

Quatrième partie

Étude mécanique des constructions clavées

Chapitre 14

Étude des arcs et dômes

Résumé : Ce chapitre présente deux applications de l'extension de la méthode des réseaux de forces aux arcs et voûtes courbes. La première est l'étude des épaisseurs minimales des arcs plein-cintre et des dômes hémisphériques, et à travers ces exemples l'étude de la convergence de l'estimatif du coefficient de sécurité géométrique vers la valeur du coefficient théorique défini par Heyman (1969). La seconde est l'exploitation des réseaux de forces pour l'étude des procédés historiques de calcul des voûtes, à travers les exemples de Rankine et Durand-Claye au XIX^e siècle.

Sommaire

14.1	Épaisseurs minimales	239
14.1.1	Coefficient de sécurité géométrique	239
14.1.2	Épaisseur minimale d'un arc plein-cintre	239
14.1.3	Épaisseur minimale d'un dôme hémisphérique	241
14.2	Étude des procédés historiques de calcul des voûtes	245

14.1 Épaisseurs minimales

14.1.1 Coefficient de sécurité géométrique

Nous rappelons ici brièvement les points principaux vus lors de la présentation du coefficient de sécurité géométrique dans la section 3.3.2 p. 47.

Heyman définit le coefficient de sécurité géométrique d'un arc comme le rapport entre l'épaisseur de l'arc considéré et l'épaisseur minimale pour laquelle l'arc est stable (Heyman, 1969, 1995, p. 21). La détermination de la valeur de ce coefficient de sécurité nécessite de déterminer l'épaisseur minimale de la structure pour pouvoir ensuite la relier à l'épaisseur réelle de la structure. Nous notons ce coefficient de sécurité γ_H dans la suite.

Nous avons proposé la définition d'un estimatif du coefficient de sécurité géométrique d'une structure, noté $\overline{\text{CSG}}_{\mathcal{J}}$, dans la section 3.3.2 p. 47. Cet estimatif est défini en suivant la même procédure de calcul que celle des multiplicateurs de charge du calcul à la rupture. Nous noterons ce coefficient de sécurité γ dans cette section, en remplacement de $\overline{\text{CSG}}_{\mathcal{J}}$, pour simplifier les notations.

Tandis que γ_H est obtenu par la division de l'épaisseur réelle d'une structure par son épaisseur minimale (division de deux nombres), γ est le résultat de l'optimisation mathématique d'une fonction.

Nous postulons que le coefficient de sécurité géométrique γ a les propriétés suivantes pour un arc d'épaisseur constante t et de rayon moyen r :

- il est une bonne approximation du coefficient de sécurité géométrique γ_H défini par Heyman ;
- il donne une bonne estimation de l'épaisseur minimale $(t/r)_{\min}$ en prenant $(t/r)/\gamma$;
- il converge vers 1 quand l'épaisseur t converge vers l'épaisseur minimale t_{\min} ;
- si le coefficient de sécurité géométrique local prend la même valeur sur k joints, alors ces k joints correspondent aux rotules attendues dans le mécanisme de ruine attendu pour l'arc d'épaisseur minimale.

Ces propriétés n'ont pas été démontrées. Leur validité est testée dans cette section sur l'exemple des arcs en plein-cintre et des dômes hémisphériques, chargés uniquement par leur poids propre.

14.1.2 Épaisseur minimale d'un arc plein-cintre

Le problème de l'épaisseur minimale d'un arc en plein-cintre portant seulement son poids propre a été posé par Couplet (1730). La première résolution exacte du problème dans le cas où les joints de l'arc suivent une coupe radiale, a été exposée par Milankovitch ⁽¹⁾ en 1904. Milankovitch étudie l'équilibre de l'arc en résolvant de façon analytique les équations d'équilibre. Plusieurs auteurs ont cherché ultérieurement à retrouver cette épaisseur minimale par d'autres méthodes : Heyman (1969, 2009), Ochsendorf (2002), Oikonomopoulou (2009), Makris et Alexakis (2013).

(1). Nous n'avons pas consulté la thèse de Milankovitch de 1904, mais la synthèse de cette dernière publiée par Foce en 2007.

L'épaisseur minimale d'un arc plein-cintre dépend de sa coupe des pierres (Heyman, 2009). Nous nous intéressons ici au cas où les joints suivent une coupe radiale, suivant le *principe de normalité* présenté dans notre exposé sur la coupe des pierres (section 5.4 p. 80). Makris et Alexakis (2013) considèrent également le cas de la coupe verticale des joints, qui conduit à des résultats différents.

