_i = L_m - h / \tan \varphi$. Les portées, lorsqu'elles sont égales dans les deux directions, sont notées simplement L_i et L_m .

Paramétrisation des voûtes d'Abeille

Nous reprenons la paramétrisation des voûtes d'Abeille de Brocato et Mondardini (2014), et présentée dans la partie consacrée aux voûtes plates (section 10.3.4 p. 196).

16.1.3 Définition des voûtes étudiées

Les caractéristiques suivantes sont communes aux trois voûtes :

- $\varphi = 18,4^\circ$ correspondant à la règle du « 1 pour 3 » ;
- épaisseur $h = 20$ cm ;
- ratio $L_m/h = 14 \approx L_i/h$, bien supérieur (voûte plus fine) aux ratios habituels des plates-bandes de l'ordre de $L_i/h = 2$ à 5. Ce ratio a été retenu pour permettre la comparaison avec les résultats expérimentaux des Grands ateliers de l'Isle d'Abeau de 2006. Connaissant la hauteur, la portée mesurée à mi-hauteur sera $L_m = 2,80$ m pour ce ratio 14. La portée est mesurée à mi-hauteur de la plate-bande, de manière à éliminer la variation du poids total de la plate-bande lors de la variation de l'angle φ (même démarche que celle adoptée lors de l'étude des plates-bandes, même si ici φ est constant pour les exemples étudiés). La portée mesurée à l'intrados vaut $L_i = 2,73$ m ;
- voûte composée de $9 \times 9 = 81$ claveaux ;
- caractéristiques des matériaux, choisies pour représenter la pierre utilisée lors des expériences des Grands ateliers de l'Isle d'Abeau en 2006 :
 - masse volumique ⁽¹⁾ $\rho_0 = 1658$ kg/m³ ;

(1). Le poids des claveaux est obtenu en multipliant leur masse par la gravité prise égale à 10 m.s^{-2} . Cela revient à utiliser l'approximation usuelle dans le bâtiment « $1 \text{ kg} = 1 \text{ daN}$ ». L'incidence de cette approximation sur les domaines des chargements potentiellement supportables est abordée p. 252.

- résistance admissible à la compression $\sigma_0 = 1,0 \text{ MPa}$;
- coefficient de frottement : $\mu = 0,7$.

Le poids propre de la voûte unidirectionnelle et de la voûte bidirectionnelle vaut $W_0 = 2600 \text{ kg}$, et celui de la voûte plate d'Abeille vaut $W_0 = 2319 \text{ kg}$. Cette dernière est légèrement plus légère que les deux précédentes en raison des trous pyramidaux formant une trame régulière sur l'extrados (fig. 16.3 et fig 2^e sur fig. 10.12).

L'inclinaison des joints retenue correspond à la règle du « 1 pour 3 » vue précédemment concernant les plates-bandes, et qui correspond pour mémoire à l'inclinaison souvent utilisée par les tailleurs de pierre du XVIII^e siècle. Cette inclinaison correspond également à la description dans le texte de Gallon de la voûte d'Abeille en 1735.

16.2 Influence des choix de modélisation

16.2.1 Application de la méthode des réseaux de forces

Procédure de calcul des domaines des chargements supportables

Les paramètres de chargement utilisés pour le calcul des domaines des chargements potentiellement supportables du calcul à la rupture sont :

- le chargement vertical total W , somme des charges uniformément réparties sur l'ensemble des claveaux ;
- le chargement horizontal total sur un des côtés du carré $\sum H_x = \sum H_y$, c'est-à-dire la poussée horizontale totale de la voûte sur un côté.

Pour mémoire, nous notons W_0 le poids propre de la voûte. Cette valeur sert à rendre adimensionnels les paramètres de chargement sur les domaines des chargements supportables, exprimés en fonction de W/W_0 et $\sum H_x/W_0$.

La même procédure que celle utilisée pour les plates-bandes est appliquée pour les voûtes plates pour construire les domaines numériques des chargements supportables K présentés dans la suite. Pour une poussée horizontale $\sum H_x = \bar{H}$ donnée et un chargement vertical $W = \bar{W} = W_0$ donné, le multiplicateur de charge de la voûte plate $F(\bar{H}, \bar{W})$ est calculé. D'après la détermination de ce multiplicateur, le point $(F\bar{H}; F\bar{W})$ se trouve à l'intérieur du domaine des chargements potentiellement supportables K . Le domaine convexe défini par itération en des points successifs est une estimation par l'intérieur du domaine K (fig. 15.8 p. 263).

Paramètres de l'équilibre

Pour mémoire, la méthode des réseaux de forces, telle qu'elle a été étendue dans le cadre de cette thèse, exprime l'équilibre des structures clavées sous la forme d'un réseau de forces paramétré. Les trois types de paramètres sont :

- les forces horizontales dans un sous-ensemble des branches (dont le nombre est égal au degré d'hyperstaticité du réseau projeté dans le plan horizontal) ;
- les altitudes des nœuds des blocs d'appuis (blocs rouges sur les figures ci-dessus) ;
- les forces verticales dans les branches partielles introduites dans notre extension de la méthode.

Ces paramètres sont réunis sous la forme de vecteurs : ζ_{dof} pour les forces horizontales, z_b pour les altitudes des nœuds de bord, et w_p^* pour les forces verticales des branches partielles.

La localisation des paramètres est illustrée sur la figure 16.6 pour les forces horizontales et les altitudes des nœuds d'appui, et sur la figure 16.7 pour les forces verticales dans les branches partielles. Dans le cas présent, le nombre de paramètres se décompose comme suit :

- pour la voûte bidirectionnelle :
 - 18 forces horizontales (5 après symétrie) ;
 - 18 positions verticales des nœuds d'appuis (5 après symétrie) ;
 - 81 forces verticales dans les branches partielles si considérées (10 après symétrie⁽²⁾) ;
 - soit un total de **20 paramètres pour la voûte bi-directionnelle**.
- pour la voûte d'Abeille
 - 18 forces horizontales (10 après symétrie) ;
 - 18 positions verticales des nœuds d'appuis (10 après symétrie) ;
 - 81 forces verticales dans les branches partielles si considérées (25 après symétrie⁽³⁾) ;
 - soit un total de **45 paramètres pour la voûte d'Abeille**.

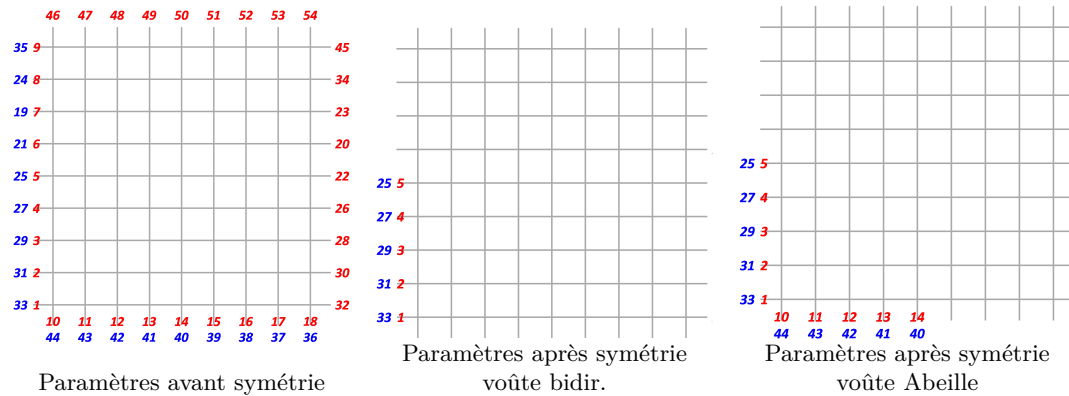


Fig 16.6 – Forces horizontales (en bleu) et altitudes des nœuds d'appui (en rouge), paramétrant l'équilibre des réseaux de forces

16.2.2 Raffinement du réseau

Le réseau de forces de la voûte bidirectionnelle peut être raffiné en ajoutant des branches partielles pour chaque claveau, qui ne transmettent que des forces verticales. Les branches partielles permettent de moduler la transmission des efforts dans les

(2). Les 81 paramètres se réduisent à 15 paramètres en appliquant les conditions de symétrie, puis à seulement 10 paramètres en faisant l'hypothèse que les branches partielles situées sur la diagonale $y = x$ ne transmettent pas de forces (sinon une des deux directions sera plus chargée que l'autre, alors que nous avons fait l'hypothèse que les forces horizontales suivant x et suivant y sont symétriques).

(3). La voûte d'Abeille possède moins de symétrie que la voûte bidirectionnelle, car une voûte d'Abeille après rotation de 90° ne peut pas être superposée à la voûte avant rotation, alors qu'une voûte bidirectionnelle après rotation de 90° est superposable à la voûte avant rotation.

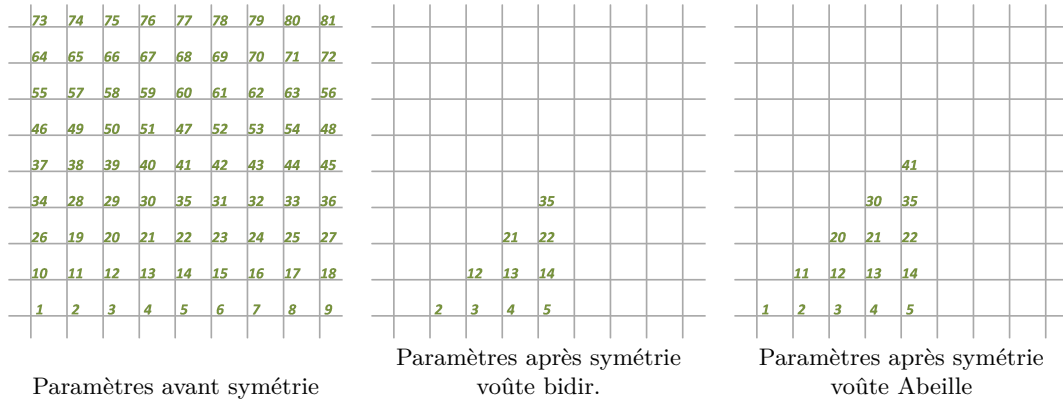


Fig 16.7 – Forces verticales dans les branches partielles, paramétrant l'équilibre des réseaux de forces

deux directions x et y , en chargeant plus ou moins l'une ou l'autre des directions de façon indépendante pour chaque bloc.

