4.3.2013

Teória oznamovania

Cv. 3

skalárny súčin signálov $\langle f, g \rangle$

Usporiadané dvojice

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{N} f_k \cdot g_k \qquad f_1 g_1 + f_2 g_2 \dots$$

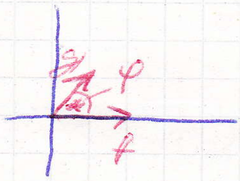
$$\boxed{f \odot g = |f| \cdot |g| \cdot \cos\varphi}$$

$f = 2,0$

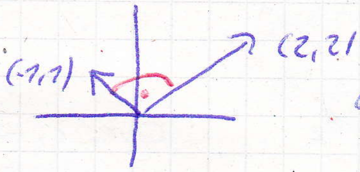
$g = (1,1)$

$= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ =$

$= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{2}}$ $\Rightarrow$



	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$



$\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow f \odot g = 0$

Skal. súčin

$$f \odot g = 0 \iff f \perp g$$

skalárny súčin $\langle \,, \rangle : V \times V \to R$ dvojici vektorov priradí skalár

$$\boxed{\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}}$$ symetrické (kompl. združené)

$\langle f, f \rangle \geq 0$; 0 iba pre $f = 0$

$$\boxed{\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle}$$

$$\boxed{\langle cf, g \rangle = c \cdot \langle f, g \rangle}$$

<u>N-tice reálnych čísel</u>

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{N} f_k \cdot g_k$$

<u>N-tice komplexných čísel</u>

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \overline{g_k}$$

N-tice

$f = (\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_n)$ – náhodný vektor

$f = (f_1, f_2, f_3 \quad \dots \quad f_n)$ každé z čísel je náhodná premenná

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{N} f_k \cdot g_k$$ – výsledok je náhodná premenná

$$\langle f, g \rangle = E\left(\sum_{k=1}^{N} f_k \cdot g_k\right)$$

Hilbertove priestory

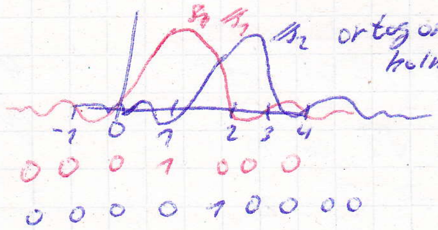
$\langle\ ,\ \rangle$ úplné ~~ne~~úplné

- majú skalárny súčin a sú úplné

$f = c_0 B_0 + c_1 B_1 + c_2 B_2 \ldots c_n B_n$ / B_0 Shannonova báza $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 \ldots$

- v 1 bode jednička a postupne zanikne

$\langle f, B_0\rangle = c_0 \overset{\neq 0}{\langle B_0, B_0\rangle} + c_1 \overset{=0}{\langle B_1, B_0\rangle} +$
$+ c_2 \underset{=0}{\langle B_2, B_0\rangle} + \ldots$



ortogonálne kolmé $= \langle B_0, B_1\rangle =$

$\cancel{\langle f, B_0\rangle}$ $c_0 = \dfrac{\langle f, B_0\rangle}{\langle B_0, B_0\rangle}$

$c_1 = \dfrac{\langle f, B_1\rangle}{\langle B_1, B_1\rangle}$

$f = c_0 B_0 + c_1 B_1 + c_2 B_2$

$c_0, c_1, c_2 \to c_0', c_1', c_2'$

$\to f' = c_0' B_0 + c_1' B_1 + c_2' B_2$

prenesený signál

$|f - f'| \to \min$

ak B_0, B_1, B_2 nie sú ortogonálne

$\langle f, B_0\rangle = c_0 \langle B_0, B_0\rangle + c_1 \langle B_1, B_0\rangle + c_2 \langle B_2, B_0\rangle$

$5 = c_0 \quad 3 \qquad c_1 \quad 2 \qquad c_2 \quad 1$ vypočítame ešte B_1, B_2

$|f| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$

$f = (1, 2, 4, 3, 2, 1, 5, 7, 2, 3)$

→ navrhnite $B_0, B_1 \ldots B_{10}$

→ šum ± 1 pri prenose c

→ vypočítajte chybu prenosu

$B_0, B_1 \ldots B_{10}$

vymyslieť bázu $B_0, B_1 \ldots$

vypočítajte koef. tej bázy, koeficienty zašumíme

vyrobíme f' a porovnáme s f

~~fl~~ $f_b = c_0 \cdot b_0 + c_1 b_1 \ldots$

$5 = c_0\, 2 + c_1\, 3$

$2 = c_0\, 4 + c_1\, 2$

$\underset{2\times1}{V} = \underset{2\times2}{M} \cdot \underset{2\times1}{c}$

$M^{-1} V = M^{-1} M . C$

$C = \underset{(2\times2)}{M^{-1}} . \underset{(2\times1)}{V}$

$f = c' . B$

$inv(B) = f \cdot c'$

$f = M . c$

$f = c . B$

$f \cdot inv(B) = C$

5.3.2013

Pr. 3

modem – moduluje/transformuje binárny signál na spojitý/analógový signál

Signálový priestor

binárneho signálu

báza

(0), (1) – 1rozmerný priestor

$\mathbb{b} = (1)$ $\quad k = \{0, 1\}$ – skaláry

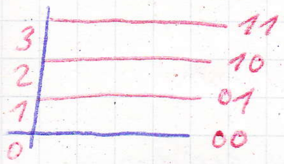
sčítanie, násobenie – modulo 2

0 | 1 1 0 1 0 (T)

Charakteristický interval – dĺžka trvania 1 bitu

prenosová rýchlosť – počet prenesených bitov za 1 sekundu

viacúrovňové – prenášame viacero bitov naraz

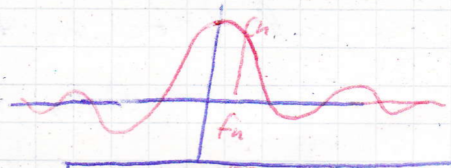


$v = \frac{1}{T} \cdot 2$ $\Rightarrow v = \frac{\log 2 . V}{T}$

rýchlosť (prenosová)

modulačná rýchlosť $\frac{1}{T}$

spojitého signálu



$$\boxed{f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot \sin f_n t}$$

spektrum signálu

$\mathbb{f} = (f_0, f_1 \ldots f_n)$ – časový priebeh signálu

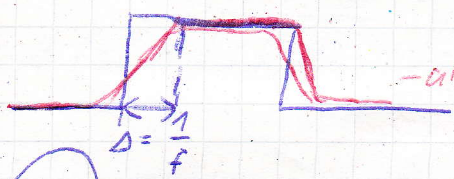
↓

spektrum signálu v 1-ovej báze

$\mathbb{f} = \sum c_n \mathbb{b}_n$

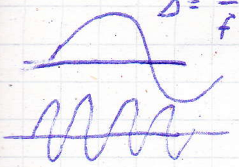
ľudský sluch 20 Hz – 20 kHz

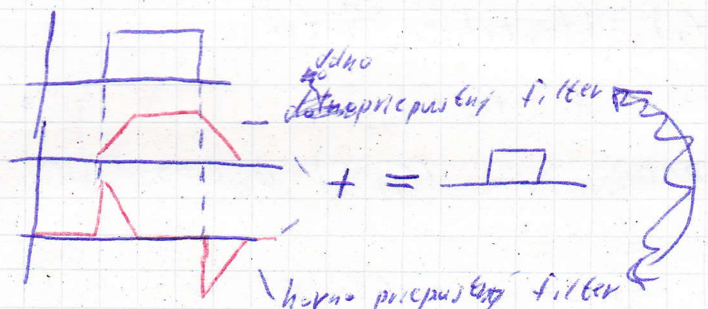
telefónna kvalita – prenáša frekvencie 300 Hz – 3 400 Hz



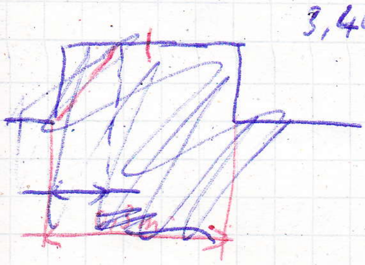
– ak orežeme vysoké frekvencie, vznikajú lichobežníky

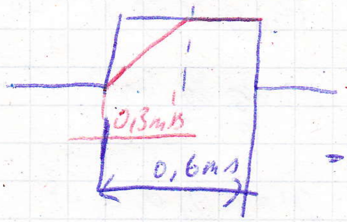
strmé nábežné hrany vytvárajú vysoké frekv.





3,400 kHz





$\Rightarrow v = \frac{1}{0{,}6\,ms} = 1660$ bit/s

telefónny kanál – 1 rozmerný signálový priestor

$\mathbb{b} = \sin \omega t, \; t \in \langle 0, T \rangle$ – bázický vektor

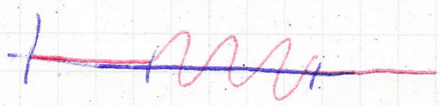
skaláre: $k = \{0, 1\}$ …

$\mathbb{f} = k . \mathbb{b}$

$f_0 = 0 . \mathbb{b}$

$f_1 = 1 . \mathbb{b}$

0 1 0



⇐ amplitúdová modulácia

$b_1 = \sin \omega_1 t$ } 2. rozmerný sign. priestor $f_1 = b_1$
$b_2 = \sin \omega_2 t$ $f_2 = b_2$

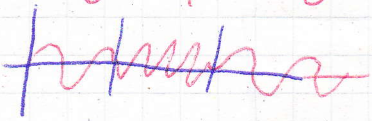
$f = c_1 b_1 + c_2 b_2$ $c \in \{0, 1\}$

$c = 0$ $f = b_1$ $c_1 = f(c)$
$c = 1$ $f = b_2$ $c_2 = f(c)$

$f = (1+c) \cdot b_1 + c b_2$ ⇐ modulo 2

$f = (1-c) b_1 + c b_2$ ⇐ klasické sčítanie

0 1 0



⇐ frekvenčná modulácia

Prispôsobenie pomalý zdroj – rýchly kanál

zdroj
$b_0 = (1, 0)$
$b_1 = (0, 1)$

kanál
$b_0 = (1, 0 | 0, 0 | 0, 0 | 0, 0)$
$b_1 = (0, 1 | 0, 0 | 0, 0 | 0, 0)$
1. zdroj 2. zdroj 3. 4. ⇒ multiplex

