Ako sa počíta pravdepodobnosť?

Hynek Bachratý, Marián Grendár a Katarína Bachratá

13. októbra 2009

Obsah

Home Page
Title Page
Contents
Page 4 of 410
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 6 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Kapitola 1

Úvod

Lottery is a tax on people who are bad at math.

V učebnici chceme pomocou riešených úloh ukázať študentom technických vysokých škôl, že je v ich silách zvládnuť aj najobávanejšie a najmenej obľúbené matematické disciplíny, ako sú pravdepodobnosť, štatistika a analýza náhodných reťazcov. Keď hovoríme zvládnuť, nemáme na mysli urobenie skúšky z týchto predmetov. Aj keď je možné, že aj to sa prihodí čitateľom, ktorí tieto oblasti matematiky zvládnu. Našim cieľom je ale hlavne naučiť študenta pracovné metódy, postupy, techniky a myšlienkové experimenty, ktoré mu budú užitočné či už pri štúdiu, spracovaní záverečnej práce alebo neskôr v zamestnaní. Dôležitý výsledok pre autorov bude aj spôsob myslenia, vďaka ktorému sa čitateľ bude môcť lepšie orientovať v zmesi informácií, reklám, presviedčania a navádzania, ktorému musí súčasná generácia čeliť. Na pochopenie spomínaných cieľov uvedieme príklady inšpirované veľmi peknou knihou [1]:

Príklad 1 *Naprostá väčšina ľudí má nadpriemerný počet rúk.*
Napriek tomu, že tvrdenie znie veľmi čudne, je naozaj pravdivé. Stačí sa chvíľu zamyslieť a aj žiaci základnej školy prisvedčia, že je to pravda a že naozaj je priemerný počet rúk na

človeka trochu menej ako dve. Preto je naozaj pravda, že dve ruky sú nadpriemer.

No a teraz uvažujme nad výrokom politika, ktorý sme počuli v televízii. Tvrdil, že väčšina Slovákov má podpriemerný plat a že s tým treba niečo urobiť. Toto tvrdenie je tak excitujúce, že by človek daného politika rád podporil. Nevieme, aká bola reálna situácia, keď bola táto veta vyslovená, presnejšie informácie povedané neboli. Urobme teda myšlienkový pokus a predstavme si, že všetci ľudia na Slovensku majú úplne rovnaký plat, len dotyčný politik má plat o 1000 Sk vyšší ako ostatní. Vtedy naozaj väčšina bude mať podpriemerný plat.

A čo môže spomenutý politik urobiť, ak získa podporu a dostane úlohu zabezpečiť, aby väčšina Slovákov mala nadpriemerný plat? Stačí, ak zníži svoj plat o 2000 Sk. Po takejto úprave platov naozaj väčšina Slovákov bude mať nadpriemerný plat!

Príklad 2 *Nadšený fanúšik zistil, že Slovan Bratislava premenil v priebehu sezóny zo 100 striel na bránu presne* 42*. Teda úspešnosť Bratislavy je* 42 %*. MŠHK Žilina premenila zo* 100 *striel* 37*. Úspešnosť Žiliny je iba* 37 %*.*

	počet gólov	počet pokusov	vyjadrené v percentách
Žilina	37	100	37 %
Bratislava	42	100	42 %

Tabuľka 1.1: Úspešnosť pri strelách na bránu

Pozrime sa však na tie isté výsledky detailnejšie. Bratislava strelila 21 *gólov z* 50 *pokusov, keď hrala na domácom ľade a* 21 *gólov z* 50 *pokusov, keď hrala u súpera. Jej úspešnosť bola* $\frac{21}{50} = \frac{42}{100} = 42\,\%$ *na domácom ľade a* $\frac{21}{50} = \frac{42}{100} = 42\,\%$ *keď hrala u súpera. Teda priemerná úspešnosť Bratislavy je* $\frac{42\,\%+42\,\%}{2} = 42\,\%$.

Žilina strelila 30 *gólov z* 30 *pokusov, keď hrala doma a* 7 *gólov zo* 70 *pokusov, keď hrala u súpera. Jej úspešnosť bola* $\frac{30}{30} = 100\,\%$ *doma a* $\frac{7}{70} = \frac{10}{100} = 10\,\%$*, keď hrala u súpera. Teda priemerná úspešnosť Žiliny je* $\frac{100\,\%+10\,\%}{2} = 55\,\%$.

	góly doma	pokusy doma	perc.	góly u súpera	pokusy u súpera	perc.	priem. úsp. v perc.
ZA	30	30	100 %	7	70	10 %	55 %
BA	21	50	42 %	21	50	42 %	42 %

Tabuľka 1.2: Úspešnosť na domácom ľade a pri hosťovaní

Vidíme, že sa stačí trochu zamyslieť, pozrieť si výsledky detailnejšie, chvíľu počítať a zrazu je Žilina úspešnejšia ako Bratislava.

Veríme, že čitateľovi je jasné, že predchádzajúce úvahy boli určitým zjednodušením. Sú ale ukážkou toho, ako veľmi sa skrývame za štatistické ukazovatele a ako málo sme ochotní o nich rozmýšľať. Veríme, že po prečítaní tejto knihy si čitateľ bude vedieť lepšie predstaviť nielen to, čo sa za štatistickými pojmami skrýva, ale aj ako ich použiť v praxi. A bude vedieť lepšie porozumieť a skontrolovať, keď pravdepodobnosť a štatistiku použije niekto iný.

Ako čítať učebnicu

Autorka prehlasuje, že už naozaj veľakrát videla, ako sa vymieňajú kolesá na aute, alebo ako sa rúbu stromy. Autori zase, že veľakrát videli, ako sa štrikuje, alebo ako sa žehlí. Zodpovedne však môžu prehlásiť, že sa pozorovaním tieto činnosti nielenže nenaučili, ale naopak získali rešpekt a presvedčenie, že toto naozaj nie je v ich silách zvládnuť. (A pritom je to také jednoduché!)

S učebnicou, ktorú držíte v rukách je to rovnaké, môžete si ju čítať, ale veľký úžitok z toho mať nebudete. Pokiaľ nebudete sami riešiť úlohy, vymieňať kolesá, alebo štrikovať, tak sa to nenaučíte! Ale vysokoškoláci sú už dospelí ľudia a vedia, že sa môžu slobodne rozhodnúť. A vedia aj to, že ponesú sami zodpovednosť za svoje rozhodnutia. Autori im len prajú, aby ich rozhodnutia boli pre nich samých naozaj tie najlepšie.

Kapitola 2

Ako predpovedať budúcnosť (prvý nepravdepodobný príbeh)

Predpovedanie budúcnosti je na prvé počutie tajomnou a záhadnou činnosťou. V skutočnosti sa mu ale venujeme skoro všetci a skoro stále. Plánujeme si program na víkend, nakupujeme potraviny na budúci týždeň. Už na jar si platíme letnú dovolenku a vo výpredaji kupujeme lyže na budúcu sezónu. Za každou z týchto činností sa skrýva presný a väčšinou správny predpoklad, čo a kde budeme o pár dní, týždňov alebo mesiacov robiť. Podobné činnosti často vykonávame aj v práci. Ak ste meteorológ alebo zásobovač, dobrý odhad budúcnosti je dokonca vašou hlavnou činnosťou. Navyše, v tomto prípade je potrebné skúsenosti z minulosti transformovať do budúcnosti aj s určitými matematickými alebo fyzikálnymi predpoveďami, hodnotami, závislosťami. Bez ohľadu na profesiu si každý môže vyskúšať svoje schopnosti predpovedať *v číslach* napríklad pri nákupe a predaji akcií, špekulovaní s kurzami valút alebo pri tipovaní a stávkovaní. Tým sa blížime k samotnému obsahu tejto kapitoly. Začneme ju riešením úlohy známej aj z histórie, ktorá v 15. až 17. storočí stála pri zrode pravdepodobnosti ako matematickej disciplíny. Budeme k tomu potrebovať zdravý rozum a trochu elementárnej matematiky. A použijeme ešte jednu nezvyklú metódu: snívanie.

2.1. O zabavených kartách a kolónii netopierov

Janíčko a Marienka sú vzorní, ale normálni žiaci. Usilovne pracujú a dávajú pozor na hodinách, ktoré ich zaujímajú. A aby ich mozog nezaháľal, tie ostatné hodiny trávia hraním kariet. Hrávajú sedmu, pričom ich dlhodobé skúsenosti hovoria, že bez ohľadu na začínajúceho hráča je v každej partii šanca na víťazstvo každého zo súperov rovnaká. Práve preto ich hra tak baví!
Majú aj svoj systém zápasov. Najskôr sa zložia na cenu pre víťaza - veľkú čokoládu alebo 50 žuvačiek.
Potom začnú hrať a počítajú si víťazstvá v jednotlivých partiách. Kto prvý dosiahne 6 víťazných partií, získava víťazstvo v celom zápase a tým aj celú výhru.
Do tohto systému ale vniesol zmätok učiteľ slovenčiny, ktorý v napínavom stave 5:4 pre Marienku našich priateľov odhalil a karty zabavil. Tí sa rozhodli, že miesto čakania na koniec školského roku alebo kúpu nových kariet si výhru rozdelia medzi seba hneď. Samozrejme v spravodlivom pomere, zodpovedajúcom stavu, v ktorom bol zápas prerušený.

Úloha 2.1.1 *Navrhnite spravodlivé rozdelenie výhry, ak bol zápas prerušený za stavu* $5:4$. *V akom pomere si ju majú rozdeliť? Ak máte viac nápadov, skúste vymyslieť argumenty na podporu každého z nich.*

Riešenie: Správnu odpoveď hľadali matematici viac ako 100 rokov. Nám to snáď pôjde rýchlejšie. Zatiaľ ale hľadáme čo najviac (rozumných) návrhov a nápadov.
Jeden z nich je určite rozdeliť výhru v pomere $5:4$. Tým sme vlastne zohľadnili aktuálny stav zápasu. Vyhrávajúci získal viac, ale stav zápasu a aj delenie je dosť vyrovnané. Víťaz teda dostane $\frac{5}{9}$ a porazený $\frac{4}{9}$ z čokolády, v žuvačkách to vyjde na 27 a $\frac{7}{9}$ žuvačky pre víťaza a zvyšok pre porazeného.
Predchádzajúci návrh delenia vychádzal z toho, ako sa ktorému hráčovi darilo zbierať víťazstvá od počiatočného stavu $0:0$. Iný pohľad berie do úvahy, ako sa priblížili k svojmu cieľu,

šiestemu víťazstvu. To je predsa dôležité a rozhodujúce o celkovej výhre! Jednému hráčovi chýba 1 a druhému ešte 2 víťazstvá. Pomer delenia by mal zodpovedať týmto číslam. Prvý hráč je k víťazstvu 2 krát bližšie, pomer teda bude 2 : 1 v prospech vyhrávajúceho hráča. Dostane teda $\frac{2}{3}$ čokolády alebo 33 a $\frac{1}{3}$ žuvačky. □

Uviedli sme dve veľmi časté riešenia, ktoré sa objavili aj v histórii. Pre každé z nich sme našli aj argumenty na ich podporu. Pokiaľ čitateľ našiel aj ďalšie, o to lepšie. Alebo horšie? Správne riešenie by asi malo byť len jedno. Preto argumenty v prospech niektorých návrhov nebudú správne. A ak sú niektoré zlé, musíme pripustiť aj možnosť, že sú zlé všetky a správne riešenie sme ešte neobjavili. Nastal čas na hlbšie a kritické skúmanie.

Úloha 2.1.2 *Zovšeobecnite navrhnuté riešenia. Otestujte, či vo vhodných špeciálnych situáciách, získané výsledky zodpovedajú očakávaniu, alebo sú sporné a nezmyselné.*

Riešenie: Zovšeobecnenie a následná analýza vlastných riešení a nápadov, schopnosť nájsť v nich chybu a prípadne ich úplne zamietnuť je veľkou a od určitej úrovne vzdelania dôležitou schopnosťou.

Poďme sa v nej pocvičiť. Zovšeobecnenie prvého riešenia „5:4" je jednoduché. Pri stave $P : Q$ rozdelíme výhru v tom istom pomere. Prvý hráč teda z čokolády dostane $\frac{P}{P+Q}$ a druhý $\frac{Q}{P+Q}$. Počet žuvačiek dostaneme po vynásobení týchto zlomkov číslom 50. A kde sú chyby a slabé miesta?

Prvý problém je v tom, že pri delení vôbec neberieme do úvahy cieľový, víťazný stav. Pri stave 5:2 delíme výhru vždy v pomere 5:2.
Ak hráme do 6, cítime, že stav je takmer beznádejný a pomer delenia vyzerá rozumne.
Ak hráme do 10, situácia je stále vážna, ale tušíme, že šanca prehrávajúceho na zvrat je väčšia a patril by mu väčší podiel.
A pokiaľ hráme do 1000, stav 5:2 je nezaujímavou úvodnou zápletkou a delenie v pomere 5:2 je veľmi predčasné.

Druhý problém je ešte vážnejší. Čo so stavom 5:0?
Podľa zovšeobecneného pravidla sa výhra delí v pomere 5:0, teda prehrávajúci hráč nedostane nič. S tým určite nebudeme súhlasiť.
Pokiaľ sa hrá do 6, aj prehrávajúci hráč ešte stále má, aj keď malú šancu v zápase zvíťaziť. Preto by aj on mal dostať podiel z výhry, (aj keď malý).
Pravidlo by navyše nepriznalo prehrávajúcemu ani kúsok z výhry aj v prípade, ak by bol zápas prerušený už za stavu 1:0. Týmto stavom pritom začína každý zápas. Výhra prvej partie určite neurčuje jednoznačného víťaza celého zápasu, a pokiaľ hrajú napríklad do 100, stav je prakticky nerozhodný.
Delenie výhry v pomere „všetko:nič" je preto určite predčasné. Na základe tohto argumentu môžeme prvú metódu delenia definitívne zamietnuť a prehlásiť ju za chybnú.

