

Chapitre 15

Étude des plates-bandes

Résumé : Ce chapitre traite de l'influence de la coupe des pierres sur la stabilité des plates-bandes. Trois types de plates-bandes sont analysés : les plates-bandes à joints verticaux, à joints inclinés, et à joints en X. Les domaines des chargements potentiellement supportables, qui sont utilisés pour quantifier la stabilité, sont déterminés d'abord par calcul analytique, puis étendus avec les réseaux de forces. L'intégration des résultats de modèles aux éléments finis est envisagée.

Sommaire

15.1	Paramétrisation des plates-bandes	250
15.2	Domaines des chargements supportables analytiques	253
15.2.1	Contexte	253
15.2.2	Frontière du critère de résistance en compression	253
15.2.3	Frontière du critère de résistance en frottement	256
15.3	Influence de la coupe des pierres sur la stabilité	257
15.3.1	Exemples considérés, Prato et GAIA	257
15.3.2	Influence du nombre de claveaux et de la clé	259
15.3.3	Influence de l'inclinaison des joints	259
15.3.4	Influence des joints en X	261
15.4	Extension des domaines avec les réseaux de forces	263
15.4.1	Principe de construction des domaines avec les réseaux de forces	263
15.4.2	Plates-bandes à joints inclinés	264
15.4.3	Plates-bandes à joints en X	265
15.5	Modèle aux éléments finis	270
15.5.1	Contexte	270
15.5.2	Modèle Cast3M des plates-bandes	270
15.5.3	Solutions d'équilibre	272

15.1 Paramétrisation des plates-bandes

Géométrie des plates-bandes à joints inclinés et verticaux

Nous choisissons les caractéristiques suivantes pour décrire la géométrie des plates-bandes qui seront étudiées dans ce chapitre (fig. 15.1) :

- nombre de claveaux k ;
- portée L_m mesurée à mi-hauteur ;
- hauteur h ;
- largeur b ;
- angle φ des joints des sommiers avec la verticale.

La coupe des pierres des plates-bandes à joints inclinés est obtenue à partir de ces paramètres par application de la *méthode des divisions égales* (voir section 6.3.5 p. 110), décrite notamment par Frézier (1738). Cette méthode a l'avantage, pour le calcul analytique, de diviser la plate-bande en k claveaux de même masse, dont l'intersection du joint avec l'axe de la plate-bande (pris à mi-hauteur) est le même que ceux des plates-bandes à joints verticaux ou joints en X. De plus, lorsque l'angle φ varie :

- la position de l'intersection des joints avec l'axe de la plate-bande est inchangée ;
- la masse de chaque claveau est inchangé ;
- la masse totale de la plate-bande est inchangée.

La portée libre L_i de la plate-bande, mesurée à l'intrados, se déduit des paramètres donnés ci-dessus avec $L_i = L_m - h / \tan \varphi$.

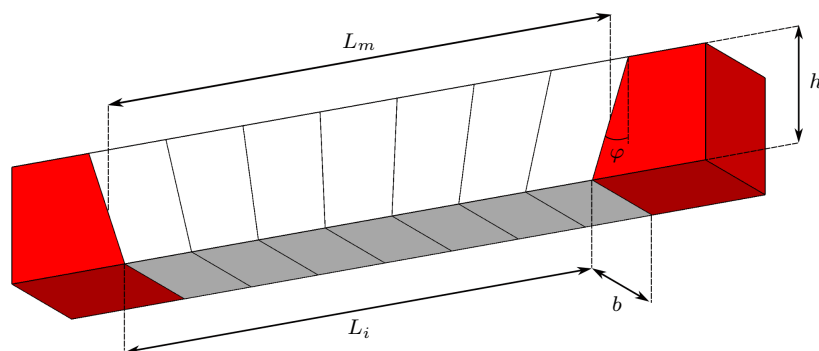


Fig 15.1 – Paramétrage de la géométrie des plates-bandes à joints inclinés, avec blocs d'appui en rouge

Géométrie des plates-bandes à joints en X

Dans le cas particulier des plates-bandes à joints en X, nous reprenons la paramétrisation des voûtes plates d'Abeille introduite par Brocato et Mondardini (2014), et présentée précédemment le chapitre consacré aux voûtes plates (section 10.3.4 p. 196 ; fig. 10.13). Cette paramétrisation peut être utilisée également pour les plates-bandes à joints en X.

Chapitre 15. Étude des plates-bandes

Un demi-claveau d'une plate-bande à joint en X est paramétré avec les longueurs a , b , c , d et h , et avec l'angle φ des joints avec la verticale (fig. 15.2). Ces paramètres sont reliés par les égalités suivantes :

$$d = a - h \tan \varphi, \quad b = c \quad (15.1)$$

Les polyèdres sont donc complètement définis par 4 paramètres. Nous indiquerons dans la suite les paramètres a , b , h et φ . Les paramètres c et d se déduisent des précédents. Pour respecter les notations de la paramétrisation de proposée par [Brocato et Mondardini \(2014\)](#), la largeur de la plate-bande est donc notée ici $2b$, au lieu de b habituellement pour le reste de ce document.

La distance entre les centres de gravité de deux blocs en contact est $p = a + d$. La portée libre L_i entre appuis, définie sur la figure 15.2, et la portée mesurée à mi-hauteur L_m , sont :

$$L_i = (k - 1)(d + a) + 2d = 2ka - (k + 1)h \tan \varphi \quad (15.2)$$

$$L_m = k(d + a) = 2ka - kh \tan \varphi \quad (15.3)$$

Pour juger du risque de glissement des joints, il est utile de considérer l'angle φ des joints avec la verticale et l'angle $\pi/2 - \varphi$ des joints avec l'horizontale.

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{a - d}{h} \right) \quad (15.4)$$

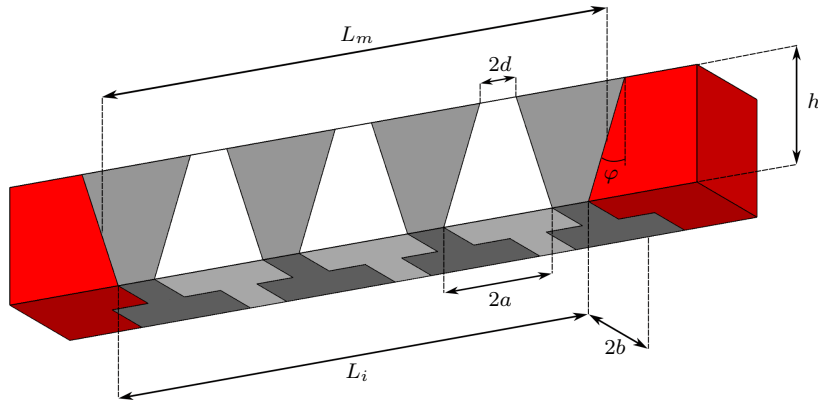


Fig 15.2 – Paramétrage de la géométrie des plates-bandes à joints en X, avec blocs d'appui en rouge

Propriétés mécaniques

Nous choisissons les propriétés mécaniques des pierres et des joints des plates-bandes suivantes :

- masse volumique de la pierre ρ_0 ;
- résistance admissible des joints à la compression σ_0 ;
- coefficient de frottement de Coulomb des joints μ , correspondant à un angle de frottement de $\tan^{-1} \mu$.

Dans toute la partie des calculs des domaines des chargements potentiellement supportables, nous faisons l'approximation usuelle dans le milieu du bâtiment qui consiste à considérer que $1\text{ kg} = 1\text{ daN}$ pour simplifier les calculs ; la gravité g est donc prise égale à 10 ms^{-2} au lieu de 9.81 ms^{-2} , soit une approximation de moins de 2%. Cette approximation est sans conséquence sur la précision des domaines, puisque les domaines des chargements supportables peuvent être transformés par homothétie si la masse volumique ρ_0 ou la contrainte admissible σ_0 change (section 15.4.1).

Paramètres de chargement

Les paramètres de chargement utilisés pour construire le domaine des chargements potentiellement supportables K sont :

- la charge verticale totale W , qui est la somme d'une charge verticale uniformément répartie sur la plate-bande ;
- la force horizontale H , ou poussée, appliquée par les appuis sur la plate-bande.

Dans le cas des plates-bandes à joints en X, nous considérerons comme force horizontale H la somme des forces horizontales H_1 et H_2 sur chacune des faces du joint en X d'appui. Les paramètres de chargement W et H seront adimensionnalisés en utilisant le poids propre de la plate-bande $W_0 = \rho_0 L_m b h$.

Nota sur les arcs de décharges et arrière-linteaux

Un arc de décharge surmonte fréquemment les linteaux et les plates-bandes. Il peut être constitué d'un arc clavé, ou se former naturellement dans la maçonnerie par encorbellement (fig. 15.3). La construction d'un arc de décharge au-dessus des linteaux est recommandée par Vitruve⁽¹⁾ (fig. 6.19 p. 102), puis à la renaissance par Alberti (1485, Livre III Ch.13)⁽²⁾. L'usage des arcs de décharge est ensuite recommandé spécifiquement au-dessus des plates-bandes lorsque la largeur de ces dernières est importante, par exemple pour les portes et les devantures de commerces, par Serlio (1537, 17v).

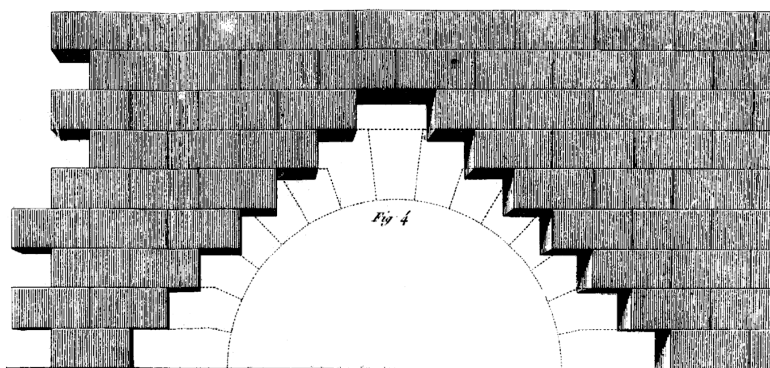


Fig 15.3 – Arc de décharge se formant par encorbellement dans la maçonnerie, d'après Rondelet (1805, Pl. LXIX Fig. 4, p. 309)

(1). Voir citation de Vitruve concernant les arcs de décharges, note (7) p. 80.