Pour étudier l'influence du raffinement du réseau sur les résultats, nous comparons les domaines des chargements supportables correspondant à trois modèles de la voûte bidirectionnelle (Bi) :

- Modèle Bi-A : réseau de forces sans branches partielles
- Modèle Bi-B : réseau de forces avec branches partielles où la force verticale est nulle
- Modèle Bi-C : réseau de forces avec branches partielles

Le modèle Bi-C est celui qui permet d'explorer le plus grand domaine de solutions d'équilibre. Parmi les solutions explorées par le modèle Bi-C se trouvent l'ensemble des solutions d'équilibre du modèle Bi-A et du modèle Bi-B. En effet, le modèle Bi-A sans branche partielle est équivalent à un modèle avec branches partielles dans lesquelles la valeur des forces verticales est choisie pour que les deux nœuds de la branche partielle soient superposés.

Le domaine des chargements supportables K_{Bi-C} calculé englobe les domaines de chargements supportables K_{Bi-A} et K_{Bi-B} , comme cela était attendu (fig. 16.8).

Le modèle Bi-B revient à dissocier les branches du réseau parallèles à l'axe x et celles parallèles à l'axe y . Le modèle est alors composé de 9 plates-bandes indépendantes dirigées selon x et portant la moitié du chargement vertical, et de 9 plates-bandes indépendantes dirigées selon y et portant l'autre moitié du chargement vertical.

Le domaine des chargements supportables K_{Bi-B} du modèle Bi-B englobe des chargements verticaux extrêmes plus importants que ceux du domaine K_{Bi-A} du modèle Bi-A (fig. 16.8 (b)). Inversement, le modèle Bi-A donne des chargements supportables avec des poussées extrêmes plus faibles que celles du modèle Bi-B (fig. 16.8 (a)).

Du point de vue calculatoire, les solutions du modèle B sont paramétrées uniquement par 2 paramètres, alors que celles du modèle Bi-A sont paramétrées par 10 paramètres, nécessitant donc des temps de calcul beaucoup plus importants (voir partie suivante sur le processus de calcul du domaine K_{Bi-A}).

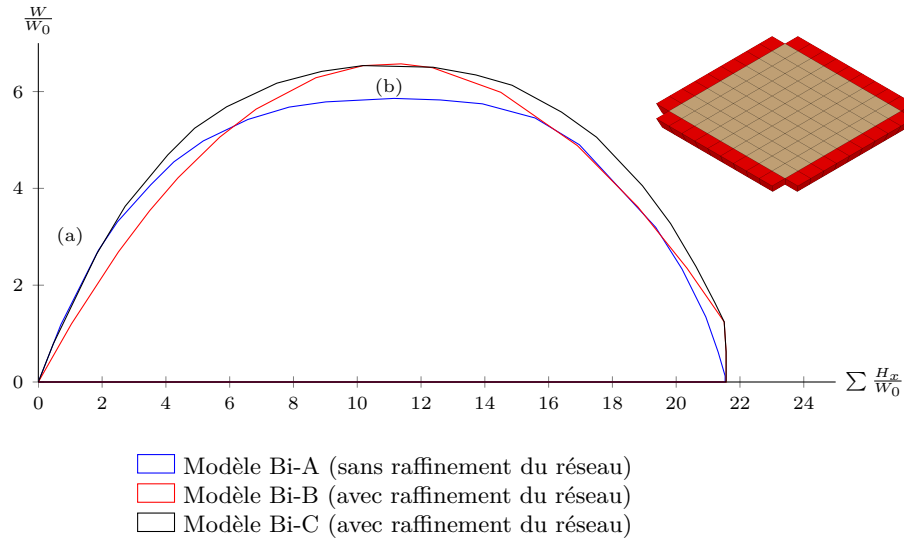


Fig 16.8 – Influence du raffinement du réseau (branches partielles) sur le domaine des chargements supportables de la voûte bidirectionnelle

16.2.3 Interpolation polynomiale des paramètres

Nous avons vu précédemment que les solutions d'équilibre des réseaux de forces sont paramétrées par 20 paramètres pour la voûte bi-directionnelle et 45 paramètres pour la voûte d'Abeille.

Lorsque le nombre de paramètres devient important, il est possible d'interpoler les valeurs de ces paramètres pour baisser le nombre de paramètres numériques effectivement utilisés pour la recherche des chargements extrêmes (section 13.4.2 p. 227).

La variable des polynômes d'interpolation des forces horizontales et des altitudes des nœuds d'appuis sont x ou y . La variable des polynômes d'interpolation des branches partielles est $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ce dernier choix a été guidé par l'observation suivante. Dans le cas d'une voûte d'Abeille de $5 \times 5 = 25$ claveaux où l'optimisation avec $6 + 6 + 6 = 18$ paramètres sans interpolation était possible, les forces dans les branches partielles des solutions d'équilibre représentant les chargements extrêmes variaient généralement en fonction de leur distance au centre de la voûte.

L'influence des polynômes de Lagrange sur les résultats est étudiée ici en comparant les modèles suivants :

- pour la voûte bidirectionnelle sans raffinement du réseau (modèles Bi-)
 - Modèle Bi-II : modèle dans lequel des polynômes de degré 0 sont utilisés pour les vecteurs paramètres ζ_{dof} et \mathbf{z}_b , ce qui conduit à $1 + 1 = 2$ paramètres ;
 - Modèle Bi-VI : modèle dans lequel des polynômes de degré 2 sont utilisés pour les vecteurs paramètres ζ_{dof} et \mathbf{z}_b , ce qui conduit à $2 + 2 = 3$ paramètres⁽⁴⁾ ;
 - Modèle Bi-X : modèle sans interpolation, avec 10 paramètres.

(4). Un polynôme de degré 2 est défini par 3 coefficients, mais la symétrie donne une condition sur les pôles du polynôme, et le nombre de coefficients pour chaque polynôme est donc $3-1=2$.

- pour la voûte d'Abeille (modèles Ab-)
- Modèle Ab-V : modèle dans lequel des polynômes de degré 0 sont utilisés pour les vecteurs paramètres ζ_{dof} , \mathbf{z}_b et \mathbf{w}_p^* ce qui conduit à $2 + 2 + 1 = 5$ paramètres ;
- Modèle Ab-XXIII : modèle dans lequel seules les branches partielles \mathbf{w}_p^* utilisent des polynômes de degré 2 ce qui conduit à $10 + 10 + 3 = 23$ paramètres ;

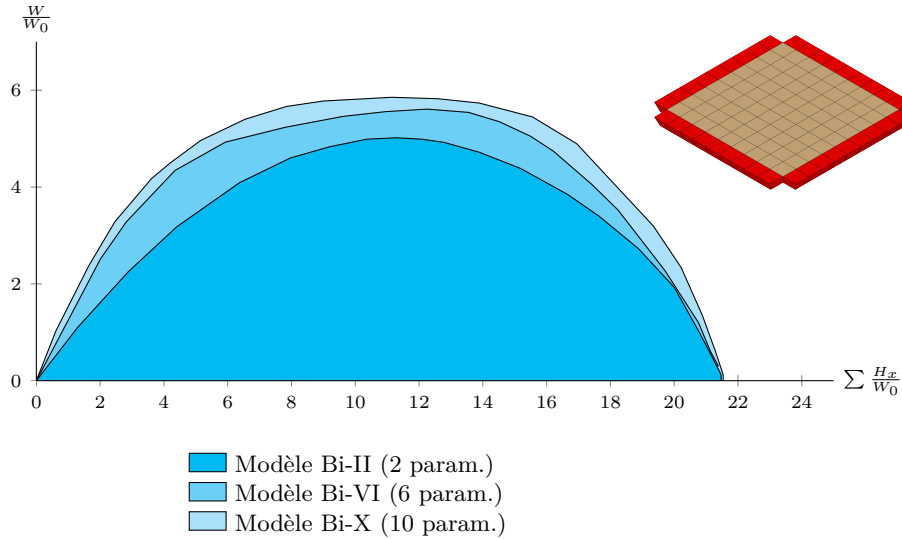


Fig 16.9 – Influence des polynômes de Lagrange sur le domaine des chargements supportables de la voûte bidirectionnelle

Les figures 16.9 et 16.10 montrent que l'utilisation des polynômes de Lagrange réduit fortement le domaine des chargements supportables.

Dans ces deux cas, au sein de chaque catégorie de paramètres (forces horizontales, altitude des nœuds de bords) pour laquelle un polynôme est utilisé, les valeurs ne présentent pas suffisamment de régularité pour qu'ils puissent être correctement approximés avec un polynôme de degré 2 ou 3. Ainsi l'interpolation n'est pas utile pour calculer directement le domaine le plus grand. Elle permet cependant de trouver rapidement un bon *point de départ* pour la recherche du chargement extrême, qui constitue un problème d'optimisation sous contraintes. Ainsi, pour obtenir le domaine des chargements supportables du modèle Bi-X, nous avons préalablement calculé celui du modèle Bi-II, utilisé la solution comme point de départ pour le modèle Bi-VI et enfin utilisé la solution du modèle Bi-VI comme point de départ du modèle Bi-X. Cette procédure est plus efficace (en terme de temps de calcul), que de calculer directement le domaine du modèle Bi-X à partir d'un point de départ arbitraire. De la même façon, les solutions trouvées pour le modèle Ab-V ont été utilisées ensuite comme point de départ pour le modèle Ab-XXIII.

Dans la suite, les résultats seront donnés sans utiliser d'interpolation pour les paramètres, à l'exception des forces verticales des branches partielles de la voûte d'Abeille.

Notons ici que si le critère de résistance au frottement n'est pas considéré, la *pous-*

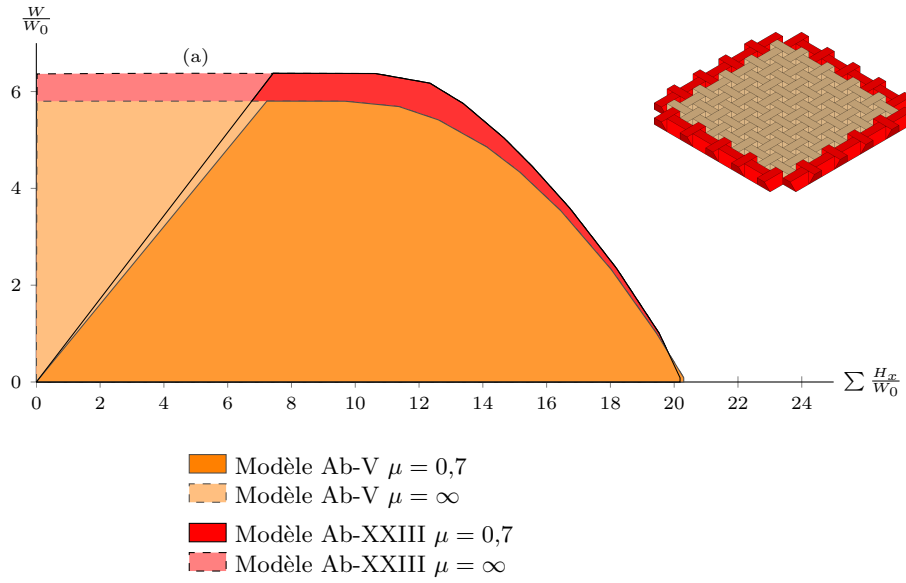


Fig 16.10 – Influence des polynômes de Lagrange sur le domaine des chargements supportables de la voûte d'Abeille

sée minimale pour la voûte d'Abeille est nulle, et il existe un intervalle de valeurs pour la poussée donnant le même chargement vertical maximum (fig. 16.10 (a)), au lieu d'avoir une seule poussée possible pour le chargement vertical admissible maximum (*p. ex.* fig. 16.8 (b)). La forme du domaine des chargements supportables de la voûte d'Abeille, similaire à celle des plates-bandes à joints en X, illustre l'analogie mécanique entre ces deux types de structures.