Zostalo nám zovšeobecniť a preskúmať druhé riešenie. Pri ňom okrem stavu zápasu pri prerušení P:Q berieme do úvahy aj počet partií V, potrebných na víťazstvo v zápase. Výhru potom delíme v pomere (V-Q) : (V-P).
V úlohe 2.1.1 teda pre stav $5:4$ a $V=6$ delíme v pomere $(6-4):(6-5)=2:1$. Pokiaľ by sme ale hrali do 10, pomer delenia sa mení na 6:5 a pri hre do 1000 na $996:995$. Pri stave $5:0$ a hre do 6 sa výhra delí v pomere $6:1$, takže aj prehrávajúci má (malý) podiel z výhry. Zdá sa, že všetky námietky z predchádzajúceho odstavca sú pri tomto spôsobe delenia bezpredmetné. Máme správne riešenie?

Skúsme podrobnejšie rozobrať jednoduchú a prehľadnú situáciu. Nech sa zápas hrá na 2 víťazné partie a stav je $1:0$. Naše pravidlo v tomto prípade delí výhru v pomere $2:1$. Prehrávajúci hráč teda získava $\frac{1}{3}$ výhry. Je to spravodlivé?
Ak by sa zápas normálne hral ďalej, zvíťaziť by v ňom mohol len jediným spôsobom: vyhrať obe nasledujúce partie. Aká je šanca, že sa mu to podarí?
Vieme, že šanca na víťazstvo v jednej partii je pre oboch súperov rovnaká. Vyhrať dve partie za sebou je preto rovnaké, ako hodiť mincou dvakrát po sebe rub (a ani raz líc). Ak zoberiete mincu a začnete experimentovať, zistíte, že táto situácia nastane nie v jednej tretine, ale iba v jednej štvrtine prípadov. Dvomi hodmi totiž môžete získať štyri rovnocenné výsledky: líc

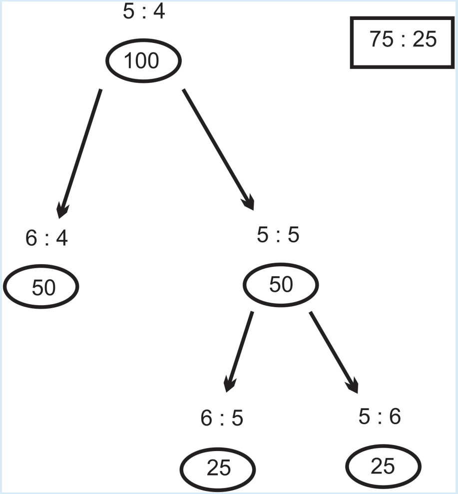
+ líc, líc + rub, rub + líc a rub + rub. Prehrávajúcemu hráčovi by preto skôr patrila štvrtina ako tretina výhry.
Zdá sa, že tento spôsob delenia mierne „nahráva" prehrávajúcemu hráčovi. Aj tento mierny rozdiel je ale podozrivý. Vráťme sa preto k nášmu príbehu. □

Janíčkovi s Marienkou sa tiež nepodarilo nájsť pravidlo delenia, na ktorom by sa obaja dohodli a uznali ho za správne. Problém ich preto trápil ďalej. Dokonca sa im o dohraní zápasu aj snívalo. A keďže ich sny boli spravodlivé, striedavo sa im jednu noc prisnila výhra jedného a druhú noc výhra druhého. To ich priviedlo na nápad požiadať o pomoc ešte lepších spáčov.
Na povale ich školy žila kolónia 100 inteligentných netopierov. Dalo sa s nimi rozumne porozprávať a hlavne vedeli počas dňa koordinovane snívať o požadovanej situácii. Ak by sa o kartovej partii snívalo napríklad desiatim z nich, päť by nechalo vyhrať Janíčka a päť Marienku. Naviac sa netopiermi dalo dohodnúť, aby v snívaní začali za stavu 5:4 a pokračovali až do ukončenia zápasu, kým jeden z hráčov nedosiahne 6 víťazstiev.

Presne takúto dohodu nasledujúceho dňa skoro ráno s netopiermi uzavreli. Netopiere potom zaspali, Janíčko s Marienkou išli do triedy a netrpezlivo čakali, čo sa večer od kolónie dozvedia. My na to budeme musieť prísť sami...

Úloha 2.1.3 *K akému koncu zápasu sa dosnívali netopiere? Koľko z nich videlo zvíťaziť zatiaľ vyhrávajúcu Marienku a koľko videlo zvíťaziť zatiaľ prehrávajúceho Janíčka? Vymyslite schému zápisu, pomocou ktorej čo najlepšie popíšete priebeh snenia celej kolónie. Akým pomerom by ste na základe tohto výsledku rozdelili výhru?*

Riešenie: Spôsob zápisu si každý môže zvoliť vlastný, nám sa osvedčila forma binárneho stromu, ilustráciu ktorej vidíme na obrázku.
Zachytáva počiatočný stav 5:4 a z neho sa vetviacu štruktúru nasledujúcich možných stavov zápasu. Smerom doľava sa vetvia stavy vznikajúce výhrou prvého hráča, doprava výhrou druhého hráča. K stavom sme pripísali počet netopierov, ktorým sa prisnil. Všetkých 100 začínalo za stavu 5:4. Potom sa polovici z nich prisnilo víťazstvo Marienky, ktorá tým



Obrázok 2.1: Zápis pomocou binárneho stromu

dosiahla stav 6:4 a celkové víťazstvo.
50 netopierov sa preto mohlo zobudiť a za víťaza zápasu považovať Marienku.
Druhých 50 v prvej partii videlo víťazstvo Janíčka a za stavu 5:5 pokračovalo v snívaní. „Ľavá" polovica z týchto 50 v ďalšej partii videla víťazstvo Marienky, ktorá tým zvíťazila aj v celom zápase 6:5.
„Pravých" 25 videlo druhé víťazstvo Janíčka za sebou, ktorý tým zvíťazil aj v zápase 5:6.
Celkovo teda videlo víťazstvo Marienky 75 netopierov a Janíčka 25.
Ak by sme výhru delili na základe tohto pomeru, bola by delená v pomere 75:25, alebo po zjednodušení 3:1. Marienka by teda mala dostať 3/4 a Janíčko 1/4 výhry. □

Riešením úlohy 2.1.3 sme dostali nový pomer delenia pre úlohu 2.1.1. My sa k overeniu jeho správnosti ešte vrátime, ale Janíčko a Marienka sa rozhodli dôverovať netopierom a na delenie nedohraných partií používať tento systém. Hneď si spomenuli na minulý školský rok, keď im učitelia prerušili dokonca dva zápasy. Prvý za stavu 5:3 a druhý za stavu 4:3. Ako si mali rozdeliť výhru v týchto prípadoch?

Úloha 2.1.4 *Použite predchádzajúcu metódu na určenie pomeru delenia výhry v zápasoch prerušených za stavu* $5:3$ *a za stavu* $4:3$.

Riešenie: Rozpis pre prvý zápas je na obrázku 2.2.

Vidíme, že víťazstvo prvého hráča videlo 87.5 netopierov a víťazstvo druhého 12.5 netopiera. Výhru si teda rozdelia v pomere $87.5 : 12.5 = 7{:}1$, čo pre vyhrávajúceho hráča znamená $\frac{7}{8}$ a pre prehrávajúceho $\frac{1}{8}$ výhry.

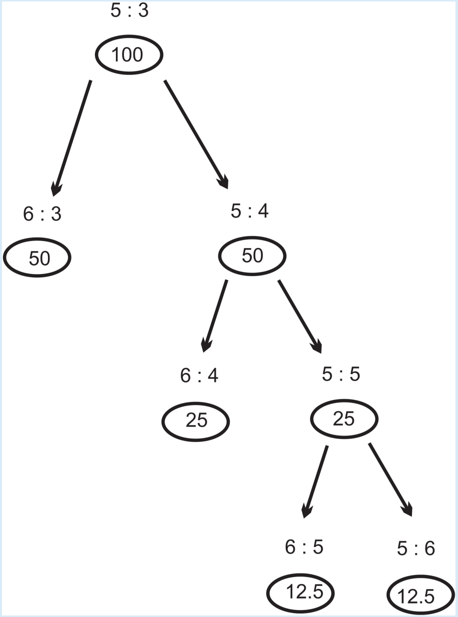
Riešenie pre stav 4:3 necháme na čitateľa. (Výsledok budeme neskôr potrebovať, táto výzva preto nie je platonická!) □

Pri riešení úlohy 2.1.4 došlo k určitej nepríjemnosti, a to ku deleniu netopierov. Porcovanie chránených živočíchov je určite nevhodné, preto sa na chvíľu pri tomto probléme zastavíme.

Úloha 2.1.5 *Pre aký počet netopierov v kolónii ich nebude potrebné deliť? Ako sa dá tento počet zistiť z riešenia a ako zo zadania? Aké počty netopierov sú pre naše experimenty optimálne? Nedá sa číslo* 100 *použiť pre riešenie úloh bez toho, aby viedlo k deleniu zvierat?*

Riešenie: Keď sme pri riešení predchádzajúcej úlohy dospeli k počtu 87.5 a 12.5 netopiera, dôležité je, že v oboch prípadoch bola potrebná polovica zvieraťa. Ak preto začneme z dvojnásobného počtu 200 netopierov, skončíme s celočíselnými výsledkami.

Podobne, pokiaľ sa vo výsledku (alebo aj v priebehu výpočtu) stretneme napríklad s osminami, treba východiskový počet vynásobiť ôsmimi.



Obrázok 2.2: Rozpis pre prvý zápas

To nás vedie k tomu, aké východiskové počty sú vhodné. Keďže počet netopierov delíme vždy na polovice, dôležitá je opakovaná deliteľnosť dvojkou. Naopak deliteľnosť inými (prvo)číslami nás v podstate nezaujíma. Optimálnymi pre naše experimenty sú preto mocniny dvojky. Pre riešenie prvej úlohy by nám stačili 4 netopiere, pre prvú časť štvrtej úlohy 8 netopierov.

Mocnina dvojky potrebná pre riešenie konkrétnej úlohy súvisí s počtom riadkov, ktoré budú potrebné pre zakreslenie priebehu zápasu. Počet riadkov vieme zistiť z východiskového stavu a zodpovedá počtu partií, ktoré pre víťazstvo v zápase potrebuje prehrávajúci hráč. Ide vlastne o najdlhší možný priebeh „dosnívania" zápasu.
Pri východiskovom stave napríklad 5:3 teda má graf 4 riadky. Keďže deliť počet netopierov na polovice je potrebné pri každom z troch prechodov do nasledujúceho riadku, pre túto úlohu stačí $2^3 = 8$ netopierov a vhodný (ak nechceme krájať netopierov) je aj ľubovolný násobok ôsmich.

Číslo 100, s ktorým sme začínali naše experimenty, ale môžeme aj napriek ochrancom prírody používať aj pre úlohu 2.1.4 a jej podobné. Sto ale nesmieme chápať ako počet netopierov. Čoho býva najčastejšie sto? Všetci si po čase spomenieme, že %. Pokiaľ sa nám teda práca s číslom 100 páči, vo význame percent ho môžeme používať pre riešenie všetkých úloh. Pokiaľ sa vo výpočte objavia aj nie celé čísla, ochrancov prírody upokojíme vysvetlením, že počítame s percentami a nie s netopiermi. □

Keď sme si vyjasnili metódu riešenia aj význam počtu netopierov, z ktorého začíname experimenty, skúsme sa hlbšie pozrieť na niektoré výsledky.

Úloha 2.1.6 *Vyrátajte spravodlivé delenie postupne pre stavy* $5:5$, $5:4$, $5:3$, $5:2$, $5:1$, $5:0$. *Objavuje sa vo výsledkoch nejaké pravidlo?*

Riešenie: Pre stav $5:5$ nám rýchly experiment a aj zdravý rozum hovorí, že výhru treba deliť v pomere $1:1$. Pre stavy $5:4$ a $5:3$ sme už pomer delenia rátali, a vyšlo nám $3:1$ a $7:1$. Po chvíli rátania nám pre stav $5:2$ vyjde pomer delenia $15:1$. Vidíme už pravidlo?
Môžeme si tiež pre jednotlivé stavy napísať, akú časť výhry dostane prvý hráč: $1/2$, $3/4$, $7/8$, $15/16$. Pre druhého to budú čísla $1/2$, $1/4$, $1/8$ a $1/16$. Trúfneme si uhádnuť, koľko dostanú pre stav $5:1$?
Pokiaľ sa vám to podarilo, určite zvládnete určiť aj delenie pre stav $5:0$. (Pokiaľ nie, pokojne aj ďalej využívajte služby netopierov a riešte úlohu štandardným zápisom.) To bude $63:1$, teda prehrávajúci hráč dostane len $1/64 = (1/2)^6$ z výhry.

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

To zodpovedá tomu, že prehrávajúci hráč môže zvíťaziť v tomto zápase len sériou 6 víťazných partií po sebe. Z východiskového počtu 100 % netopierov sa to prisní len šesťkrát na polovicu redukovanej časti kolónie, teda

$$((((((100 : 2) : 2) : 2) : 2) : 2) : 2)\,\% = \frac{100}{2^6}\,\% = 100 \cdot \frac{1}{64}\,\%$$

Zvyšným $\left(100 - \dfrac{100}{2^6}\right)$ % netopierom sa rôznym spôsobom prisní víťazstvo vyhrávajúceho hráča.

Ak číslo $\left(100 - \dfrac{100}{2^6}\right)$ % upravíme na tvar $100 \cdot \dfrac{2^6 - 1}{2^6}\,\% = 100 \cdot \dfrac{63}{64}\,\%$, získame z tejto úvahy opäť pomer delenia 1:63. □

Úloha 2.1.7 *Riešte rovnakú úlohu pre zápas „do 10" a stavy od $9 : 9$ po $9 : 0$!*

Riešenie: Zmena počtu víťazných partií zápasu nezmení charakter riešenia. Pri stave 9:9 je pomer 1:1, Pre 9:8 je pomer 3:1, pre 9:7 je pomer 7:1 atď. Rozdiel je v tom, že postupnosť stavov je dlhšia.
Pomer delenia 63:1, ktorý bol posledný v predchádzajúcej úlohe, preto teraz použijeme pri stave 9:4, a pokračujeme ďalej. Pri stave 9:0 delíme v pomere 1023:1. □

Úloha 2.1.8 *Zovšeobecníme predchádzajúce úlohy. Uvažujme zápas na V víťazných partií, ktorý je prerušený za stavu $V - 1 : V - Q$. (Q je jedna až V, teda stavy sú od $V - 1 : V - 1$ po $V - 1 : 0$.)*
V akom pomere je treba deliť výhru?