$b_0 = (1, 0)$ $b_0 = (1111\ 0000)$ ⇒ vyrovnanie rýchlostí
$b_1 = (0, 1)$ $b_1 = (0000\ 1111)$

Reálny signálový priestor

$(f_1 \cdot f_2) = (f_2 \cdot f_1)$ symetria

$(f_1 \oplus f_2, f_3) = (f_1, f_3) \oplus (f_2, f_3)$

$(k \otimes f_1, f_2) = k \cdot (f_1, f_2)$

$(f_1, f_1) \geq 0$ pričom $(f_1, f_1) = 0 \Leftrightarrow f_1 = 0$ pozitívnosť

$V \cdot V \to R$ – porovnanie vektorov

$f = (0, 1, 2, 3)$ $(f, (g_0, g_1, g_2, g_3)) = 0$
$g = (g_0, g_1, g_2, g_3)$ $(f, (g_3, g_0, g_1, g_2)) = 1$ posuv o 1

$\Rightarrow g = (1, 0, 0, 0)$

ak urobíme $\langle f, g \rangle$ = výsledok je posuv vektorov

---

$(1, 1, 1, 1)$ ⇒ súvodlné voči posunutiu
$(1, -1, 1, -1)$ skal. súčin je rovnaký
$(1, 1, -1, -1)$
$(-1, -1, -1, 1)$

11.3.2013

Pr. 4

sk. súčin – priradenie 2 vektory → číslo (skalár)

$\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ symetria

$\langle f, f\rangle \geq 0$ pozitívnosť, $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = \emptyset$

$\langle c.f, h+g\rangle = c.\langle f,h\rangle + c\langle f,g\rangle$ bilinearita

$g, f \in$ spojité komplexné funkcie na $\langle 0,1\rangle$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).\overline{g(x)}\,dx$$

$f, g \in R^n$

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^{n} f_k . g_k$$

Veľkosť $f \Rightarrow \|f\|$

$\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = \emptyset$

$\|f-g\| = \|g-f\|$

$\|f-h\| \leq \|f-g\| + \|g-h\|$, Δ nerovnosť

} metrika

Hamingova metrika $(0,1,0,0,0,1,0,1)$
$(0,1,1,1,0,1,0,0)$ $= 3$ v koľkých 0,1 sa nezhodujú

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{f_0^2 + f_1^2 + \dots f_{n-1}^2} = \sqrt{c} = \sqrt{(f_0, f_1 \dots f_{n-1}) \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdot \\ f_{n-1} \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{(f_0, f_1 \dots f_{n-1}) \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 01\dots \\ 001\dots \\ \dots 001 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}}$$

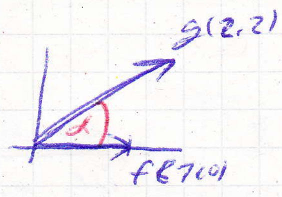
→ cez maticu môžeme meniť dôležitosť niektorých zložiek

ortogonálny = pravouhlý

$\langle f, g\rangle = |f|.|g|.\cos\varphi$

$= 1.\sqrt{8}.\cos 45°$

$= \sqrt{8}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{2}}$



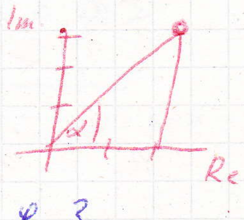
$(2,2).(1,0) = \underline{\underline{2}}$

$\cos 90° = 0$ → ak skal. súčin $= 0$ ⇒ vektory sú kolmé

$\langle f, g\rangle = 0 \Leftrightarrow f \perp g$

$c = 2 + 3i = |c|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2^2+3^2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}} + i\frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}\right)$

algeb. tvar — goniometrický tvar



$= |c|.e^{i\varphi} = \sqrt{2^2+3^2}.e^{i\,\mathrm{arctg}\frac{3}{2}}$

exponenc. tvar

$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{3}{2}$

$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}$

$b_1 = \sin \omega_1 t$
$b_2 = \sin \omega_2 t$ > 2 rozmerný sign. priestor

$f_1 = b_1$
$f_2 = b_2$

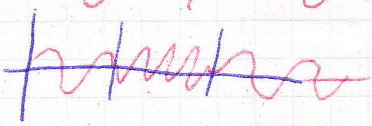
$f = c_1 b_1 + c_2 b_2$ $\quad c \in \{0,1\}$

$c = 0 \quad f = b_1$ $\qquad c_1 = f(c)$
$c = 1 \quad f = b_2$ $\qquad c_2 = f(c)$

$f = (1+c) . b_1 + c b_2$ ⇐ modulo 2

$f = (1-c) b_1 + c b_2$ ⇐ klasické sčítanie

0 1 0



⇐ frekvenčná modulácia

Prispôsobenie pomalý zdroj – rýchly kanál

zdroj
$b_0 = (1,0)$
$b_1 = (0,1)$

kanál
$b_0 = (1,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0)$
$b_1 = (0,1 | 0,0 | 0,0 | 0,0)$
1. zdroj, 2. zdroj, 3, 4. => multiplex

$b_0 = (1,0)$ $\qquad b_0 = (1111\ 0000)$
$b_1 = (0,1)$ $\qquad b_1 = (0000\ 1111)$ => vyrovnanie rýchlostí

Reálny signálový priestor

$(f_1 . f_2) = (f_2 . f_1)$ symetria

$(f_1 \oplus f_2, f_3) = (f_1, f_3) \oplus (f_2, f_3)$

$(k \otimes f_1, f_2) = k . (f_1, f_2)$

$(f_1, f_1) \geq 0$ pričom $(f_1, f_1) = 0 \iff f_1 = 0$ pozitívnosť

$V \cdot V \to R$ - porovnanie vektorov

$f = (0,1,2,3)$ $\qquad (f, (g_0, g_1, g_2, g_3)) = 0$
$g = (g_0, g_1, g_2, g_3)$ $\qquad (f, (g_3, \underset{0}{g_0}, \underset{1}{g_1}, \underset{2}{g_2})) = 1$ posun o 1

$\Rightarrow g = (1,0,0,0)$

ak urobíme $\langle f, g \rangle$ = výsledok je posun vektorov

---

$(1,1,1,1)$ => sú odolné voči posunutiu
$(1,-1,1,-1)$ skal. súčin je rovnaký
$(1,1,-1,-1)$
$(-1,-1,-1,1)$

$f = c_0 b_0 + c_1 b_1 + \dots\; c_{n-1} b_{n-1}$ jednoznačnosť - nezávislosť

rozklad vektora do bázy všetky - úplnosť

$\langle f, b_0 \rangle = c_0 \langle b_0, b_0 \rangle + c_1 \langle b_1, b_0 \rangle + \dots\; c_{n-1} \langle b_{n-1}, b_0 \rangle$

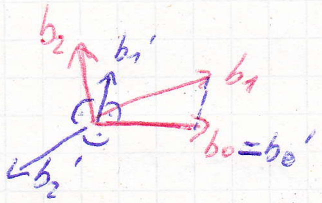
$\langle f, b_1 \rangle =$

$\vdots$

$\langle f, b_{n-1} \rangle = c_0 \langle b_0, b_{n-1} \rangle + c_1 \langle b_1, b_{n-1} \rangle + \dots\; c_{n-1} \langle b_{n-1}, b_{n-1} \rangle$

ak je báza ortogonálna $\Rightarrow$ $c_0 = \dfrac{\langle f, b_0 \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle}$

b_0, b_1, b_2



$B = (b_0, b_1, b_2)$

$B' = (b_0', b_1', b_2')$

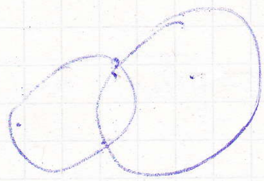
$b_1 - \tilde{b}_1 \perp b_0 \qquad \tilde{b}_1 = c \cdot b_0$

$b_1 - c \cdot b_0 \perp b_0$

$\langle b_1 - c b_0, b_0 \rangle = 0$

$\langle b_1, b_0 \rangle - c \cdot \langle b_0, b_0 \rangle \Rightarrow c = \dfrac{\langle b_1, b_0 \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle}$

$\tilde{b}_1 = \dfrac{\langle b_1, b_0 \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} \cdot b_0' \Rightarrow b_1' = b_1 - \tilde{b}_1$



$b_2' \perp b_0', \quad b_2' \perp b_1'$

$b_2' = b_2 - \tilde{b}_2$

$b_2 - \tilde{b}_2 \perp b_0 \qquad b_2 - \tilde{b}_2 \perp b_1'$

$\tilde{b}_2 = c_0' b_0' + c_1' b_1'$

$\tilde{b}_2 = \dfrac{\langle b_2, b_0' \rangle}{\langle b_0', b_0' \rangle} \cdot b_0' + \dfrac{\langle b_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} \cdot b_1'$

$\langle b_2, b_0' \rangle = \langle c_0 b_0, b_0' \rangle + c_1' \underbrace{\langle b_1', b_0' \rangle}_{=0} \qquad c_0 = \dfrac{\langle b_2, b_0' \rangle}{\langle b_0', b_0' \rangle}$

$\langle b_2, b_1' \rangle = \underbrace{\langle c_0' b_0, b_1' \rangle}_{0} + c_1' \langle b_1', b_1' \rangle \qquad c_1 = \dfrac{\langle b_2, b_1' \rangle}{\langle b_1', b_1' \rangle}$

$b_2' = b_2 - \tilde{b}_2 = b_2 - \dfrac{\langle b_2, b_0 \rangle}{\langle b_0', b_0' \rangle} \cdot b_0' - \dfrac{\langle b_2, b_1' \rangle}{\langle b_1', b_1' \rangle} \cdot b_1'$