(2). Relevé par di Teodoro (2012, p. 192).

Par ailleurs, la plate-bande peut n'occuper qu'une partie de l'épaisseur du mur. Dans ce cas, un *arrière-linteau*, composé de une ou plusieurs poutres en bois ou en métal, est implanté à l'arrière de la plate-bande.

La répartition des charges entre ces différents éléments, plate-bande, arc de décharge et arrière-linteau est complexe ; nous étudions dans ce chapitre la plate-bande de façon isolée. Pour les études de cas réels, l'interaction entre la plate-bande et son environnement devra également être prise en compte.

15.2 Domaines des chargements supportables analytiques

15.2.1 Contexte

Nous étudions dans cette section les domaines des chargements potentiellement supportables des plates-bandes, par un calcul analytique utilisant la construction par l'intérieur des domaines du calcul à la rupture (voir section 2.1.3 p. 31).

L'objectif de cette partie est d'obtenir des domaines de référence auxquelles pourront ensuite être comparés les domaines obtenus avec la méthode des réseaux de forces. Nous n'utilisons donc pas dans un premier temps la méthode des réseaux de forces.

Le calcul des critères de résistance des joints présenté dans la section 3.1.1 (p. 41) faisait intervenir le repère local $x'y'z'$ où l'axe x' était perpendiculaire au joint (fig. 3.1 p. 41). Nous utilisons dans cette section un repère global xyz , où l'axe x est dirigé selon l'axe de la plate-bande, où l'axe y est parallèle au côté b , et où l'axe z est parallèle au côté h et orienté vers le bas (fig. 3.2 p. 41).

Les contraintes généralisées de la théorie des poutres M , N et V sont définies dans le repère global xyz , indépendamment du repère local $x'y'z'$ associé à l'inclinaison éventuelle de chaque joint.

Nous notons $N_c = bh\sigma_c$ l'effort normal maximal admissible sur un joint vertical, et nous utilisons cette valeur pour créer les valeurs adimensionnées suivantes :

$$n = N/N_c \quad (15.5)$$

$$m = \frac{2}{h}M/N_c \quad (15.6)$$

$$v = V/N_c \quad \text{de telle manière que : } V/N = v/n \quad (15.7)$$

15.2.2 Frontière du critère de résistance en compression

Rotules plastiques sur appui et à la clé

On considère un critère de résistance à la compression sous la forme générale :

$$|m| \leq f(n, v, \tan \theta) \quad (15.8)$$

L'angle θ désigne l'angle du joint considéré avec la verticale, généralement différent de l'angle φ du joint d'appui. La fonction f peut prendre plusieurs formes, suivant le

Chapitre 15. Étude des plates-bandes

type de joint considéré :

$$f(n) = n(1 - n) \quad (\text{joints verticaux}) \quad (15.9)$$

$$f(n, v, \tan \theta) = n + v \tan \theta - (n + v \tan \theta)^2 \cos^2 \theta \quad (\text{joints inclinés}) \quad (15.10)$$

$$f(n, \tan \theta) = \frac{n}{\cos^2 \theta} (1 - n) \quad (\text{joints en X}) \quad (15.11)$$

Les expressions des critères donnés ci-dessus pour les joints verticaux et les joints inclinés sont obtenus en réécrivant dans le repère global xyz les critères exprimés avec n' , m' et v' dans le repère local $x'y'z'$ et présentés dans la section 3.1.1 p. 41. Par ailleurs, l'expression du critère pour les joints en X a été établie par Maurizio Brocato (communication écrite non publiée – voir en annexe C p. 418).

Ces fonctions sont établies à partir d'hypothèses sur la forme des champs de contrainte sur les joints. Elles sont donc des approximations par l'intérieur de la frontière du critère de résistance. Dans les cas des joints en X, une extension de ce domaine est envisageable en considérant des champs de contrainte plus complexes, mais ce travail n'a pas été réalisé.

Les expressions analytiques des quantités nécessaires pour les calculs sont données dans la table 15.1 ci-dessous. La plate-bande considérée comprenant k claveaux, avec k un nombre impair, l'index i désignant les joints dans cette table varie de 1 à $k + 1$. Le choix de placer l'axe x à mi-hauteur de la plate-bande, et le découpage par claveaux égaux, sont essentiels pour obtenir ces expressions applicables aux trois types de plates-bandes étudiés.

Var.	Val.	Val.	Val.	Description
—	appui	quelconque	clé	position du joint considéré
i	1	i	$\frac{k+1}{2}$	index du joint considéré
x	0	$\frac{i-1}{k} L_m$	$\frac{k-1}{2k} L_m$	position du centre du joint
v	$\frac{W}{2N_c}$	$\frac{W}{2kN_c} (k+2-2i)$	$\frac{W}{2kN_c}$	effort tranchant
n	n	n	n	effort axial
m	$-m_0$	$\frac{W}{L_m h N_c} x(L_m - x) - m_0$	$\frac{W}{L_m h N_c} x(L_m - x) - m_0$	moment (x)
m	$-m_0$	$\frac{W L_m}{h N_c} \frac{(i-1)(k-i+1)}{k^2} - m_0$	$\frac{W L_m}{4h N_c} \frac{k^2-1}{k^2} - m_0$	moment (i, k)
$\tan \theta$	$\tan \varphi$	$(1 - 2 \frac{i-1}{k}) \tan \varphi$	$\frac{1}{k} \tan \varphi$	inclinaison du joint (sauf si joint X)

TABLE 15.1 – Expressions analytiques pour le calcul des plate-bandes

Soit $\varphi' = \tan^{-1} \left(\frac{1}{k} \tan \varphi \right)$ l'inclinaison des joints de la clé de la plate-bande. Pour obtenir une approximation intérieure de la frontière du domaine des chargements supportables, on écrit que le critère est atteint au joint d'appui et au joint de clé,

soit :

$$|m_0| = |m(x=0)| = f(n, v(x=0), \tan \varphi) \quad (15.12)$$

$$\left| m(x = \frac{k-1}{2k} L_m) \right| = f(n, v(x = \frac{k-1}{2k} L_m), \tan \varphi') \quad (15.13)$$

La somme de ces deux égalités permet d'éliminer l'inconnue hyperstatique m_0 :

$$\frac{W L_m k^2 - 1}{4h N_c} = f\left(n, \frac{W}{W_0} \frac{W_0}{2N_c}, \tan \varphi\right) + f\left(n, \frac{W}{W_0} \frac{W_0}{2k N_c}, \tan \varphi'\right) \quad (15.14)$$

Le rapport $\frac{W}{W_0}$ peut ensuite être exprimé en fonction de $n = \frac{H}{N_c} = \frac{H}{W_0} \frac{W_0}{N_c}$ afin d'obtenir l'équation de la frontière du domaine, équation exprimée en fonction des paramètres de chargement $\frac{W}{W_0}$ et $\frac{H}{W_0}$:

$$\frac{W}{W_0} = \frac{4h N_c}{W_0 L_m k^2 - 1} \left(f\left(n, \frac{W}{W_0} \frac{W_0}{2N_c}, \tan \varphi\right) + f\left(n, \frac{W}{W_0} \frac{W_0}{2k N_c}, \tan \varphi'\right) \right) \quad (15.15)$$

Dans le cas des critères de résistance en compression de la plate-bande à joints verticaux ou joints en X, le critère est de la forme $|m| \leq f(n, \tan \theta)$ et la dépendance en $\frac{W}{W_0}$ dans le terme de droite de l'équation 15.15 disparaît. Il s'en déduit une expression analytique explicite de $\frac{W}{W_0}$ en fonction de $\frac{H}{W_0}$ permettant de tracer directement la frontière du domaine de chargements lié au critère en compression :

$$\frac{W}{W_0} = \frac{8h}{L_m} \frac{H}{W_0} \frac{k^2}{k^2 - 1} \left(1 - \frac{W_0}{N_c} \frac{H}{W_0} \right) \quad (\text{joints verticaux}) \quad (15.16)$$

$$\frac{W}{W_0} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{8h}{L_m} \frac{H}{W_0} \frac{k^2}{k^2 - 1} \left(1 - \frac{W_0}{N_c} \frac{H}{W_0} \right) \quad (\text{joints en X}) \quad (15.17)$$

Cependant dans le cas du critère des joints inclinés, l'équation 15.15 n'est pas linéaire en $\frac{W}{W_0}$, et la détermination de l'expression analytique de la frontière du domaine de chargement n'est pas triviale. Nous utiliserons pour contourner cette difficulté un calcul en perturbation pour représenter graphiquement la frontière des domaines de chargements correspondant aux joints inclinés.

Rotules plastiques uniquement à la clé

Pour une hauteur de plate-bande donnée, la résistance à l'effort normal d'un joint incliné est supérieure à celle d'un joint vertical, parce que l'aire de la surface du joint incliné est plus grande. De façon analogue, les joints des appuis, qui sont plus inclinés ($\tan \varphi$) que les joints de la clé ($\frac{1}{k} \tan \varphi$), peuvent supporter des efforts normaux plus importants que ces derniers.

L'équation 15.15 donnée ci-dessus est une condition nécessaire mais non suffisante de respect du critère de résistance à la compression. Dans le cas des joints inclinés, cette condition peut être respectée sans que la condition $\xi \leq 1$ le soit (pour mémoire, ξh est la hauteur en compression du joint, voir section 3.2 et fig. 3.1). La relation entre n , v , φ et ξ est donnée pour un joint incliné par :

$$\cos^2 \varphi (n + v \tan \varphi) = \xi \quad (15.18)$$

Chapitre 15. Étude des plates-bandes

Lorsque $\xi = 1$, cette équation exprimée au niveau du joint de clé avec $\varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{1}{k} \tan \varphi\right)$ devient :

$$\frac{H}{W_0} \frac{W_0}{N_c} + \frac{W}{W_0} \frac{W_0}{2kN_c} \tan \varphi' = \frac{1}{\cos^2 \varphi'} \quad (15.19)$$

$$\frac{W}{W_0} = \frac{1}{\tan \varphi'} \frac{2kN_c}{W_0} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi'} - \frac{H}{W_0} \frac{W_0}{N_c} \right) \quad (15.20)$$

Cette dernière équation est l'expression du domaine des chargements supportables vis-à-vis du critère de résistance en compression pour les efforts centrés sur les joints. Le domaine des chargements pour le critère de résistance en compression est l'intersection des deux domaines calculés ci-dessus.