Riešenie: Môžeme uvažovať podobne, ako v závere riešenia úlohy 2.1.6. Jediná možnosť výhry druhého hráča spočíva v tom, že Q krát za sebou zvíťazí. Túto situáciu uvidí len $\dfrac{1}{2^Q}\%$

z východzieho počtu netopierov. Pomer delenia by preto mal byť $\dfrac{2^Q-1}{1}$. Tomuto výsledku zodpovedajú aj riešenia úloh 2.1.6 a 2.1.7. □

Metóda riešenia úloh pomocou netopierov sa ukazuje ako veľmi efektívna a zvládame pomocou nej stále zložitejšie úlohy. Mali by sme sa preto ešte raz zamyslieť, či a z akých dôvodov ju budeme považovať za správnu.
Cesta k odpovedi vedie cez návrat k riešeniu úlohy 2.1.5. V ňom sme zistili, že pokiaľ číslo 100 budeme interpretovať nie ako počet netopierov, ale 100 % z ich kolónie, môžeme ho ako východiskové číslo použiť pre riešenie ľubovoľnej úlohy bez rizika konfliktu s ochrancami prírody. Viacerí si ale určite pamätáme, že jedno percento je vlastne 1/100 celku. Koľko je teda vlastne 100 %?

Úloha 2.1.9 *Dá sa naša metóda používať aj s východiskovým číslom 1? Akú interpretáciu mu môžeme dať? Veríme takto získaným výsledkom, sú niečím lepšie a užitočnejšie? A najdôležitejšia otázka: Aký význam majú získané výsledky, ak číslo 1 budeme chápať ako jedného (a jediného) netopiera v kolónii?*

Riešenie: Ako sme naznačili, 100 % je len iným spôsobom pre vyjadrenie jedného celku. Jedna teda môže znamenať 1 kolóniu, 1/2 jej polovicu, 1/4 jej štvrtinu atď.
Môžeme ale zvoliť aj inú interpretáciu, pri ktorej zabudneme na netopierov a sústredíme sa na to najdôležitejšie, na cenu pre víťaza. Jedna na začiatku výpočtu znamená, že v tomto stave treba rozdeliť celú výhru. Po rozvetvení na dva možné nasledujúce stavy dostávame hodnoty 1/2, ktoré znamenajú, že pre ne prislúcha po 1/2 výhry. Zlomky, ktoré získame pri stavoch končiacich zápas, priamo zodpovedajú častiam výhry prislúchajúcim víťazovi. To je aj výhoda počítania s jednotkou. Ak napríklad pri stave 6 : 4 z úlohy 2.1.4 vyjde zlomok 1/4, prvý hráč na základe tohto výsledku získa 1/4 výhry. Celkovú výhru hráča získame sčítaním zlomkov pri stavoch zodpovedajúcich jeho výhre v zápase.

Čo ale v prípade, ak číslo 1 znamená „jeden netopier"? Už po prvom vetvení (napríklad stavu 4 : 3 na 5 : 3 a 4 : 4) sa nám rozdelí na 1/2 a 1/2. Pokiaľ chceme vzácne zviera zachovať neporušené, musíme dať týmto zlomkom iný význam. Bude to **pravdepodobnosť**, s akou sa mu prisnia jednotlivé stavy. Ten istý význam majú aj ďalšie zlomky, ktoré získavame pri ďalších vetveniach. Preto (podobne ako v predchádzajúcom odstavci) ak sčítame zlomky pri koncových stavoch zodpovedajúcich výhre jedného hráča v zápase, získame celkovú pravdepodobnosť jeho výhry.

Ako sme povedali vyššie, keď sčítame zlomky pri koncových stavoch zodpovedajúcich výhre jedného hráča v zápase, súčet určuje, akú časť výhry má získať. Zároveň ale zodpovedá aj pravdepodobnosti, že v zápase vyhral (alebo pravdepodobnosti, že sa to prisnilo netopierovi, čo je to isté). Tým sme vyslovili podstatu netopierej metódy.

Výhru delíme v pomere, ktorý presne zodpovedá pravdepodobnosti víťazstva jednotlivých hráčov v prerušenom zápase.

Či takéto delenie považujeme za správne, je skôr filozofická otázka. Súčasná filozofia prírodných vied hovorí, že tento spôsob správny je. Z matematického hľadiska v ňom nenájdeme žiadny rozpor podobný rozporom, ktoré sme spomenuli v riešení druhej úlohy.

Tvrdenia teórie pravdepodobnosti dokonca hovoria viac. Nechajme Janíčka s Marienkou dohrať zápas prerušený za stavu 5:4 napríklad 1000 krát a robme si štatistiku, kto získal v jednotlivých zápasoch výhru. Ak potom vypočítame priemernú výhru na jeden zápas, získame hodnotu veľmi blízku výsledku určenému na základe pravdepodobnosti. Marienka by teda vyhrala počet zápasov blízkych 750 a Janíčko doplnok do 1000, blízky hodnote 250. Čím by bol počet zápasov vyšší, tým presnejšie by namerané hodnoty zodpovedali vypočítanej pravdepodobnosti. □

Zdá sa, že správnosť netopierej metódy je riešením predchádzajúcej úlohy zdôvodnená. V každom prípade sme si objasnili jej vnútornú podstatu a interpretáciu získaných výsledkov. Toto pochopenie by nám malo pomôcť pri riešení nasledujúcich úloh. Pôjde ale už skôr o problémy, vyžadujúce dlhšiu prácu. Ich riešenia budeme preto uvádzať už len v tvare návodov.

Úloha 2.1.10 *Vieme už, ako rozdeliť výhru pri stave* $5:2$ *a* $4:3$*. Viete tieto výsledky využiť pre určenie delenia pri stave* $4:2$*?*

Riešenie: Myšlienka riešenia sa už možno objavila pri úlohách 6,7 a 8. Podstata spočíva v tom, že zo stavu 4:2 sa po odohraní jednej partie môžeme dostať len do stavu 5:2 alebo 4:3. Pre každý z týchto stavov sme už určili, v akom pomere sa pri nich má rozdeliť výhra alebo ešte lepšie, akú časť z nej má dostať každý z hráčov.

Pretože sme vychádzali zo stavu 4:2, v každom zo stavov 5:2 a 4:3 musíme v danom pomere rozdeliť nie celú, ale len polovicu výhry. Pre stav 5:2 sme v úlohe 2.1.6 určili pomer delenia 15:1, teda hráči získali 15/16 a 1/16 výhry. Teraz by si na základe tohto pomeru delili len polovicu výhry, získali by teda 15/32 a 1/32 výhry. Druhú polovicu výhry by si rozdelili podľa pomeru platného pre stav $4:2$. □

Úloha 2.1.6 nám ukázala, ako sa dajú zo známych pomerov delenia počítať ďalšie pre „blízke" stavy prerušenia partie. Tento postup má široké využitie.

Úloha 2.1.11 *V úlohe 2.1.6 sme určili pre zápas do* 6 *pomery delenia výhry v stavoch* $5:5$ *až* $5:0$. *Jeden z hráčov bol teda len krok od víťazstva. Ako to bude vyzerať, ak je od víťazstva dva kroky? Inak povedané, určite pomer delenia výhry, ak zápas bol prerušený v stavoch* $4:4$, $4:3$, $4:2$, $4:1$ *a* $4:0$. *Podobne určite pomery pre stavy* $8:8$ *až* $8:0$ *v zápase do* 10 *a pre stavy* $V-2:V-2$ *až* $V-2:0$ *pri zápase na* V *výhier.*

Riešenie: Pri stave 4:4 je pomer delenia 1:1. Zo stavu 4:3 je možné dostať sa len do stavu 5:3 (s pomerom delenia 7:1) alebo 4:4 (s delením 1:1). Vyhrávajúci hráč teda dostane $1/2$ zo $7/8$ a $1/2$ z $1/2$. Spolu to bude $7/16+1/4=11/16$ z výhry a pomer delenia teda bude 11:5. Na určenie delenia pre stav 4:2 teraz môžeme použiť známe výsledky pre stavy 4:3 a 5:2 atď. V riešení treba pokračovať zovšeobecnením tohto postupu s využitím riešenia úloh 2.1.6, 2.1.7 a 2.1.8. □

Úloha 2.1.12 *Vytvorte úplnú tabuľku rozdelenia výhier pre všetky možné stavy prerušenia pre zápas do* 6, *do* 10 *a do* V *výhier.*

Riešenie: Pre zápas do 6 je najlepšie vytvoriť si strom všetkých stavov od 0:0 do 6:5 respektíve 5:6. Stavy sú, ako sme už zvyknutí, pospájané, ak je možné z jedného prejsť do druhého víťazstvom v jednej partii. Pre niektoré z týchto stavov už poznáme pomer delenia a pre ostatné ich vieme dopočítať pomocou postupu z úloh 2.1.10 a 2.1.11. Obrázok nám pomáha pri hľadaní stavov, ktoré vieme týmto pravidlom „spočítať".

Pre zápas do 10 je postup rovnaký, len obrázok a počet stavov je väčší. Použiť toto riešenie pre zápas do V nie je dosť dobre možné, ak nepoznáme hodnotu V. A pokiaľ poznáme, ale bude napríklad 100, nebudeme mať dosť času alebo papiera. Miesto toho sme ale s našimi skúsenosťami možno už schopní softvérového riešenia. Môžeme vytvoriť algoritmus, ktorý po zadaní konkrétnej hodnoty V a stavu $P : Q$ vráti správny pomer delenia. A môžeme sa zamyslieť, či náhodou nebude rekurzívny... □

Zdá sa, že úloha 2.1.12 zavŕšila naše snaženie. Ale to len preto, že sme zabudli na Janíčka a Marienku. Kým sme riešili predchádzajúce úlohy, Janíčko sa začal intenzívnejšie venovať futbalu a jeho výkonnosť v sedme prudko poklesla. Analýzou výsledkov partií za posledný mesiac Marienka zistila, že v priemere vyhráva 6 partií z 10 (a Janíčko len zvyšné 4). Na základe tohto zistenia požiadala o úplnú revíziu doteraz získaných výsledkov. Na prvý pohľad ich všetky môžeme zahodiť a začať uvažovať znovu. Druhý pohľad je ale omnoho optimistickejší.

Úloha 2.1.13 *Riešte úlohy 2.1.3, 2.1.4, 2.1.6 a 2.1.12 pre Marienkinu zvýšenú úspešnosť.*

Riešenie: Zadanie je zľahka zavádzajúce, lebo určitým spôsobom si v zmenených podmienkach budeme musieť znovu premyslieť všetky predchádzajúce úlohy. Princíp ich riešenia ale zostane zachovaný, zmení sa len jeden prvok riešenia.
Pokiaľ jeden netopier začne snívať za stavu $P : Q$ (P výher má Marienka), stav $(P+1) : Q$ (teda partiu vyhrala Marienka) vidí s pravdepodobnosťou $6/10$ a stav $P : (Q+1)$ (po Janíčkovej výhre) s pravdepodobnosťou $4/10$.
Inak povedané, v stave $P : Q$ sa $6/10$ výhry bude deliť podľa pomeru pre stav $(P + 1) : Q$ a 4:10 podľa pomeru pre stav $P : (Q + 1)$.
Pri prerušení zápasu za stavu 5:5 sa teda bude deliť výhra v pomere 6:4 pre Marienku. Pri

prerušení zápasu v stave 5:4 pre Marienku sa jej ujde 6/10 (za víťazstvo na 6:4) a 6/10 krát 4/10 (za víťazstvo 6/5), spolu 84/100 výhry.
Janíčko dostane zvyšných 16/100, čo zodpovedá dvom za sebou nasledujúcim výhram s pravdepodobnosťou 4/10.
Naopak pri prerušení za stavu 4:5 v prospech Janíčka má Marienka nárok až na 36/100 výhry, čo odpovedá pravdepodobnosti jej dvoch za sebou nasledujúcich výhier. Janíčko, len krok od víťazstva, získa 64/100 z výhry. □

Janíčkovi sa tento nerovnovážny stav samozrejme nepáčil. Prehovoril Marienku, aby okrem kariet hrávali aj tenis. Tu mal zase tréningový náskok Janko a každá výmena skončila v jeho prospech s pravdepodobnosťou 6/10. Marienka výmenu vyhrala len v 4 prípadoch z 10. Na kurtoch im nikto rakety a loptičku nebral, pokazení kartami a netopiermi ich ale zaujímali aj pravdepodobnostné aspekty ich zápasov.

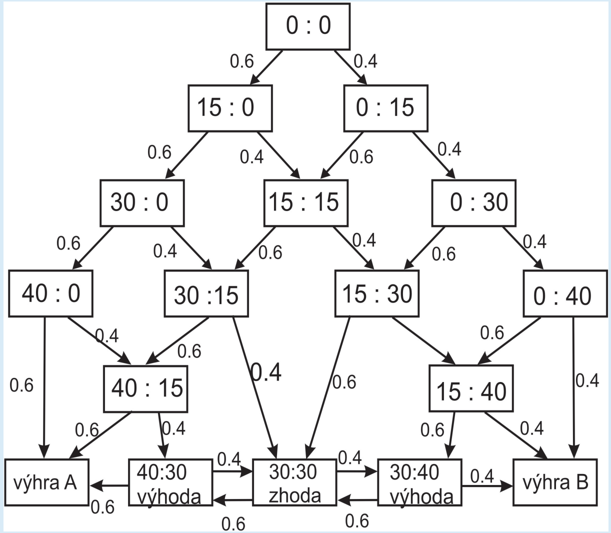
Úloha 2.1.14 *Aká je pravdepodobnosť jednotlivých stavov počas jednej hry (jednom game)? Aká je pravdepodobnosť, že každý z hráčov vyhrá hru, set a zápas?*

Riešenie: Úloha je veľmi podobná úlohe 2.1.12. Strom vývoja kartového zápasu ale musíme zameniť za strom vývoja tenisovej hry a setu. Ukážka stromu pre tenisovú hru je na obrázku 2.3, ktorý sme si požičali z [8].