Walsh Hadamard báza

$B_0 = 1$

$B_1 = \begin{pmatrix} B_0 & B_0 \\ B_0 & -B_0 \end{pmatrix}$

$B_{n+1} = \begin{pmatrix} B_n & B_n \\ B_n & -B_n \end{pmatrix}$

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

DÚ

$\Leftarrow$ GPS

Rozklad vektora do bázy Walsh-Hadamard

$$(5, 2, 3, 1, 2, 3, 5, 1) = \frac{22}{8} \cdot (1111\ 1111) + \frac{8}{8} (1\text{-}11\text{-}1\ 1\text{-}11\text{-}1)$$

$$\frac{\langle v, b \rangle}{\langle b, b \rangle} \cdot b$$

3 vety ako funguje GPS - ~~2~~ T3 ✓

Harmonická báza

$N = 4$

$n=0 \quad b_0 = (1, 1, 1, 1)$

$n=1 \quad b_1 = (1, i, -1, -i)$

$n=2 \quad b_2 = (1, -1, 1, -1)$

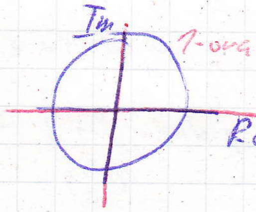
$n=3 \quad b_3 = (1, -i, -1, +i)$

b

$b_{nk} = e^{i \cdot \frac{2\pi}{N} n \cdot k}$

$e^{i \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 1}$

$c = |c| \cdot e^{i\varphi}$

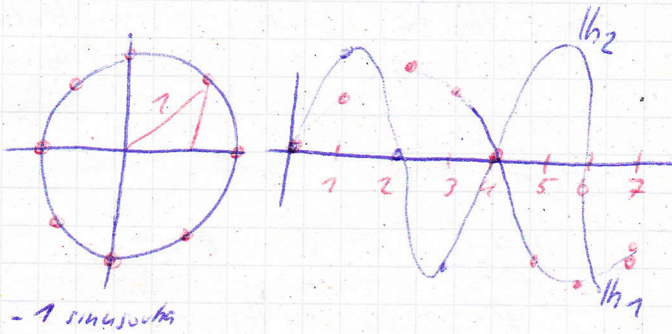


$N = 8$

$b_0 = (1\,1\,1\,1\ \ 1\,1\,1\,1$

$b_1 = ($

$b_2 = ($



všetky vektory sú navzájom kolmé

$\langle b_1, b_3 \rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot (\overline{i}) + (-1)(-1) + -i \cdot (\overline{-i}) =$

'kompl. združené'

$= 1 + (-1) + 1 - 1 = 0$

b_1 - 1 sínusovka

b_2 - 2 sínusovky

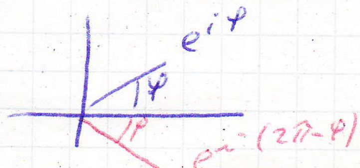
b_3 - 3

$\vdots$

b_7 - 7

$$\boxed{\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}}$$

$\cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 + 0$



$e^{i \cdot (2\pi - \varphi)} = e^{i2\pi} \cdot e^{-i\varphi}$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N} l \cdot k} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N} m \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N} k (l-m)}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\alpha k}$$

$$\langle h_1, h_3 \rangle = \sum_{k=0}^{3} e^{i\frac{2\pi}{4} k \cdot 2}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(l-m)N}}{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(l-m)}} = \underline{0}$$

$=0$

nesmie byť $\neq 0$

12.3.2013 Cv. 4

Walsh-Hadamard 4 ~~$h_0 \ldots h_{15}$~~ $w_0 \ldots w_{15}$

Harmonické bázy $h_0, \ldots h_{15}$

chyba ak w_7 uvedom v HB

h_7 —||— v WH

$f = (1, 2, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 2, 3)$

$f - f_{LR}$ $f_{LR} = c_0 + c_1 t$

1 1 1 1 1
0 1 2 .. 15

18.3.2013 Cv 5

$(50, 0{,}7) = \underline{50}\,(1,0) + 0{,}7\,(0,1)$ $h_1 = (0,1)$ $h_2 = (1,0)$

$\tilde{f}$ (premet do podpr. h_1) $= (0, 0{,}7)$

$\tilde{f}$ (— " — h_2) $= (50, 0)$

~~pre~~ $h_0, h_1 \ldots h_n$ - kolmé - rovnakej veľkosti ⇒ ~~čím~~ čím väčší koeficient tým väčší prínos vektora v danom smere

Harm. báza $N=8$, WH

$\|f - \tilde{f}\| = 0$ $f = \tilde{f}$

$f = c_0 h_0 + c_1 h_1 + \ldots c_{n-1} h_{n-1}$

$f = c_0 wh_0 + c_1 wh_1 \ldots c_{n-1} wh_{n-1}$

$c_k h_k$
$c_{n-k} h_{n-k}$ > komplexne združené

ff = (1, 2, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 2, 3)

Lineárna regresia - odstránenie lineárneho trendu

DÚ

zmeniť vstupný signál - ff = váš vlastný hlas (AHOJ)

fft - fourier

+ zistiť najv. hlasovú frekvenciu

+ nájsť 1 sinusoidku pre HB, WH

19.3.2013 Pr. 5

Náhodný signál

$t \in T$, $f \in F$ $f(t)$ - Deterministický signál, v každom čase vieme priradiť hodnotu

Náhodná premenná - výsledok náhodného javu

Pravdepodobnosť javu $P(i)$ - $\sum_{i=1}^{n} p(i) = 1$

Disjunktné javy - nemôžu nastať súčasne - napr. hod kockou - nepadnú naraz 2 čís

Úplný disjunktný systém - hod kockou - musí padnúť 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 - musí nastať práve 1 jav

hod kockou $p = p(i) = p(j)$

$\hookrightarrow p(1) + p(2) + \dots + p(6) = 1$

$6p = 1$

$p = \frac{1}{6}$

Náhodná veličina - to isté čo náhodný jav (viaže sa k celým číslam)

Náhodný proces - systém náh. veličín v čase

Nah. veličina $f(t, w)$ - závisí od času t, aj náhody w

$w \in \{ \mathcal{U}, P, F \}$

množina javov, Pravd., množina celých čísel

zobrazenie

Distribučná funkcia

$F(x) = P\{ f(t, w) < x \}$ - pravd., že nastal jav menší ako x

$F(x_1, x_2, x_3) = P\{ f(t_1, w) < x_1, f(t_2, w) < x_2, f(t_3, w) < x_3 \}$

Stredná hodnota $E(t) = E\{X\}$

$E(t) = (E(1), E(2), E(3) \dots E(5))$

Rozptyl $D(t) = D\{X\}$, $t \in T$ kde $D\{X_t\} = E\{X_t^2\} - E^2(t)$

~~Stacionárny proces - rozptyl~~

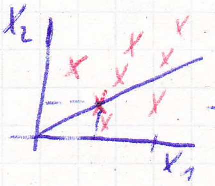
- základné číselné charakteristiky sa v čase nemenia

Kovariančná funkcia (matica)
- stupeň lineárnej závislosti medzi 2 náhodnými veličinami

$$R(t_1, t_2) = E\{[X_{t_1} - E(t_1)][X_{t_2} - E(t_2)]\}, \quad t_1, t_2 \in T$$ = vycentrovaný proces

Korelácia:

$$E\{X_{t_1}, X_{t_2}\}$$



lin. priamka

- čím sú body bližšie k priamke tým je lin. závislosť väčšia

$$\mathbb{R} = \begin{array}{c|ccccc} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ \hline t_1 & D_{11} & & & & \\ t_2 & & D_{22} & & & \\ t_3 & & & D_{33} & R_{34} & \\ t_4 & & & & & \\ t_5 & & & & & \end{array}$$

R_{11} - rozptyl

$R_{XX} = D_{XX} \qquad E\{X_{t_1} - E(t_1)\}^2$

- symetrická matica
- na diagonále rozptyly

1	2
20	41
30	20
20	10
12	50
E_1	E_2

①

② odpočítame priemer

③ vynásobím zložky

4 - spočítame priemer

Záporná ~~korelácia~~ kovariancia => nepriama úmera, 1. veličina ↑ 2. vel ↓

Stacionárny náhodný signál

kovariancia sa nemení bez ohľadu na to aké t_1, t_2 zvolím

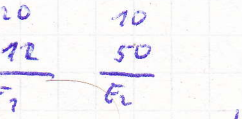
$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} D_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} \\ R_{15} & D_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ & & D_{11} & & \\ & & & D & \\ & & & & D \end{pmatrix}$$

Rozptyly sa včase nemenia

2 po sebe idúce dni majú rovnakú kovarianciu (dopredu aj dozadu)

$R_{12} = R_{15}$

Súčet náhodných signálov



$f_1(t_1, w) + f_2(t_1, w)$

$P\{(\underset{hod}{N_1} + \underset{hochov}{N_2}) < 3\}$

$P(N_1 = 1) \cdot P(N_2 = 1) = P_3$

$P\{ \quad < 4\}$

$P(N_1 = 2) \cdot P(N_2 = 1) + P(N_1 = 1) \cdot P(N_2 = 2) + P(N_1 = 1) \cdot P(N_2 = 1) < 4$

$$P\{N_1 + N_2 < k\} = \sum_{i=1}^{k-1} P(N_1 + N_2 < k / N_1 = i) \cdot P(N_1 = i)$$ veta o úplnej pravd.

$$= \sum_{i=1}^{i=1} P\{N_2 < k - i\} \cdot P(N_1 = i)$$

Nulový proces – nulový vektor

Opačný vektor – dáme mínusové znamienko

skalárny súčin

$f = (f(\omega,0), f(\omega,1) \ldots f(\omega,n-1))$

$$\boxed{(f, f') = \sum_{i=0}^{n-1} f(\omega, i) \cdot f'(\omega, i)}$$

25.3.2013 Cv. 6

Ako dlho treba hádzať, kým padne 6tka

1, 6, 1, 7, 4, 12, 2, 1, 3 $\frac{37}{9} = 6,1$

$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ldots = \nu$

$\frac{1}{6} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3\right) \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{5}{6} \; \frac{5}{6}^2 + \frac{5}{6}^3 \ldots\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1$

$\frac{5}{6} + \frac{5}{6}^2 + \frac{5}{6}^3 \qquad = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{6}} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{5}{6}^3 \ldots \qquad = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{6}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2$

$\Rightarrow \sum = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = \underline{\underline{6}}$ priemerný počet, kým hodím 6tku

8, 5, 3, 5, 7, 9, 2, 6, 5, 6, $\hat{E}(HH) \frac{56}{10} = \underline{\underline{5,6}}$

$D(HH) = (1 - \hat{E}(HH))^2 \cdot 8 + (2 - \hat{E}(HH))^2 \cdot 6 + (3 - \hat{E}(HH))^2 \cdot 15$

1	2	3	4	5	6	7	– počet pokusov
8	6	15	18	15	14	14	

$$cov(X,Y) = \frac{(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))}{\sqrt{D(X) \cdot D(Y)}}$$