Nous notons t l'épaisseur d'un arc et r son rayon moyen. L'épaisseur minimale d'un arc en plein-cintre soumis à son seul poids propre et dont les joints suivent une coupe radiale vaut $(t/r)_{min} = 0,1075$ (Milankovitch, 1904) ; Makris et Alexakis (2013) précisent cette valeur $((t/r)_{min} = 0,10748)$, et indiquent que les joints critiques⁽²⁾ sont définis par les angles au sommet $\varphi_c = 0^\circ$, $54,484^\circ$ et 90° .

L'épaisseur minimale donnée par les auteurs cités précédemment correspondent à deux modèles équivalents :

- un arc monolithe constitué d'un matériau infiniment résistant à la compression, et avec une résistance nulle à la traction, où les résultantes des efforts sont évalués sur des sections radiales ;
- un arc clavé avec des joints rayonnants découpant l'arc en des voussoirs infinitésimaux, c'est-à-dire un arc clavé avec une infinité de joints ; ces joints ont une résistance infinie à la compression et nulle à la traction.

Nous appellerons « arc infinitésimal » ce type d'arc pour le distinguer des arcs composés d'un nombre fini de voussoirs, qui constituent le cœur de notre étude.

L'étude de l'épaisseur minimale d'un arc composé de 30 voussoirs à l'aide des réseaux de forces avec considération des joints est donnée sur la figure 14.1. Cette figure illustre deux phénomènes.

Premièrement, pour des arcs à 30 voussoirs, l'estimatif de l'épaisseur minimale $t/r/\gamma$ correspond à une erreur relative de moins de 1%, que l'arc considéré soit moitié plus fin ou quatre fois plus épais que l'arc d'épaisseur minimale théorique. L'estimatif de l'épaisseur minimale $t/r/\gamma$ a donc une bonne précision, relativement aux incertitudes habituelles existant sur la géométrie réelle des arcs en pierre de taille.

Deuxièmement, l'épaisseur minimale trouvée pour l'arc composé de 30 voussoirs vaut $(t/r)_{min} = 0,10746$, à comparer avec l'épaisseur minimale attendue pour un « arc infinitésimal » dont l'épaisseur minimale vaut $(t/r)_{min} = 0,10748$. L'écart entre ces deux valeurs correspondant à des arcs différents (du point de vue du nombre de voussoirs) est faible (0,02%).

Pour retrouver l'épaisseur minimale de l'« arc infinitésimal », il faut considérer ou bien un arc constitué d'un très grand nombre de voussoirs, ou bien un arc où des joints sont présents à l'emplacement de chaque joint critique attendu : aux naissances ($\varphi_c = 90^\circ$), à la clé ($\varphi_c = 0^\circ$), et sur un joint situé entre les deux précédents à ($\varphi_c = 54,484^\circ$).

Les arcs semi-circulaires composés de 10, 20, 30, 40 et 60 voussoirs ont tous comme joint le plus proche du joint critique théorique $\varphi_c = 54,484^\circ$ le joint situé à $\varphi = 54^\circ$. Tous ces arcs donnent la même approximation de l'épaisseur minimale, soit $(t/r)_{min} = 0,10746$. L'arc semi-circulaire composé de 56 claveaux représente un découpage plus grossier que l'arc à 60 voussoirs. Cependant le joint le plus proche du joint critique théorique se trouve à $\varphi = 54,643^\circ$ au lieu de $\varphi = 54^\circ$, et est donc

(2). Nous appelons joints critiques les joints où la ligne de pression touche l'intrados ou l'extrados.

plus proche de $\varphi_c = 54,484^\circ$. L'épaisseur minimale pour un arc de 56 voussoirs vaut 0,10748, soit exactement l'épaisseur attendue pour un « arc infinitésimal ».