La seconde frontière du domaine revient à tronquer la pointe formée par les domaines paraboliques (*p. ex.* fig. 15.5). Cet effet est presque négligeable pour les plates-bandes où $\varphi = 6^\circ$ (voir étude de Prato ci-dessous), mais ne peut pas être négligé pour les plates-bandes avec des angles $\varphi = 18^\circ$ et $\varphi = 30^\circ$ qui sont les cas les plus courants en pratique (fig. 15.5).

Le gain de résistance qui apparaît pour les joints inclinés par rapport aux joints verticaux illustre la simplification qu'introduit l'hypothèse de négliger l'influence de la résistance interne de la pierre, et de considérer la résistance du matériau seulement au niveau des joints. La considération de la résistance interne de la pierre dans le cadre du calcul à la rupture est possible, mais nécessite encore des développements pour être intégrée à la méthode des réseaux de forces (voir chapitre 3.3.2).

15.2.3 Frontière du critère de résistance en frottement

Le critère de résistance en frottement s'exprime dans le repère local du joint $x'y'z'$ sous la forme :

$$|v'| \leq \mu n' \quad (15.21)$$

Ce critère donne pour les joints verticaux et les joints en X :

$$|v| \leq \mu n \quad \text{joints verticaux ou joints en X} \quad (15.22)$$

$$|v| \leq \frac{\mu + \tan \varphi}{1 - \mu \tan \varphi} n \quad \text{joints inclinés} \quad (15.23)$$

En considérant le joint d'appui, qui est le joint dimensionnant pour le critère de glissement, l'expression des critères permet d'obtenir le domaine des chargements du critère sous la forme :

$$\frac{W}{W_0} \leq 2\mu \frac{H}{W_0} \quad \text{joints verticaux ou joints en X} \quad (15.24)$$

$$\frac{W}{W_0} \leq 2 \frac{\mu + \tan \varphi}{1 - \mu \tan \varphi} \frac{H}{W_0} \quad \text{joints inclinés, pour } W > 0 \quad (15.25)$$

$$-\frac{W}{W_0} \leq 2 \frac{\mu - \tan \varphi}{1 + \mu \tan \varphi} \frac{H}{W_0} \quad \text{joints inclinés, pour } W < 0 \quad (15.26)$$

Dans le cas des joints verticaux où le repère global et local est identique, ($n = n'$ et $v = v'$), cette expression se traduit directement en la limitation de l'angle de la force de réaction sur le joint d'appui :

$$\frac{W}{2} \leq \mu H \quad (15.27)$$

15.3 Influence de la coupe des pierres sur la stabilité

15.3.1 Exemples considérés, Prato et GAIA

Nous étudions dans ce chapitre l'influence de la coupe des pierres sur la stabilité des plates-bandes. La stabilité est exprimée ici à travers les domaines des chargements potentiellement supportables K , dont les paramètres de chargement sont le chargement vertical total W et la poussée H (voir section 15.1 pour la définition des notations utilisées).

Cette étude prendra pour point de départ deux plates-bandes différentes.

La première sera la plate-bande à joints en X de la cathédrale de Prato (Toscane, Italie – voir figures 7.2 et 6.12 p. 142). Cette plate-bande, construite au Moyen Âge, présente parmi l'ensemble des exemples répertoriés dans notre chapitre sur les plates-bandes une grande hauteur par rapport à sa portée, et des angles de joints avec la verticale très faibles.

La seconde plate-bande étudiée sera la plate-bande à joints en X construite dans le cadre d'une étude expérimentale aux Grands Ateliers de l'Isle d'Abeau (GAIA), en mars 2017 (section 7.4.2 p. 147). La typologie de cette plate-bande a été choisie pour correspondre aux préconisations des traités d'architecture et de coupe des pierres du XVIII^e siècle⁽³⁾.

La paramétrisation du modèle de plate-bande pour Prato est la suivante :

- géométrie :
 - nombre de claveaux $k = 5$; la plate-bande de Prato est composée de sept claveaux, mais deux claveaux de la plate-bande appuyés sur des corbeaux sont considérés comme faisant partie des appuis de la plate-bande ;
 - portée⁽⁴⁾ $L_m = 1,579$ m mesurée à mi-hauteur ;
 - hauteur $h = L_i/2 = 0,75$ m, ce qui correspond à la proportion observée sur photo ;
 - largeur⁽⁵⁾ $2b = h/2 = 0,375$ m ;
 - base d'un trapèze $2a = 39,4$ cm ;

(3). Il n'existe cependant pas de plate-bande de ce type au XVIII^e siècle en France. Les paramètres choisis correspondent à ceux des plates-bandes à joints inclinés.

(4). La portée réelle de la plate-bande de Prato n'était pas connue au moment de l'étude. La valeur donnée ici était hypothétique. La distance entre piédroits vaut 1,5 m environ, et la portée des cinq claveaux centraux mesurée à mi-hauteur environ 1,1 m. La portée choisie ici pour le calcul, $L_m = 1,579$ m mesurée à mi-portée est donc supérieure à la portée réelle. Elle correspond à une portée $L_i = 1,500$ m mesurée à l'intrados si $\varphi = 6^\circ$.

(5). La largeur réelle de la plate-bande de Prato n'est pas connue. La valeur donnée ici est hypothétique.

- angle des joints de ses sommiers avec la verticale $\varphi = 6^\circ$; cet angle correspond à une règle de « 1 pour 9 » environ dans le cas des plates-bandes à joints inclinés.
- propriétés mécaniques :
 - masse volumique ⁽⁶⁾ $\rho_0 = 2400 \text{ kg/m}^3$;
 - résistance admissible des joints à la compression $\sigma_0 = 1,0 \text{ MPa}$;
 - coefficient de frottement de Coulomb des joints $\mu = 0,7$.

Lampariello indique, concernant le système des claveaux bicolores en Toscane, que les pierres blanches provenaient généralement de Albarese, et les pierres foncées de Serpentino ⁽⁷⁾ (Lampariello, 2012, p. 107). Les valeurs des propriétés mécaniques ci-dessus sont hypothétiques et négligent les possibles différences entre pierre blanche et pierre verte.

La paramétrisation du modèle de plate-bande pour la plate-bande construite aux Grands Ateliers de l'Isle-d'Abeau (GAIA) est la suivante :

- géométrie :
 - nombre de claveaux $k = 7$;
 - portée ⁽⁸⁾ $L_m = 1,400 \text{ m}$ mesurée à mi-hauteur ;
 - hauteur $h = 0,30 \text{ m}$, ce qui correspond à un rapport L_m/h compris entre 4 et 5 ;
 - largeur $2b = h = 0,30 \text{ m}$;
 - angle des joints de ses sommiers avec la verticale $\varphi = 18,4^\circ$; cet angle correspond à une règle de « 1 pour 3 » dans le cas des plates-bandes à joints inclinés.
- propriétés mécaniques :
 - masse volumique $\rho_0 = 2200 \text{ kg/m}^3$;
 - résistance admissible des joints à la compression $\sigma_0 = 1,0 \text{ MPa}$;
 - coefficient de frottement de Coulomb des joints $\mu = 0,7$.

Nous appellerons dans la suite plate-bande de type GAIA les plates-bandes de ce type.

Chacune de ces deux plates-bandes sera étudiée sous trois formes, présentant toutes la même portée à mi-hauteur ⁽⁹⁾ :

- sous sa forme de base, à joints en X ;
- sous la forme d'une plate-bande de mêmes dimensions mais à joints inclinés ;
- sous la forme d'une plate-bande de mêmes dimensions mais à joints verticaux.

Pour chacune de ces plates-bandes, un seul des paramètres décrivant sa typologie, et donc sa coupe des pierres, sera modifié successivement pour étudier l'effet de ce

(6). Le poids des claveaux est obtenu en multipliant leur masse par la gravité prise égale à 10 m.s^{-2} . Cela revient à utiliser l'approximation usuelle dans le bâtiment « $1 \text{ kg} = 1 \text{ daN}$ ». L'incidence de cette approximation sur les domaines des chargements potentiellement supportables est abordée p. 252.

(7). « Bien que les édifices construits en pierres bicolores se soient répandus dans diverses régions de la côte italienne, où le modèle arabe d'ornement bicolore, nommé *ablaq*, est plus connu, c'est [ce] n'est qu'en Toscane que l'on rencontre fréquemment la solution de surmonter les portails d'architraves en claveaux alternés de pierres claires et de pierres foncées, généralement en pierre blanche (Albarese) et en marbre vert de Prato (Serpentino), au lieu de blocs monolithes. » (Lampariello, 2012, p. 107)

(8). La portée mesurée à mi-hauteur $L_m = 1,400 \text{ m}$ correspond à une portée $L_i = 1,300 \text{ m}$ mesurée à l'intrados si $\varphi = 18,4^\circ$.

(9). Pour les raisons vues lors de la présentation du paramétrage des plates-bandes, de manière à exploiter les avantages de la méthode des divisions égales.

paramètre sur les domaines des chargements supportables, et donc sur la stabilité de la plate-bande.

Les domaines des chargements supportables présentés dans cette section sont déterminés analytiquement, à l'aide des expressions établies dans la section précédente.

15.3.2 Influence du nombre de claveaux et de la clé

Nous avons vu dans la partie sur l'histoire des plates-bandes que ces dernières présentent presque systématiquement un nombre impair de claveaux, et donc une clé placée au centre de la portée.

L'existence de la clé apporte une résistance complémentaire à la plate-bande par rapport à une plate-bande équivalence construite avec un nombre pair de claveaux, quel que soit le type de joint (vertical, incliné, ou en X). Le rapport entre la résistance d'une plate-bande avec un nombre impair de claveaux k et celle d'une plate-bande avec un nombre pair de claveaux (quel que soit ce nombre), est donné par $\frac{k^2}{k^2-1}$. Ce rapport vaut 1,123 pour une plate-bande à 3 claveaux, 1,042 pour une plate-bande à 5 claveaux, et 1,020 pour une plate-bande à 7 claveaux. La modification du domaine des chargements potentiellement supportables due à ce paramètre est illustrée sur la figure 15.4.