I, 1 3 2 1 2 4 5 6 1 2 6 3 1 4 4 2 5 0 4 1 2 – stacionárny

2 kocky súčet – 7 7 6 7 6 8 6 7 10 7 6 9 10 4 7 stacionárny

III P nepárny 1 kocka 2 kocky } 6 4 8 5 7 4 5 3 7 5 2 2 5 4 6 – nestacionárny

~~Cov(I)~~

$\hat{E}(I) = (E(t_0), E(t_1), E(t_2) \ldots)$

$\hat{D}(I) = (D(t_0), D(t_1), D(t_2) \ldots)$

$D = (E(I - E(t_0))^2, E(I - E(t_1))^2, \ldots)$

$$r(x,y) = \mathcal{E}\left[(x-\mathcal{E}(x))(y-\mathcal{E}(y))\right]$$ – kovariancia

$$\cancel{}(x,y) = \frac{r(x,y)}{\sqrt{D(x)\,D(y)}}$$ – korelácia

$$R(I) = \begin{pmatrix} r(X_{t_0}, X_{t_0}), \\ r(X_{t_1}, X_{t_0}), \\ \\ \end{pmatrix}$$

simulacia pre potuchy P1, P2, P3

mobil	t_0 CENA	t_1 VÁHA	t_2 ~~obs~~ veľkosť	t_3 pamäť	t_4 wifi
M1	10	90	9	~~8~~ 6	1
M2	50	150	15	2	~~0~~ 1
M3	30	100	10	10	1
M4	10	110	10	8	1
M5	40	80	6	4	0
E(t)	28	106	10	6	0,8

Korelačná matica

$$r(t_0, t_1) = \mathcal{E}(X_{t_0} - \mathcal{E}(X_{t_0}).(X_{t_1} - \mathcal{E}(X_{t_1}))$$

centrované

	$\mathring{C}$ena	$\mathring{V}$áha	$\mathring{v}$eľkosť	$\mathring{p}$amäť	$\mathring{w}$ifi
M1	-18	-16	-1	0	0,2
M2	22	44	5	-4	0,2
M3	2	-6	0	4	0,2
M4	-18	4	0	2	0,2
M5	12	-26	-4	-2	-0,8

$\Leftarrow X_t - \mathcal{E}(X_t)$

	c.v	c.ve	c.p	c.w	v.ve	v.p	v.w	ve.p	ve.w	p.w	c.c	v.v	ve.v
M1		-2						0					
M2								-20					
M3								0					
M4								0					
M5								8					
E(t)	172	~~172~~ 16	-28	26	68	-28	26	-2,4	0,8	-0,24	~~129~~ 126,4	5,84	8,4

$$R = \begin{pmatrix} 126{,}4 & 172 & 16 & -28 & 26 \\ 172 & 5{,}84 & 68 & -28 & 26 \\ 16 & 68 & 8{,}4 & -2{,}4 & 0{,}8 \\ -28 & -28 & -2{,}4 & 8 & -0{,}24 \\ 26 & 26 & 0{,}8 & -0{,}24 & 0{,}16 \end{pmatrix}$$

$$R\mathbb{V} = \lambda . \mathbb{V}$$

$$\cancel{(R - \lambda)\mathbb{V}} =$$

$$(R - \lambda . \mathbb{E}) . \mathbb{V} = 0$$

Singulárna matica – nadhy sú nezávislé $\Leftrightarrow$ D = 0 determinant

$\Rightarrow$ 1 riešenie

2 6. 3. 2013 Pr. 6

$$E(X_t) = \int_X x\, f(x)\, dx \qquad D(X_t) = E\{(X_t - E(t))^2\}$$

Korelácia - nie je centrovaná
Kovariancia - je centrovaná

Ortogonálne náhodné signály

skalárny súčin $\boxed{E\{\sum_{t \in T} X_t \cdot Y_t\}}$ X_t, Y_t - náhodné veličiny

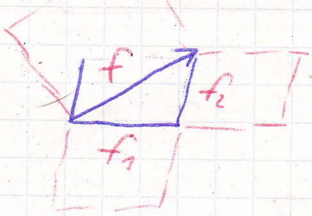
$E\{\sum_{t \in T} X_t \cdot Y_t\} = \emptyset$ $X \perp Y$ ⇒ ~~procesy sú~~

ak 2 procesy sú nekorelované ⇒ sú na seba kolmé

$f = f_1 + f_2$

$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$ - Pytagorova veta

$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 = (f, f)$ - energia signálu

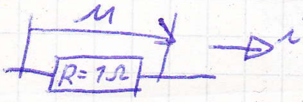


Euklidovský priestor skal. súčin vektora so sebou

$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} f_i^2}$

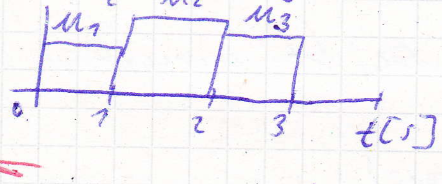
~~$\|f\|^2$~~

Náhodná premenná: $\boxed{\|f^2\| = E\{\sum_{i=0}^{n-1} f_i^2(\omega)\}}$ ⇒ stredná hodnota energie signálu



$u^2 = u \cdot u = u \cdot i \cdot R = u \cdot i = p$ (výkon)

⇒ výkon na 1-ohmovom odpore



$\sum_{i=0}^{n-1} u_i^2$ = energia signálu

Ak sú 2 náhodné signály nekorelované, potom stredná energia súčtového procesu sa rovná súčtu stredných energií týchto 2 náhodných procesov

ak sú korelované ⇒ $\|f_1 + f_2\|^2 \le \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$

$f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\omega) \cdot b_i$

jednotkové vektory z 1-ovej bázy

rozklad do 1ovej bázy - časový zápis signálov

Rozklad náhodného signálu

ortogonálna báza bude tvorená nekorelovanými náhodnými procesmi

$$f = \sum_{t=1} c_t b_t \quad \text{kde } (b_t, b_t)$$

$$c_t = \frac{(f, b_t)}{\underbrace{(b_t, b_t)}}, \quad t = 1, 2 \ldots$$

stredná energia bázického signálu
- ak sú všetky $b_t^2 = 1$
  - => normálna báza
- ak je aj ortogonálna => <u>ortonormálna báza</u>

$$(f, b_t) = \mathcal{E}\left\{\sum_{i=0}^{n-1} \cancel{f_i \cdot b_i(\omega)} \; f_i(\omega) \cdot b_i(\omega)\right\}$$

náhodné signály volíme deterministické signály s náhodnou amplitúdou

$$f(\omega, t) = \sum_{t=1}^{\infty} \underbrace{c_t(\omega)}_{\text{amplitúdy}} \cdot \underbrace{b_t(t)}_{\text{deterministické signály - nekorelované}}, \quad t \in T$$

$$f(\omega, k) = \sum_{t=1}^{\infty} c_t(\omega) \cdot b_t(k) \qquad k = 1, 2$$

rovnomerná konvergencia pre náhodné veličiny

$$\underbrace{\varepsilon}_{\text{epsylon}} > 0, n \qquad N > n \qquad \underbrace{\mathcal{E}}_{\text{stredná hodnota}}\{(c_n - c)\}^2 < \underbrace{\varepsilon}_{\text{epsylon}}$$

amplitúdy sú tiež nekorelované - energia bude max.

Karhunen-Loevov rozklad

$$R = (R_{ij}) \quad \text{kde} \quad R_{ij} = \mathcal{E}\{f(\omega, i) \cdot \overline{f(\omega, i)}\}$$

$$\lambda_t b_t = R \cdot b_t \qquad t = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\mathcal{E}\{(X_t - E_t)^2\} = D_t$$

- stredná energia
- snažíme sa maximalizovať rozptyl

---

2. 4. 2013

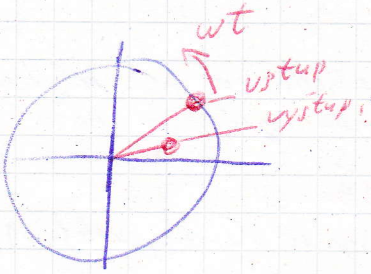
\Pr. 7/

- vo vedení / v kanále sa pohybuje elektromagnetická vlna, kt. zapríčiňuje pohyb / kmitanie elektrónov

- v prostredí dochádza k tlmeniu signálu (strata energie)
  - dôjde k skoseniu hrán + nejaké záchvity
  - aj zmena ⌐ potrebuje nejaký čas =>
  - čím ↑ frekvencia ⇒ ↑ rýchlejšie zmeny, ↑ viac energie

rýchlejšia sínusoida je viac utlmená

- pri prenose dochádza k časovému posunu - oneskorenie
útlmenie a posun závisí od rýchlosti zmien na vstupe



⇒ menší polomer
+ oneskorenie o určitý uhol

Lineárny kanál

$$K_1 \circ (f_1 + f_2) = K_1 \cdot f_1 + K_2 \cdot f_2$$

$\psi(x) = y$ → odozva kanála na signál x

$$\psi(k \cdot x) = k \cdot \psi(x) = k \cdot y$$

$$\psi(x_1 + x_2) = \psi(x_1) + \psi(x_2) = y_1 + y_2$$

- koľkokrát zväčším vstup ⇔ toľkokrát sa zväčší odozva

psí

$$y = \psi(x)$$

$y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ $\qquad$ $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ $\qquad$ $\psi_i^T = (\psi_{i1} \; \dots \; \psi_{in})$ matica

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{21} \\ \vdots \\ \delta_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} \delta_{1n} \\ \delta_{2n} \\ \vdots \\ \delta_{nn} \end{pmatrix}$$

$\delta_1 = (0 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}4 \;\; 0 \dots 0)$ - odozva na jednotkový signál $e_1 = (1\; 0\; 0 \dots 0)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & & \delta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \delta_{n1} & \dots & & \delta_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

→ lineárna transformácia

matica δ - matica odoziev na jednotkové vstupné signály

$$y = \delta(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_i$$

→ impulzná charakteristika

$e_1^T = (1, 0)$ $\qquad$ $\delta_1^T = (1, 2)$ $\qquad$ $x^T = (2, -1)$

$e_2^T = (0, 1)$ $\qquad$ $\delta_2^T = (-1, 1)$

$$y = \delta(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

spektrum signálu - koeficienty signálu v nejednotkovej báze

$$Y_B = \psi(X_B) = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i$$

transformačna matica spektier

$$\boxed{K = \psi \cdot C}$$

spektrum Y

spektrum X

spektrálna charakteristika vzhľadom na $\mathbb{B}$ (odozvy na bázické vektory) - jej jednotlivé stĺpce