16.3 Influence de la coupe des pierres

16.3.1 Résultats de la voûte unidirectionnelle

Les résultats de la voûte unidirectionnelle serviront de base de comparaison avec les autres voûtes étudiées ensuite. Le calcul de cette voûte avec la méthode des réseaux de forces est équivalent à celui d'une plate-bande, car les forces dans les branches perpendiculaires au sens de portée sont nécessairement nulles (absence de blocs de bord), et les branches parallèles au sens de portée sont indépendantes les unes des autres. Le domaine de résistance $K_{unidir.}$ est représenté sur la figure 16.1.

Dans le cas de la voûte unidirectionnelle, le critère de résistance en frottement n'est pas atteint pour les solutions d'équilibre correspondant aux chargements extrêmes.

Il est possible à partir de ce premier résultat d'estimer le domaine des chargements supportables de la voûte bidirectionnelle à partir de la remarque suivante. La voûte bidirectionnelle étant la combinaison de deux voûtes unidirectionnelles, il est possible de combiner les solutions d'équilibre des chargements extrêmes $(\bar{H}; \bar{W})$ sur la frontière du domaine $K_{unidir.}$. Le résultat de cette combinaison est un nouveau chargement

extrême $(\bar{H}; 2\bar{W})$ pour la voûte bidirectionnelle. La poussée \bar{H} n'est pas doublée, mais elle s'applique maintenant sur les quatre bords, au lieu de ne s'appliquer que sur deux bords. Le domaine des chargements supportables de la voûte bidirectionnelle $K_{bidir.}$ est donc à minima la transformation affine de facteur 2 suivant l'axe du paramètre de chargement W (fig. 16.11).

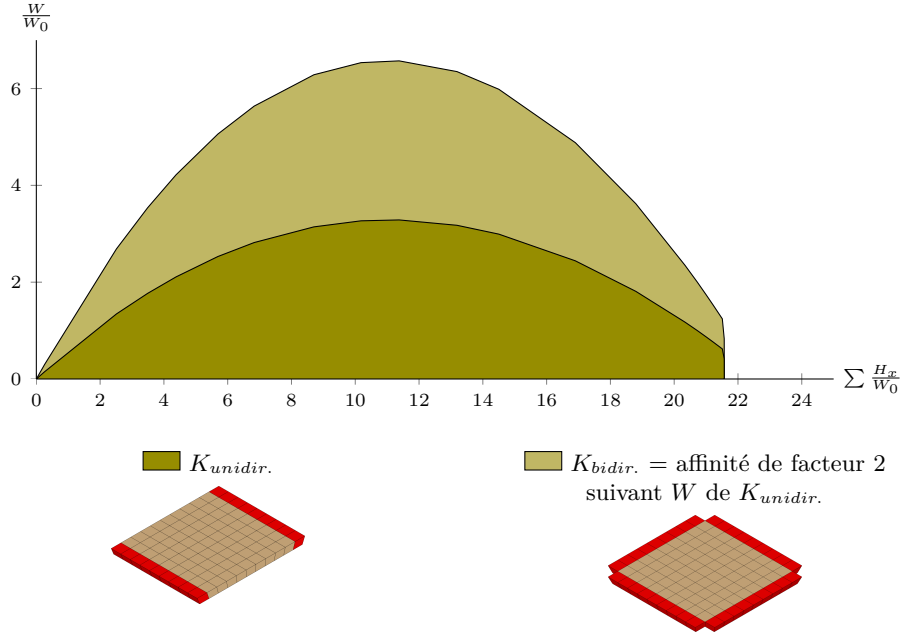


Fig 16.11 – Domaine des chargements supportables de la voûte unidirectionnelle et déduction de celui de la voûte bidirectionnelle

L'utilisation des réseaux de forces, que nous présentons dans la partie suivante, permet d'obtenir des domaines de chargements pour la voûte bidirectionnelle plus grands que cette première estimation.

16.3.2 Résultats de la voûte bidirectionnelle

Le modèle Bi-B présenté précédemment lors de l'étude de l'influence des branches partielles, où les forces verticales dans les branches partielles sont nulles, donne le même domaine des chargements supportables que l'estimation du domaine $K_{bidir.}$ réalisé par affinité du domaine $K_{unidir.}$ (les courbes obtenues dans ces deux cas sont superposées sur la figure 16.12). Les remarques comparatives entre le modèle Bi-A et le modèle Bi-B s'appliquent donc de façon identique entre le modèle Bi-A (réseau de forces sans raffinement) et l'estimation du domaine des chargements supportables par affinité de facteur 2 de la voûte unidirectionnelle : voir p. 282.

Cependant, grâce au raffinement du réseau de forces avec les branches partielles (et forces verticales non nulles), le domaine des chargements supportables de la voûte bidirectionnelle calculé est plus grand que l'estimation par affinité de facteur 2, principalement pour les chargements horizontaux extrême minimaux (fig. 16.13 (a)) et maximaux (fig. 16.13 (b)).

Chapitre 16. Étude des voûtes plates

Frézier indique que la poussée d'une voûte d'Abeille devrait être la moitié d'une plate-bande parce qu'elle porte en deux directions au lieu d'une.

Puisque les coupes des claveaux des Voutes plates [d'Abeille] sont tournées de quatre côtes alternativement, il est clair que ces voutes poussent aussi de quatre côtes, à la différence des Platebandes, qui ne poussent que de deux côtes; d'où il suit qu'elles font la moitié moins d'effort que les platebandes pour renverser leurs piedroits, & par conséquent demandent moitié moins d'épaisseur de mur, ce qui est un avantage.

Frézier (1738, p. 77)

Ce type de raisonnement s'applique également dans le cas de la voûte bidirectionnelle.

Il est possible d'éclairer cette affirmation de Frézier en utilisant les domaines des chargements supportables produits ici. Dans le cadre du calcul à la rupture, la *poussée minimale* désigne, pour un chargement vertical donné, la poussée la plus faible (en tant que chargement horizontal sur la structure) qui combinée à ce chargement vertical compose un chargement extrême (et donc potentiellement supportable). En général, la poussée minimale dépend à la fois du type de chargement vertical (chargement ponctuel, chargement réparti etc.) et de l'intensité de ce chargement vertical. Cependant, si la résistance à la compression des joints est infinie, ce qui est une hypothèse implicite de Frézier ici, la poussée minimale par unité de chargement vertical ne dépend pas de l'intensité du chargement vertical, et est donnée par la pente à l'origine du domaine des chargements supportables.

Dans le cas de l'estimation affine du domaine de chargement de la voûte bidirectionnelle, la pente (et donc la poussée minimale par unité de chargement vertical) double lors du passage de la voûte unidirectionnelle à la voûte bidirectionnelle (affinité de facteur 2), illustrant donc le raisonnement tenu par Frézier. Cependant la figure 16.12 (a) montre qu'il existe des chargements extrêmes où la poussée minimale (par unité de chargement vertical) est encore plus faible que la moitié. Nous en concluons donc que la poussée (minimale) des voûtes plates est plus de deux fois plus faible que celle d'une plate-bande ne portant dans une seule direction.

Dans le cas de la voûte bidirectionnelle, le critère de résistance en frottement est parfois atteint pour les solutions d'équilibre correspondant aux chargements extrêmes calculés. Cependant pour chaque chargement extrême présentant cette situation, il a été possible de trouver une nouvelle solution d'équilibre correspondant à un nouveau chargement extrême au moins égal au précédent et n'atteignant pas le critère de résistance en frottement.