Le nombre de claveaux et la présence d'une clé centrale a donc une influence non nulle sur la stabilité, mais qui reste faible. Frézier indique à ce propos, concernant le choix de la position des joints pour les voûtes en général : « ce n'est pas qu'un joint sur le milieu d'un ceintre tirât beaucoup de conséquence pour la solidité ; mais il choqueroit la vuë & la bonne ordonnance. » (Frézier, 1737, p. 280, cit. 29).

15.3.3 Influence de l'inclinaison des joints

Une plate-bande à joints verticaux a une résistance égale que les chargements verticaux soient orientés vers le haut ou vers le bas (symétrie visible sur la figure 15.4). Cette symétrie n'existe pas pour les plates-bandes à joints inclinés (fig. 15.5). L'inclinaison des joints a trois effets :

1. le critère de résistance au frottement est impacté par l'orientation du joint ;
2. le critère de résistance en compression est impacté par la variation de l'aire de la surface des joints (dépendant de l'orientation du joint) ;
3. la portée effective de la plate-bande, c'est-à-dire la distance horizontale entre les centres de pression sur les joints d'appuis est impactée par l'orientation du joint.

Lorsque l'inclinaison des joints augmente, la frontière du domaine des chargements supportables lié au critère du frottement tourne dans le sens anti-horaire. Par conséquent, pour une faible poussée donnée H , les charges verticales admissibles (positives ou négatives) se déplacent vers le haut dans le plan $(H; W)$ (fig. 15.5).

Pour les chargements verticaux orientés vers le bas, les effets 2. et 3. mentionnés ci-dessus s'additionnent et le domaine des chargements supportables grandit lorsque l'inclinaison des joints augmente (en haut sur la figure 15.5).

Pour les chargements verticaux orientés vers le haut, les effets 2. et 3. mentionnés ci-dessus ont des effets contraires, car cette fois-ci la portée effective de la plate-bande augmente en même temps que l'inclinaison des joints. Sur l'exemple considéré, l'effet 2. est supérieur à l'effet 3 pour les poussées importantes (fig. 15.5 (b)), et l'effet 2. est inférieur à l'effet 3 pour les poussées faibles (fig. 15.5 (a)).

Enfin, l'augmentation de la résistance aux efforts normaux apportée par l'inclinaison des joints a pour résultat que les deux joints des clés sont moins résistants que les joints d'appuis. Pour les fortes poussées et faibles chargements verticaux, le critère de résistance à la compression n'est pas atteint à la fois sur les joints d'appuis et sur les joints des clés, mais uniquement sur les joints des clés où les joints sont complètement écrasés ($\xi = 1$). Cet effet n'est presque pas perceptible lorsque l'inclinaison des joints d'appuis φ vaut 6° , mais il apparaît nettement pour $\varphi = 18^\circ$ et $\varphi = 30^\circ$ (fig. 15.5 (c)).

L'augmentation de la résistance à l'effort normal avec l'augmentation de l'angle des joints est liée à l'absence de considération de la résistance à l'intérieur des pierres (voir section 15.2.2 p. 255).

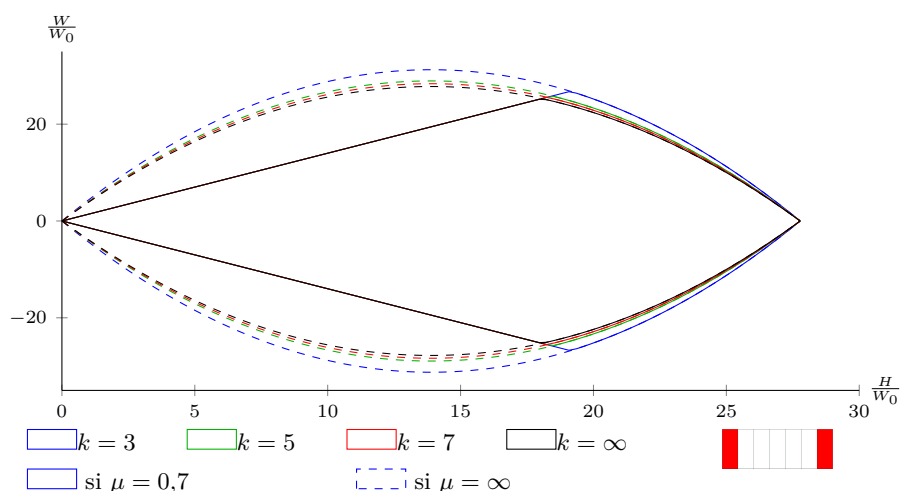


Fig 15.4 – Influence du nombre de claveaux k sur le domaine des chargements supportables d'une plate-bande à joints verticaux de type Prato

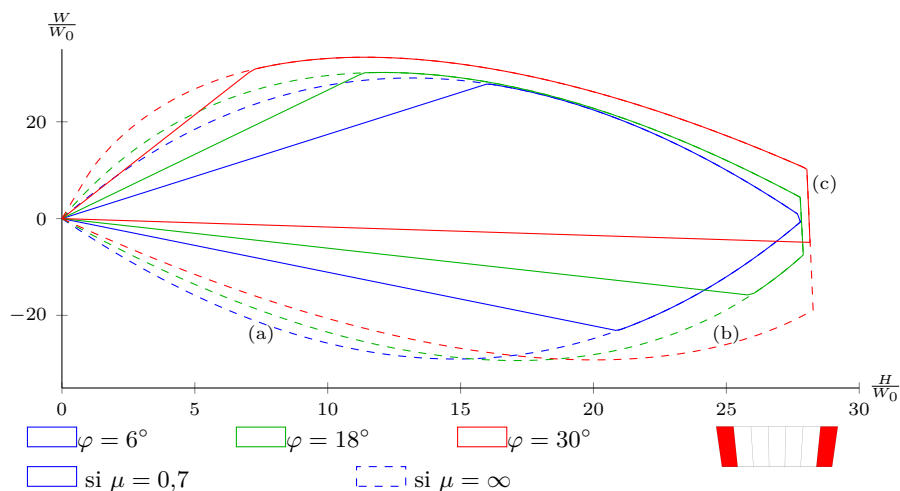


Fig 15.5 – Influence de l'inclinaison des joints d'appui φ sur le domaine des chargements supportables d'une plate-bande à joints inclinés de type Prato

15.3.4 Influence des joints en X

Les domaines des chargements supportables d'une plate-bande à joints verticaux, joints inclinés et joints en X sont superposés sur la figure 15.6 pour les plates-bandes de type Prato, et sur la figure 15.7 pour les plates-bandes de type GAIA.

Les plates-bandes à joints en X procurent une meilleure résistance vis-à-vis des chargements verticaux inversés (vers le haut) par rapport à la plate-bande à joints inclinés. Les chargements verticaux inversés pourraient se produire en pratique dans le cas de séismes.

Dans le cas de la plate-bande à joints en X de Prato, le domaine des chargements supportables est presque identique à celui de la plate-bande à joints verticaux. Avec celle de type GAIA cependant, le domaine est plus grand que celui de la plate-bande à joints verticaux. De plus, contrairement aux joints verticaux dont la stabilité peut être remise en question par de petits mouvements horizontaux au niveau des appuis (Smars, 2008), la plate-bande à joints en X est plus sécuritaire vis-à-vis des déplacements horizontaux des supports.

La forme de la plate-bande de Prato, qui présente un rapport portée sur hauteur L_m/h d'environ 2, explique que le critère de frottement joue un rôle important sur le comportement mécanique.

A contrario, le critère de frottement n'apparaît presque pas pour les chargements verticaux dirigés vers le bas de la plate-bande de type GAIA.

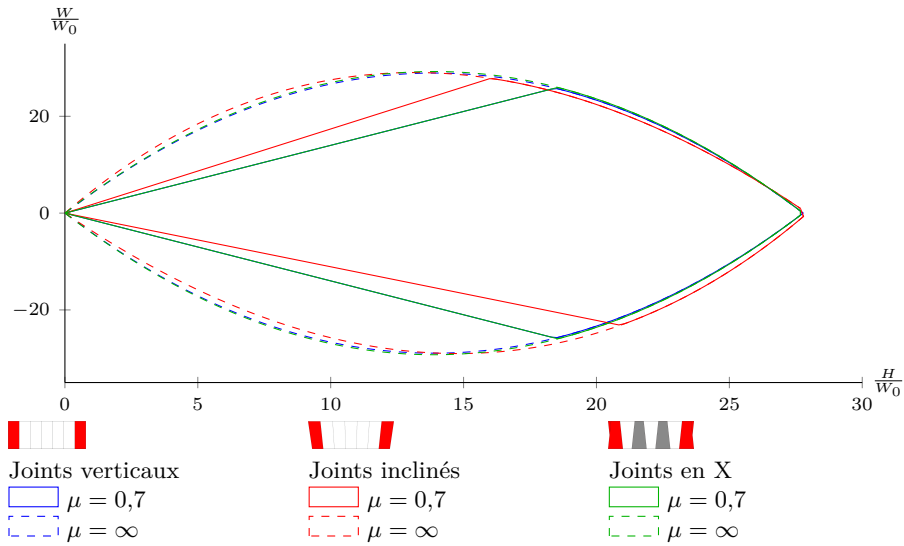


Fig 15.6 – Domaines des chargements supportables de plates-bandes de type Prato à joints verticaux, inclinés, et en X

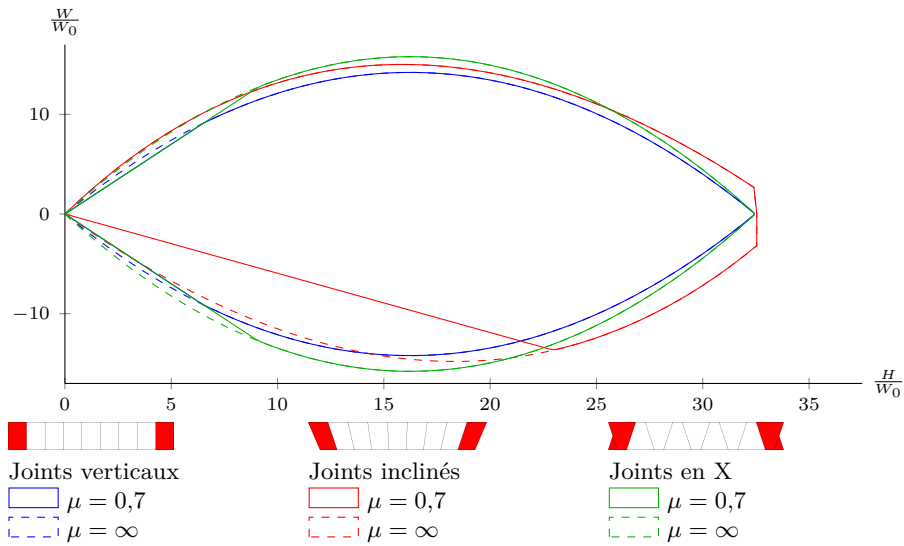


Fig 15.7 – Domaines des chargements supportables de plates-bandes de type GAIA à joints verticaux, inclinés, et en X

15.4 Extension des domaines avec les réseaux de forces

15.4.1 Principe de construction des domaines avec les réseaux de forces

Les domaines des chargements supportables présentés ci-dessus et déterminés à partir d'équations analytiques des frontières seront appelés *domaines analytiques* (qu'ils aient été dessinés à partir d'expressions analytiques ou par calcul itératif).