ψ - matica odoziev na bázické vektory

c - spektrum signálu na bázu

8.4.2013

~~Pr.~~ 8

Cv. 8

Lineárny systém

$$f \rightarrow \boxed{T} \rightarrow T(f)$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^2 + x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$g \rightarrow \boxed{T} \rightarrow T(g)$$

$$c_1 f + c_2 g \rightarrow \boxed{T} \rightarrow T(c_1 f + c_2 g) = c_1\, T(f) + c_2\, T(g)$$

$$\sigma_0 = T(e_0) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$

$$\sigma_1 = T(e_1) = (0, 1, -1)$$

$$\sigma_2 = T(e_2) = \left(-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$T = (e_0^T, e_1^T, e_2^T)$$

$$T(2,1,-1) = (2,1,-1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T(2,1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \cancel{\left(\tfrac{2}{3}, 2, -\tfrac{3}{2}\right)}$$

$$= \left(\tfrac{3}{2}, 2, -\tfrac{3}{2}\right)$$

$$T(2,-2,5) = \left(-\tfrac{3}{2}, -1, \tfrac{9}{2}\right)$$

Linearita $\quad T(c_1 f + c_2 g) = c_1\, T(f) + c_2\, T(g)$

časová invariantnosť

$$T(\overset{1}{1}, \overset{2}{0}, \overset{3}{0}, \overset{4}{0}, \overset{5}{0}) = (\overset{1}{\tfrac{1}{2}}, \overset{2}{2}, \overset{3}{-1}, \overset{4}{0}, \overset{5}{3})$$

$$T(0, 1, 0, 0, 0) = (\overset{1}{3}, \overset{2}{\tfrac{1}{2}}, \overset{3}{2}, \overset{4}{-1}, \overset{5}{0}) \quad \text{- posun}$$

$$T(2,1,2,2,0) = 2\left(\tfrac{1}{2}, 2, -1, 0, 3\right) + 1\cdot\left(3, \tfrac{1}{2}, 2, -1, 0\right) + 2\left(0, 3, \tfrac{1}{2}, 2, -1\right)$$

$$+ 2\cdot\left(-1, 0, 3, \tfrac{1}{2}, 2\right) = \left(2, \tfrac{21}{2}, 7, 4, 8\right)$$

$$T(2,1,2,2,0) = (2,1,2,2,0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & \frac{1}{2} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(2, \tfrac{21}{2}, 7, 4, 8\right)$$

$\mathcal{F}(1,0,0,0) = (2,1,2,-1)$

$N=4$

$h_0 = (1,1,1,1)$

$h_1 = (1,i,-1,-i)$

$h_2 = (1,-1,1,-1)$

$h_3 = (1,-i,-1,i)$

$\mathcal{F}(1,i,-1,-i) = 2\cdot(-i,1,i,-1)$

$= (1,i,-1,-i)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \cancel{(0, 4i, \ldots)}\ \cancel{(4, 4i, -4, -4i)}$

$\mathcal{F}(1,1,1,1) = 4\cdot(1,1,1,1)$

$\mathcal{F}(f) = (1,5,-3,1)$

$\mathcal{F}(1,i,-1,-i) = 2\cdot(-i,1,i,-1)$

$\mathcal{F}(1,-1,1,-1) = 4\cdot(1,-1,1,-1)$

$\mathcal{F}(1,-i,-1,i) = 2\cdot(i,1,-i,-1)$

$f = (1,0,-2,1)$ rozklad do HB

$= 0\cdot h_0 + \frac{3+i}{4}\cdot h_1 + -\frac{1}{2} h_2 + \frac{3-i}{4} h_3$

$c_0 = \frac{\langle f, h_0\rangle}{4} = \frac{0}{4} = 0$

$c_1 = \frac{\langle f, h_1\rangle}{4} = \frac{\sum f_n \cdot \overline{h_{1n}}}{4} = \frac{3+i}{4}$

$f \rightarrow \boxed{\mathcal{F}} \rightarrow f' = \mathcal{F}(f)$

$f = c_0 h_0 + c_1 h_1 + c_2 h_2 + c_3 h_3$

$f' = c_0' h_0' + c_1' h_1' + c_2' h_2' + c_3' h_3$

$c_2 = -\frac{1}{2}$

$c_3 = \frac{3-i}{4}$

$f' = (-1,5,-3,-1)$

koeficienty v HB: $c_0 = \frac{\langle f', h_0'\rangle}{64} = 0$

$h_0' = 4\cdot(1,1,1,1)$

$h_1' = 2\cdot(-i,1,i,-1)$

$c_1 = \frac{\langle f', h_1'\rangle}{4^2} = \cancel{\frac{2+6i}{4}}\ 2\cdot\frac{(6+2i)}{4}$

$h_2' = 4\cdot(1,-1,1,-1)$

$= 3+i$

$h_3 = 2\cdot(i,1,-i,-1)$

$= ($

$\cancel{c_2 = \frac{\langle f', h_2'\rangle}{4} = \frac{4\cdot(-8)}{16} = -4}$

$c_3 = 3-i$

$c_0 = \frac{\langle f', h_0'\rangle}{64} = 0 \qquad c_1' = \frac{12+4i}{16} \qquad c_2' = -\frac{1}{2} \qquad c_3' = \frac{12-4i}{16}$

$f = c_0' h_0' + c_1' h_1' + c_2' h_2' + c_3' h_3'$

$c = c'$

$\cancel{g = 0\cdot(1,1,1,1)+}$

$g = (3,-1,-1,-1)$

$g = 0\cdot(1,1,1,1) + 1\cdot(1,i,-1,-i) + 1\cdot(1,-1,1,-1) + 1\cdot(1,-i,-1,i)$

$g' = 0\cdot(4,4,4,4) + 1\cdot(2i,2,2i,-2) + 1\cdot(4,-4,4,-4) + 1\cdot(2i,2,-2i,-2)$

$g' = (4, 0, 4, -8)$

$\mathcal{T}(3, -1, -1, -1) = (4, 0, 4, -8)$

$\mathcal{T}(g) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \, \mathbb{h}'_k$ – spektrum v harmonickej báze sa pri prenose nemení

---

9. 4. 2013 Pr. 8

vlastné vektory kanála – tvoria ortogonálnu bázu

$\mathbb{b}_0 = (0{,}6 ; -0{,}9)$ $x = (0{,}4 ; 0{,}7)$ $x = (0{,}231 ; 0{,}667)_B$

$\mathbb{b}_1 = (0{,}9 ; 0{,}6)$ $c_0 = \frac{\langle x, b_0 \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} = 0{,}231$ $c_1 = \frac{\langle x, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = 0{,}667$

$\lambda = (-0{,}7 ; 0{,}6)$

vlastné čísla

$k_0 = \lambda_0 \cdot c_0 = -0{,}162$

$k_1 = \lambda_1 \cdot c_1 = 0{,}4$ $\Rightarrow$ $y = \underbrace{(-0{,}16 ; 0{,}4)_B}$

spektrum výstupného signálu v báze vlastných vektorov $\mathbb{b}$

vlastný vektor je riešením rovnice

$$b_i \cdot \Psi = \lambda_i \cdot b_i$$

$$b_i \cdot \Psi - \lambda_i b_i = \emptyset$$

$$\mathbb{b}_i \cdot (\Psi - \lambda_i \mathbb{E}) = \emptyset$$

$$(b_{i0}, b_{i1}, \dots) \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{00} - \lambda_0 & \Psi_{01} & \dots & \Psi_{0,N-1} \\ \Psi_{10} & \Psi_{11} - \lambda_1 & \dots & \Psi_{1,N-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \Psi_{N-1,N-1} - \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \end{pmatrix}^T$$

časovo invariantný kanál – nestarne
– jeho charakteristiky sa časom nemenia

$e_0 = (1, 0, 0)$ $\delta_0 = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$

$e_1 = (0, 1, 0)$ $\delta_1 = (\delta_2, \delta_0, \delta_1)$

$e_2 = (0, 0, 1)$ $\delta_2 = (\delta_1, \delta_2, \delta_0)$

$$(y_0, y_1, y_2) = (x_0, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_2 & \delta_0 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_0 \end{pmatrix}$$

$$y_l = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \delta_{l-k}$$

$\underbrace{k + (l-k) = l}_{\text{súčet}}$ indexov $= l$

$\delta_{l-(N-1)}$

$\delta_0 = (\delta_0, \delta_1)$

$\delta_1 = (\delta_1, \delta_0)$

$$(y_0, y_1) = (x_0, x_1) \cdot \begin{pmatrix} \delta_0 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{b} \cdot \delta = \lambda \cdot \mathbb{b}$ $\Rightarrow$ $b \cdot (\delta - \lambda \cdot \mathbb{E}) = 0$

$$\begin{pmatrix} \delta_0 - \lambda & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_0 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$(\delta_0 - \lambda)^2 - \delta_1^2 = 0$ Determinant $= 0$

$\lambda_{0,1} = \delta_0 \pm \delta_1$

$b.(\Psi - \lambda E) = 0$

$$(b_{00}, b_{01}) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_0 - (\sigma_0+\sigma_1) & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_0 - (\sigma_0+\sigma_1) \end{pmatrix} = (0, 0)$$

$$(b_{00}, b_{01}) \cdot \begin{pmatrix} -\sigma_1 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & -\sigma_1 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

$$-\sigma_1 b_{00} + \sigma_1 b_{01} = 0$$
$$b_{00} = b_{01}$$

– vlastné vektory sú rovnaké pre všetky časovo invariantné kanály

$$\lambda_n = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k e^{-j\frac{2\pi}{N} n k} \quad \Leftarrow \text{harmonická báza (ortogonálna)}$$

$$b_n = \left(e^{j\frac{2\pi}{N} n 0}, e^{j\frac{2\pi}{N} n 1} \dots e^{j\frac{2\pi}{N} n (N-1)}\right)$$

$$c_n = \frac{(x, b_n)}{(b_n, b_n)} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N} n k}, \quad c_n \in C$$

$$K_n = \lambda_n . c_n \qquad n = 0, 1 \dots N-1$$

$c = |c| . e^{j\varphi}$

|| 1 na jednotkovej kružnici

$$b_n \sigma = \lambda_n . b_n$$

15.4.2013

$\sigma_1 = (1, 3, 2)$ $\qquad f = (-1, 0, 1)$

$\sigma_2 = (2, 0, 1)$ $\qquad f' = (-1, 0, 1) . \sigma = (0, -2, -2)$

$\sigma_3 = (1, 1, 0)$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 2 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).(-\lambda).(-\lambda) + 3.1.3 + 2.2.1$$
$$- 2.(-\lambda) - 1.1.(1-\lambda) - (-\lambda).2.3) =$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda + 6$$