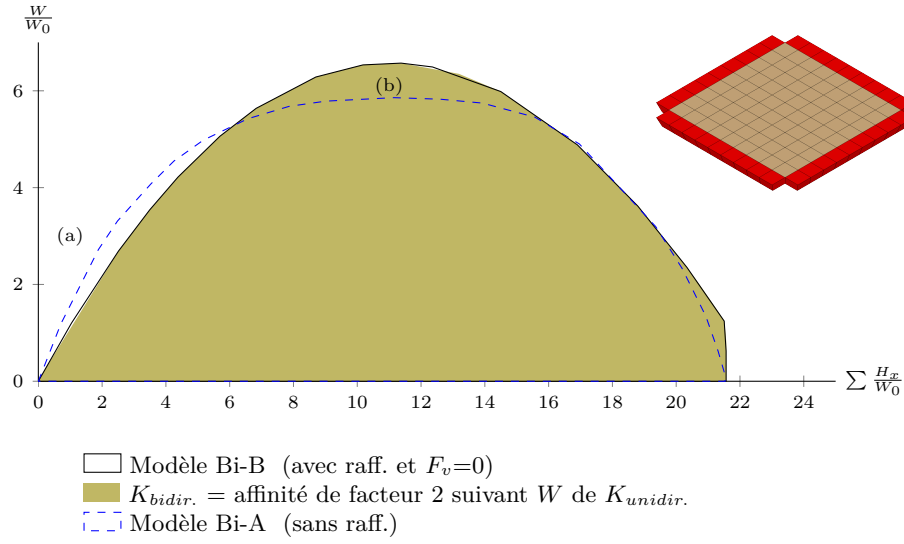


Fig 16.12 – Domaine des chargements supportables de la voûte bidirectionnelle

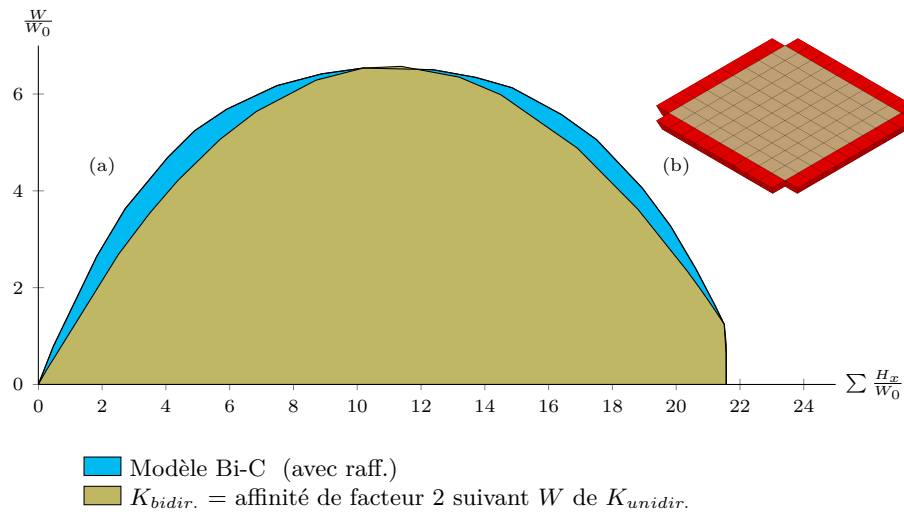


Fig 16.13 – Domaine des chargements supportables de la voûte bidirectionnelle

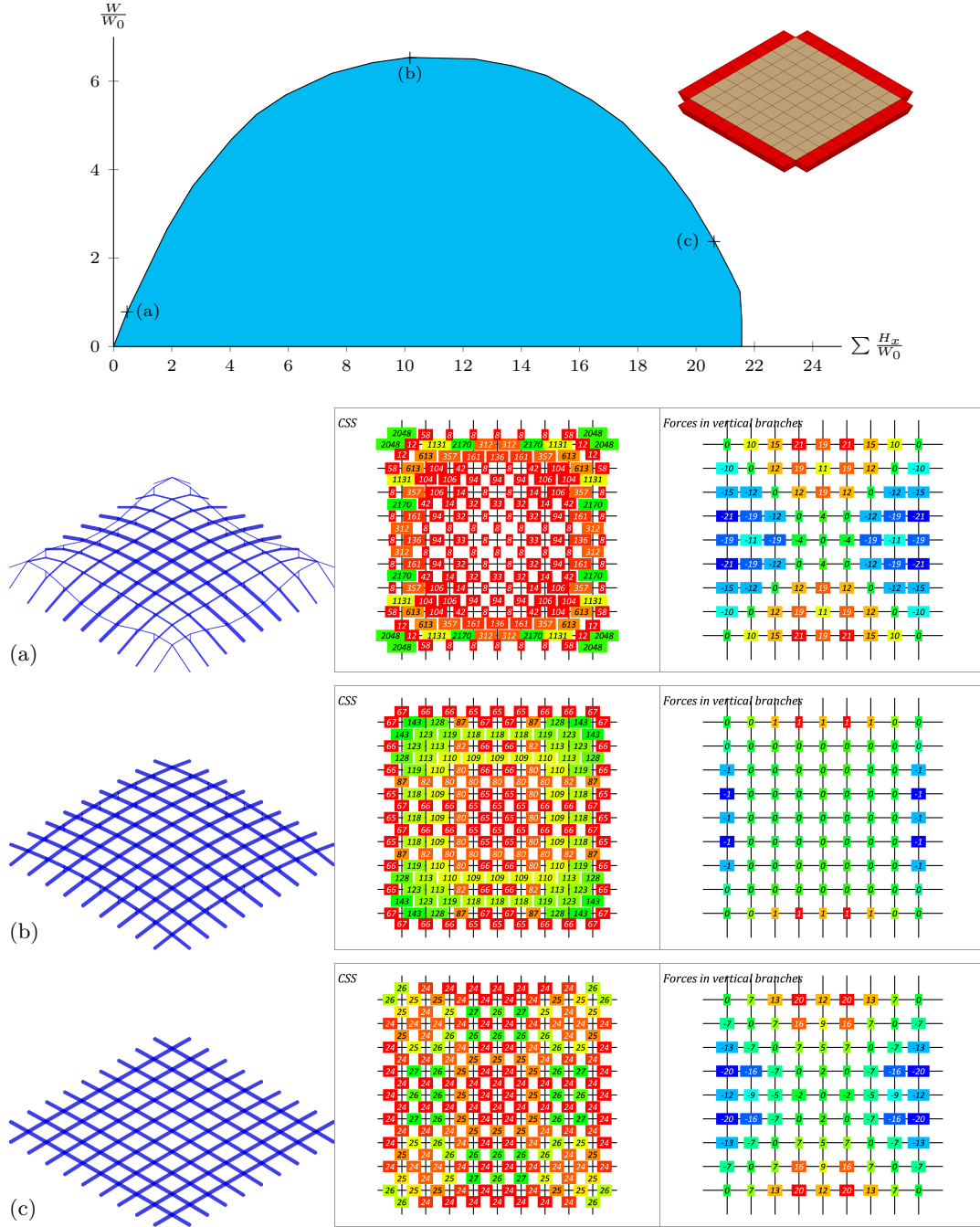


Fig 16.14 – Réseaux de forces correspondant à des chargements extrêmes de la voûte bidirectionnelle, modèle Bi-C (avec raffinement)

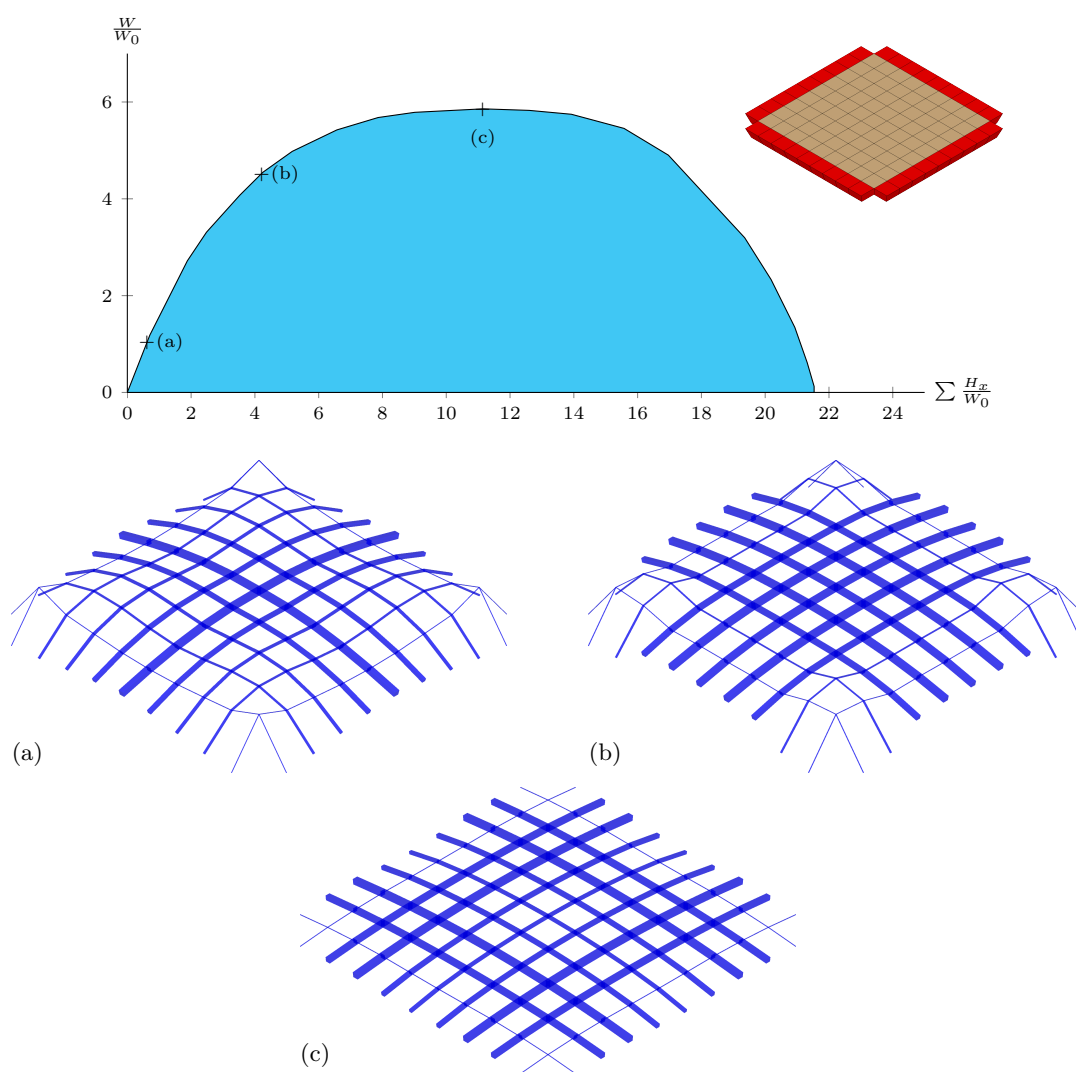


Fig 16.15 – Réseaux de forces correspondant à des chargements extrêmes de la voûte bidirectionnelle, modèle Bi-A (sans raffinement)

16.3.3 Résultats de la voûte d'Abeille

Le critère de résistance au frottement joue un rôle important pour les basses poussées (fig. 16.16 (b)), contrairement au cas des voûtes bidirectionnelles où pour les proportions L/h et l'inclinaison des joints φ étudiées le critère de résistance au frottement n'intervient pas.

Le domaine est nettement plus réduit que celui des voûtes bidirectionnelles dans la zone des fortes poussées, en raison de la forme trapézoïdale ⁽⁵⁾ des joints qui engendre des surfaces de joints plus réduites (fig. 16.16 (a)).

Bien que la voûte d'Abeille ne soit pas rigoureusement symétrique par rapport au plan horizontal, elle procure une résistance équivalente pour les chargements verticaux (vers le bas) et pour les chargements verticaux inversés (vers le haut). Le domaine des chargements supportables attendu est donc presque symétrique (hypothèse retenue à la figure 16.17).