Nous comparons dans cette section ces domaines analytiques avec les domaines des chargements supportables qui peuvent être construits grâce à l'extension de la méthode des réseaux de forces. Nous appellerons *domaines numériques* ces domaines pour les distinguer des domaines analytiques précédents.

La procédure suivante est appliquée pour construire les domaines numériques K présentés dans la suite. Pour une poussée horizontale donnée $H = \bar{H}$ et un chargement vertical $W = \bar{W} = W_0$, nous avons calculé le multiplicateur de charge de la plate-bande $F(\bar{H}; \bar{W})$. D'après la définition de ce multiplicateur, le point $(F\bar{H}; FW_0)$ se trouve à l'intérieur du domaine des chargements potentiellement supportables K . Le domaine convexe défini par itération en des points successifs est une approximation par l'intérieur du domaine K (fig. 15.8).

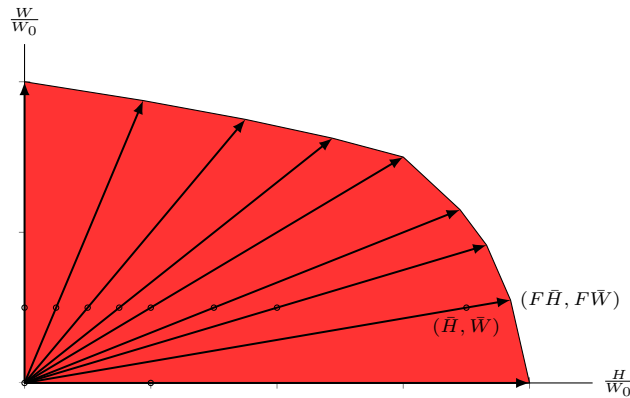


Fig 15.8 – Construction par l'intérieur du domaine des chargements supportables

Le multiplicateur de charge lié au critère en résistance en compression est proportionnel à σ_0 (equation 3.23). Par conséquent, le domaine des chargements supportables correspondant à une contrainte admissible σ_2 peut être déduit d'un domaine σ_1 simplement en transformant ce dernier domaine par une homothétie de facteur σ_2/σ_1 .

Par ailleurs, la masse volumique de la pierre n'intervient que via les termes $1/W_0$ qui servent à rendre adimensionnels les paramètres de chargements, pour la construction des domaines. Les domaines peuvent donc également être transformés par homothétie si la masse volumique change. Par conséquent, la *forme* des domaines des chargements supportables produits dans ce document (pour les plates-bandes et les voûtes plates) sont indépendants des caractéristiques prises pour caractériser la pierre et les joints (masse volumique et résistance en compression), à l'exception notable du coefficient de frottement limite μ .

15.4.2 Plates-bandes à joints inclinés

La superposition des domaines analytiques et numériques pour le cas des plates-bandes à joints inclinés de type Prato et de type GAIA montre la bonne concordance des résultats obtenus par calcul analytique et par la méthode des réseaux de forces (figures 15.9 et 15.10). Cette bonne correspondance était attendue puisque dans le cas des joints inclinés, aucune hypothèse simplificatrice complémentaire n'a été introduite lors des calculs analytiques des critères, contrairement aux joints en X que nous allons étudier maintenant.

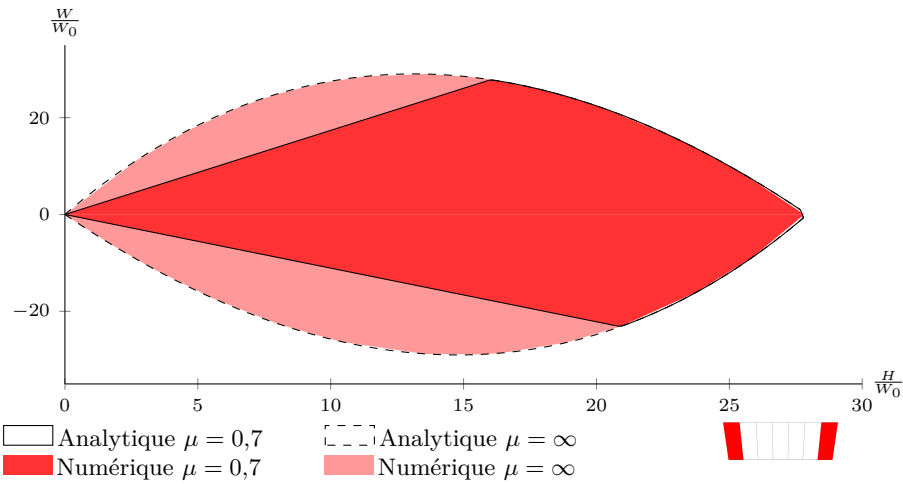


Fig 15.9 – Comparaison des domaines analytiques et numériques d'une plate-bande à joints inclinés de type Prato

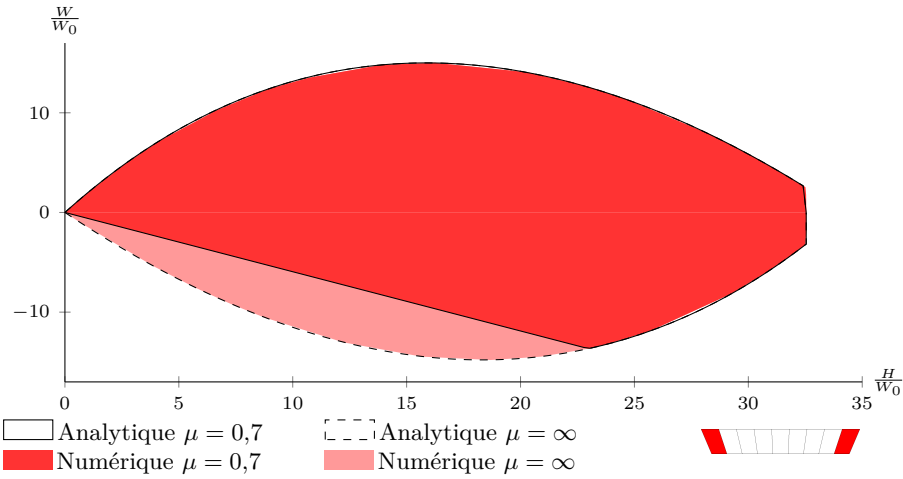


Fig 15.10 – Comparaison des domaines analytiques et numériques d'une plate-bande à joints inclinés de type GAIA

15.4.3 Plates-bandes à joints en X

Première approche des domaines de chargement

La superposition des domaines analytiques et numériques pour le cas des plates-bandes à joints en X de type Prato et de type GAIA montre que la méthode des réseaux de forces permet de générer des domaines de chargements potentiellement supportables plus grands qu'avec la méthode analytique utilisée ci-dessus (figures 15.11 et 15.12). Cette observation doit cependant être relativisée, car une partie du domaine généré avec la méthode des réseaux de forces doit être exclu.

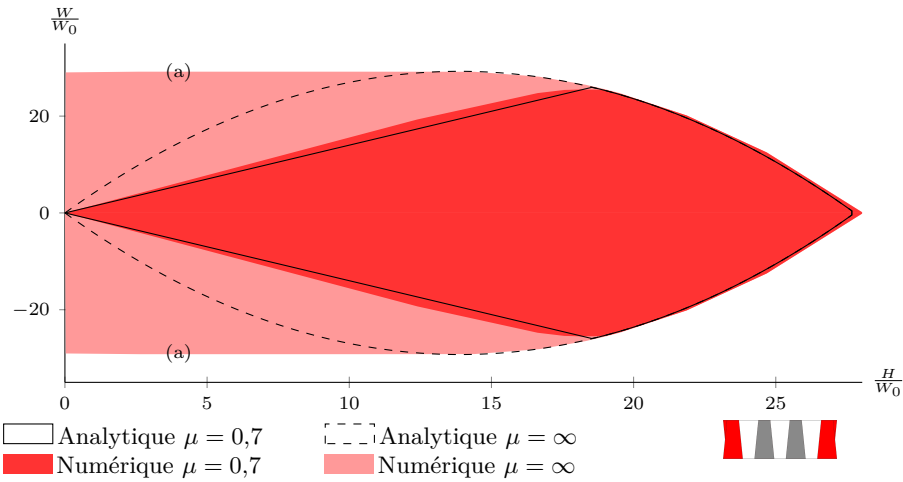


Fig 15.11 – Comparaison des domaines analytiques et numériques d'une plate-bande à joints en X de type Prato