$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} \cdot (3 - \sqrt{21})$

$\lambda_3 = \frac{1}{2} \cdot (3 + \sqrt{21})$

$\cancel{\Delta . \Psi = \lambda}$

$\mathbb{A} \cdot V = \lambda_1 \cdot V$

$\mathbb{A} V - \lambda_1 V = 0$

$\lambda_1 \Rightarrow \cancel{\mathbb{A}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot V' = 0 \Rightarrow$

$3v_1 + 3v_2 + 2v_3 = 0$

$2v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$

$v_1 + v_2 + 2v_3 = 0$

$\cancel{3 \cdot v_1 + 2v_2 + v_3 = 0}$

$\cancel{3v_1 + 2v_2 + v_3 = 0}$

$\cancel{v_1 + v_2 + 2v_3 = 0}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_3 = 0$

$v_1 + v_2 + 2v_3 = 0$

$v_1 = -v_2$

$v_2 = k$ (parameter)

$v_1 = -k$

$V_1 = (-k, k, 0)$

$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ - vlastné čísla (v_1, v_2, v_3) - vlastný vektor

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & 3 & 2 \\ 2 & 0-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot V = 0 \Rightarrow V_2 = (-0{,}27;\ -0{,}42;\ 0{,}87)$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_3 & 3 & 2 \\ 2 & 0-\lambda_3 & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda_3 \end{pmatrix} \cdot V = 0 \Rightarrow V_3 = (-0{,}79;\ -0{,}51;\ -0{,}34)$$

$V_1 = (1, -1, 0)$

f v báze V_1, V_2, V_3

$f = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3$

vlastné vektory - sú na seba kolmé iba v invariantných

* ay vypočítame zo sústavy c_1, c_2, c_3

$\cancel{f' = c_1' V_1' + c_2}$

$f' = c_1' v_1' + c_2' v_2' + c_3' v_3'$

$c_1' = c_1$

$v_1' = \lambda_1 v_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 6 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 6 = \lambda^2 - 2\lambda - 5$$

$\lambda_1 = 3{,}45$ $\quad v_1 = (0{,}63 ; 0{,}77)$

$\lambda_2 = -1{,}45$ $\quad v_2 = (-0{,}63 ; 0{,}77)$

---

1 2 0 3 2

každé číslo prenesieme pomocou 4 čísiel

1100	1111	0000	0011	1111
0100	1101	0001	0001	1001	⇒ šum

1000 0010 0001 0010 0110

$\underbrace{1000}_{0/1}$ $\underbrace{0010}_{0/3}$ $\underbrace{0001}_{0/3}$ $\underbrace{0010}_{0-3}$ $\underbrace{0110}_{X}$

0	0000	1 1 1 1
1	1100	1 -1 1 -1
2	1111	1 1 -1 -1
3	0011	1 -1 -1 1

W-H

1 2 0 3 2

1010 1100 1111 1001 1100 - WH (-1 = 0)

0100 1101 0001 0001 1001 - šum

1110 0001 1110 1000 0101

$f = (1, 1, 1, -1)$

$\tilde{f} = c_0 \cdot v_0'$ $\quad c_0 = \frac{(f \cdot v_0)}{(v_0 \cdot v_0)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad c_1 = \frac{1-1+1+1}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad c_2 = \frac{1+1-1+1}{4} = \frac{1}{2}$

$c_3 = \frac{1-1-1-1}{4} = -\frac{1}{2}$

- prenesený vektor sa ~~rovná~~ najviac približuje tomu s najväčším koeficientom ⇒ v tomto prípade c_0, c_1, c_2

po zašumení

$\underbrace{1200}_{1}$ $\underbrace{2212}_{2}$ $\underbrace{0001}_{0-3}$ $\underbrace{0012}_{3}$ $\underbrace{2112}_{2}$

1

$f = 1 0 1 -1$

VHB

$c_0 = \frac{1}{4}$ $\quad c_1 = \frac{3}{4}$ $\quad c_2 = \frac{1}{4}$ $\quad c_3 = -\frac{1}{4}$

každému číslu priradíme → riadok z ortogonálnej bázy

1	2	0	3	2	
1-11-1	11-1-1	1111	1-1-11	11-1-1	
0100	1101	0001	0001	1001	šum
101-1	22-10	1112	1-1-12	21-10	

2 2 -1 0   1 1 1 2   1 -1 -1 2   2 1 -1 0

$c_2 = \frac{5}{4}$ $c_0 = \frac{5}{4}$ $c_3 = \frac{5}{4}$ $c_2 = 1$

16. 4. 2013

Pr. 9

TO - vrstva prenosu
- prenos signálu na veľké vzdialenosti
- súčasný prenos viacerých signálov

vlastný vektor - báza, ktorá sa prechodom cez lineárny systém nemení
iba sa zmenší / zväčší

Dirichletova poznámka - najkratšia vzdialenosť medzi dvoma reálnymi číslami vedie cez komplexnú rovinu

Vzťah k DFT

$$\boxed{Y_n = F_n X_n}, \quad n = 0, 1 \dots N-1$$

$X = DFT(x)$

$Y = DFT(y)$

$F = DFT(\sigma)$

$X_k =$

$X_n = \overline{X}_{N-n}$ — komplexne združené čísla

$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N} n.k}$

X_k — reálne číslo; x_n — komp.; $e^{-j\frac{2\pi}{N} n.k}$ — kompl.

$|X_n| e^{-j\varphi_n} = |X_{N-n}| e^{j\varphi_{N-n}}$ amplitudové spektrum musí byť symetrické podľa stredu

fázové spektrum - je antisymetrické

$y = x . \sigma$ ⇒ v ideálnom ~~časov~~ lineárnom časovo invariantnom kanáli by σ bola jednotková matica

$y = \alpha . x_{t-\Delta}$ - ideálny kanál v praxi
- vynásobený konštantou + posunutý v čase
- tvar nezmení, iba sa zväčší / zmenší

Korekcia kanála:

$$Z_n = F_n^{kor} . F_n . X_n$$

spektrálna hodnota na výstupe

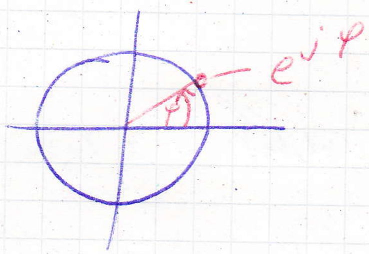
- celkový frekvenčný prenos je daný súčinom jednotlivých prenosov

$$F_n^{kor} \cdot F_n = F_n^{ideál}$$

$$|F_n^{kor}| \cdot e^{-j\varphi_n^{kor}} \cdot |F_n| e^{-j\varphi_n} = \alpha \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} n \Delta}$$

$$F_n^{kor} = \frac{\alpha}{F_n}$$

$$F_n^{ideal} = \alpha \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} n \cdot \Delta} \qquad n = 0, 1 \ldots N-1$$



$$|F_n^{kor}| = \alpha \cdot |F_n|^{-1}$$

$$\varphi_n^{kor} = \underbrace{-\varphi_n + \frac{2\pi}{N} n \Delta}_{\geq 0}$$

(aby sme sa posúvali v čase dopredu)

$$\Delta \geq \frac{\varphi_n}{\frac{2\pi}{N} n}$$

snažíme sa nájsť čo najmenšie Δ, aby bol signál čo najmenej oneskorený

$$\boxed{X_{DB} = 10 \cdot \log_{10} \frac{X}{X_{ref}}}$$

decibely

$$X \cdot X^{kor} = \alpha \qquad X_{DB} + X_{DB}^{kor} = \alpha_{DB}$$

$$X_{DB}^{kor} = \alpha_{DB} - X_{DB} \leq 0$$

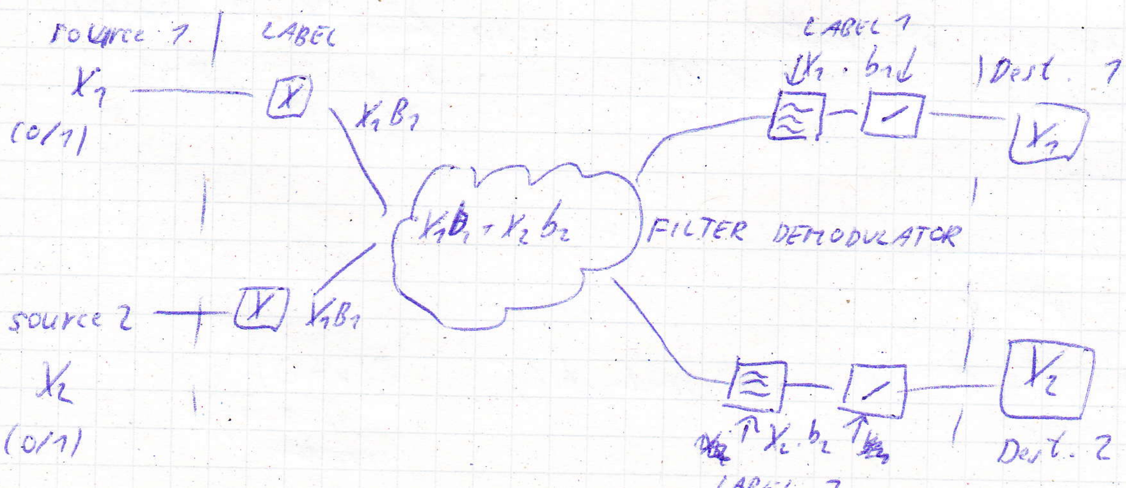
pasívny korektor - dorovnáme tak aby každý mal tak ako ten čo má najmenej
"nemôžme pridávať"

aktívny korektor - zosilníme podľa najväčšieho
iba zosilňuje - aby sme zosilňovali čo najmenej