Druhým rozdielom je potenciálne nekonečná zápletka pri zhode za stavu 40:40. Na jej úplné rozuzlenie bude zrejme potrebné určiť súčet dvoch nekonečných radov. Keď budeme poznať pravdepodobnosti víťazstva jednotlivých hráčov v hre, môžeme zostaviť obdobnú schému, popisujúcu postupnosť stavov hier vedúcich ku zisku setu. A nakoniec podobná schéma pre sety nám pomôže určiť pravdepodobnosti výhier v zápase. □

Úloha 2.1.14 bola v tejto kapitole posledná. Mohli by sme ešte pokračovať ďalším zovšeobecňovaním parametrov úloh, uvažovaním o zápasoch 3 hráčov atď. Miesto toho si ale teraz doprajeme pocit z dobre vykonanej práce. Riešením poslednej úlohy sme sa totiž vrátili k úvodu kapitoly, kde sme okrem iného spomínali tipovanie športových výsledkov. Neviem, koľko z tipujúcich si vedie dlhodobé štatistiky porovnávajúce jednotlivých hráčov a

Home Page
Title Page
Contents
Page 28 of 410
Go Back
Full Screen
Close
Quit



Obrázok 2.3: Strom vývoja tenisovej hry

na ich základe pomocou podobných výpočtov stávkuje. Veríme ale, že takéto výpočty uskutočňujú zamestnanci stávkových kancelárií a na ich základe vznikajú stávkové kurzy. Títo ľudia budúcnosť nielen predpovedajú, ale pre mnohých ľudí aj pripravujú. A určite majú zaujímavé povolanie.

Na úplný záver ešte spomenieme niektoré historické súvislosti, ktoré sme naznačili v úvode. Úlohy o rozdelení výhry sú známe už dlho. Určite to súvisí s hazardnými hrami, ktoré ľudstvo priťahujú ešte dlhšie a silnejšie ako matematika. Prvý matematik, o ktorom je známe, že sa touto úlohou zaoberal, bol Luca Paciolli. Ten v roku 1494 vydal knihu „Summa de Arithmetica,...", v ktorej zhrnul veľkú časť vtedajšieho matematického poznania a tiež svojich vlastných výsledkov. Žiaľ, viacero z nich bolo chybných. Keďže kniha bola dlhé roky v podstate jedinou používanou učebnicou (aspoň v oblasti Talianska), je ťažké odhadnúť, ktorým smerom posunula vývoj matematiky. Jednou z chýb bolo aj riešenie prvej úlohy, ktorým mal byť pomer 5:4.

Chybným bolo aj tvrdenie, že nie je možné riešiť kubické rovnice. Že to možné je, ukázali viacerí talianski matematici v 30. rokoch 16. storočia. Najznámejší z nich bol povolaním lekár, ale tiež autor viac ako 150 encyklopédií a hazardný hráč Gerolamo Cardano. Po ňom sa vzorce na riešenie kubických rovníc aj nazývajú. Patril aj k ďalším riešiteľom úlohy 2.1.1 a mnohých ďalších. Všetky svoje objavy v oblasti pravdepodobnosti spísal (ako inak) v roku 1526 do encyklopédie o hre s kockami, ktorá sa mohla stať základom teórie pravdepodobnosti. To by sa ale nesmela po jeho smrti na 82 rokov stratiť. Keď bola v roku 1663 znovu objavená, základy pravdepodobnosti už stihli položiť iní.

Ako prví úspešní riešitelia úlohy 2.1.1 sú teraz uvádzaní dvaja myslitelia, francúzsky právnik Pierre Fermat a vedec a filozof Blaise Pascal. Zachovali sa aj listy, ktoré si písali o riešení úloh z oblasti hazardných hier a radosti z úspechu. Veľmi známy je Pascalov citát: „Ako vidím, pravda je rovnaká v Tolous aj v Paríži..." Jeho práca „Traktát o aritmetickom trojuholníku" (dnes sa volá Pascalov) z roku 1654 sa nestratila a stala sa jednou z prvých kníh o pravdepodobnosti.

Kapitola 3

Pravdepodobnosť náhodnej udalosti

3.1. Množinové operácie, základné pojmy, kombinatorika

Operácie s množinami, ktoré budeme používať, sú

- zjednotenie $A \cup B$
- prienik $A \cap B$
- doplnok $\overline{A}$
- rozdiel $A - B$

Časté označenie pre zjednotenie a prienik je aj:

$$A \cup B = A + B$$

$$A \cap B = A \cdot B$$

Témou prvých prednášok z pravdepodobnosti sú náhodné pokusy a náhodné udalosti. Pretože slová, ktoré sa používajú na označenie týchto matematických pojmov, sa používajú aj v bežnom jazyku, niekedy je ťažké si uvedomiť, že matematická disciplína zvaná pravdepodobnosť chápe pod pojmom náhodný pokus len jeden z významov tohto slovného spojenia. Navyše na jeho presnú definíciu je potrebný zložitejší aparát, než je v základných kurzoch možné predviesť. Preto nasledujúce vymedzenie tohto pojmu treba chápať ako prvé priblíženie k jeho skutočnému významu.

Náhodný pokus je experiment, ktorého výsledok môže byť rôzny aj pri úplne rovnakých vstupných podmienkach. Je popísaný množinou Ω, ktorá obsahuje všetky možné výsledky, ktoré pri tomto pokuse môžu nastať. (Niekedy sa náhodný pokus nazýva hromadný jav.)

Náhodná udalosť je výsledok náhodného pokusu, je to vlastne podmnožina množiny Ω. Pred uskutočnením pokusu nevieme povedať, ktorá z náhodných udalostí nastane. Ak sa udalosť skladá z viacerých jednoduchších udalostí (je to viacprvková množina), nazývame ju **zložená udalosť**. Ak sa udalosť už ďalej rozdeliť nedá (je to jednoprvková množina), nazývame ju **elementárna udalosť**. (Iný názov pre náhodnú udalosť je náhodný jav.)

Tvrdenie 3.1.1 *Ak sú A a B náhodné udalosti, potom aj ich prienik a zjednotenie sú náhodné udalosti. Ak je A náhodná udalosť, tak aj jej doplnok do množiny Ω je náhodná udalosť.*

Doplnok k náhodnej udalosti sa nazýva aj **opačná udalosť** k udalosti A.

Šanca alebo pravdepodobnosť, s akou náhodná udalosť nastane, bola v minulosti počítaná rôznymi spôsobmi. Na ich základe hovoríme o rôznych spôsoboch výpočtu pravdepodobnosti. Treba si uvedomiť, že keď sú splnené ich predpoklady, je možné použiť na výpočet pravdepodobnosti každý z nich. A aj keď to pri jednotlivých výpočtoch nebudeme hovoriť, predpoklady pre použitie jednotlivých spôsobov výpočtu pravdepodobnosti treba najskôr skontrolovať.

Spôsoby vyjadrenia pravdepodobnosti:

- frekvenčné vyjadrenie pravdepodobnosti (predpokladáme dostatočne veľký počet vykonaných experimentov, a tiež každý z výsledkov má rovnakú pravdepodobnosť)

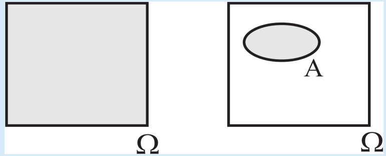
- klasické vyjadrenie pravdepodobnosti (predpokladáme, že náhodný pokus má konečný počet výsledkov, každý z výsledkov má rovnakú pravdepodobnosť)
- geometrické vyjadrenie pravdepodobnosti(predpokladáme, že náhodný pokus môže mať aj nekonečne veľa výsledkov)
- axiomatické vyjadrenie pravdepodobnosti (pri rôznych spôsoboch výpočtu pravdepodobnosti sa stávalo, že sa dospelo k rôznym výsledkom. Pravdepodobnosť jednej udalosti bola rôzna v závislosti na spôsobe výpočtu. Bolo treba urobiť s pravdepodobnosťou náhodnej udalosti definitívny poriadok. Podarilo sa, ale je to na dlhé štúdium... Čitateľ nájde axiomatickú definíciu napríklad v [4].)

Napriek tomu, že tu nepovieme, ako je presne axiomaticky definovaná pravdepodobnosť, uvedieme jej vlastnosti, z ktorých budeme pri výpočtoch vychádzať.

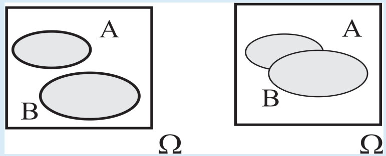
Tvrdenie 3.1.2 (Vlastnosti pravdepodobnosti) *Nech A a B sú náhodné udalosti a nech $P(A)$ a $P(B)$ sú pravdepodobnosti týchto udalostí, potom*

1. $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$
3. *ak $A \cap B = \emptyset$, (teda množiny A a B sú dizjunktné, udalosti sú nezlučiteľné) potom*
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
5. *ak je množina A podmnožinou množiny B, potom $P(A) \leq P(B)$*

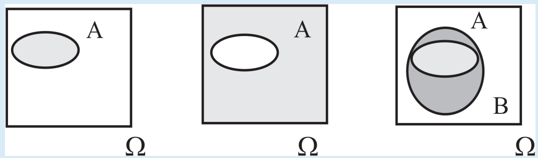
Zjednodušene povedané, náhodné udalosti môžeme modelovať ako množiny a pravdepodobnosť náhodnej udalosti je akási "veľkosť", presnejšie miera množiny predstavujúcej túto udalosť. Vlastnosti z tvrdenia 3.1.2 nebudeme dokazovať, iba ich skúsime objasniť. Na obrázkoch 3.1, 3.2, 3.3 je naznačené, ako je možné nakresliť tieto vlastnosti.



Obrázok 3.1: Veľkosť množiny Ω je 1. A je podmnožina Ω, veľkosť A je menšia nanajvýš rovná veľkosti Ω



Obrázok 3.2: Veľkosť zjednotenia množín A a B je súčet ich veľkostí iba vtedy, keď majú prázdny prienik: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



Obrázok 3.3: Veľkosť doplnku množiny A do množiny Ω a veľkosť množiny $A \subseteq B$

Príklad 3.1.1 *Náhodný pokus, popisujúci hody klasickou hracou kockou, je reprezentovaný množinou* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Elementárna udalosť, spočívajúca v tom, že na kocke padne trojka bude reprezentovaná množinou $A = \{3\}$.
Zložená udalosť, spočívajúca v tom, že na kocke padne párne číslo, bude reprezentovaná množinou $B = \{2, 4, 6\}$.
Udalosti $A = \{3\}$ *a* $B = \{2, 4, 6\}$ *sú nezlučiteľné, (nemôže padnúť trojka, ktorá je párna).*
Doplnok udalosti $A = \{3\}$ *do množiny* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *je udalosť* $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, *spočívajúca v tom, že na kocke nepadne trojka.*
Pravdepodobnosť, že na kocke padne nejaké z čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6$, *je* 1.
Pravdepodobnosť, že na kocke žiadne číslo nepadne, je 0.
Pravdepodobnosť, že nastane udalosť $A = \{3\}$ *je* $\frac{1}{6}$, *(že padne* 3*).*
Pravdepodobnosť, že nastane udalosť $B = \{2, 4, 6\}$ *sú* $\frac{3}{6}$, *(že padne párne číslo).*
Pravdepodobnosť, že nastane udalosť $A \cup B$ *je* $\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$, *(že padne* 3, *alebo padne párne číslo).*

Pri výpočte pravdepodobnosti podľa klasickej definície sa na určenie počtu možností často používajú kombinatorické vzorce. Už na strednej škole sa zavádzajú pojmy kombinácie, variácie, permutácie, kombinácie s opakovaním, variácie s opakovaním a vzorce pre ich výpočet. Vrelo odporúčame na všetky tieto vzorce na nejaký čas zabudnúť, nakoľko sú pomôckou pre jednoduchšie vyjadrovanie sa pre matematikov, alebo ľudí, ktorí ich používajú s porozumením. V žiadnom prípade však tieto vzorce neukazujú cestu, ako sa naučiť kombinatoriku. Skúsme otestovať našu znalosť kombinatoriky na nasledujúcej úlohe, ktorú sme si požičali zo súťaže pre žiakov základnej školy [5].

Úloha 3.1.1 *Do miestnosti jedným z 5 okien vletela včela. Potom niekto jedno okno zavrel a včela jedným zo 4 otvorených okien vyletela von. Koľko je možností, ako to mohla urobiť?*

Riešenie: Správnych riešení tejto úlohy je niekoľko, uvedieme nasledujúce tri:

- 20 možností, $5 \cdot 4$

  Riešenie zdôvodníme tým, že pri vstupe (vlete) do miestnosti má včela 5 možností a pri výstupe (odlete) má 4 možnosti, dohromady 20. To, čo robí niekto iný (človek, ktorý zavrel okno), nie je pre včelu možnosťou a preto sa do počtu všetkých možností nezapočítava.

- 100 možností, $5 \cdot 5 \cdot 4$

  Toto riešenie zachytáva aj možnosť, ako človek okno zavrie. Keby sme to totiž nebrali do úvahy a nezapočítali do počtu možností, tak napr. pri zavretom druhom okne vylúčime možnosť, že ním včela vyletí, ale medzi celkový počet možností túto zarátať treba, lebo niekedy nastať môže. Teda je 5 možností pre vlet, 5 možností pre zavretie okna a 4 možnosti pre odlet.

- 25 možností, $5 \cdot 5$

  Toto riešenie uvádza práve raz každú z možností vletu a odletu, ktorá môže nastať a tých je 25. Vôbec nás nemusí zaujímať, ktoré okno je pri tom zavreté, lebo to, že včela vletí oknom 1 a vyletí oknom 2 je jediná možnosť nech už je zavreté okno 3, 4 alebo 5.