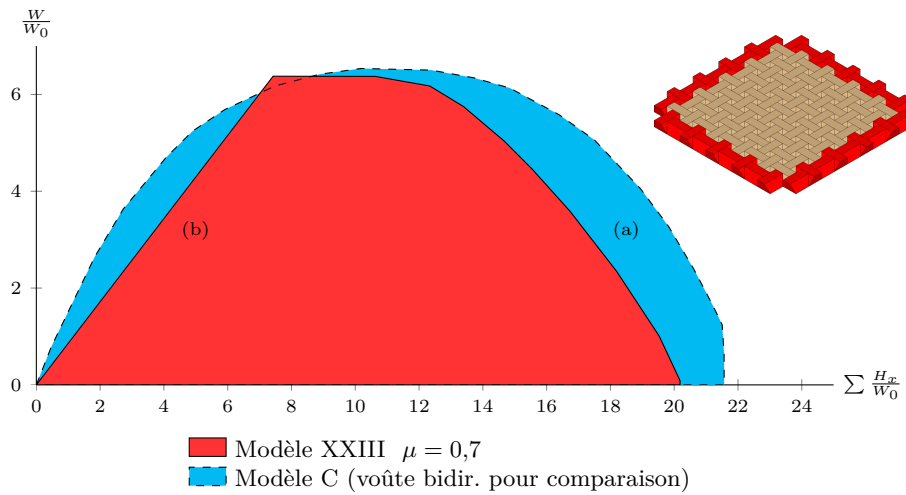


Fig 16.16 – Domaine des chargements supportables de la voûte d'Abeille

(5). Par ailleurs, les calculs des multiplicateurs de rupture sur les surfaces de contact trapézoïdales (de hauteur h et de surface S) ont été simplifiés en utilisant un joint rectangulaire approché de hauteur égale à h et de largeur $b = S/h$. L'effet de cette approximation doit cependant être faible pour l'angle $\varphi = 18,4^\circ$ considéré pour la voûte de cette étude.

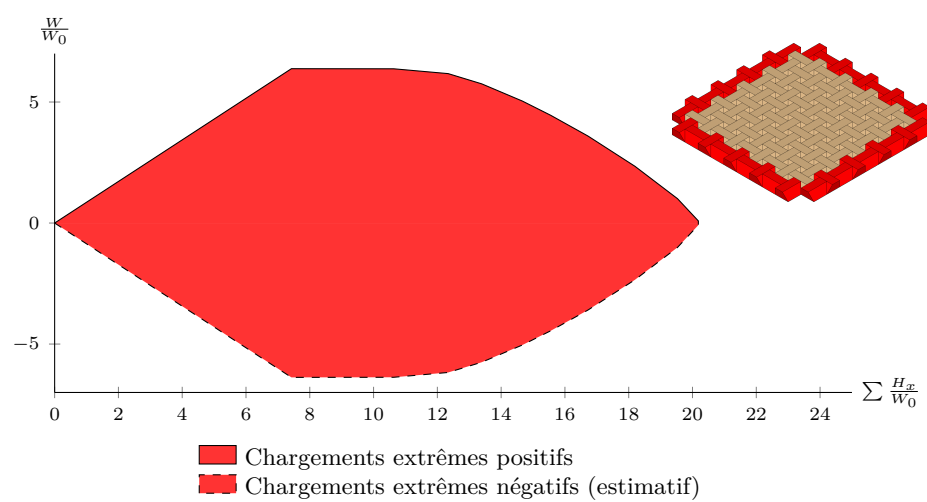


Fig 16.17 – Similitude des chargements extrêmes verticaux positifs et négatifs du domaine des chargements supportables de la voûte d'Abeille

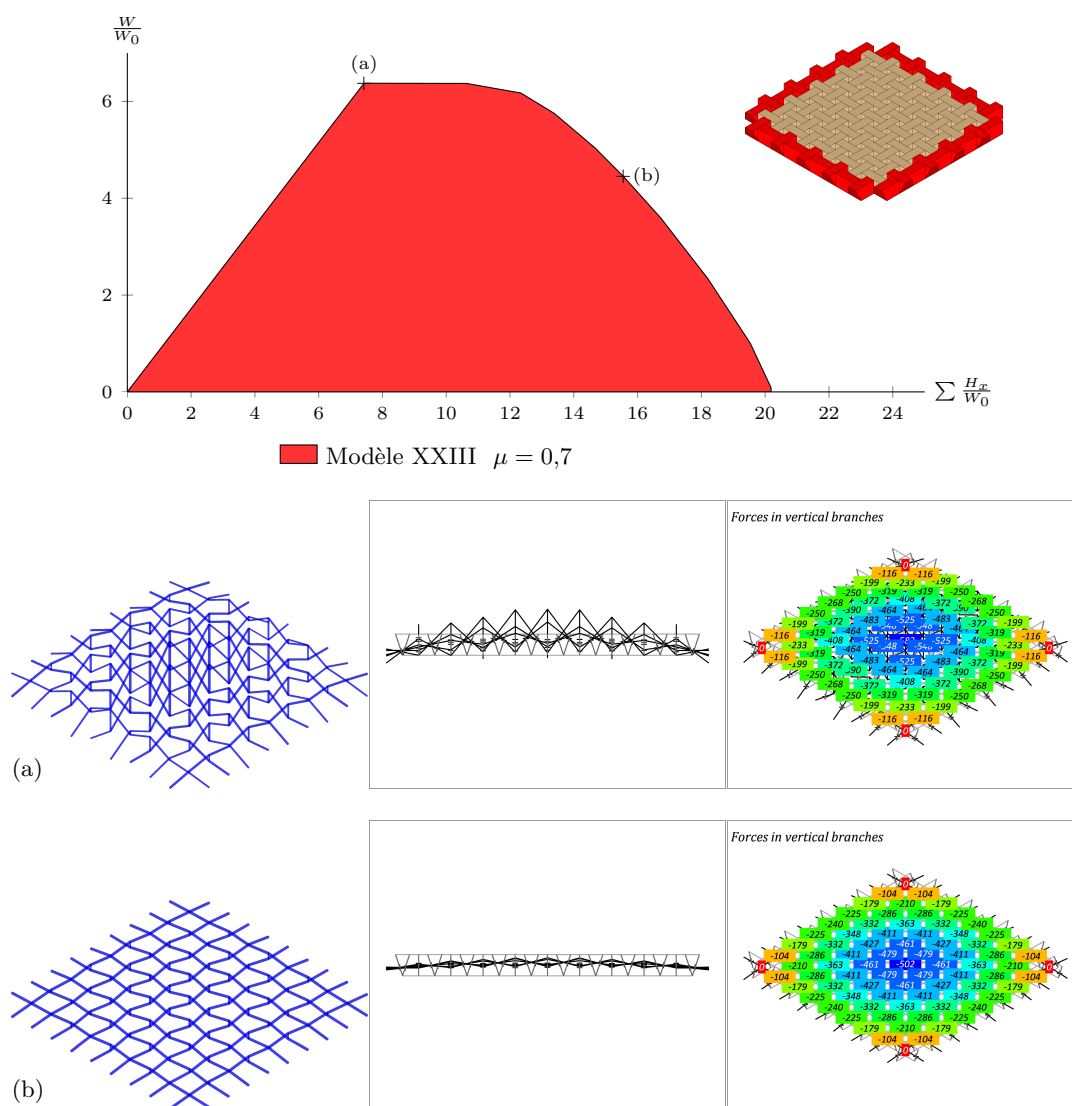


Fig 16.18 – Réseaux de forces correspondant à des chargements extrêmes de la voûte d'Abeille, modèle Ab-XXIII

16.3.4 Conclusion

La comparaison des domaines des chargements supportables des voûtes plates montre que l'appareil joue un rôle important sur la stabilité.

La voûte plate appareillée sur le plan de la voûte en arc-de-cloître présente une stabilité bien supérieure à celle appareillée sur la voûte en berceau.

Il n'existe pas de changements aussi importants entre la voûte plate appareillée sur le plan de la voûte en arc-de-cloître et la voûte d'Abeille, les chargements supportables sont équivalents en ordre de grandeurs. Cependant la voûte d'Abeille permet d'être utilisée indifféremment dans les deux sens (charges verticales orientées vers le haut ou vers le bas), ou construite avec les trous pyramidaux en intrados ou en extrados. Cette propriété n'existe pas pour les autres voûtes plates.

16.4 Modèle aux éléments finis

Nous proposons dans cette section de comparer qualitativement les solutions d'équilibre des chargements extrêmes du calcul à la rupture avec celles qui peuvent être calculées avec un calcul aux éléments finis, pour observer si des chargements avec double funiculaire dont la projection sur le plan frontal s'entrecroisent, comme ceux visibles sur la figure 16.18 au centre, se produisent effectivement dans la structure.

La discussion de la validité de cette approche, et la description générale de ce type de modélisation, ont été présentées lors de sa première utilisation pour les plates-bandes (section 15.5 p. 270).

Les caractéristiques des éléments volumiques de la pierre, et des éléments joints sont donnés respectivement dans les tables 16.1 et 16.2.

Notation	Valeur	Description
ρ_s	1658 kg/m ³	masse volumique
v_s	2500	vitesse du son (hypothèse)
ν_s	0,27	coefficient de poisson (hypothèse)
$K_s = \rho_s v_s^2$	10,36 GPa	module d'élasticité isostatique
$E_s = 3K_s(1 - 2\nu_s)$	14,30 GPa	module d'élasticité

TABLE 16.1 – Caractéristiques de la pierre

Nous étudions la voûte plate d'Abeille (fig. 16.3), considérée précédemment pour l'étude de l'influence des joints. Sur la figure 16.3 à gauche, le modèle est composé des 81 blocs intérieurs en beige, et de 36 blocs rouges représentant les appuis. Les blocs d'appui ne font pas partie du modèle, ils servent uniquement à contrôler les déplacements des nœuds des joints d'appuis du côté des blocs d'appuis.

Le chargement est composé uniquement du poids propre de la pierre et des joints. Les calculs sont réalisés sous l'hypothèse des petits déplacements, de manière à obtenir des solutions d'équilibre sur la géométrie initiale.

La solution d'équilibre obtenue est présentée sur les figures 16.19, 16.20, 16.21 et 16.22. La convention de signe utilisée avec Cast3M est compression négative.