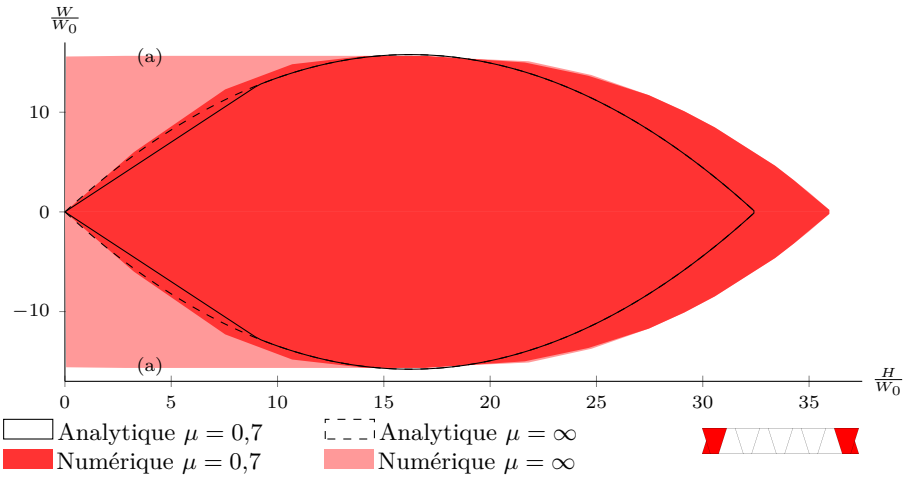


Fig 15.12 – Comparaison des domaines analytiques et numériques d'une plate-bande à joints en X de type GAIA

En effet, **si le critère de résistance en frottement est négligé**, le domaine des chargements supportables calculé avec la méthode des réseaux de forces présente des caractéristiques particulières :

- alors que la charge verticale extrême W maximale ne peut être atteinte que pour une seule valeur de la poussée pour une plate-bande à joints inclinés (au sommet de la parabole du domaine), pour les plates-bandes à joints en X la charge verticale extrême W maximale peut être atteinte sur un intervalle de valeur de la poussée, qui correspond à la frontière horizontale du domaine (fig. 15.11 (a) et fig. 15.12 (a)). Par conséquent, plusieurs solutions d'équilibre distinctes équilibrant le chargement vertical extrême maximal existent. Trois solutions avec ou sans transmission de forces entre les deux parties composant les claveaux à joints en X sont donnés sur la figure 15.13.
- les plates-bandes à joints en X sont stables même pour des poussées infinitésimales. Ces solutions nécessitent des transmissions d'efforts importants entre les deux parties composant les claveaux à joints en X (fig. 15.14 à droite). Nous retrouverons une caractéristique similaire dans le cas des voûtes plates d'Abeille.

Les solutions correspondant à la frontière horizontale du domaine (fig. 15.11 (a) et fig. 15.12 (a)) ne respectent pas le critère de résistance en frottement, et sont susceptible de ne pas respecter deux autres critères qui ne sont pas pris en compte dans le calcul des domaines effectué ici, et que nous détaillons ci-dessous.

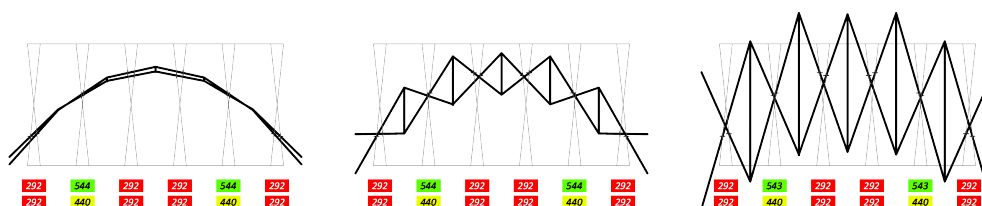


Fig 15.13 – Trois solutions équilibrant le même chargement vertical extrême W si $\mu = \infty$, avec différentes forces verticales dans les branches partielles (0 kg, 500 kg et 2000 kg) ; solutions correspondant à la frontière horizontale (a) sur fig. 15.11

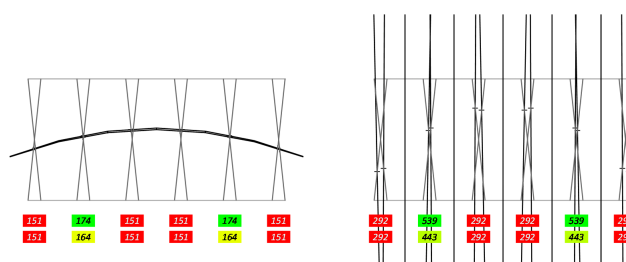


Fig 15.14 – Deux solutions équilibrant un chargement extrême si $\mu = \infty$ ($H = 1600$ kg à g. et $H = 50$ kg à d.)

Par ailleurs, les solutions d'équilibre données sur les figures 15.13 et 15.14 sont des solutions équilibrant un chargement extrême appartenant à la frontière du domaine des chargements supportables. Ces solutions montrent que le réseau de forces peut sortir de l'enveloppe intérieure de la maçonnerie, bien que tous les centres de pression soient localisés sur les joints (voir section 1.3 p. 23).

Limitation des efforts dans les branches partielles

Lorsque la poussée considérée est importante, les solutions équilibrant les chargements extrêmes sont obtenues avec des forces verticales très faibles dans les branches partielles (fig. 15.14 à gauche). Cependant, lorsque la poussée considérée est faible, les forces dans les branches partielles sont essentielles pour obtenir les solutions correspondant à la frontière horizontale du domaine (fig. 15.11 (a) et fig. 15.12 (a)). Les valeurs des forces dans les branches partielles de ces solutions peuvent être importantes, et il convient donc d'en limiter l'amplitude.

La force dans une branche partielle se traduit par deux phénomènes :

- l'application de forces sur les joints triangulaires entre deux claveaux successifs (A_2 sur fig. 15.15), pour équilibrer le moment de torsion que nous détaillons ci-dessous ; ces forces mettent en jeu la résistance des joints entre claveaux ;
- la transmission d'efforts de cisaillement à travers l'interface entre les deux demi-claveaux d'un même claveau (A_1 sur fig. 15.15) ; cette transmission d'efforts à l'intérieur d'un même claveau met en jeu la résistance interne de la pierre.

L'utilisation des branches partielles introduit un chargement extérieur non équilibré par le réseau de forces, et pour lequel une solution d'équilibre complémentaire se superposant au réseau de forces doit être trouvée (section 13.3.3 p. 226). Ce chargement extérieur correspond dans le cas des plates-bandes à joints en X à l'application d'un moment de torsion à chaque claveau égal à bF_v avec b la demi-largeur du claveau et F_v la force verticale dans la branche partielle du claveau (fig. 15.15 (a)). Les faces triangulaires formant contact entre les claveaux successifs permettent la reprise de ce moment de torsion (fig. 15.15 (b)).

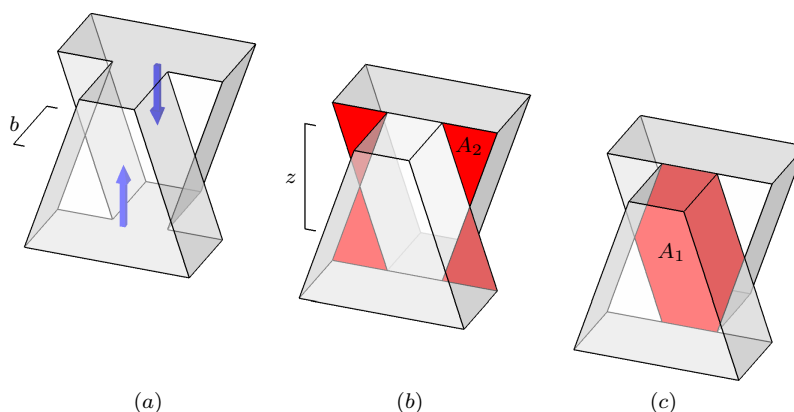


Fig 15.15 – Moment de torsion et surfaces mises en jeu par les forces verticales dans les plates-bandes à joints en X

La prise en compte de la limitation des forces verticales qui se développent dans les branches partielles est délicate, car elle demande de considérer la résistance interne de la pierre. Pour rester dans le cadre de l'approche par l'intérieur du domaine de résistance du calcul à la rupture, il faudrait alors construire les champs de contrainte équilibrés et respectant les critères de résistance à l'intérieur de la pierre, en plus des champs de contrainte sur les joints déjà utilisés ici. Cela amène également à considérer

les autres phénomènes liés à la résistance interne de la pierre (risque de rupture des angles aigus des claveaux etc.).

Pour estimer l'effet des limitations sur les forces verticales qui se développent dans les branches partielles, il est envisageable de choisir une borne pour ces forces verticales. Notons que cette démarche est seulement qualitative et n'est pas rigoureuse du point de vue du calcul à la rupture, pour les raisons qui viennent d'être évoquées.

Dans le cas de la plate-bande de type GAIA, un ordre de grandeur de la résistance de l'interface entre les deux demi-claveaux est donné par $F_{v,max1} = A_1 \cdot \frac{1}{10} \sigma_0 = 450 \text{ kg}$, avec A_1 l'aire entre deux demi-claveaux égale à 450 cm^2 (fig. 15.15 (c)). Par ailleurs, l'équilibre du moment de torsion sur les faces triangulaires avec le moment de torsion des forces verticales donne une autre limite : $bF_{v,max2} = z \cdot 2A_2 \cdot \sigma_0$, avec $A_2 = 75 \text{ cm}^2$ la surface d'un triangle, $z = 20 \text{ cm}$ le bras de levier entre deux triangles, $b = 15 \text{ cm}$ la demi-largeur de la plate-bande (fig. 15.15 (b)). Soit $F_{v,max2} = 2000 \text{ kg}$. Nous retenons comme limite pour les calculs suivant $F_{v,max} = \min(F_{v,max1}; F_{v,max2}) = 450 \text{ kg}$.

Nous définissons un multiplicateur de rupture lié à ce critère : $\lambda = F_{v,max}/F_v$. La détermination des nouveaux domaines est réalisée comme pour les autres domaines présentés jusqu'ici, en ajoutant la considération de ce multiplicateur de rupture aux autres déjà connus, bien que le multiplicateur de rupture défini ne soit pas rigoureux dans le cadre du calcul à la rupture.

Seconde approche des domaines de chargement

Les nouveaux domaines numériques avec limitation des efforts dans les branches partielles sont présentés sur la figure 15.16 dans le cas de la plate-bande à joints en X de type GAIA. Ils y sont comparés aux domaines analytiques. La limitation des branches partielles a pour effet de supprimer du domaine les chargements supportables à très faible poussée visible sur les précédents domaines numériques (fig. 15.12 (a) ci-dessus).