Úloha 3.1.1 tu nie je zaradená pre to, aby čitateľa poplietla. Je potrebné si uvedomiť, že aj rôzne riešenia tej istej úlohy môžu byť „správne". Na to, aby mala táto úloha jednoznačné riešenie, musí byť zadaná presnejšie. Navyše ako vidíme, ani jedno z troch riešení nepoužíva kombinatorické vzorce. Takže k vyriešeniu úlohy 3.1.1 naozaj nepomôžu spomínané vzorce. □

Vysvetľovali sme, že k riešeniu úloh nám nepomôže naučiť sa vzorce pre kombinácie, variácie a permutácie. Tieto názvy a značky pre ne si vymysleli matematici až keď už týmto pojmom dobre rozumeli a potrebovali si ich zapisovanie urýchliť. Podľa ich vzoru aj my na tomto mieste zavedieme, pre zjednodušenie ďalších zápisov, jedno užitočné označenie, ktoré sa nazýva n-**faktoriál**, označuje sa $n!$ a vypočíta sa nasledovne:

$$n! = n.(n-1).(n-2).(n-3).\ldots.3.2.1$$

Pomocou značky pre faktoriál môžeme zjednodušiť zápis násobenia, napríklad:

$$58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = \frac{58!}{47!}$$

3.1.1. Príklady

1. Nech $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ a $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$.
   Nájdite $A \cup B$, (zjednotenie množín A a B).

2. Nech A={1,2,3,5,6,8,9} a B={2,3,4,5,6,7,10}.
   Nájdite $A \cap B$, (prienik množín A a B).

3. Nech A={1,2,3,5,6,8,9} a B={2,3,4,5,6,7,10}.
   Nájdite $\overline{A}$, (doplnok množiny A).

4. Nech $A = \{1, 2, 3, 5\}$ a $B = \{2, 3, 6, 7, 10\}$. Nájdite doplnok prieniku množín A a B do množiny $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Výsledok zakreslite!

5. Na hode mincou ilustrujte pojmy: náhodná udalosť (=náhodný jav), náhodný pokus, elementárna udalosť (=elementárny jav), zložená udalosť (=zložený jav).

6. Aký rozdiel je medzi frekvenčnou a klasickou definíciou pravdepodobnosti?

7. Prečo bolo treba zaviesť geometrickú definíciu pravdepodobnosti? V akých prípadoch nestačili predošlé dve?

8. Prečo nestačili predošlé tri a vymyslela sa axiomatická definícia pravdepodobnosti?

9. Koľko podmnožín má štvorprvková a n-prvková množina?

10. Uveďte aspoň tri rôzne príklady miery. Napíšte vždy konkrétnu mieru nejakej množiny.

11. Napíšte aspoň 5 navzájom dizjunktných neprázdnych množín.

12. Hádžeme hracou kockou so 6 stenami. Všetky výsledky sú rovnako možné. Aká je pravdepodobnosť, že padne štvorka?

13. Hádžeme dvomi hracími kockami, takými ako v predošlej úlohe. Aká je pravdepodobnosť, že padnú súčasne dve štvorky?

14. Hádžeme dvomi hracími kockami, takými ako v predošlej úlohe. Aká je pravdepodobnosť, že padne súčet osem?

3.1.1.1. Riešenie príkladov

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Je to množina, ktorá obsahuje prvky, ktoré patria do množiny A alebo do množiny B.

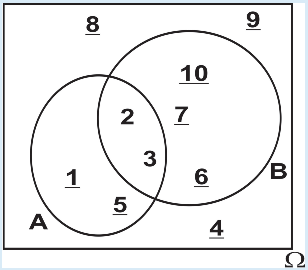
2. $A \cap B = \{2, 3, 5, 6\}$. Je to množina, ktorá obsahuje prvky patriace do množiny A a súčasne do množiny B.

3. Táto úloha je nesprávne zadaná. Pri určovaní doplnku množiny A je potrebné poznať množinu, do ktorej doplnok robíme. Množina B to byť nemôže, doplnok sa dá urobiť len do nadmnožiny množiny A. Úloha nemá riešenie.

4. Doplnok prieniku množín A a B do množiny Ω je množina

$$\overline{A \cap B} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Na obrázku 3.4 sú čísla patriace do tohto doplnku podčiarknuté.



Obrázok 3.4: Doplnok prieniku množín A a B do množiny Ω

5. Označme udalosť, že na minci padne hlava, písmenom H a udalosť, že na minci padne znak, písmenom Z.

Náhodné udalosti sú napríklad $A = \{H\}$, $B = \{H, Z\}$, $C =$.
Náhodný pokus je $\Omega = \{H, Z\}$.
Elementárne udalosti sú $D = \{Z\}$, $E = \{H\}$.
Zložená udalosť je $C = \{H, Z\}$.

6. Frekvenčná definícia vychádza z nameraných dát, z výsledku nejakého uskutočneného pokusu. Vypočíta sa nasledovne: Najprv n-krát opakujeme rovnaký pokus. Ak z týchto n pokusov nastane udalosť A v m prípadoch, tak pravdepodobnosť udalosti A bude

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Podľa klasickej definície sa počíta pravdepodobnosť bez uskutočnenia pokusu. Teoreticky sa spočíta počet situácií priaznivých udalosti A a počet všetkých možných situácií.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Musí však byť splnený predpoklad, že všetky situácie sú rovnako pravdepodobné.

7. Pretože množina Ω môže byť aj nekonečná. V takej situácii by vzorec pre klasickú pravdepodobnosť mal v menovateli nekonečno.

8. Pretože výpočty podľa vzorca pre geometrickú pravdepodobnosť viedli k nekonzistentným riešeniam. (Rôzne výsledky jednej úlohy.)
V ďalšej kapitole uvedieme na ilustráciu dve rôzne riešenia jednej úlohy.

9. Jednou z možností je zapamätať si, že každá n-prvková množina má 2^n podmnožín. A jednoducho do vzorca dosadiť. Štvorprvková množina má $2^4 = 16$ podmnožín. Táto metóda má tú nevýhodu, že vzorcov je veľa, dosť sa na seba podobajú a tak pri ich používaní dochádza k omylom.

Iná metóda je vypísať všetky podmnožiny, nejakej 4-prvkovej množiny, napríklad podmnožiny množiny $\{1, 2, 3, 4\}$. Pokiaľ možno, treba to urobiť nejako prehľadne:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$$

$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$$

Táto metóda vedie väčšinou k správnemu výsledku, stačí len zvoliť prehľadný systém vypisovania všetkých možností a tých možností nesmie byť príliš veľa. Všetky podmnožiny 20 prvkovej množiny by sme asi vypísať nedokázali.

Skúsme nájsť nejakú zákonitosť, vzťah, medzi počtom prvkov množiny a počtom všetkých jej podmnožín. Začnime od malých množín, kde sa výsledok ľahko nájde.

Prázdna množina $\emptyset$ má 1 podmnožinu, a to samu seba

$$\emptyset$$

1-prvková množina, napríklad množina $\{1\}$ má 2 podmnožiny, a to prázdnu množinu a samu seba :

$$\emptyset,\{1\}$$

2-prvková množina, napríklad množina $\{1,2\}$ má 4 podmnožiny, sú to všetky podmnožiny z predchádzajúceho prípadu, a navyše tie isté podmnožiny s pridaním prvku 2:

$$\emptyset,\{1\},$$
$$\{2\},\{1,2\}$$

3-prvková množina, napríklad množina $\{1,2,3\}$ má 8 podmnožín

$$\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}$$

$$\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$$

4-prvková množina, napríklad množina $\{1,2,3,4\}$ má 16 podmnožín

$$\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$$

$$\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$$

Pri tejto metóde nie sú síce podmnožiny usporiadané prehľadne, ale aj bez vypisovania všetkých možností už teraz vieme povedať, že 5-prvková množina má $16 \cdot 2 = 32$ podmnožín, 6-prvková množina má $32 \cdot 2 = 64$ podmnožín a n-prvková množina má $1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n} = 2^n$ podmnožín.

10. Miera množiny je spôsob, ako číslom ohodnotiť množinu. Je to teda priradenie medzi systémom podmnožín nejakej množiny a nezápornými číslami. Presný popis funkcie miera nájdeme napríklad v publikácii [6], označuje sa písmenom μ. Mierou môže byť napríklad počet prvkov konečnej množiny, dĺžka úsečky, plocha rovinného útvaru, objem telesa.

    Pomocou miery môžeme definovať pravdepodobnosť, že nastane udalosť A aj v prípade, že množiny Ω a A sú nekonečné. Pravdepodobnosť, že nastane udalosť A vypočítame ako

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

11. $\{3\}, \{1\}, \{2\}, \{12, 17\}, \{27, 42, 128\}$

12. Všetkých 6 výsledkov je rovnako možných, preto pravdepodobnosť, že padne štvorka, je 1 zo 6, alebo presnejšie:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}; \quad A = \{4\}; \quad N(\Omega) = 6; \quad N(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

13. Vypíšeme najprv všetky prvky priestoru Ω.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{array} \right\}$$

Množina A predstavuje výsledky zodpovedajúce udalosti "padli dve štvorky".

$$A = \{(4,4)\}; \quad N(\Omega) = 36; \quad N(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{36}$$

14. Spomedzi všetkých prvkov priestoru Ω, ktorý je rovnaký ako v úlohe 13, vyberme prvky množiny A.

Množina A predstavuje výsledky zodpovedajúce udalosti "padol súčet osem".

$$A = \{(4,4),(3,5),(5,3),(2,6),(6,2)\}; \quad N(\Omega) = 36; \quad N(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{36}$$

3.1.2. Úlohy

1. Koľkými rôznymi spôsobmi sa dalo rozmeniť 10 korún na mince?
2. Koľkými rôznymi spôsobmi sa dalo rozmeniť 10 korún na najviac 4 mince?
3. Do poslucharne vošlo 24 študentov. Koľkými rôznymi spôsobmi sa mohli postaviť do radu na zápočty?
4. Koľkými rôznymi spôsobmi sa môže 24 študentov rozsadiť po posluchárni s 50 stoličkami?
5. Vlak zastavil v 5 staniciach. V týchto staniciach z vlaku vystúpilo postupne 35 cestujúcich. Koľkými rôznymi spôsobmi sa to mohlo stať?
6. Do výťahu nastúpilo 5 ľudí. Výťah vyšiel na 7 poschodie. Tých 5 ľudí z neho postupne vystúpilo. Výťah zastavil na všetkých 7 poschodiach, na každom mohlo vystúpiť ľubovoľne veľa ľudí. Vieme len, že nikto cestou nahor nenastupoval. Koľko je rôznych možností, ako ľudia vystúpili?
7. Študenti z poslucharne odišli a zostali po nich zložené stoličky. Koľkými rôznymi spôsobmi možno rozmiestniť 24 zložených stoličiek po učebni s 50 stoličkami? To znamená, že v miestnosti je 26 vyložených a 24 zložených stoličiek.
8. Päť priateľov si podalo ruky, každý s každým. Koľko potrasení rukou sa zrealizovalo?
9. Koľko hrán má úplný graf so 7 vrcholmi? Koľko hrán má úplný graf s N vrcholmi?
10. Koľko rôznych 5-ciferných čísel môžeme vytvoriť z cifier 1, 2, 3?
11. Koľko rôznych 4-ciferných čísel môžeme vytvoriť z cifier 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?
12. V športke sa zaškrtáva 6 čísel zo 49. Koľko rôznych tiketov je možné podať?
13. Aký najväčší počet podmnožín 6 prvkovej množiny môžeme vybrať tak, aby mali neprázdny prienik?

14. Koľko existuje rôznych grafov s 8 vrcholmi a 3 hranami? Koľko existuje rôznych grafov s 8 vrcholmi a 28 hranami?

    Predpokladáme teda, že každý z grafov obsahuje rovnakú množinu vrcholov $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_8\}$. Za rôzne budeme považovať grafy, ktoré sa líšia aspoň v jednej hrane. Napríklad za rôzne budeme ovažovať grafy $G_1 = (V, H_1)$ a $G_2 = (V, H_2)$, kde $H_1 = \{[v_1, v_2], [v_1, v_3]\}$ a $H_2 = \{[v_1, v_2], [v_1, v_4]\}$.

15. Koľko existuje rôznych grafov s 8 vrcholmi a 25 hranami?

16. Šesť škôlkarov ide na prechádzku, a vytvoria spolu 3 dvojice. Koľkými spôsobmi sa môžu rozdeliť do dvojíc? (Je dôležité len kto s kým ide v dvojici, nezáleží na tom, či je vpravo, alebo vľavo, ani na tom či dvojica je prvá alebo inde v poradí.)

17. Šesť škôlkarov ide na prechádzku, a vytvoria spolu 3 dvojice. Koľkými spôsobmi sa môžu rozdeliť do dvojíc? (Teraz je dôležité kto s kým ide v dvojici, poradie dvojíc, ale nezáleží na tom, kto je vpravo alebo vľavo.)

3.1.2.1. Riešenie úloh

1. Táto úloha je tak trochu z histórie. V čase zostavovania tejto učebnice sa platilo na Slovensku korunami. Mince, ktoré sa používali mali hodnotu 10 Sk, 5 Sk, 2 Sk, 1 Sk a 50 halierov.

   Možnosti ako rozmeniť 10 Sk môžu, ale nemusia zahŕňať možnosť použitia jednej 10 Sk mince. Správna odpoveď nie je „zahrnúť 10 Sk mincu", ale nie je ani „nezahrnúť 10 Sk mincu". Treba sa na tom dohodnúť ešte pred vyriešením úlohy. To sa stáva v praxi dosť často. Treba si uvedomiť, že to, ako zadaniu rozumie riešiteľ, nemusí byť to isté, ako mu rozumie zadávateľ úlohy. Takže sa treba opýtať!

   Vypísané možnosti sú aj s prípadom, že na rozmenenie 10 Sk použijeme aj 10 Sk mincu.

   10 Sk = 10 Sk

   10 Sk = 5 Sk + 5 Sk

   10 Sk = 5 Sk + 2 Sk + 2 Sk + 1 Sk

   ...