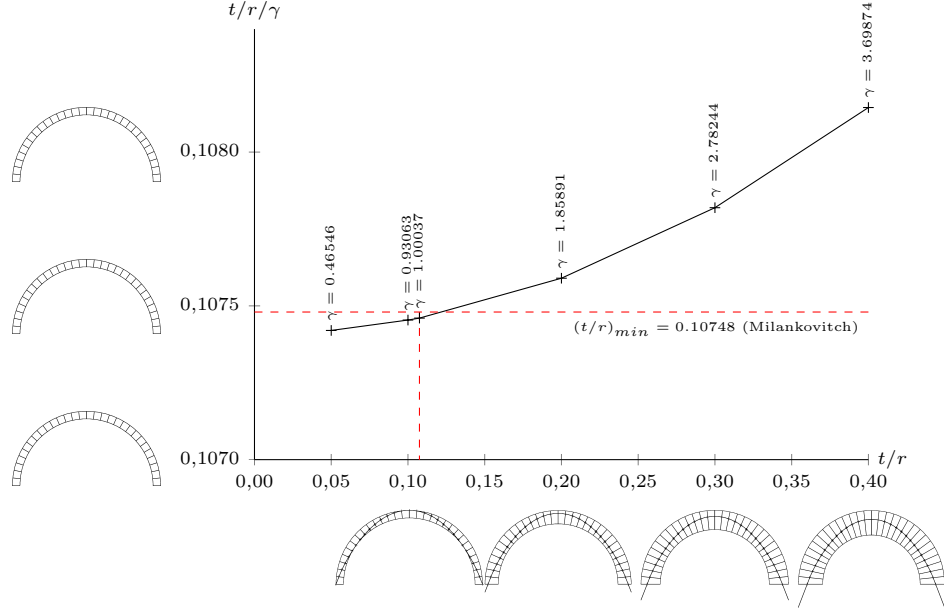


Fig 14.1 – Convergence de l'approximation de l'épaisseur minimale d'un arc de 30 voussoirs vers l'épaisseur minimale théorique

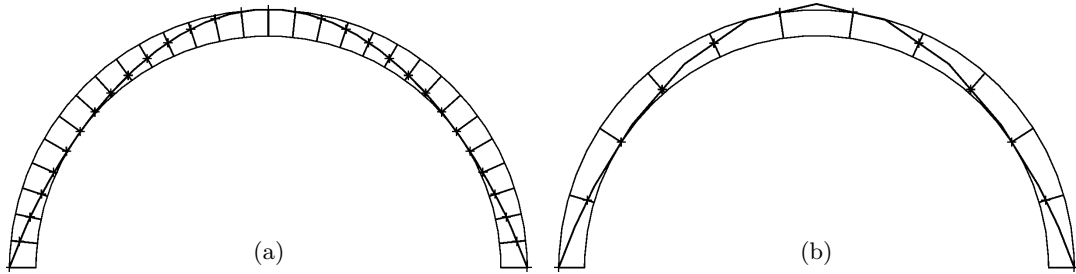


Fig 14.2 – Lignes de pression d'un arc de 30 voussoirs d'épaisseur minimale $t/r = 0,10746$ (a), et d'un arc de 11 voussoirs d'épaisseur minimale $t/r = 0,10493$ (b)

Pour conclure, notons que l'épaisseur minimale d'un arc en pierre de taille sera supérieure à celles des modèles à « arc infinitésimal » mentionné ci-dessus pour des raisons de coupe des pierres : présence d'une clé (nombre impair de voussoirs), et nombre fini et limité de voussoirs (fig. 14.2).

14.1.3 Épaisseur minimale d'un dôme hémisphérique

Nous notons t l'épaisseur d'un dôme hémisphérique et r son rayon moyen.

L'épaisseur minimale d'un dôme hémisphérique a été étudiée par Heyman (1967a), Lau (2006), Zessin (2012) et Coccia et al. (2016), avec des méthodes différentes, et des résultats proches mais non identiques.

Heyman considère un dôme avec des forces d'anneaux. Il indique que l'épaisseur minimale d'un dôme hémisphérique vaut $(t/r)_{min} = 0,0420$, et que l'épaisseur se réduit progressivement jusqu'à atteindre zéro lorsque l'angle d'ouverture α du dôme est inférieur à $\varphi_c = 51,8^\circ$. L'évolution de l'épaisseur minimale en fonction de l'angle d'ouverture α , suivant Heyman (1967a) et Lau (2006) avec des forces d'anneaux, et suivant Zessin (2012) sans forces d'anneaux est donnée sur la figure 14.3.

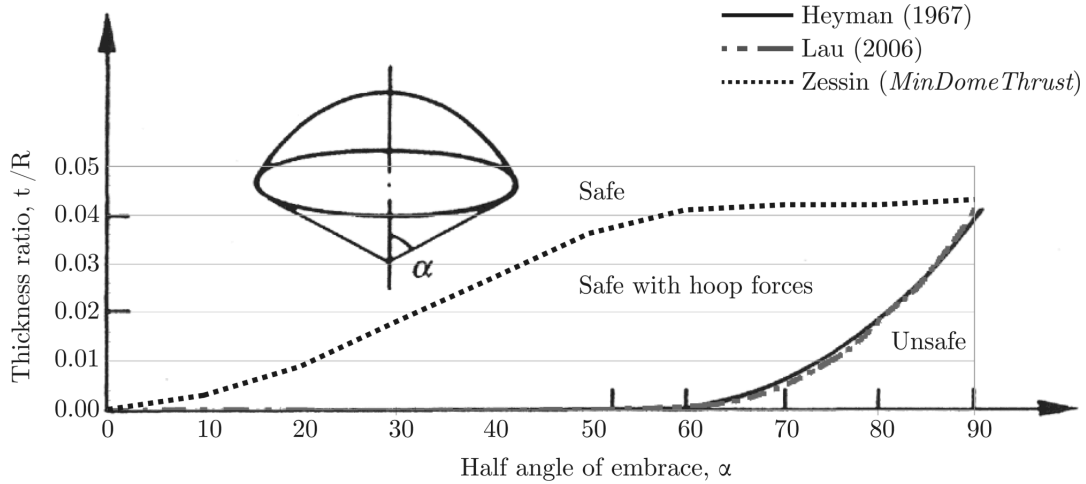


Fig 14.3 – Épaisseur minimale d'un dôme sphérique en fonction de son angle d'ouverture, d'après Zessin (2012, p. 53)