Le domaine numérique est plus grand que le domaine analytique pour les poussées importantes (fig. 15.16 (a)). L'utilisation de champs de contrainte plus détaillés pour déterminer une approximation intérieure du domaine des chargements pourrait peut-être permettre d'agrandir le domaine analytique pour les poussées importantes, mais ce travail n'a pas été réalisé.

Le domaine numérique est plus petit que le domaine analytique pour les faibles poussées (fig. 15.16 (a)). Cela pourrait être dû au fait que les efforts internes à la pierre ne sont pas pris en considération pour les domaines analytiques, contrairement aux domaines numériques.

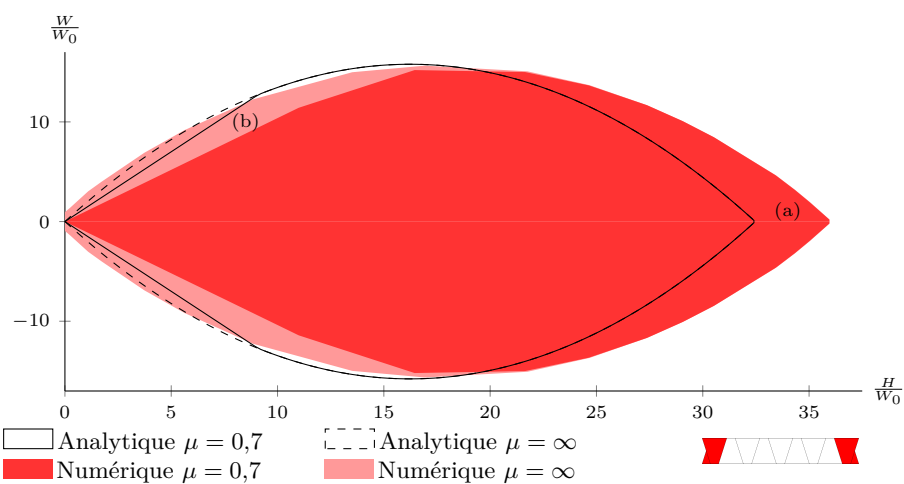


Fig 15.16 – Comparaison des domaines analytiques et numériques d'une plate-bande à joints en X de type GAIA, avec limitation des efforts dans les branches partielles pour les domaines numériques

15.5 Modèle aux éléments finis

15.5.1 Contexte

À chacun des chargements extrêmes présentés jusqu'à présent correspond une solution d'équilibre. Les solutions d'équilibre des chargements extrêmes sont des situations limites, et ne représentent pas nécessairement le comportement réel des plates-bandes sous des chargements supportables, inférieurs aux chargements limites.

Le calcul à la rupture n'a pas pour but de produire les solutions d'équilibre réelles se produisant dans la structure, mais de vérifier l'admissibilité des chargements, sans préjuger de l'état d'équilibre réel de la structure sous ce chargement.

Nous proposons dans cette section de comparer qualitativement les solutions d'équilibre des chargements extrêmes du calcul à la rupture avec celles qui peuvent être calculées avec un calcul aux éléments finis, pour observer si des réseaux avec double funiculaire dont la projection sur le plan frontal s'entrecroisent, comme ceux visibles sur la figure 15.13 au centre, se produisent effectivement dans la structure.

15.5.2 Modèle Cast3M des plates-bandes

La modélisation aux éléments finis est réalisée grâce au programme Cast3M⁽¹⁰⁾.

Le modèle est composé de deux types d'éléments finis : les éléments finis volumiques pour les blocs, et les éléments joints pour représenter l'interface entre les blocs. Les hypothèses principales du modèle sont :

- les blocs ont un comportement linéaire élastique ;
- les joints ont un comportement élasto-plastique ; il s'agit de joints dilatants 3D avec un critère de Mohr-Coulomb et écoulement associé.

Ce choix est basé sur l'hypothèse implicite que la résistance de la pierre est supérieure à celle de l'interface représentée par le joint⁽¹¹⁾ ; la rupture des constructions clavées se produit généralement par l'écrasement et l'ouverture des joints, et non par la rupture de la pierre. Le cas des plates-bandes à joints en X et les voûtes d'Abeille forment cependant un cas limite où cette hypothèse peut être prise en défaut.

Les caractéristiques des éléments volumiques de la pierre, et des éléments joints sont donnés respectivement dans les tables 15.2 et 15.3. La raideur normale et la raideur de cisaillement est obtenue par les égalités suivantes (Mondardini, 2015) :

$$K_{n,m} = \frac{E_m(1 - \nu_m)}{t(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)} \quad (15.28)$$

$$K_{s,m} = \frac{E_m}{2t(1 + \nu_m)} \quad (15.29)$$

Nous étudions la plate-bande à joints en X de type GAIA (fig. 15.17), utilisée précédemment pour l'étude de l'influence des joints. Sur la figure 15.17, le modèle

(10). Cast3M est un code de calcul développé par le Centre à l'Énergie Atomique (CEA) pour l'analyse de structures par la méthode des éléments finis et la modélisation en mécanique des fluides. Nous avons utilisé la version 2016 du logiciel.

(11). Point souligné dans le cadre de la définition des coefficients de sécurité pour le calcul à la rupture, p. 42.

Chapitre 15. Étude des plates-bandes

Notation	Valeur	Description
ρ_s	2200 kg/m ³	masse volumique
v_s	2500	vitesse du son (hypothèse)
ν_s	0,27	coefficient de poisson (hypothèse)
$K_s = \rho_s v_s^2$	13,75 GPa	module d'élasticité isostatique
$E_s = 3K_s(1 - 2\nu_s)$	18,98 GPa	module d'élasticité

TABLE 15.2 – Caractéristiques de la pierre

Notation	Valeur	Description
c	0,0 N/m ²	cohésion
$\varphi = \tan^{-1} \mu$	35,0°	angle de frottement limite
ρ_m	2200 kg/m ³	masse volumique
E_m	0,005 GPa	module d'élasticité
ν_m	0,00	coefficient de poisson (hyp.)
t	5,0 mm	épaisseur
$K_{n,m}$	1000 MN/m ³	raideur normale (si $\varepsilon < \varepsilon_{cn,m}$)
$K_{s,m}$	500 MN/m ³	raideur de cisaillement
$\varepsilon_{cn,m}$	0,05	seuil de déformation
$E_{f,m}$	$2K_{n,m}$	seconde raideur normale (si $\varepsilon \geq \varepsilon_{cn,m}$)

TABLE 15.3 – Caractéristiques des joints

est composé des 7 blocs intérieurs en blanc, et de deux blocs rouges représentant les appuis. Les blocs d'appui ne font pas partie du modèle, ils servent uniquement à contrôler les déplacements des nœuds des joints d'appuis du côté des blocs d'appuis.

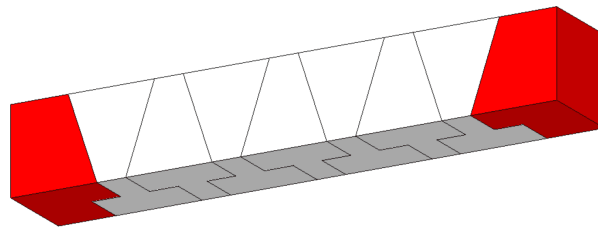


Fig 15.17 – Blocs composant le modèle Cast3M pour la plate-bande de type GAIA, avec blocs d'appuis en rouge

Le chargement est composé du poids propre de la pierre et des joints, et du déplacement horizontal des appuis. Il est appliqué en deux phases.

- application du poids propre (pp) ;
- déplacement imposé horizontal des appuis :
 - Cas (ec) : écartement des appuis de 1,0 mm ;
 - Cas (ra) : rapprochement des appuis de 10,0 mm.

Pour chaque phase, le calcul est réalisé en plusieurs étapes de manière à suivre l'évolution des résultats au fur et à mesure du chargement.

Les calculs sont réalisés sous l'hypothèse des petits déplacements, de manière à obtenir des solutions d'équilibre sur la géométrie initiale, comparables aux solutions d'équilibre utilisées pour le calcul à la rupture, qui sont également décrites sur la géométrie non déformée.

15.5.3 Solutions d'équilibre

Les solutions d'équilibre Sol1, Sol2 et Sol3 correspondent respectivement à la solution d'équilibre après écartement des appuis (pp+ec), après application du poids propre seul (pp), et après rapprochement des appuis (pp+ra). La convention de signe utilisée avec Cast3M est compression négative.

La figure 15.18 représente les résultantes des forces sur les joints sous la forme de segments bleus (joints rectangulaires inclinés), de segments verts (joints triangulaires dans la moitié supérieure de la plate-bande) et de segments rouges (joints triangulaires dans la moitié inférieure de la plate-bande). L'épaisseur des segments est proportionnelle à la racine carrée de l'intensité des forces. Les longueurs des segments sont constantes et ne sont pas liées à l'intensité des forces. Les croix noires localisent le point d'application des forces sur les joints.

Cette figure montre que les huit forces qui s'appliquent à bloc ne s'intersectent pas. Il n'est pas possible de transformer les solutions d'équilibre trouvées avec les éléments finis en réseaux de forces, ou en funiculaires. Cependant, la projection des forces sur le plan frontal (vue de face) montre une similitude avec les réseaux de forces des chargements extrêmes.

Les forces sur les joints triangulaires assurent la résistance à la torsion des plates-bandes. Elles sont visibles sur la figure 15.18, et ne sont généralement pas perpendiculaires aux joints. Les contraintes sur ces joints triangulaires sont très inférieures aux contraintes maximales sur les joints rectangulaires (fig. 15.19). Le rapport entre la contrainte maximale sur les joints rectangulaires et les contraintes maximales sur les joints triangulaires vaut 5 (ordre de grandeur sur les trois solutions présentées ici).