   Začnime ešte raz s tým, že nebudeme vypisovať nepodstatné veci. Ušetríme tým papier aj čas:

   1. 10
   2. 5, 5
   3. 5, 2, 2, 1
   4. 5, 2, 2, 50, 50
   5. 5, 2, 1, 1, 1
   6. 5, 2, 1, 1, 50, 50
   7. 5, 2, 1, 50, 50, 50, 50
   8. 5, 2, 50, 50, 50, 50, 50, 50
   9. 5, 1, 1, 1, 1, 1
   10. 5, 1, 1, 1, 1, 50, 50
   11. 5, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50

12. 5, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50
13. 5, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
14. 5, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
15. 2, 2, 2, 2, 2
16. 2, 2, 2, 2, 1, 1
17. 2, 2, 2, 2, 1, 50, 50
18. 2, 2, 2, 2, 50, 50, 50, 50
19. 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1
20. 2, 2, 2, 1, 1, 1, 50, 50
21. 2, 2, 2, 1, 1, 50, 50, 50, 50
22. 2, 2, 2, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50
23. 2, 2, 2, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
24. 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1
25. 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 50, 50
26. 2, 2, 1, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50
27. 2, 2, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50
28. 2, 2, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
29. 2, 2, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
30. 2, 2, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
31. 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
32. 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 50, 50
33. 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50
34. 2, 1, 1, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50
35. 2, 1, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50,, 50
36. 2, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50,, 50, 50
37. 2, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50,, 50, 50, 50, 50
38. 2, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
39. 2, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
40. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
41. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 50, 50

42. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50
43. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50
44. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
45. 1, 1, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
46. 1, 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
47. 1, 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
48. 1, 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
49. 1, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50
50. 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50

Teda možností je 50. Čitateľ, ktorému sa takéto rozpisovanie vidí zdĺhavé, určite nájde lepší spôsob zápisu, prípadne nejaké zákonitosti, ktoré výpočet zjednodušia. Lenivosť je niekedy najlepší spôsob, ako začať rozmýšľať a vymyslieť rôzne zjednodušenia, prípadne vynálezy.

2. Najviac 4 mince znamená, že mince sú buď 4, alebo je ich menej. Z predchádzajúceho riešenia vidíme, že to bude v 3 prípadoch.

3. Dva rady na zápočet budú rovnaké, ak v nich budú študenti v rovnakom poradí. Ako bude rad pokrútený po triede nás nezaujíma. Rôzne rady potom budú tie, kde aspoň jeden študent stojí na inom mieste (aj keď zmeniť poradie iba jedného študenta sa nám asi nepodarí). Pomenujme si študentov rôznymi písmenami abecedy.

   1. A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, X, Y, Z
   2. B, A, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, X, Y, Z
   3. B, C, A, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, X, Y, Z
   4. C, B, A, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, X, Y, Z

   Vyzerá to tak, že vypisovanie všetkých možností bude naozaj zdĺhavé. Vyskúšajme preto najprv menší počet študentov. Keď budú traja, počet všetkých poradí bude 6. Všetky možnosti môžeme vypísať nasledovne.

1. ABC	2. ACB	3. BAC
4. BCA	5. CAB	6. CBA

Ako vidíme, na prvom mieste môžu byť 3 rôzni študenti A, B, alebo C. Keď už je jeden študent vybraný, tak za ním môže stáť niektorý zo zvyšných dvoch. Teda ku každému z troch na prvom mieste, môžeme doplniť jedného z dvoch na druhé miesto. To bude $3 \cdot 2$ možností. Ten posledný už bude daný jednoznačne, keď budú dvaja v rade, postaví sa za nich. Teda možností bude $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Ako to bude fungovať so štyrmi študentami? Na začiatku môžu byť vo fronte štyria: 1. A 2. B 3. C 4. D

K týmto štyrom môžeme pridať na druhé miesto po troch rôznych študentoch.

1. A	1. B	2. B	1. A
1. A	2. C	2. B	2. C
1. A	3. D	2. B	3. D
3. C	1. A	4. D	1. A
3. C	2. B	4. D	2. B
3. C	3. D	4. D	3. C

Dostaneme $4 \cdot 3 = 12$ možností, k týmto dvanástim môžeme pridať na tretie miesto po dvoch rôznych študentoch.

1. A	1. B	1. C
1. A	1. B	2. D
1. A	2. C	1. B
1. A	2. C	2. D
1. A	3. D	1. B
1. A	3. D	2. C
2. B	1. A	1. C

Home Page

Title Page

Contents

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2.	B	1.	A	2.	D
2.	B	2.	C	1.	A
2.	B	2.	C	2.	D
2.	B	3.	D	1.	A
2.	B	3.	D	2.	C

3.	C	1.	A	1.	B
3.	C	1.	A	2.	D
3.	C	2.	B	1.	A
3.	C	2.	B	2.	D
3.	C	3.	D	1.	A
3.	C	3.	D	2.	B

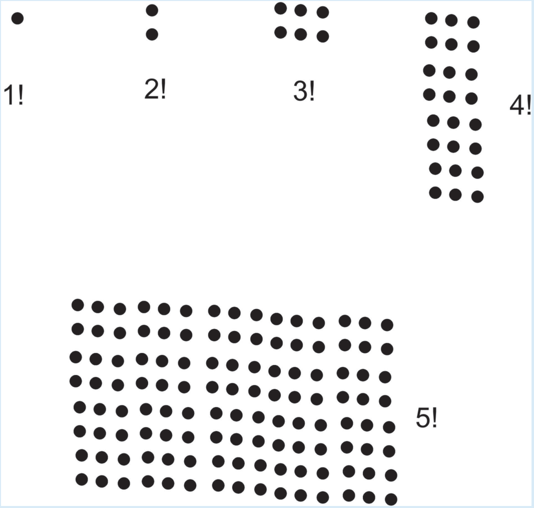
4.	D	1.	A	1.	B
4.	D	1.	A	2.	C
4.	D	2.	B	1.	A
4.	D	2.	B	2.	C
4.	D	3.	C	1.	A
4.	D	3.	C	2.	B

Možností je teraz $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Posledný študent, sa zaradí na koniec radu, tým sa počet možností nezmení.

Ako to bude s 24 študentami? Na prvom mieste môže byť 24 rôznych študentov. Na druhé miesto ku každému z nich môžeme pridať 23 študentov, teda $24 \cdot 23$. Na tretie 22 na štvrté 21 a tak ďalej, až po 24. miesto, na ktoré sa zaradí posledný študent. Počet možností bude

$$24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24!$$

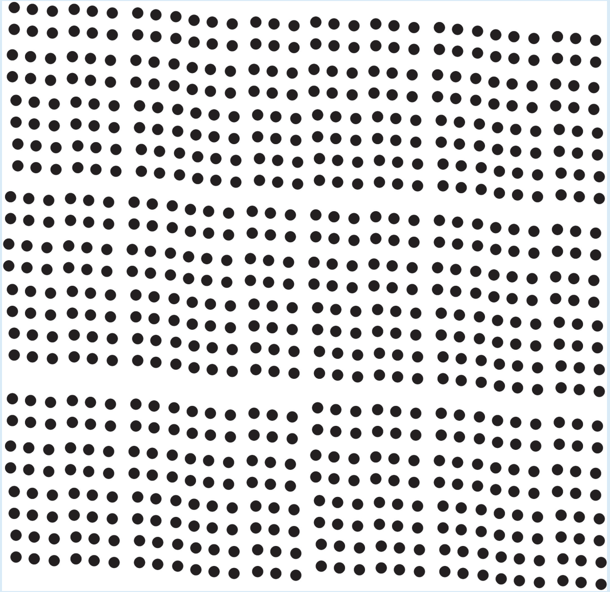
Aby sme si číslo 24! vedeli aspoň trochu predstaviť, skúsme pre každú možnosť nakresliť jednu bodku. Začnime od 1!, teda nakreslíme postupne 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040 bodiek.



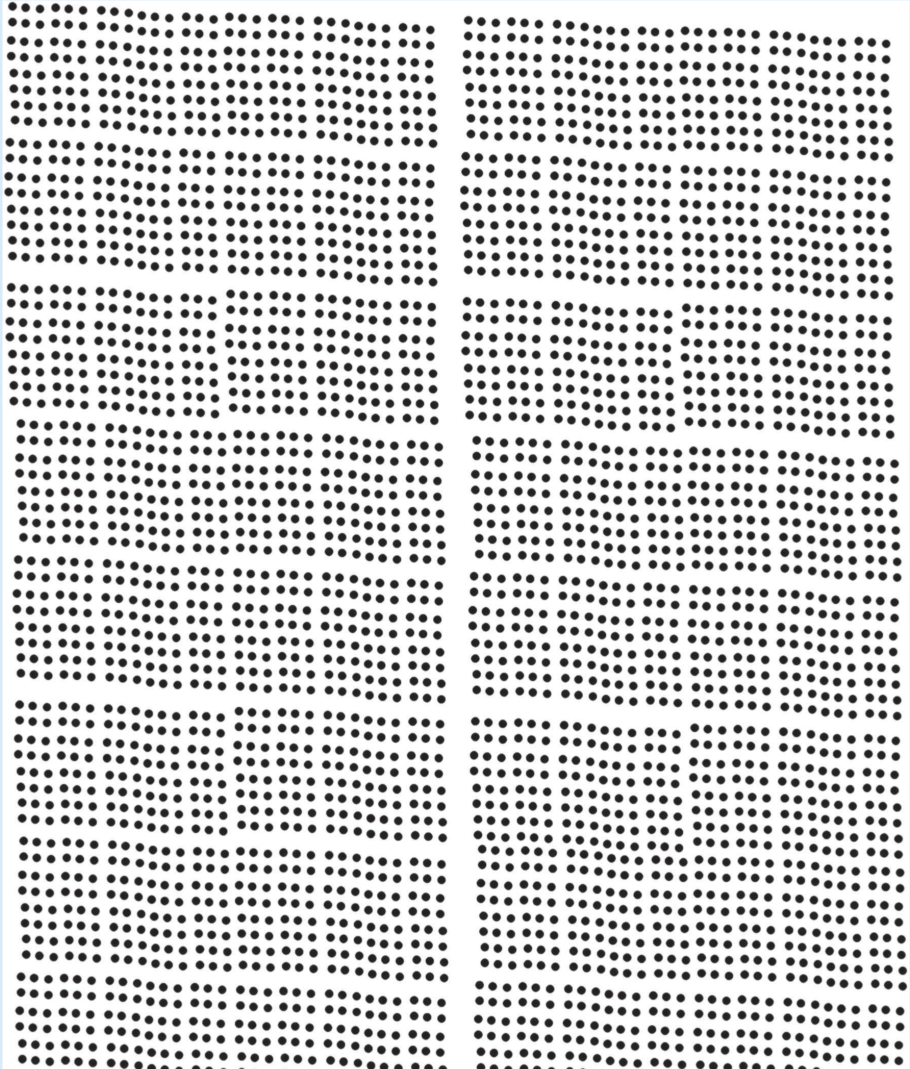
Obrázok 3.5: Obrázky predstavujú 1!, 2!, 3!, 4!, 5!

Nakreslili sme 7! bodiek, a je zrejmé, že 24! možností sa nedalo vypísať (nebolo to v našich silách).

4. Budeme študentov usádzať postupne. Prvý vojde do triedy a má 50 možností, na ktorú stoličku si sadne. Druhý, keď vojde do triedy, tak vidí 49 neobsadených stoličiek. Má 49 možností, ako sa posadiť ku každej z 50 možností pre prvého. Spolu teda majú $50 \cdot 49 = 2450$ možností. Tretí, keď vojde do triedy, tak vidí 48 neobsadených stoličiek.



Obrázok 3.6: Na obrázku je 6! bodiek



Má 48 možností, ako sa posadiť ku každej z 2450 možností pre prvého a druhého. Spolu teda majú $50 \cdot 49 \cdot 48$ možností. Vojde štvrtý, rozhliadne sa a vidí 47 prázdnych stoličiek. Tak to pokračuje, až kým vojde posledný, 24. študent. Dostaneme $50 - 24 = 26$. Počet možností, ako 24 študentov rozsadiť po poslucharni s 50 stoličkami je

$$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26$$

Úvahy pri výpočte vyzerajú byť v poriadku. Aby sme si však boli správnosťou výpočtu úplne istí, vyskúšame, či vzorec platí pre menšie čísla. Dôkaz správnosti to síce nebude, ale je to dobrá metóda na odstránenie prvých omylov. Skúsme sa pozrieť, koľko je možností ako rozsadiť 2 študentov na 4 stoličky. Podľa predošlého 4-2=2. Podľa nášho vzorca to má byť

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Vypíšeme možnosti ako rozsadiť študentov A a B na stoličky 1, 2, 3, 4.

A	B	3	4		B	A	3	4
A	2	B	4		B	2	A	4
A	2	3	B		B	2	3	A
1	A	B	4		1	B	A	4
1	A	3	B		1	B	3	A
1	2	A	B		1	2	B	A

Počet možností, ako 2 študentov rozsadiť po poslucharni so 4 stoličkami, je len 12 a nie 24, ako sme spočítali podľa našich úvah. Niekde je teda chyba. Naše úvahy je potrebné trochu upraviť, nájsť v nich chybu.

Vráťme sa k 24 študentom. Koľko neobsadených stoličiek uvidí posledný, keď vojde do poslucharne? Bude ich 26 alebo 27?

Keď budú všetci 24 študenti sedieť, tak bude v triede 50-24=26 neobsadených stoličiek. Teda ten posledný študent, kým si sadne, bude mať na výber z 27 neobsadených stoličiek.

Počet možností, ako 24 študentov rozsadiť po poslucharni s 50 stoličkami, je

$$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 28 \cdot 27 = \frac{50!}{26!}$$

Tento posledný vzorec už vyhovuje aj nášmu druhému príkladu. Počet možností ako 2 študentov rozsadiť po poslucharni so 4 stoličkami je

$$4 \cdot 3 = \frac{4!}{2!}$$

5. Na prvej stanici vystúpilo 0 alebo 1 alebo 2 alebo... alebo 35 cestujúcich. V závislosti od toho, na druhej stanici mohlo vystúpiť 35 a menej, alebo 34 a menej, alebo ... alebo už nikto, lebo všetci vystúpili na prvej stanici. Takýto výpočet bude veľmi komplikovaný a náročný, ale dopočítať sa to dá. Spôsob ako sa to počíta si je možné naštudovať v literatúre, napríklad v [7].

   Pozrime sa na túto úlohu z hľadiska tých cestujúcich. Cestujúci číslo 1 má 5 možností ako vystúpiť z vlaku. Cestujúci číslo 2 má tiež 5 možností ako vystúpiť z vlaku. Spolu teda majú 25 možností.