Pour le cas du dôme hémisphérique complet ($\alpha = 90^\circ$), qui sera le seul cas étudié dans la suite, les épaisseurs minimales valent :

- $(t/r)_{min} = 0,0420$ (Heyman, 1967a)
- $(t/r)_{min} = 0,041$ (Lau, 2006)
- $(t/r)_{min} = 0,043$ (Zessin, 2012)
- $(t/r)_{min} = 0,0452$ (Coccia et al., 2016)

Coccia et al. (2016) donnent une épaisseur minimale de $(t/r)_{min} = 0,0452$, qui ne peut cependant pas être directement comparée aux épaisseurs précédentes. En effet, ils recherchent l'épaisseur minimale pour pouvoir dessiner la caténaire d'un dôme à l'intérieur de ce dôme. Cette recherche n'est pas identique à celle de l'épaisseur minimale du dôme stable. En effet dans le premier cas la position des charges appliquées se trouvent au centre de gravité des voussoirs infinitésimaux, alors que dans le second cas, la position des charges appliquée se trouvent au niveau de la caténaire. Le résultat proposé par Coccia et al. n'est donc pas une réévaluation du résultat de Heyman, mais la recherche d'une épaisseur minimale répondant à un problème différent. La distinction entre épaisseur minimale pour dessiner la caténaire et l'épaisseur minimale pour assurer la stabilité d'un arc est soulignée par Makris et Alexakis (2013) dans le cas de l'arc en plein-cintre. Cette différence trouve une illustration dans les points de passage de la ligne de pression trouvée par Heyman, Lau et Zessin, et par la « surface de pression » (la caténaire d'un dôme) trouvée par Coccia et al. Tandis que les lignes de pression de Heyman, Lau et Zessin ne touchent pas l'intrados ni l'extrados à la clé, la « surface de pression » de Coccia et al. touche l'intrados à la clé (comparer figures 14.4 et 14.5). Ce résultat ne sera donc pas considéré pour la comparaison dans

la suite.

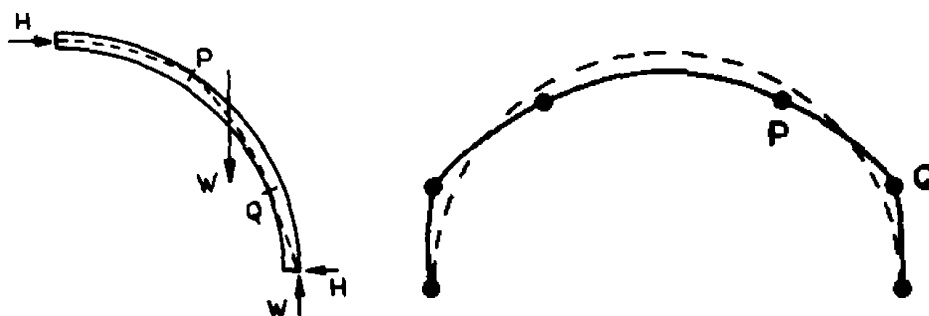


Fig 14.4 – Équilibre d’une lune d’un dôme hémisphérique d’épaisseur minimale (à g.), et mécanisme de ruine correspondant pour le dôme (à d.), d’après Heyman (1967a)

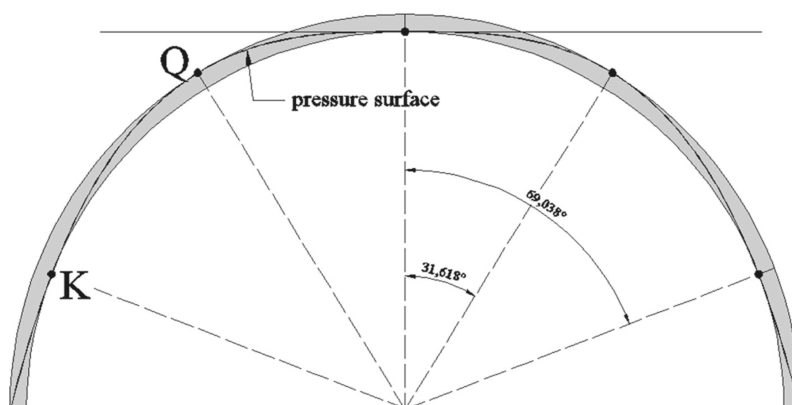


Fig 14.5 – « surface de pression » (caténaire) touchant le dôme le plus petit la contenant, d’après Coccia et al. (2016)

Selon un principe présenté par Poleni, et repris par Heyman (1967a), le dôme étudié est découpé en secteurs angulaires (fig. 14.6 au centre), que nous appellerons *lunes* dans la suite. L’étude de la stabilité du dôme est ramenée à celle de ses lunes.