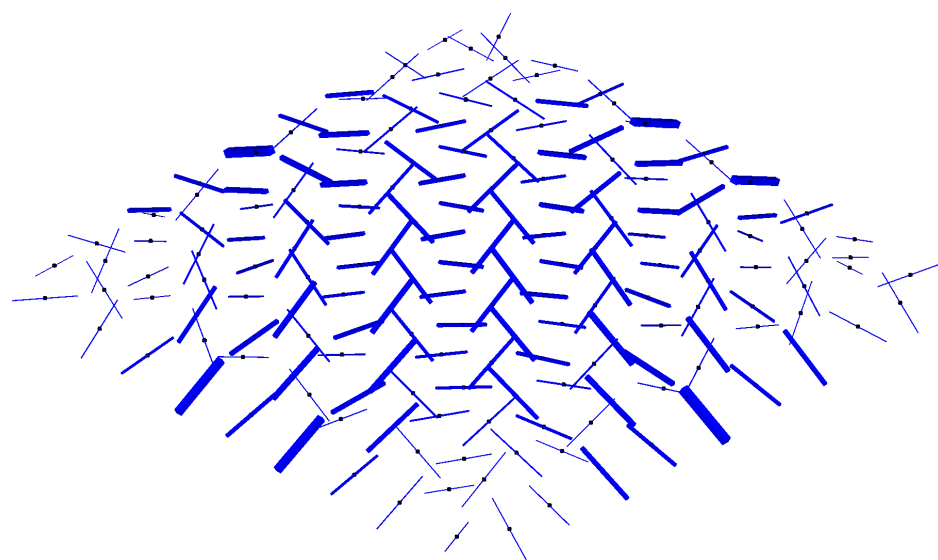
Chapitre 16. Étude des voûtes plates

Notation	Valeur	Description
c	$0,0 \text{ N/m}^2$	cohésion
$\varphi = \tan^{-1} \mu$	$35,0^\circ$	angle de frottement limite
ρ_m	2200 kg/m^3	masse volumique
E_m	$0,005 \text{ GPa}$	module d'élasticité
ν_m	$0,00$	coefficient de poisson (hyp.)
t	$5,0 \text{ mm}$	épaisseur
$K_{n,m}$	1000 MN/m^3	raideur normale (si $\varepsilon < \varepsilon_{cn,m}$)
$K_{s,m}$	500 MN/m^3	raideur de cisaillement
$\varepsilon_{cn,m}$	$0,05$	seuil de déformation
$E_{f,m}$	$2K_{n,m}$	seconde raideur normale (si $\varepsilon \geq \varepsilon_{cn,m}$)

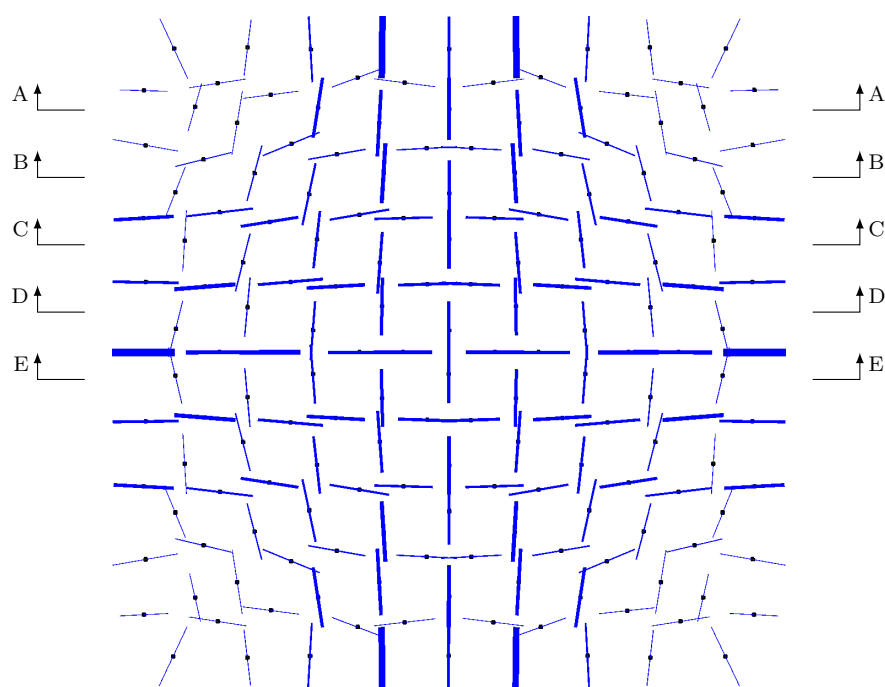
TABLE 16.2 – Caractéristiques des joints

Les figures 16.19 et 16.20 représentent les résultantes des forces sur les joints sous la forme de segments en bleu. L'épaisseur des segments est proportionnelle à la racine carrée de l'intensité des forces. Les longueurs des segments sont constantes et ne sont pas liées à l'intensité des forces. Les croix noires localisent le point d'application des forces sur les joints.

Comme dans le cas des plates-bandes à joints en X étudiées précédemment par la même méthode, les cinq forces qui s'appliquent à un bloc ne s'intersectent pas. Il n'est donc pas possible de transformer les solutions d'équilibre trouvées en réseaux de forces, ou en funiculaires. Cependant, la projection des forces sur le plan frontal (vue de face et coupes sur fig. 16.20) montre une similitude avec les réseaux de forces des chargements extrêmes.



Vue isométrique



Vue de dessus

Fig 16.19 – Directions et intensités des résultantes des forces, pour la solution d'équilibre Sol1 générée par Cast3M (1)

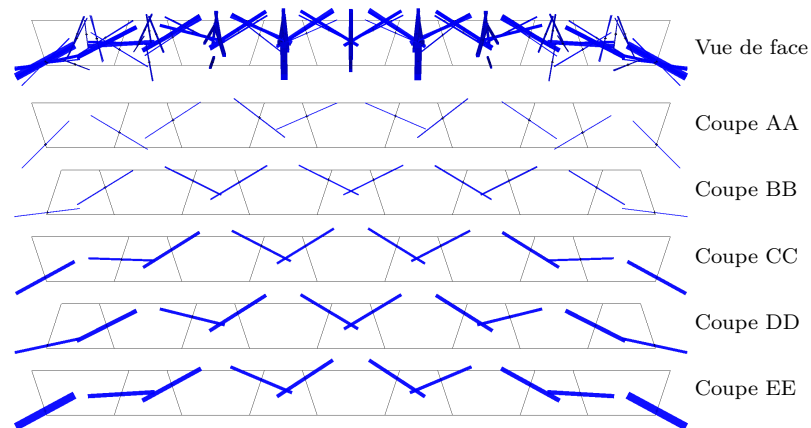


Fig 16.20 – Directions et intensités des résultantes des forces, pour la solution d'équilibre Sol1 générée par Cast3M (2)

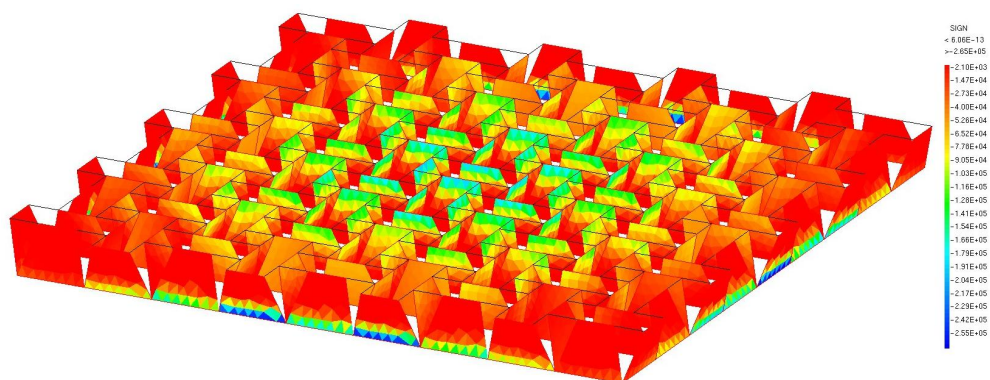


Fig 16.21 – Contraintes normales sur les joints $[N/m^2]$, pour la solution d'équilibre Sol1 générée par Cast3M

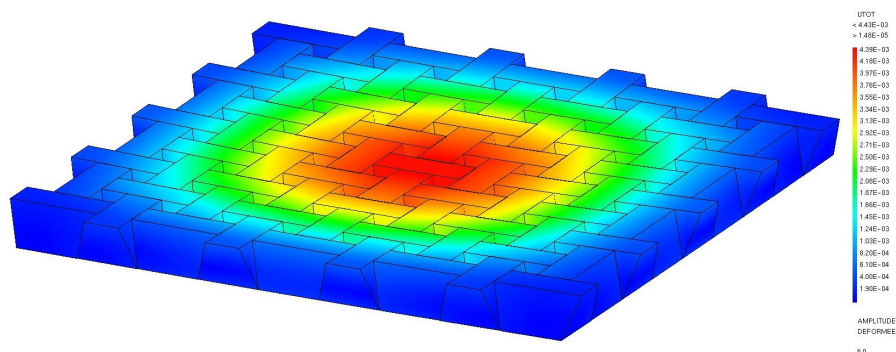


Fig 16.22 – Déplacements $[m]$, pour la solution d'équilibre Sol1 générée par Cast3M

Chapitre 17

Étude des voûtes hélicoïdales

Résumé : Ce chapitre présente la comparaison des résultats fournis par la méthode des réseaux de forces à ceux d'un modèle analytique des voûtes hélicoïdales. Cette comparaison vise à illustrer la conjugaison de la direction des réseaux, qui limite les solutions d'équilibre qui peuvent être produits avec la méthode des réseaux de forces.

Sommaire

17.1	Introduction	299
17.2	Étude par bandes indépendantes	299
17.3	Étude avec les réseaux de forces	300
17.3.1	Bande infinitésimale	300
17.3.2	Escalier complet	300

17.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre les voûtes hélicoïdales, utilisées pour la construction des escaliers hélicoïdaux avec jour, prenant appui de façon continue sur les murs de la cage d'escalier. Ce type de voûte a été étudié par [García Ares \(2007\)](#) indépendamment de la méthode des réseaux de forces, en considérant une découpe de l'escalier par bandes hélicoïdales infinitésimales indépendantes.

La comparaison des solutions qui peuvent être obtenues avec la méthode des réseaux de forces et celles présentées par [García Ares](#) permet d'illustrer la conjugaison de la direction des réseaux, vue dans la section 11.2.5.

Les escaliers hélicoïdaux font partie des exemples étudiés par [Block \(2009\)](#), puis par [Marmo et Rosati \(2017\)](#) dans leur article sur leur proposition d'extension de la méthode.

17.2 Étude par bandes indépendantes

[García Ares](#) a proposé une solution d'équilibre pour les escaliers hélicoïdaux en considérant une découpe de l'escalier par bandes hélicoïdales infinitésimales indépendantes ([García Ares, 2007](#) – fig. 17.1). Chaque bande est dans un premier temps développée, puis étudiée comme une plate-bande inclinée. [García Ares](#) donne la valeur analytique de la *poussée minimale* R_H de chaque plate-bande, en considérant que la résistance à la compression des joints est infinie.

$$R_H = \frac{1}{8} \rho \gamma^2 r^2 \Delta r \quad (17.1)$$

avec r le rayon de la bande hélicoïdale, Δr son épaisseur, γ son angle en plan, et ρ sa masse volumique.