Príznakový multiplex

Hlavná myšlienka multiplexu
- rozdelím celý signálový priestor a rozdelím ho na 2 disjunktné podpriestory
- aby sa signály sčítajú, na výstupe ich vieme oddeliť
- každému zdroju dovolíme využívať len jeden podpriestor

ak mám 2 zdroje ⇒ potrebujem 2 rozmerný vektorový priestor kanálu



každému signálu sa vtlačí príznak

šum kanála nám rozšíri priestor na nekonečne veľký vekt. priestor

---

Cv. 10

22. 4. 2013

pravidlo → overíme

Blokové kódy
Konvolučné kódy

deliteľné 7
56 → 56 ✓
63 ✓ (chyba)

príprava
57 : 7 = 8 zv 1
57 − 1 = 56 prenos

$\boxed{57|1}$: 8 = 81 zv. 4 → $\boxed{56|7}$

579 : 7 = 82 zv 5

$\boxed{57|4}$ → $\boxed{57|4}$ posielam čísla deliteľné 7
dokoda 7

konvolučný − do čísla umiestame aj zabezpečovacku
blokový − môžem to rozdeliť na bloky

$Z_2, \oplus, \odot$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$x^5 + x^3 + x^2 + 1$
⇓
1 0 1 1 0 1

1 1 0 0 1 1 0 0 1
$x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + 1$

7 : 6 = 1 zv 1
8 : 6 = 1 zv 2
9 : 6 = 1 zv 3
10 : 6 = 1 zv 4
11 : 6 = 1 zv 5

ireducibilné polynómy − nedá sa rozložiť ako súčin 2 polynómov (ako prvočísla v Z)

usporiadame:
$(x^3 + x^2 + 1) : x^2 = x + 1$ zv. 1
$-x^3$
$x^2 + 1$
x^2
1

usporiadame (podľa stupňa)
x^2 rovnaké $x^2 + 1$
$x^3 > x^2$

$x \cdot (x+1) = x^2 + x$

$(x+1) \cdot (x+1) = x^2 + 1$ → nie je ireducibilný $(2x = 0)$
⇐ $1 + 1 = 0$

$x^2+1=0$

$x^2=1$

$x_{1,2}=1 \quad \Rightarrow \quad (x-k_1)\cdot(x-k_2)$ (- 1 nemám)

$(x+1)\cdot(x+1)$

$x^2+x+1=0 \qquad \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x^2+x=1$

$x\cdot(x+1)=1$

$\odot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	x^2	x^2+x
$x+1$	0	$x+1$	x^2+x	x^2+1

$x^5+x^3+x^2+1$

101101 | 0111

$(x^5+x^3+x^2+1):(x^2+x+1)=x^3+x^2+x+1$

$+(x^5+x^4+x^3)$

$0\ \ x^4+0+x^2+1$

$x^4+x^3+x^2$

x^3+1

x^3+x^2+x

x^2+x+1

0

~~110111 | 111~~

~~$x^5+x^4+x^2+x+1 : ($~~

101101 | 111

$(x^8+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1):(x^2+x+1)=x^6+x^5+x^4+x^3+1$

$x^8+x^7+x^6$

$x^7+x^5+x^3+x^2+x+1$

$\vdots$

110111 | 111

pripočítame ~~odpočítame~~

$x^8+x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 : (x^2+x+1)=x^6+x^4+x+$ zv. 1

$x^8+x^7+x^6$

$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

$x^6+x^5+x^4$

x^3+x^2+x+1

x^3+x^2+x

1

$\Rightarrow$ budeme prenašať

110111 | 110

odpočítame

10000 1111 : 111 = 111 111 zv 10

111

1100 1111

111

101111

111

10111

111

1011

111

101

$\Rightarrow$ 100001 | 101

579 : 7 = 82 zv 5
578 : 7 = 82 zv 5

```
100001000 : 111 = 11111
111
 1100 1000
 1110
   101000
   111
    10000
    111
     1100
     111
       10
```

```
100001 000 ~~+010~~
+         010
1000011010
```

```
110011001|111 : 111 = 111111 zv 11
111
  1011001111
  111
   1010011111
   111
    10001111
    111
     1101111
     111
       11111
       111
          11
```

=> 1100110011100

binárne delenie

```
1000 : 11 = 10 zv 10
111
~~01~~10
  10
```

2 zv 2

⇓

8 : 3 = 2 zv 2

x^3+x^2+1

1101 : (x

```
1101111 : (111) = 11 zv 11
111
  11111
  111
     11
```

=> 1101100 ⇐ prenášame

=> príde chybný

```
111,1100 : 111 = 11 zv 10
111
     1100
     111
       10
```

chyba je na 1 (

```
0101100 : 111 = 111 zv. 110
 111
  10100
  111
   1000
   111
    110
```

23. 4. 2013 Pr. 10

244 : 7 = 35 zv 4

→ chceme poslať 24

245 → toto pošlem a skontrolujem či je deliteľné 7

249
238

$c_1 - c_2 = 7$

$c_1 - c_3 = 7.k$

$a.c_1 + b.c_2 = 7.k$

} zv.

$f_1 \in C$
$f_2 \in C$

zv. po delení x^2+x+1

zvyšk		
	0	00
	x	10
	x+1	11
	1	01

1101|111 : 111 = 11 zv 1
111
 011
 111
~~1101|10~~
 1
1101|10

1101|11 : 111 = 11 zv 1
111
 111
 111
 1
=> 1101|10

$$\begin{array}{r} 1101|10 \\ + \ 1110|00 \\ \hline 0011|10 \end{array}$$

+ delit. 7
+ delit. 7
delit. 7

$(c_1, c_2, c_3 | z_1, z_2)$

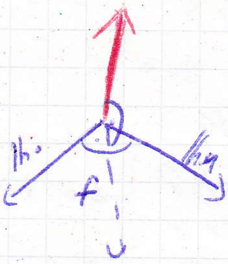
b_0 (1 0 0 | 1 0)
b_1 (0 1 0 | 0 1)
b_2 (0 0 1 | 1 1)

$\mathbb{B}$

lin. kombinacia

(1 0 1 | 0 1)
(0 1 1 | 1 0)

10000 : 111 = 11, zv 10
111
 1100
 111
 10



$c' = \langle \cancel{h_0}, h_1 \rangle$ (h_0, h_1)

$f \in C$?
$f = c_0 b_0 + c_1 b_1 + c_2 b_2$?

$\Rightarrow h_0 \perp b_0, b_1, b_2$

$h_1 \perp b_0, b_1, b_2$

ak $f \perp h_1$ $f \perp h_2$ $\Rightarrow f \in C$ (t.j. je kodovým slovom)

$\langle b_0, h_0 \rangle = 0$
$\langle b_1, h_0 \rangle = 0$
$\langle b_2, h_0 \rangle = 0$

$\langle b_0, h_1 \rangle = 0$
$\langle b_1, h_1 \rangle = 0$
$\langle b_2, h_1 \rangle = 0$

$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} \cdot (b_0, b_1, b_2)$

$$\begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} & h_{04} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{00} & b_{10} & b_{20} \\ b_{01} & b_{11} & b_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} \\ b_{03} & b_{13} & b_{23} \\ b_{04} & b_{14} & b_{24} \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & 1 & 0 \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z_{00} & z_{10} & z_{20} \\ z_{01} & z_{11} & z_{21} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbb{O} = \mathbb{H} \cdot \mathbb{B}^T}$

(P/E) $\left(\frac{E}{G^T}\right)$

3x7 7x4

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{00}+z_{00}, & h_{01}+z_{10}, & h_{02}+z_{20} \\ h_{10}+z_{01}, & h_{11}+z_{11}, & h_{12}+z_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_{00} & z_{10} \\ z_{01} & z_{11}\end{pmatrix}$$

$$0 = H. \; B^T$$
$$= (P|E) \cdot \begin{pmatrix} E \\ G^T \end{pmatrix} = P.E + E.G^T$$

$$-P.E = -E.G^T$$

sme Z_2

$$P.E = E.G^T$$

$$\underbrace{P = G^T}_{\text{návod ako vypočítať kolmý podpriestor}}$$

kolmý podpriestor

$$H = \left(\begin{array}{ccc|cc} \multicolumn{3}{c|}{P} & \multicolumn{2}{c}{E} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zabezpečovačky

$f = (1,1,1,0,1)$? je z podpriestoru

$f \perp h_0 \quad \langle (11101), (10110) \rangle = 1+0+1+0+0 = 0$

$f \perp h_1 \quad \langle (11101), (01101) \rangle = 0+1+1+0+1 = 1$ nie je kolmá

f' – prenesené dáta

$$\underbrace{f_3, f_4}_{\text{zabezpečovačka}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{zabezpečovačky} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} E \end{matrix} \overset{\text{ak}}{=} \underbrace{(0\ 0)}_{\text{patrí do podpriestoru}}$$

$$0,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Pr. 11 (29. 4. 2013)

práca s vektorovým priestorom ⇒ spracovanie so signálmi

prenos (modulácia) = prechod z bázy do bázy

zabránenie šumu = priemet do podpriestoru → využitie ortogonálnej bázy

$$\tilde{x}_n = \frac{\langle x, b_n \rangle}{\langle b_n, b_n \rangle}$$

Kódovanie:

rovnaký princíp ako u optimálneho prijímača

ak pri prenose dôjde k chybe ⇒ u prijímača kódové slovo mimo daný kódový priestor

= vyžaduje dodatočné kontrolné bity ⇒ réžia

↳ tie tvoria samostatný podpriestor

kódový priestor = (Podpriestor slov kódu) ∪ (Podpriestor slov mimo kód)

napr. Párna parita ⇒ príklad kódu

0-ové slovo patrí aj do kódu

Kódy : 1, Detekčné
2, Korekčné (samoopravné)

Blokové kódy : slovo kódu má vždy pevnú dĺžku slova kódu

Systematické kódy - možno rozdeliť kódové slovo na jednoduché spracovanie - informačnú a zabezpečovaciu časť

Parita (párna)
4 kódové slová a 4 slová mimo => využitie linky 50 %
máme (viď predu)

$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{b}_0 \\ \mathbb{b}_1 \end{pmatrix}$ $\hat{\mathbb{B}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ => 3 rozmerný priestor, kt. môže využiť len 2. rozm. podpriestor