Nous étudions l’épaisseur minimale de deux lunes opposées composées d’un total de 30 voussoirs (15 voussoirs par lune). L’ouverture angulaire dans le plan horizontal d’une lune vaut $\delta\theta = 1^\circ$ (lune d’ouverture angulaire 10 fois plus faible que celles représentées sur la figure 14.6). Nous ne considérons pas de forces d’anneaux.

L’étude de l’épaisseur minimale de ces lunes à l’aide des réseaux de forces avec considération des joints est donnée sur la figure 14.7. L’estimatif de l’épaisseur minimale trouvée pour ces lunes à 15 voussoirs vaut $t/r/\gamma = 0,0428$, et est donc supérieur à la valeur donnée par Heyman (qui utilise des forces d’anneaux) et inférieur à celle Zessin (qui n’utilise pas de forces d’anneaux). La considération d’un découpage avec un plus grand nombre de voussoirs tendra à faire augmenter la valeur $t/r/\gamma = 0,0428$, et donc à s’écarter potentiellement ⁽³⁾ encore un peu plus de la valeur de Heyman de

(3). Pour les tests réalisés avec 30, 31, 33, 35, 45, 46, 47, 59, 60, 61, 70, 79, 92, 93, 105 et 111 voussoirs

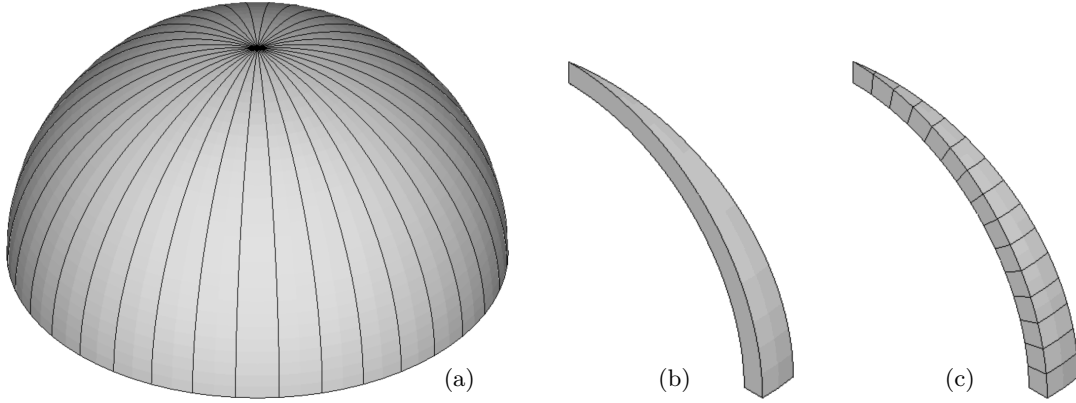


Fig 14.6 – Découpage d'un dôme hémisphérique en lunes de 10° d'ouverture (a), lune isolée (b), et découpage d'une lune en 15 voussoirs (c)

$(t/r)_{min} = 0,0420$. Le calcul avec les mêmes paramètres géométriques et une ouverture angulaire très faible ($\delta\theta = 0,01^\circ$) donne le même résultat $t/r/\gamma = 0,0428$.