   Bude dobré, keď si teraz uvedomíme, prečo sa tie možnosti násobia a nie sčítajú. Cestujúci číslo 1 vystúpil na stanici číslo 1 alebo 2 alebo 3 alebo 4 alebo 5. Cestujúci číslo 1 a 2 vystúpili na staniciach číslo 1 a 1 alebo 1 a 2 alebo 1 a 3 alebo 1 a 4 alebo 1 a 5 alebo 2 a 1 alebo 2 a 2 alebo 2 a 3 alebo 2 a 4 alebo 2 a 5 alebo .... Možnosti treba vypisovať dovtedy, kým neuveríme, že ich bude 25.

   Pokračujme v úvahách o našom príklade. Aj každý z cestujúcich číslo 3, 4,..., 35 má tiež 5 možností ako vystúpiť z vlaku. Spolu je tých možností

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 5 = 5^{35}$$

   Odporúčame vzorec znovu overiť s menším počtom cestujúcich a staníc. Vypísať všetky možnosti a v prípade nesúladu so skutočným počtom treba vzorec opraviť.

6. Veríme, že po prečítaní a pochopení predchádzajúceho príkladu sa čitateľ dokáže správne rozhodnúť medzi riešeniami 5^7 a 7^5.

7. Pozrime sa najprv na riešenie úlohy s 2 študentami rozsadenými po miestnosti so 4 stoličkami. Možností, ako ich rozsadiť, bolo 12:

A	B	3	4
A	2	B	4
A	2	3	B
B	A	3	4
1	A	B	4
1	A	3	B
B	2	A	4
1	B	A	4
1	2	A	B
B	2	3	A
1	B	3	A
1	2	B	A

Možností, ako po nich ostali zložené stoličky, bolo menej. Na nasledujúcom rozpise vidíme, že je to len šesť rôznych rozložení. Možnosti AB a BA splývajú do jednej možnosti XX.

X	X	3	4
X	2	X	4
X	2	3	X
X	X	3	4
1	X	X	4
1	X	3	X

X	2	X	4
1	X	X	4
1	2	X	X
X	2	3	X
1	X	3	X
1	2	X	X

Výsledok bude polovica, teda pôvodný počet vydelíme 2.

$$\frac{4\cdot 3}{2} = \frac{\frac{4!}{2!}}{2} = \frac{4!}{2!\,2} = \frac{4!}{2!\,2!}$$

Riešenie úlohy s 24 zloženými stoličkami spomedzi 50 stoličiek ale nebude

$$\frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot\cdots\cdot 28\cdot 27}{2} = \frac{50!}{26!\,2}$$

V prípade 2 študentov sú naozaj len 2 možnosti, ako sa vymeniť na tých istých 2 stoličkách.

Ale v prípade 24 študentov je počet možností, ako sa vymeniť na tých istých 24 stoličkách, rovný číslu 24!
Je to presne toľko ako je počet zoradení týchto študentov do radu na zápočet.

Počet možností, ako bolo rozmiestnených 24 zložených stoličiek v miestnosti s 50 stoličkami, je

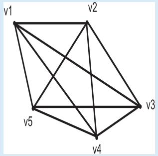
$$\frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot\cdots\cdot 28\cdot 27}{24!} = \frac{50!}{26!\cdot 24!}$$

8. Skúste najprv uhádnuť výsledok tejto úlohy. (Väčšinou nie je ten prvý odhad celkom správny!)

   Prvý z 5 priateľov podá ruku 4, druhý už len trom, tretí dvom a štvrtý jednomu. Piaty si už podal ruku so všetkými, teda počet je 4+3+2+1.

Iný spôsob výpočtu spočíva v úvahe, že každý z tých piatich podal ruku iným 4. Ale v tomto výpočte je zahrnuté aj to, že A podal ruku B aj to, že B podal ruku A. Takže výsledok bude $\frac{5 \cdot 4}{2}$.

Alebo úlohu môžeme nakresliť ako graf. Piati priatelia budú vrcholy grafu a podania rúk budú hrany medzi týmito vrcholmi. Nakreslíme a spočítame na obrázku 3.8.



Obrázok 3.8: Graf s piatimi vrcholmi a všetkými možnými hranami

9. Graf na obrázku 3.8 sa volá úplný graf s 5 vrcholmi. Úplný preto, že sú v ňom zakreslené úplne všetky hrany.

   Spočítajme hrany v úplnom grafe so 7 vrcholmi. Každý zo 7 vrcholov je spojený hranou s ostatnými 6 vrcholmi. Teda hrán je $7 \cdot 6$. V tomto výpočte je však každá hrana započítaná 2 razy, preto velkový počet hrán delíme dvomi. Úplný graf so 7 vrcholmi má $\frac{7 \cdot 6}{2}$ hrán.

   Úplný graf s N vrcholmi má $\frac{N \cdot (N-1)}{2}$ hrán.

10. Na prvom mieste môže mať 5-ciferné číslo cifru 1, 2 alebo 3. Rovnako na druhom, treťom až piatom mieste. Počet takýchto čísel je

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$$

11. Počet takýchto čísel je $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 7 \cdot 8^3$.
    Čo sa zmenilo oproti predchádzajúcej úlohe?

12. Zaškrtnutých čísel bude 6. Prvé môžeme umiestniť na 49 miest, druhé už len na 48 a tak ďalej, pre posledné ostáva 44 miest. A ešte je potrebné výsledok vydeliť počtom všetkých možných premiestnení šiestich čísel. Prečo?

13. Počet všetkých podmnožín 5-prvkovej množiny je $2^5 = 32$. Počet všetkých podmnožín 6-prvkovej množiny je dvojnásobný. Ku každej z predchádzajúcich množín pridáme 6-ty prvok. To znamená, že tento 6-ty prvok bude obsiahnutý presne v 32 podmnožinách. Teda prienikom týchto 32 podmnožín bude práve 6-ty prvok. Aspoň 32 podmnožín bude mať neprázdny prienik. Viac ako 32 by to bolo iba v prípade, že niektorý z prvkov sa nachádza vo viacerých podmnožinách ako 6-ty prvok. Čo myslíte, ktorý by to mohol byť?

14. Úplný graf s 8 vrcholmi má $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ hrán. Teda v grafe s 8 vrcholmi je 28 miest, kam umiestniť hranu. Preto existuje 28 rôznych grafov s 8 vrcholmi a jednou hranou. Ak chceme umiestniť druhú hranu, máme na to 27 možností. Pri ukladaní hrán ale dostaneme každý graf dva razy podľa toho, či dve hrahy boli boli uložené ako prvá a druhá alebo ako druhá a prvá. Preto existuje $\frac{28 \cdot 27}{2}$ rôznych grafov s 8 vrcholmi a dvomi hranami.

    Grafov s 8 vrcholmi a 3 hranami je $\frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{6}$, pretože je 6 možností poradia v akom uložíme 3 hrany na rovnaké miesta.

    Rôznych grafov s 8 vrcholmi a 28 hranami existuje pomerne málo. Koľko?

15. Miest, na ktoré môžeme uložiť hranu je v grafe s 8 vrcholmi presne 28. Rôznych grafov s 8 vrcholmi a 25 hranami je rovnako veľa ako grafov, ktoré majú 8 vrcholov a 3 hrany. Netreba to počítať, len utvoríme dvojice. Každému grafu z prvej skupiny vyberieme taký graf z druhej skupiny, ktorý bude mať hrany iba tam, kde ich prvý nemá a naopak, nebude mať tie hrany, ktoré má prvý graf. Takéto grafy sa volajú komplementárne. A vidno, že každému z grafov môžeme vytvoriť dvojicu, takže je ich naozaj rovnako veľa.

$$\frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{6} = \frac{28!}{25! \cdot 3!} = \frac{28!}{3! \cdot 25!} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 4}{25!}$$

16. Tých škôlkarov nie je tak veľa. Než sa namáhať so vzorcami, radšej vypíšeme všetky možnosti. Škôlkarov si pomenujeme A, B, C, D, E a F. A vypisujeme rôzne dvojice.

AB CD EF	AB CE DF	AB CF DE
AC BD EF	AC BE DF	AC BF DE
AD BC EF	AD BE CF	AD BF CE
AE BC DF	AE BD CF	AE BF CD
AF BC DE	AF BD CE	AF BE CD

Možností je 15.

17. Teraz by už toho vypisovania bolo veľa. Ku každej z možností rozdelenia detí pridudne 5 ďalších možností.

Teda namiesto možnosti AB CD EF, budú v zozname tieto možnosti

AB CD EF	CD AB EF	CD EF AB
AB EF CD	EF AB CD	EF CD AB

Možností je $15 \cdot 6 = 90$.

3.2. Frekvenčná, klasická a geometrická definícia pravdepodobnosti

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli, že pravdepodobnosť sa počíta niekoľkými spôsobmi. Vždy sa podľa situácie zvolí taký, ktorý sa najviac hodí. Samozrejme, matematici už s tým urobili poriadok a každý z postupov je vlastne iným zúžením axiomatickej definície. Na jej pochopenie treba hlbšie štúdium a tak sa budeme učiť počítať príklady bez jej znalosti. A budeme len intuitívne odhadovať, kedy čo použiť. Táto schopnosť sa dá získať iba samostatným počítaním príkladov, nedá sa naučiť cez nejaké poučky.

Rôznorodosť spôsobov, ako sa pravdepodobnosť počíta, potvrdzuje fakt, že pravdepodobnosť vyrástla z riešenia úloh. Nevznikla tak, že by sa vybudovala najprv teoretická pravdepodobnosť a potom sa vymysleli na ňu príklady. Dokonca ani terminológia nie je úplne jednotná, niektorí autori hovoria o udalostiach, iní o javoch. Hovorí sa o náhodných javoch a procesoch, ale aj o pravdepodobnostných alebo stochastických modeloch. To svedčí o tom, že je to pomerne mladá disciplína a tí, čo v nej pracujú, sa ešte nestihli dohodnúť na jednotných názvoch.

Preto aj my v tejto kapitole vynecháme teoretické úvahy a skúsime sa o pravdepodobnosti niečo naučiť tak, že budeme riešiť úlohy.

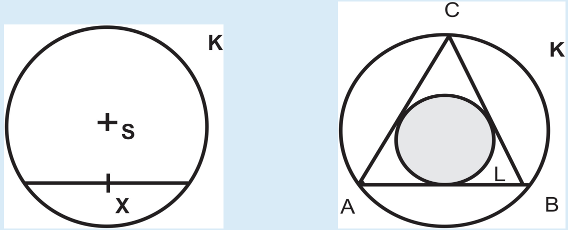
Na príklade ukážeme, že pomocou geometrického spôsobu výpočtu pravdepodobnosti môžeme dostať dve rôzne riešenia nasledujúcej úlohy.

Úloha 3.2.1 (Tetiva kružnice) *V kružnici K sa náhodne zvolí tetiva. Aká je pravdepodobnosť, že táto tetiva bude dlhšia ako strana rovnostranného trojuholníka vpísaného kružnici K?*

Riešenie:

1. Vo vnútri kruhu zvolíme náhodne bod X. Tento bod bude stredom tetivy, ako vidíme na obrázku 3.9.

   Kružnici K vpíšeme rovnostranný trojuholník ABC. Tomuto trojuholníku vpíšeme kružnicu L. Ak sa bod X, teda stred tetivy, nachádza vnútri kruhu určeného kružnicou



Obrázok 3.9: Náhodne zvolený bod X je stred tetivy a kružnica L vpísaná trojuholníku ABC

L, tetiva so stredom X bude dlhšia ako strana trojuholníka ABC. Ak bod X bude mimo tohto kruhu, tak bude tetiva kratšia ako strana trojuholníka ABC.

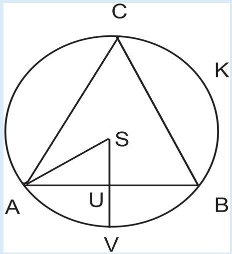
Ak je polomer kružnice K rovný R, tak polomer r kružnice L vpísanej trojuholníku ABC je $r = R \cdot \sin 30° = \frac{R}{2}$. Obsah kruhu L je $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{R^2}{4}$. Obsah veľkého kruhu je $\pi \cdot R^2$.

Hľadaná pravdepodobnosť je

$$P_1 = \frac{\pi \cdot \dfrac{R^2}{4}}{\pi \cdot R^2} = \frac{1}{4}$$

2. Vo vnútri kruhu K zvolíme náhodne bod X. Tento bod bude stredom tetivy a zároveň bude ležať na nejakej úsečke SV, ktorá je vlastne polomerom kružnice K. Tento polomer má dĺžku R. Na obrázku 3.10 vidíme, že strana AB trojuholníka ABC rozdelí úsečku SV na dve časti SU a UV. Úsečka SU je polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC a podľa predchádzajúceho výpočtu má veľkosť $|SU| = r = \frac{R}{2}$.

   Bod X je náhodne zvolený bod vnútri kruhu a teda aj náhodne zvolený bod na úsečke SV. Tetiva so stredom X bude dlhšia ako strana trojuholníka ABC, ak X bude ležať na úsečke SU.



Obrázok 3.10: Náhodne zvolený bod X leží na polomere SV kružnice K

Hľadaná pravdepodobnosť je

$$P_2 = \frac{|UV|}{|SV|} = \frac{1}{2}$$

3. Ďalšie riešenie tejto úlohy s ešte iným výsledkom sa dá nájsť v knihe [1]. Z tejto kn □ sú prevzaté aj prvé dve riešenia úlohy 3.2.1.

□

Na začiatku učebnice sme síce sľúbili riešenia úloh, ale nie vždy to budú autori učebnice, ktorí budú úlohy riešiť. Toto je prvá z úloh, ktorú bude užitočné vyriešiť si samostatne.

Úloha 3.2.2 (Monty Hall problem) *Predstavte si, že ste sa dostali v televíznej súťaži až k možnosti získať auto. Auto je za jednými z troch dverí, za ďalšími dvoma dverami sú kozy. Neviete, čo kde je. Pravidlá sú nasledujúce: vyberiete si jedny dvere a moderátor, ktorý vie, čo je za dverami, otvorí iné, také kde je koza. Potom sa Vás spýta, ktoré spomedzi zatvorených dverí chcete otvoriť. Je len na Vás, či otvoríte tie dvere, na ktoré ste ukázali na začiatku, alebo zmeníte svoj výber a otvoríte tie druhé.*

Otázka znie, čo má väčšiu šancu na úspech? Presnejšie: je väčšia pravdepodobnosť výhry auta, ak otvoríme dvere, na ktoré sme ukázali na začiatku, alebo ak otvoríme tie druhé? Alebo sú pravdepodobnosti rovnaké?