$X_B = (1\ 1) = 1\mathbb{b}_0 + 1\mathbb{b}_1$
$\hat{X}_B = 1 \cdot \hat{\mathbb{b}}_0 + 1 \cdot \hat{\mathbb{b}}_1 = (1\ 1\ 0)$

} ak bázické vektory spĺňajú danú vlastnosť, potom ∀ ich lineárne kombinácie majú danú vlastnosť

$\boxed{\hat{x} = x \cdot \hat{\mathbb{B}}}$ → od tejto bázy závisí správanie sa kódu

pre IPv4 pakety napr. používame len veľmi malú časť $\left(\approx \frac{1}{2^{16}}\right)$

Pre systémový kód $\hat{\mathbb{B}} = (\mathbb{B} \,;\, \mathbb{Z})$, $\mathbb{B} \to \mathbb{E}$ => $(\mathbb{E} \,|\, \mathbb{Z})$

Cyklický kód
zdroj vysiela len slová deliteľné daným polynómom (generujúci)
- môžeme pripraviť bázu a vykonať lineárnu komb.
stačí len raz
$\hat{x} = x \cdot \hat{\mathbb{B}} = x \cdot (\mathbb{E} \,;\, \mathbb{Z})$

Kontrola u prijímača => 1, z princípu kódu
2, z princípu vektorových priestorov

$y = (y_0, y_1, y_2$ $0, 0)$ $\mathbb{E}$ → musí ležať v danom podpriestore

$\hat{y} = y \cdot \hat{\mathbb{B}}_R$ => $\hat{\mathbb{B}}_R = \hat{\mathbb{B}}_R^{-1}$

$\boxed{y = \hat{y} \cdot \hat{\mathbb{B}}_R^{-1}}$

$\hat{\mathbb{B}}_R = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{Z} \\ \hline \mathbb{0} & \mathbb{E} \end{array}\right)$

$y = \hat{y} \cdot \hat{\mathbb{B}}_R$

- stačí sa zamerať na 0-ly v y => $(y_3, y_4) = (\hat{y}_3, \hat{y}_4) \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ \mathbb{E} \end{pmatrix} = s$

$s = (\hat{y}_3, \hat{y}_4) \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ \mathbb{E} \end{pmatrix} = \mathbb{0}$; s = syndróm

↳ kontrolná matica

Korekčné kódy :
- rovnaký princíp ako pre optimálny prijímač
= cieľ - nájsť najbližšie slovo k prijatému
↳ potrebná vzdialenosť

- ak chceme, aby vzdialenosť hodnota z {}, kt. prvky koeficienty problém ($x \perp x$) keďže používame XOR

$\langle x, x \rangle = 0$

def. rôzne vzdialenosti, napr. Hammingová

Pr. 12

6.5.2013

Multiplex – sign. priestor rozdelíme na podpriestory a každý zdroj môže p... iba 1 podpriestor

- nad poľom vieme $\oplus, \odot$ ale aj deliť a odčítavať

exp. číslo – zložkový tvar – vieme jednoducho sčítať
verzorový tvar – –"– – násobiť (e...

$f = (x^0, 0, x^2, x^2, x^0)$

$g = (x^1, x^2, 0, x^1, x^0)$

$\bar{g} = (x^2, x^1, 0, x^2, x^3)$

$(f, g) = \sum f_n \circledast \bar{g}_n$

$= x^2 + 0 + 0 + x^1 + x^0 = \underline{\underline{0}} \Rightarrow$ vekto... koli... (ortogo...

$\bar{g} = x^{3-i}$

$g = x^2 \Rightarrow \bar{g} = x^{3-2} = \underline{\underline{x^1}}$

str. 29

- kódy vieme robiť len pre nepárne čísla
- veľkosť baz. vektorov je 1 $\langle b_n, b_n \rangle = 1$

$F_n = (F_0, F_1 \mid F_2)$ kompl. združené

–v spektre sa musí dodržať táto vlastnosť

str. 32

v každého cyklického kódu by mali byť nejaké hodnoty nulové (spektrum patriace do kódu)

ak spektrum slova nemá nulu $\Rightarrow$ nepatrí do kódu

7.5.2013

Cv. 12

Galoisove
~~Gausove~~ polia

$GF(2^2) \sim (\mathcal{F}(x), \underset{q(x)}{\oplus}, \underset{q(x)}{\odot})$

$q(x) = x^2 + x + 1$

v poli primitívny prvok $z^n = 1$

~~$z \odot z \odot \dots \odot z =$~~

$z \odot z \odot z = 1$

	0	1	x	x+1
0	0	1	x	x+1
1	1	0	x+1	x
x	x	x+1	0	1
x+1	x+1	x	1	0

⊙	0	1	x	x+1
0	0	0	0	0
1	0	1	x	x+1
x	0	x	x+1	1
x+1	0	x+1	1	x

$(x+1).x = x^2+x \quad : x^2+x+1 = \ldots$ zv 1

$(x+1).(x+1) = x^2+2x+1 : x^2+x+1 = x$

primitívny prvok – keď umocníme na 13 tak výsledok je 1

v tomto prípade x aj $x+1$

$f = (f_0, f_1, f_2)$

$def(n,k) = e^{j\frac{2\pi}{N}k.n}$ DFT

$gef(n,k) = \mathcal{E}^{nk}$ GEF $\quad$ $\mathcal{E}$ je taký, že $\mathcal{E}^N = 1$

① $\sum_{k=0}^{N-1} gef(0,k) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E}^0 = N$ $\quad$ ② $\sum_{k=0}^{N-1} gef(1,k) = 1+x+x^2 = 0$ pre $\mathcal{E}=x$

$= 1+x+1+x = 0$ pre $\mathcal{E} = x+1$

$\mathcal{E} = x$

③ $\sum_{k=0}^{N-1} gef(2,k) = 1+(x+1)+x = \underline{\underline{0}}$ pre $\mathcal{E}=x$ súčet v riadku je 0

~~$gef(n) =$~~ $\{$ ~~$gef(n,k) = \mathcal{E}^{nk}$~~

$gef(n) = \{\mathcal{E}^{nk}, k=0\ldots N-1\} = (\mathcal{E}^{n.0}, \mathcal{E}^{n.1}, \mathcal{E}^{n.2})$

$gef(0) = (1, 1, 1)$

$gef(1) = (1, x, x+1)$ $\quad$ $\mathcal{E} = x$

$gef(2) = (1, x+1, x)$

~~$gef(0) \cdot \overline{gef(1)} = 1.1 + 1.x + 1.(x+1)$~~

$\langle gef(n), gef(m)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} gef(n,k) \odot \overline{gef(m,k)} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E}^{-nk} \odot \mathcal{E}^{mk}$

$= \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E}^{N-nk} \odot \mathcal{E}^{mk}$

$\langle gef(1), gef(2)\rangle = 1.1 + \underbrace{\mathcal{E}^2 \odot \mathcal{E}^2}^{x} + \underbrace{\mathcal{E}^1 . \mathcal{E}^4}^{x+1} = 1+x+x+1 = \underline{\underline{0}}$ $\underline{\underline{\text{sú kolmé}}}$ ✓

$\langle gef(1), gef(1)\rangle = (1, x+1, x) \odot_q \cancel{(1, x+1, 1)}\ (1, x, x+1) =$

$= 1 + 1 + 1 = \underline{\underline{3}} \quad (N=3) \Rightarrow 1$ v modulo 2

$\odot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

$f = (1, 1, 1) = \bar{f}$

$c_0 = \dfrac{\langle f, gef(0)\rangle}{\langle gef(0), gef(0)\rangle} = \dfrac{1}{1} = 1$

$c_1 = \dfrac{\langle f, gef(1)\rangle}{\underbrace{\langle gef(0), gef(0)\rangle}_{1}} = \dfrac{0}{1} = 1 \qquad C_1 = \dfrac{\langle f, gef(1)\rangle}{\langle gef(0), gef(0)\rangle} =$

$\mathbb{C} = (1, 0, 0)$ - spektrum

	spektrum	
000	000	$0, 0, 0$
001	$(1, x+1, x)$	$\varepsilon^0, \varepsilon^2, \varepsilon^1$
010	$(1, x, x+1)$	$\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$
011	$(0, 1, 1)$	$0, \varepsilon^0, \varepsilon^0$
100	$(1, 1, 1)$	$\varepsilon^0, \varepsilon^0, \varepsilon^0$
101	$(0, x, x+1)$	$0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$
110	$(0, x+1, x)$	$0, \varepsilon^2, \varepsilon^1$
111	100	$\varepsilon^0, 0, 0$

$gef(0) = (1, 1, 1)$

$gef(1) = (1, x, x+1)$

$gef(2) = (1, x+1, x)$

Lineárny časovo invariantný prenos

$\longrightarrow \boxed{LČIP} \longrightarrow$

charakt.

$f = (f_0, f_1, f_2) \qquad ch = (g_0, g_1, g_2) \qquad (f_0 g_0 + f_1 g_1 + f_2 g_2,\ f_0 g_2 + f_1 g_0 + f_2 g_1,\ f_0 g_1 + f_1 g_2 + f_2 g_0)$

$\Downarrow$ $\mathbb{F}$ (FT) $\qquad \Downarrow$ $\mathbb{CH}$ (FT) $\qquad \mathbb{F}.\mathbb{CH}$ - spätná FT

$(5, 3, 1) \longrightarrow \boxed{\text{lin. lineárny}} \longrightarrow 5.(3,1,2) + 3.(2,2,1) + 1.(3,0,1)$

1,0,0 $\quad (3, 1, 2)$

0,1,0 $\quad (2, 2, 1)$

0,0,1 $\quad (3, 0, 1)$

$\Downarrow$ časovo invariantný

$(3, 1, 2) \quad \Rightarrow 5.(3,1,2) + 3.(2,3,1) + 1.(1,2,3)$

$(2, 3, 1)$

$(1, 2, 3)$

$= \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot g_n,\ \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot g_N}_{\text{konvolúcia}}$

$f \cdot g = h$

$\mathbb{F} \cdot \mathbb{G} = \mathbb{H}$

$f = (0, 1, 0)$ $\langle f, g \rangle = 1$

$g = (1, 1, 0)$

$F \cdot G = \langle (1, x, x+1), (0, x+1, x) \rangle =$

$= (1 \cdot 0) + (x+1) \cdot (x+1) + x \cdot x = 0 + (x) + (x+1) = \underline{\underline{1}}$