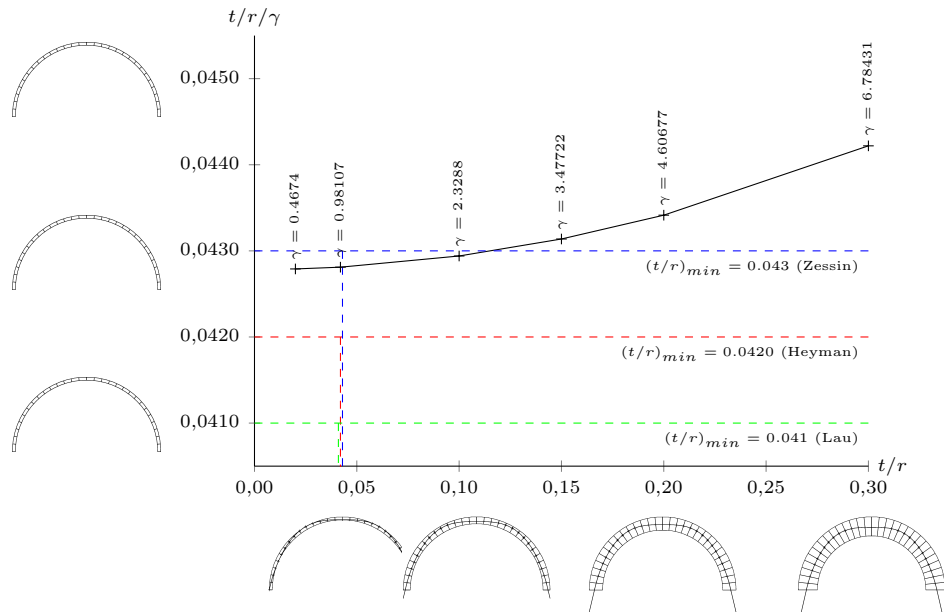


Fig 14.7 – Convergence de l'approximation de l'épaisseur minimale d'une lune de 15 voussoirs

La recherche des épaisseurs minimales en tenant compte des forces d'anneaux pose des difficultés pour les processus d'optimisation utilisés pour la recherche du coefficient de sécurité maximal (non convergence), et nous n'avons pas réussi à trouver de résultats plus proches de la valeur de Heyman en considérant des forces d'anneaux.

par lune, la valeur $t/R/\gamma$ est comprise entre 0,04275 et 0,04284. Nota : la variation de $t/R/\gamma$ n'est pas une fonction monotone du nombre de voussoirs, puisqu'elle dépend de la proximité des joints les plus proches des joints critiques.

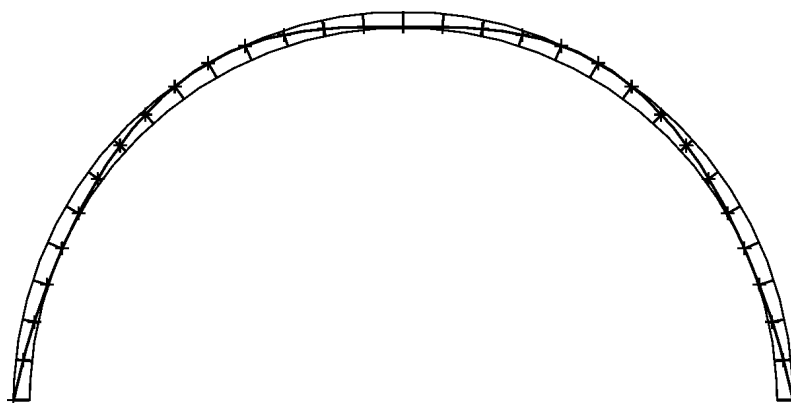


Fig 14.8 – Ligne de pression d’une lune d’épaisseur minimale $t/r = 0,428$

14.2 Étude des procédés historiques de calcul des voûtes

L’extension de la méthode des réseaux de forces permet d’étudier les procédés historiques de calcul des voûtes. En effet, chaque procédé historique met en jeu d’une part un ensemble d’hypothèses (considérer une limite de résistance en compression pour les joints ou non, considérer des joints sans frottement ou non, utiliser la position exacte ou approchée des centres de gravité etc.) et d’autre part une technique de calcul pour obtenir les résultats (statique graphique et autres techniques basées sur le dessin, calculs analytiques, calculs numériques, etc.).

Le développement d’outils numériques qui peuvent reproduire chaque technique de calcul de chaque procédé historique est possible, mais demande une implémentation spécifique pour chacun d’entre eux. Ce problème peut être contourné avec l’extension de la méthode des réseaux de forces proposée dans cette thèse.

En pratique, les hypothèses à la base des procédés historiques (*p. ex.* joints sans frottement etc.) sont transformées en une fonction de coût et en des critères mathématiques utilisant des coefficients de sécurité locaux et globaux suivant la même méthodologie que celle présentée dans le cadre du calcul à la rupture (voir section 3.1.2 p. 42). La solution d’équilibre qui serait donnée par la technique de calcul historique est calculée sans utiliser cette technique de calcul, mais en calculant la solution correspondant à cette fonction de coût et ces critères mathématiques. Cela est possible car la plupart des méthodes historiques ont leurs hypothèses formulées au niveau des joints.

En utilisant ce procédé, nous avons ainsi étudié la méthode de Durand-Claye, qui combine des aspects analytiques et graphiques, et nous avons reproduit les résultats de son étude de la stabilité du projet de dôme de Bramante pour la basilique Saint-Pierre de Rome (Ciblac et Fantin, 2015, figures 14.9 et 14.10).

Nous avons également étudié le théorème des transformations affine de Rankine (Ciblac et Fantin, 2016). Rankine a démontré un théorème permettant de produire de nouvelles solutions d’équilibre pour des structures dissymétriques, à partir de solutions connues pour des cas symétriques (Rankine, 1858 ; Huerta Fernández, 2010). Ce théorème, appelé par Huerta « Rankine’s theorem of blockwork structures », exploite la conservation de certaines propriétés géométriques dans les transformations affines.