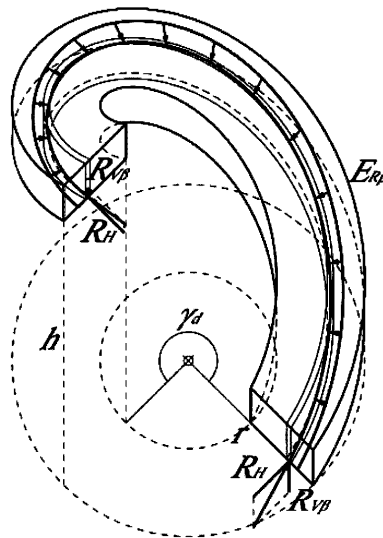


Fig 17.1 – Bande infinitésimale d'un escalier hélicoïdal, d'après [García Ares \(2007\)](#)

Comme les plates-bandes inclinées sont enroulées autour de l'axe de l'hélicoïde, des poussées dirigées radialement s'exercent également à travers les bandes adjacentes jusque dans les murs de la cage d'escalier. La solution d'équilibre exerce en outre des poussées sur les paliers horizontaux servant d'appui en pied et en tête de l'escalier.

García Ares considère l'application numérique suivante : $r_0 = 1,5$ m, $r_1 = 2,5$ m, $\gamma = \pi$, $\rho = 3333,3$ kg/m³, $h = 4$ m, et une épaisseur verticale de l'escalier de $t_z = 0,15$ m (figure 17.1). Pour la bande la plus longue, la poussée est $R_H(r = 2,5$ m) = 25,7 kg/mm. La poussée totale est :

$$\int R_H = \int_{r_0=1,5}^{r_1=2,5} \frac{1}{8} \rho \gamma^2 r^2 dr = 16792 \text{ kg} \quad (17.2)$$

García Ares (2011) propose également une autre solution d'équilibre pour le même problème dans un article plus récent, qui n'a pas été exploitée ici.

17.3 Étude avec les réseaux de forces

17.3.1 Bande infinitésimale

L'étude d'une bande infinitésimale prise isolément donne le même résultat avec la méthode des réseaux de forces qu'avec la méthode analytique de García Ares. Cet exemple a été étudié pour la bande la plus longue ($r = 2,5$ m, avec une épaisseur $r_1 - r_0 = 1$ mm – voir figure 17.2).

Le résultat trouvé avec la méthode des réseaux de forces est identique à celle de García Ares dans ce cas, parce qu'il ne se produit pas la conjugaison des directions du réseau que nous allons voir dans le cas de l'escalier complet.

17.3.2 Escalier complet

La méthode des réseaux de forces permet de considérer l'ensemble des bandes et l'interaction de ces différentes bandes entre-elles. Le modèle considéré est représenté sur la figure 17.3. Ce modèle inclut les transferts de charges verticales entre les différentes bandes. Ces transferts n'existent pas dans la solution analytique de García Ares.

Essai de reproduction de la solution des bandes infinitésimales En minimisant la fonction $f = \sum H_i$ on obtient la poussée minimale totale pour le modèle du réseau de forces (figures 17.4 et 17.5). Cette poussée minimale est légèrement inférieure à celle donnée avec la solution de García Ares (4% de différence). Le résultat final obtenu est proche, mais la répartition des poussées est, elle, très différente. Chez García Ares la poussée est proportionnelle à r^2 , et elle est d'autant plus grande que la bande considérée est proche du mur de la cage d'escalier. Avec le réseau de forces, la poussée dans les différentes branches est nulle sauf pour la bande la plus proche de l'axe de l'escalier. Dans cette solution, les charges au niveau de chaque marche sont portées sur le principe d'une plate-bande entre le limon de l'escalier et le mur de la cage d'escalier.

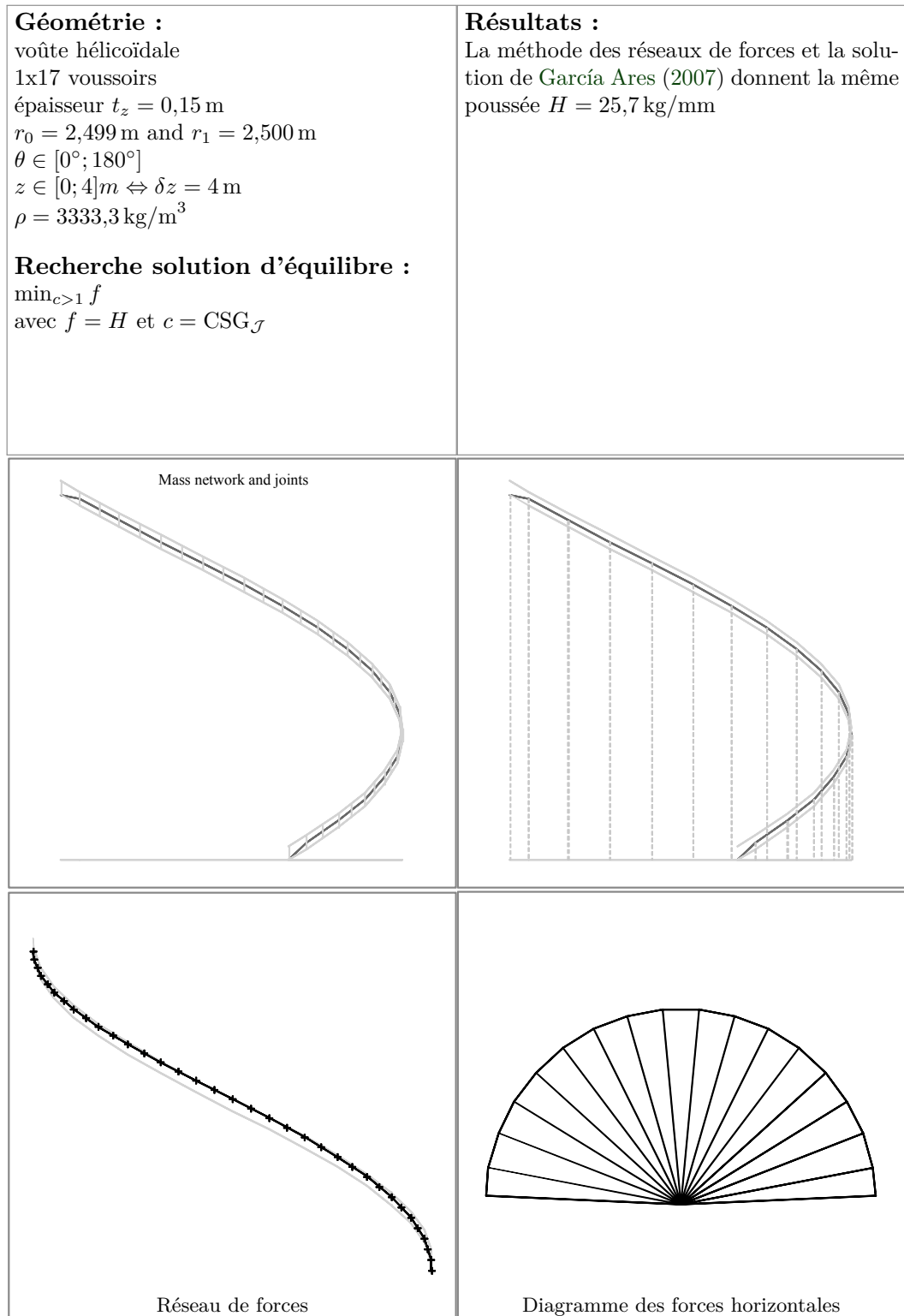


Fig 17.2 – Poussée minimale d'une bande infinitésimale d'une voûte hélicoïdale, comparaison entre réseaux de forces et méthode de [García Ares \(2007\)](#)

La différence entre la solution obtenue et la solution théorique agrégeant des bandes infinitésimales est due à plusieurs causes. Dans la solution basée sur la méthode des réseaux de forces :

- les bandes infinitésimales sont remplacées par des bandes finies de 25 cm de large ;
- les reports de charges verticales entre les blocs correspondant à une même marche ne sont pas négligés.

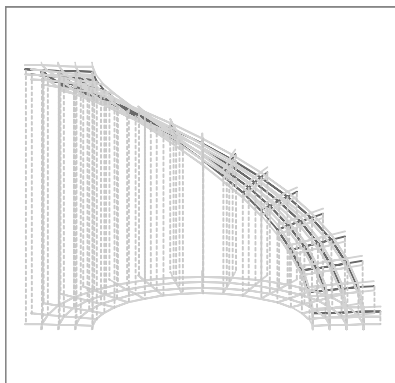


Fig 17.3 – Voûte hélicoïdale, pour comparaison avec [García Ares \(2007\)](#)

En remplaçant la fonction $f = \sum H_i$ par la fonction $f = \sum H_i^2$, la solution d'équilibre obtenue est moins éloignée de celle de García Arès. Chaque bande présente une poussée non nulle (fig. 17.4). Cependant ces poussées sont presque égales (moins de 5% d'écart entre la poussée la plus grande et la poussée la moins grande) et ne sont pas proportionnelles à r^2 comme dans la solution de García Arès.

Cette différence signifie que le report des charges verticales entre les blocs appartenant à une même marche reste important.

En conclusion à cette comparaison, la conjugaison de la direction des réseaux de forces a une influence importante sur les résultats qui sont atteignable en respectant la condition d'intersection des forces à chaque bloc. Il n'est pas possible de reproduire avec des réseaux de forces les solutions d'équilibre où les bandes sont indépendantes, à moins de créer un réseau pour chacune de ces bandes, disjoint des autres réseaux des autres bandes.

Par ailleurs, les réseaux de forces permettraient également d'étudier des géométries moins régulières que la voûte hélicoïdale, comme par exemples les escaliers à jour sur plan ellipsoïdal. Ce travail ne poserait pas de difficulté théorique particulière, mais il n'a pas été réalisé.