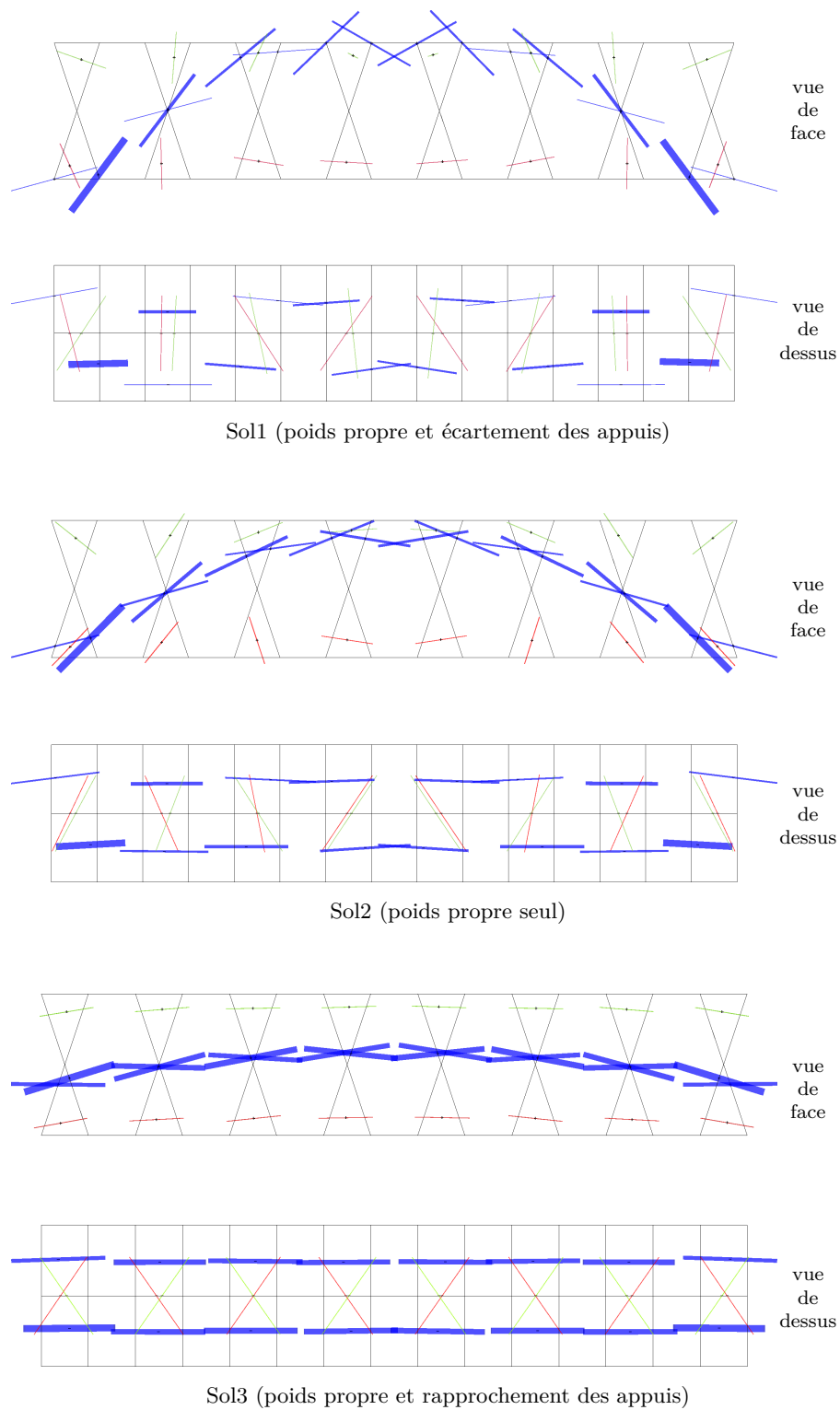
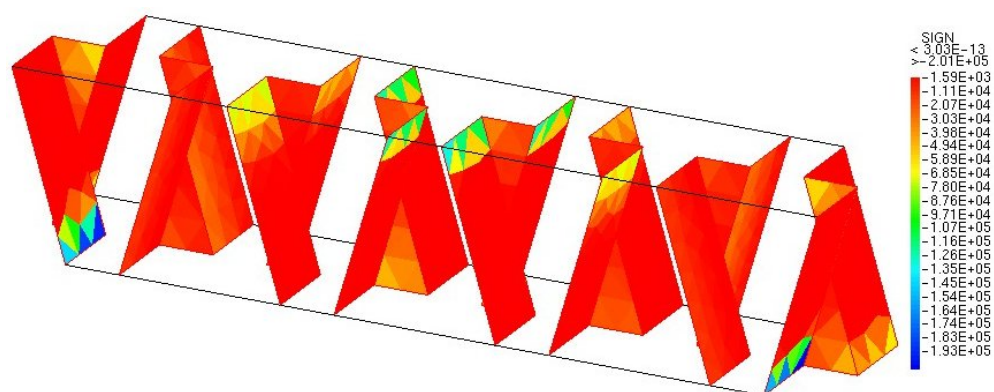
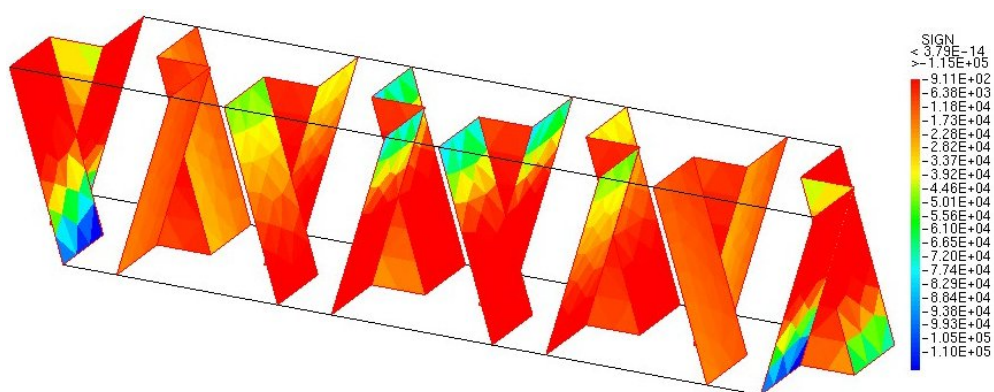


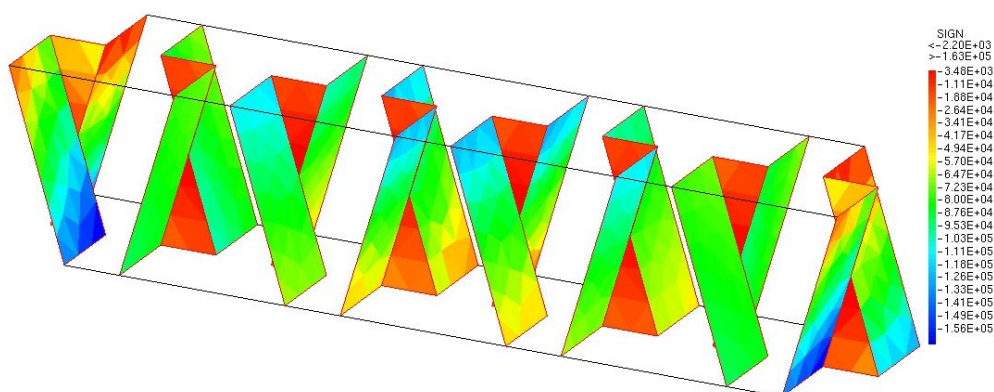
Fig 15.18 – Directions et intensités des résultantes des forces, vue de face et vue de dessus, pour les solutions d'équilibre générées par Cast3M



Sol1 (poids propre et écartement des appuis)

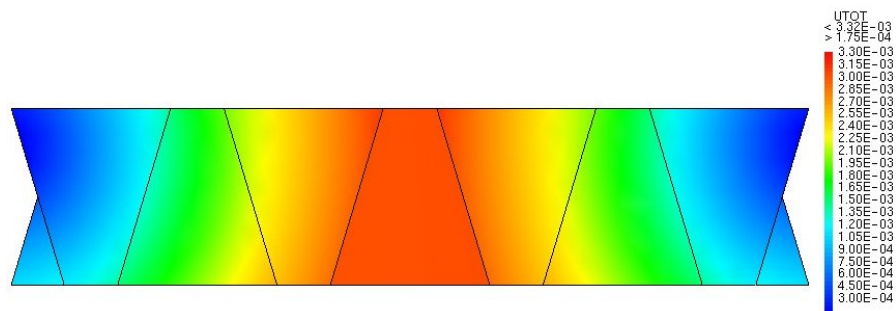


Sol2 (poids propre seul)

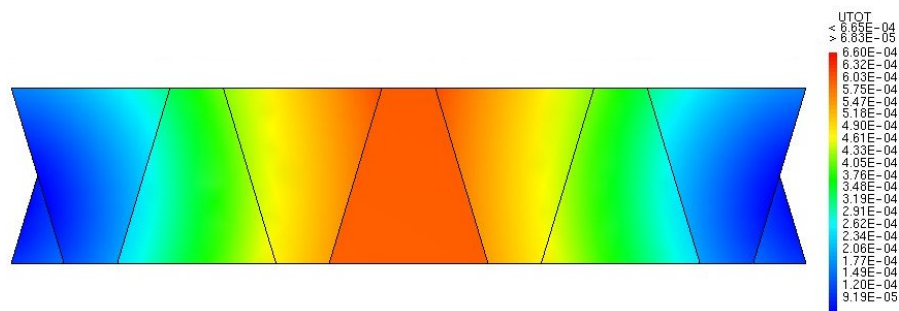


Sol3 (poids propre et rapprochement des appuis)

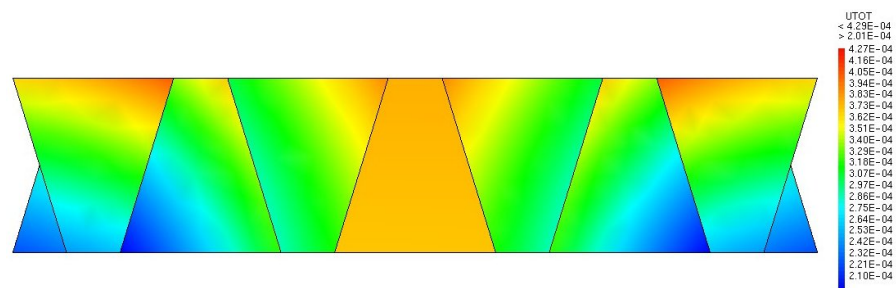
Fig 15.19 – Contraintes normales sur les joints $[N/m^2]$, pour les solutions d'équilibre générées par Cast3M



Sol1 (poids propre et écartement des appuis)



Sol2 (poids propre seul)



Sol3 (poids propre et rapprochement des appuis)

Fig 15.20 – Déplacements [m], pour les solutions d'équilibre générées par Cast3M