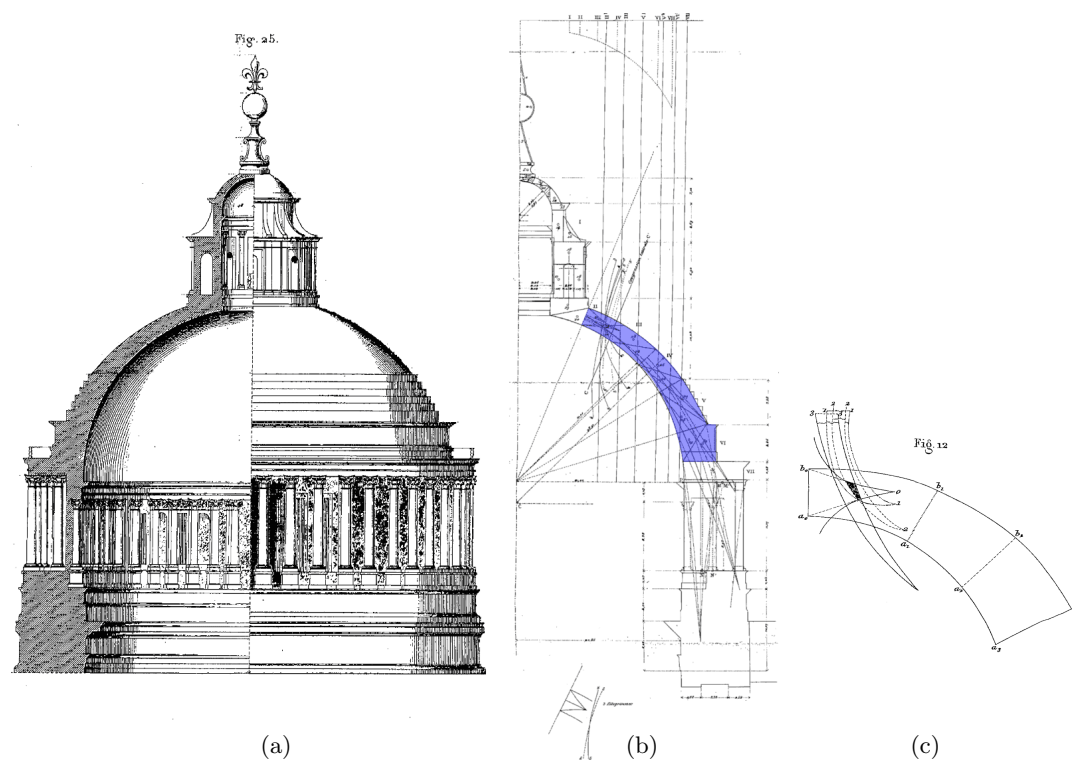


Fig 14.9 – Projet de dôme pour Saint-Pierre de Rome par Bramante (a), découpage en blocs pour étude dôme (b), schéma de principe des « aires de stabilité » (c), d'après Durand-Claye (1880)

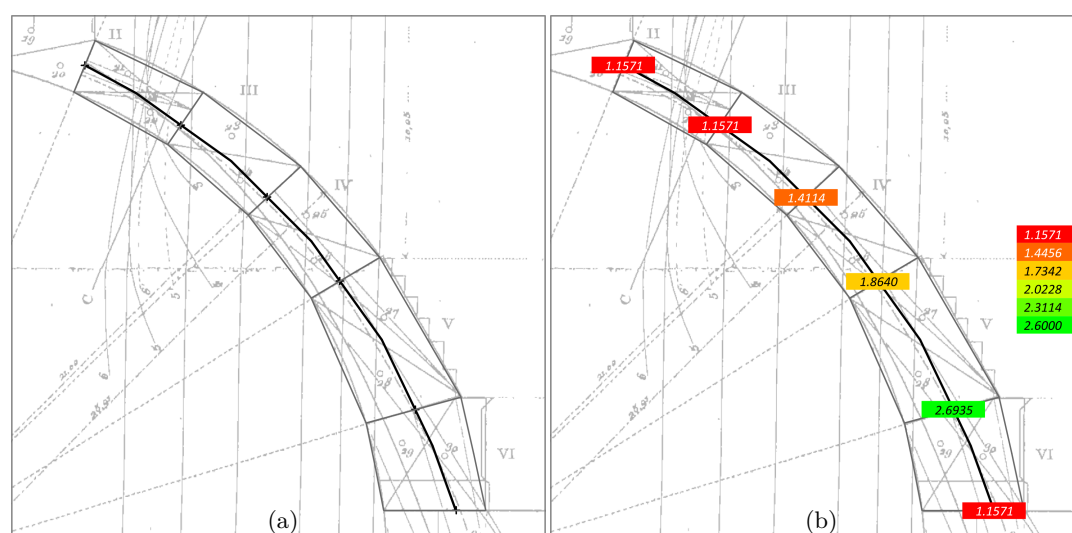


Fig 14.10 – Superposition du polygone funiculaire (a), et des coefficients de sécurité statiques (b), sur le dessin d'après Durand-Claye (1880)