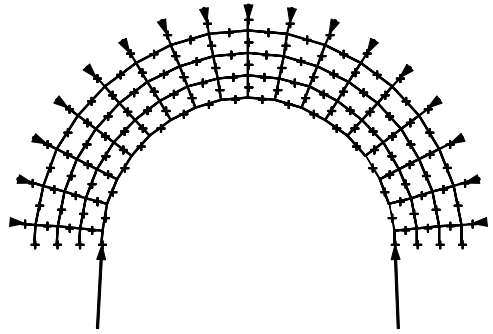
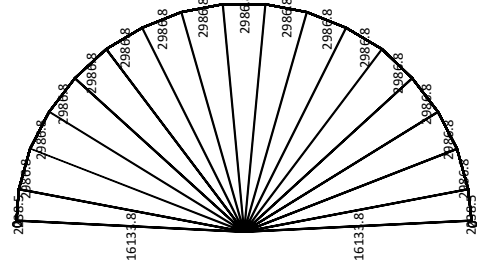
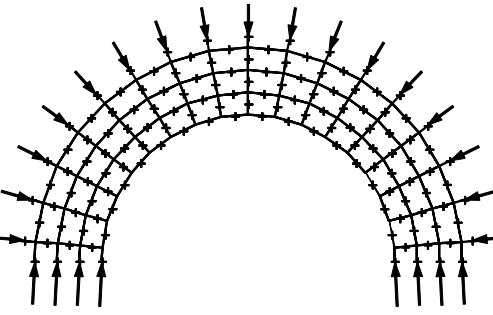
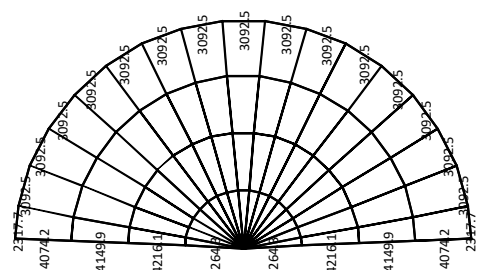
<p>Géométrie : voûte hélicoïdale 4x17 voussoirs épaisseur $t_z = 0,15$ m $\theta \in [0^\circ; 180^\circ]$ $z \in [0; 4]m \Leftrightarrow \delta z = 4$ m $\rho = 3333,3 \text{ kg/m}^3$</p> <p>Recherche solution d'équilibre : $\min_{c>1} f$ Deux cas étudiés : $f = \sum H_i$ et $c = \text{CSG}_{\mathcal{J}}$ $f = \sum H_i^2$ et $c = \text{CSG}_{\mathcal{J}}$</p>	<p>Résultats : Soit H_i la poussée de la $i^{\text{ème}}$ bande. La bande 1 est la plus proche de l'axe de l'hélicoïde.</p> <p>Pour $f = \sum H_i$: une seule des bandes a une poussée non nulle $\sum H_i = H_1 = 16134$ kg</p> <p>Pour $f = \sum H_i^2$: $H_1 = 4264$ kg, $H_2 = 4216$ kg, $H_3 = 4150$ kg, $H_4 = 4074$ kg, $\sum H_i = 16705$ kg</p> <p>Avec la solution de García Ares (2007) : $\sum H_i = 16792$ kg</p>
 <p>Réseau projeté et forces d'appuis ($f = \sum H_i$)</p>	 <p>Diagramme des forces ($f = \sum H_i$)</p>
 <p>Réseau projeté et forces d'appuis ($f = \sum H_i^2$)</p>	 <p>Diagramme des forces ($f = \sum H_i^2$)</p>

Fig 17.4 – Poussées minimales d'une voûte hélicoïdale, pour comparaison avec [García Ares \(2007\)](#)

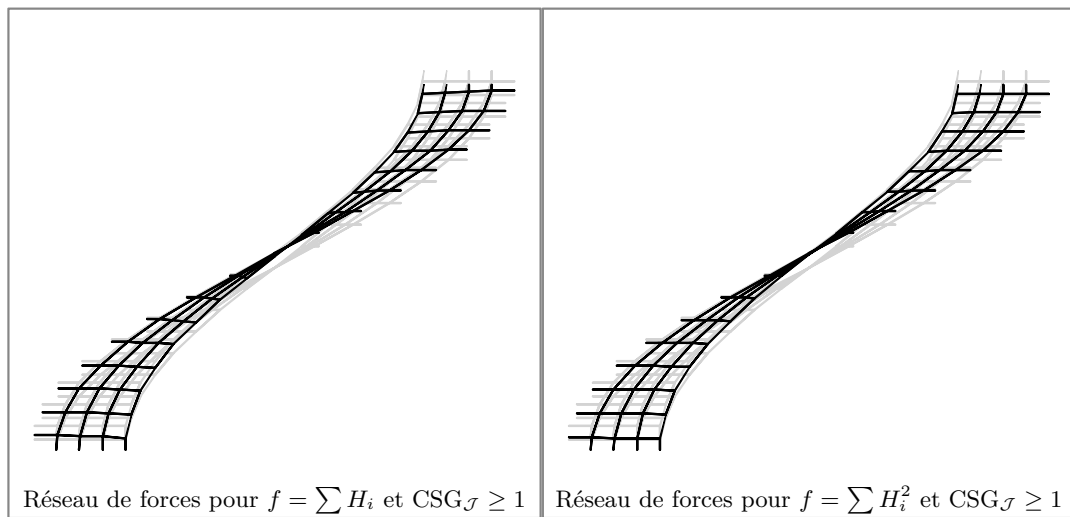


Fig 17.5 – Réseaux de forces d’une voûte hélicoïdale

Conclusion et perspectives

L'étude historique et typologique des plates-bandes et des voûtes plates a permis d'ébaucher les grandes lignes de l'évolution de la coupe des pierres de ces structures, et a guidé le choix des paramètres de l'appareil des constructions clavées étudiées lors de l'étude de la résistance des voûtes. L'importante utilisation des plates-bandes en fausse-coupe dans l'architecture française à partir du XVII^e siècle a été mise en lumière. Les deux exemples antérieurs, à Prato (Italie) et Damas (Syrie), et l'existence des plates-bandes à joints en X au Moyen Âge sans exemple équivalent connu en France laissent supposer qu'il existe un maillon manquant pour expliquer l'apparition de cette technique en France au XVII^e siècle. À partir des informations recueillies, nous avons cependant formulé l'hypothèse que Jacques Lemercier, premier architecte français à avoir utilisé de façon récurrente la technique, ait pu observer cette technique à Prato lors de son voyage en Italie, avant de l'appliquer à son retour en France.

Notre étude historique est cependant basée sur un corpus d'exemples en nombre limité. L'étape suivante de cette étude historique serait donc de recentrer les recherches sur des régions ou périodes plus restreintes, pour préciser les observations et valider les hypothèses avancées dans cette thèse. À titre d'exemple, l'étude de l'évolution de l'inclinaison des joints des plates-bandes des châteaux du domaine royal du XV^e au XVII^e siècle permettrait peut-être de démontrer que la règle du triangle équilatéral s'impose à cette époque, et permettrait aussi d'étudier une éventuelle influence italienne sur la diffusion de cette règle. Autre exemple possible, l'étude de l'évolution de l'inclinaison des joints des plates-bandes des hôtels particuliers parisiens du XVII^e et XVIII^e permettrait peut-être de démontrer que la règle du « 1 pour 3 » est effectivement utilisée en pratique par les appareilleurs et tailleurs de pierre à cette époque, bien que la règle du triangle équilatéral soit très majoritairement citée par les traités de coupe des pierres et d'architecture.

L'extension de la méthode des réseaux de forces permet d'exploiter les solutions d'équilibre ainsi produites dans le cadre du calcul à la rupture, en prenant en considération la géométrie des joints. Ce point essentiel pour l'application rigoureuse des théorèmes du calcul à la rupture n'était pas pris en considération dans les formulations antérieures des réseaux de forces (O'Dwyer, 1999 ; Block et Ochsendorf, 2007 ; Block, 2009 ; Marmo et Rosati, 2017). En outre, il devient alors possible d'exploiter la méthode pour étudier l'influence de la coupe des pierres sur la résistance des voûtes clavées. La comparaison de la résistance des constructions a été basée sur celle des domaines des chargements potentiellement supportables.

Cependant, l'étude historique des traités montre qu'un des sujets de préoccupation des constructeurs, architectes et tailleurs de pierre, était la rupture des angles

aigus des claveaux des plates-bandes. La prise en compte de ces phénomènes nécessite de considérer, outre la résistance au niveau des joints, la résistance interne de la pierre. Cependant cela nécessite de construire des solutions d'équilibre beaucoup plus détaillées que celles habituellement utilisées pour le calcul à la rupture des constructions clavées, avec notamment la construction de champs de contrainte intérieurs aux claveaux. La méthode des réseaux de forces ne semble pas adaptée pour la prise en considération de la résistance interne des pierres. De plus, il semble difficile d'aller au delà du raffinement proposé pour contourner la condition d'intersection des forces en un point, qui est une condition fondamentale pour la faisabilité de la méthode des réseaux de forces, comme pour celle de la méthode des densités de forces. Le raffinement que nous proposons consiste d'ailleurs à superposer deux réseaux qui respectent chacun la condition d'intersection des forces en un point, pour produire un nouveau réseau qui ne respecte pas cette condition.

Les travaux récents sur l'application du calcul à la rupture combiné avec les solveurs coniques, qui permettent de prendre en compte un nombre très important d'inconnues (Bleyer, 2015), semble être une piste prometteuse pour produire de nouvelles solutions d'équilibre non explorées avec les réseaux de forces, comme l'équilibre des claveaux avec des systèmes de forces ne passant pas par un même point. Ces techniques permettraient également de prendre en considération la résistance de la pierre à l'intérieur des claveaux.

L'implémentation proposée de l'extension de la méthode des réseaux de forces a été réalisée sur un tableur de calcul, et peut donc être utilisée sur n'importe quel ordinateur, sans autre licence que les licences habituelles de bureautique pour Windows (Microsoft Excel). La première version du logiciel de 2014 est disponible à l'adresse <http://combiencaporte.blogspot.fr/p/masonry-network-analysis-for.html>. La nouvelle version du logiciel développée dans le cadre de cette thèse sera disponible à cette adresse : <http://bestrema.fr/manacoh/>. Le calcul de structures plus importantes (au delà de 100 à 200 blocs) nécessitera cependant d'implémenter l'extension de la méthode des réseaux de forces sur un logiciel de calcul numérique.

L'étude mécanique des plates-bandes et des voûtes plates a permis d'étudier l'influence de la coupe des pierres sur la résistance de ces structures. Les domaines des chargements potentiellement supportables ont été déterminés par approche par l'intérieur, et il est donc peut-être possible de trouver des domaines encore plus importants, si la résistance interne des pierres est négligée. Cependant, il faut souligner pour conclure que les domaines qui prendraient en compte la résistance interne des pierres doivent être plus petits.