Nous considérons une transformation affine de facteur 2 relativement au plan Oyz , qui transforme un dôme hémisphérique d'épaisseur constante en un dôme elliptique d'épaisseur variable. L'application du théorème des transformations affine de Rankine a pour corollaire que le coefficient de sécurité géométrique des deux structures est identique. En utilisant les propriétés de symétrie, seul un quart du dôme est modélisé. Le dôme hémisphérique et sa transformation affine sont représentés sur la figure 14.11. Sur cette figure, les blocs beiges représentent le découpage en blocs du quart de dôme, et les blocs rouges représentent les blocs d'appuis. Les forces d'anneaux ne sont pas considérées dans la suite. Chaque dôme est divisé en 9 lunes⁽⁴⁾ de 10° d'ouverture dans le plan horizontal.

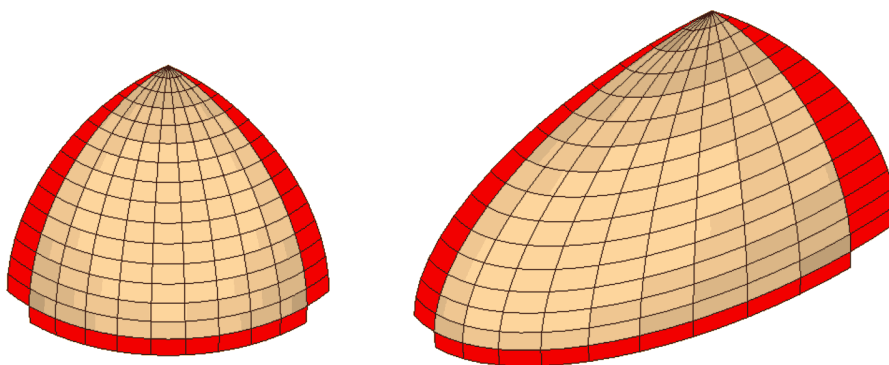


Fig 14.11 – Dôme hémisphérique (à g.) et dôme elliptique (à d.)

Nous avons calculé le coefficient de sécurité géométrique avant et après la transformation affine de manière à illustrer le théorème de Rankine, en utilisant la méthode des réseaux de forces (fig. 14.11). Le coefficient géométrique de sécurité vaut 2,3353 pour toutes les lunes, à la fois pour le dôme hémisphérique, et pour le dôme elliptique obtenu par transformation affine (fig. 14.12).

Ce résultat est bien celui attendu selon le théorème de Rankine. Cette comparaison permet de valider la qualité du résultat obtenu avec la méthode des réseaux de forces, en l'appliquant à un cas extrême, ici un dôme elliptique dont le grand axe est le double du petit axe. Cette étude est purement formelle et ne représente pas le fonctionnement réel d'un dôme elliptique. En effet, l'appareil utilisé pour les calculs du dôme elliptique, du fait de la transformation affine, n'est pas adapté à la forme du dôme.

(4). Le principe du découpage en lunes a été présenté précédemment dans la partie concernant l'épaisseur minimale des dômes hémisphériques (section 14.1.3 p. 241).

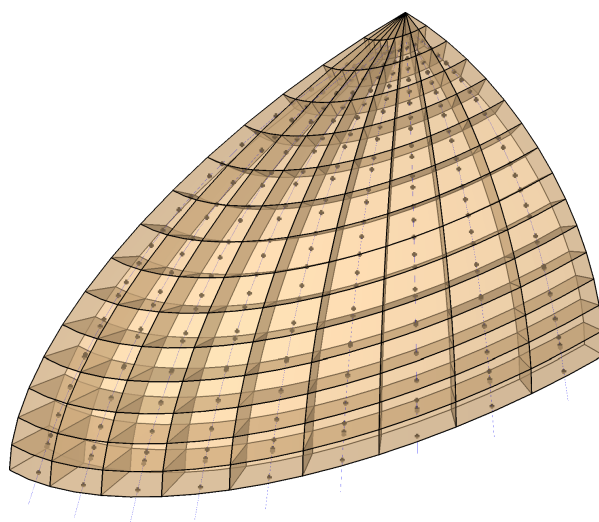


Fig 14.12 – Dôme elliptique et le réseau de forces correspondant au coefficient de sécurité géométrique maximum