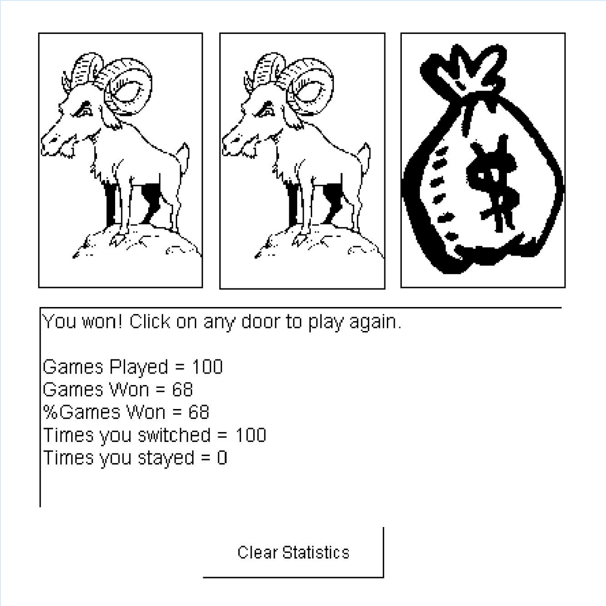
Riešenie:

Zadanie aj riešenie úlohy bolo publikované v roku 1990 v [10]. Podľa wikipédie približne 10 000 čitateľov, vrátane niekoľkých stoviek matematikov protestovalo proti publikovanému riešeniu. Dôvod bol asi ten, že riešenie bolo naozaj nepresné. Ale výsledok, s ktorým dodnes množstvo ľudí nesúhlasí, bol správny.

Neveríme, že máme lepšie presvedčovacie schopnosti, než americký časopis, preto namiesto teoretického riešenia ponúkame možnosť vyskúšať si, ako to dopadne. Je to vlastne spočítanie pravdepodobnosti podľa frekvenčnej definície.

Na internete je možné nájsť množstvo hotových programov, ktoré umožnia nielen nasimulovať jednu hru, ale aj urobiť štatistický výpis z jednotlivých hier. My sme taký program našli na stránke
http://www.dcity.org/braingames/3doors/index.htm, obrázok 3.11, ale tá stránka už nemusí byť aktuálna. V tom prípade treba hľadať ďalej, alebo si simuláciu naprogramovať sami.

Veríme, že po dostatočnom počte pokusov už tušíte správny výsledok. V nasledujúcej kapitole, venovanej podmienenej pravdepodobnosti, vyriešime úlohu aj teoreticky.



Obrázok 3.11: Monty Hall problém a jeho simulácia

3.2.1. Príklady

1. Popíšte dve udalosti, ktoré sú dizjunktné.

2. K daným dvom udalostiam sú aj ich zjednotenie, prienik a doplnok udalosti. Ilustrujte toto tvrdenie na hode kockou.

3. Nech množina $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ popisuje výsledky hodu kockou, nech udalosť A spočíva v tom, že pri hode kockou padlo nepárne číslo. Napíšte aké čísla obsahuje množina A.

4. Nech množina Ω popisuje výsledky hodu dvanásťstenom. Nech udalosť A spočíva v tom, že "pri hode dvanásťstenom padlo niektoré z čísel 2,4,6". Aká je pravdepodobnosť udalosti A?

5. Nech množina $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ popisuje výsledky hodu kockou. Popíšte slovne udalosti zodpovedajúce množinám $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_2 = \emptyset$, $A_3 = \{1, 3, 5\}$, $A_4 = \{2, 4, 6\}$, $A_5 = \{1, 2\}$, $A_6 = \{4, 6\}$. Skúste urobiť popis udalosti A_k bez použitia tých čísel, ktoré obsahuje množina A_k.

6. Napíšte pravdepodobnosti všetkých udalostí z príkladu 5.

7. Čomu sa rovná pravdepodobnosť zjednotenia dvoch dizjunktných udalostí? Ilustrujte na nejakých dvoch udalostiach z príkladu 5.

8. Čomu sa rovná pravdepodobnosť zjednotenia dvoch udalostí, ktoré nie sú dizjunktné? Ilustrujte na nejakých dvoch udalostiach z príkladu 5.

9. Nájdite dve udalosti také, že veľkosť (mohutnosť) množiny predstavujúcej udalosť A je menšia ako veľkosť (mohutnosť) množiny predstavujúcej udalosť B, teda platí $N(A) < N(B)$, ale zároveň pre tieto udalosti platí, že pravdepodobnosť $P(A) > P(B)$.

10. V príklade 5 nájdite takú udalosť A, pre ktorú platí $P(\overline{A}) = P(A)$.

11. Navrhnite experiment, v ktorom sa presvedčíte, že hracia kocka nie je falošná. Koľko pokusov treba urobiť?

12. Učiteľ losuje, ktorý príklad z tejto sady bude na písomke. Sú dve možnosti losovania. Buď hod pravidelným dvanásťstenom, alebo hod dvoma hracími kockami naraz. Príklad 11 bude na písomke, ak na dvanásťstene padne číslo 11. Alebo pri druhom losovaní, ak na dvoch kockách padne súčet 11. Pri ktorom losovaní má príklad 11 väčšiu šancu dostať sa do písomky?

3.2.1.1. Riešenie príkladov

1. Pri náhodnom pokuse popisujúcom hod kockou, udalosti $A = \{1, 2\}$ a $B = \{3\}$ predstavujú dve dizjunktné udalosti.

   Aby sme si pojem lepšie uvedomili, tak napríklad udalosti, ktoré nie sú dizjunktné sú: A: „padlo párne číslo" a B: „padlo číslo väčšie ako 4".

2. Zoberme udalosti A: „padlo párne číslo" a B: „padlo číslo väčšie ako 4".

   K týmto dvom udalostiam

   - ich zjednotenie je udalosť:
     $A \cup B$: „padlo niektoré z čísel 2, 4, 5 alebo 6"
   - ich prienik je udalosť:
     $A \cap B$: „padlo číslo 6"
   - doplnok každej z udalostí je udalosť:
     $\overline{A}$: „padlo nepárne číslo"
     $\overline{B}$: „padlo číslo menšie, nanajvýš rovné ako 4"

3. Udalosť „na kocke padlo nepárne číslo" reprezentuje množina $A = \{1, 3, 5\}$.

4. Množina Ω, predstavujúca náhodný pokus, je konečná a všetky výsledky sú rovnako pravdepodobné (predpokladáme, že náš dvanásťsten je pravidelný a nie falošný!). Preto na výpočet pravdepodobnosti môžeme použiť klasickú definíciu pravdepodobnosti $\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{12} = 0.25$

5. A_1: „na kocke padlo nejaké číslo"
   A_2: „nepadlo žiadne číslo"
   A_3: „na kocke padlo nepárne číslo"
   A_4: „na kocke padlo párne číslo"
   A_5: „na kocke padlo číslo menšie ako 3"
   A_6: „na kocke padlo párne číslo väčšie ako 3"

6.

$$P(A_1) = 1$$
$$P(A_2) = 0$$
$$P(A_3) = \frac{1}{2}$$
$$P(A_4) = \frac{1}{2}$$
$$P(A_5) = \frac{1}{3}$$
$$P(A_6) = \frac{1}{3}$$

7. Pravdepodobnosť zjednotenia dvoch dizjunktných udalostí sa rovná súčtu pravdepodobností týchto udalostí.

$$P(A_3 \cup A_6) = P(A_3) + P(A_6) = P(\{1, 3, 4, 5, 6\}) = \frac{5}{6}$$

8. Pravdepodobnosť zjednotenia dvoch udalostí, ktoré nie sú dizjunktné, sa rovná súčtu pravdepodobností týchto udalostí, mínus pravdepodobnosť ich prieniku.

$$P(A_4 \cup A_5) = P(A_4) + P(A_5) - P(A_4 \cap A_5) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

9. Toto je chyták! Treba sa pripraviť na život, ktorý nie je vždy spravodlivý!

   Udalosť A: „na minci padla hlava" má počet prvkov (mohutnosť) 1 a jej pravdepodobnosť je 1/2.
   Udalosť B: „na kocke padlo číslo 1 alebo číslo 2" má počet prvkov (mohutnosť) 2 a jej pravdepodobnosť je 2/6.
   Naozaj platí $N(A) < N(B)$, ale zároveň pre tieto udalosti platí, že pravdepodobnosť $P(A) > P(B)$.

10. Udalosť z príkladu 5, pre ktorú platí

$$P(\overline{A}) = P(A)$$

je napríklad udalosť A_3.

11. Urobíme veľký počet hodov kockou a zaznamenáme, koľkokrát padli jednotlivé čísla. Tieto počty vydelíme celkovým počtom pokusov a dostaneme celkový podiel úspešných pokusov pre každé číslo. Kockou hádžeme dovtedy, kým sa hodnoty neprestanú líšiť od predchádzajúcich aspoň na 2 desatinných miestach.
Koľko pokusov bolo treba urobiť, aby sa podiely prestali meniť?

12. Pri hode dvanásťstenom je šanca, že padne číslo 11, rovná $\frac{1}{12}$.

Pri hode dvomi kockami je šanca, že padne súčet 11, rovná

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Väčšia šanca pre príklad 11 je pri losovaní dvanásťstenom.
Aké sú šance pre príklad číslo 10?

3.2.2. Úlohy

1. V miestnosti sa zišlo k ľudí.
   Aká je pravdepodobnosť, že aspoň dvaja z nich oslávia narodeniny v ten istý deň?

2. Koľko ľudí musí byť v miestnosti, aby pravdepodobnosť, že aspoň dvaja z nich oslávia narodeniny v ten istý deň, bola väčšia ako $1/2$?

3. Ktorá z udalostí A, B má väčšiu pravdepodobnosť?
   A: "pri 4 hodoch kockou padne aspoň 1 šestka"
   B: "pri 24 hodoch 2 kockami naraz padne aspoň raz výsledok šesť, šesť"

4. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolené šesťciferné telefónne číslo má všetky číslice (cifry) rôzne?

5. V sade 30 otázok na skúške je 8 zo štatistiky a 22 z pravdepodobnosti.
   Aká je pravdepodobnosť, že medzi 3 náhodne vybranými otázkami nebude ani jedna otázka zo štatistiky?

6. Priemerne ako dlho treba hádzať kockou, kým padne šestka?
   Ktorá pravdepodobnosť je väčšia, že padne šestka na 2-hý krát alebo na 5-ty krát? (Urobte pokus s aspoň 100 realizáciami!)

7. Ste dohodnutí s partnerom(kou), že vám zavolá na mobil v čase od 8:30 do 9:10. Od 9:00 začína prednáška.
   Aká je pravdepodobnosť, že vám dotyčný(á) zavolá počas prednášky?

8. Signalizačné zariadenie dostáva signály z dvoch zdrojov. Každý zo zdrojov vyšle jednu správu v náhodnom okamihu v priebehu časového intervalu 5 hodín. Vyslanie signálu zo zdroja v každom z okamihov počas týchto 5 hodín je rovnako pravdepodobné. Signalizačné zariadenie sa zapne, ak správy zo zdrojov prídu za menej ako hodinu po sebe.
   Aká je pravdepodobnosť, že sa signalizačné zariadenie zapne?

9. Miško si nevie vybrať medzi dvomi kamarátkami a tak rozhodnutie nechal na náhodu. Príde na stanicu metra v náhodnom čase a počká, kým príde vlak smerom na konečnú A (a Miško navštívi Aničku) alebo vlak smerom na konečnú B (a Miško navštívi Betku). Vlaky obidvomi smermi chodia v 4 minútových intervaloch.
   Napriek tomu, že si myslel, že je rovnaká šanca navštíviť obe dievčatá, zistil, že Aničku navštevuje omnoho častejšie. Prečo?

10. Dvaja priatelia pracujú v 14-poschodovej budove. Janko pracuje na 2. poschodí a Ferko na 10. poschodí. Keď sa idú navštíviť, použijú výťah, ktorý funguje tak, že sa neprivoláva, ale stále ide z 1. na 14. poschodie a potom zase zo 14. na 1. poschodie. Zastaví, keď treba a pokračuje rovnakým smerom. Smer zmení iba úplne hore, alebo úplne dole.
    Janko má pocit, že častejšie, keď príde ku výťahu, ide tento nadol a teda musí čakať, kým sa výťah vráti.
    Ferko naopak tvrdí, že keď príde ku výťahu on, tak je väčšia pravdepodobnosť, že výťah pôjde nahor, než pravdepodobnosť, že pôjde nadol.
    Kto z nich má pravdu a prečo?

3.2.2.1. Riešenie úloh

1. Úlohy s premenným počtom možností skúsime riešiť najprv pre malé hodnoty k. Keď budeme mať niekoľko riešení, budeme hľadať nejakú súvislosť medzi výsledkami. Udalosť A bude spočívať v tom, že „v miestnosti sú aspoň dvaja ľudia, ktorí majú narodeniny v rovnaký deň".

   - $k = 1$
     V prípade, že v miestnosti je jeden človek, je nepravdepodobné (nemožné), že aspoň dvaja z nich majú narodeniny v rovnaký deň.
     $P(A) = 0$
   - $k = 2$
     Množina všetkých možností Ω, ako môžu mať narodeniny 2 ľudia X, Y je v priestupnom roku:

X	Y
1.1.	1.1.
1.1.	2.1.
1.1.	3.1.
1.1.	4.1.
$\vdots$	$\vdots$
31.12.	30.12.
31.12.	31.12.

$$N(\Omega) = 366.366$$

Možnosti, že sa narodili v ten istý deň, je toľko ako dní v roku, teda $N(A) = 366$.

Tento výsledok dostaneme aj keď spočítame počet možností, v ktorých nebudú mať narodeniny súčasne:

X	Y
1.1.	2.1.
1.1.	3.1.
1.1.	4.1.
$\vdots$	$\vdots$
31.12.	30.12.

$N(\overline{A}) = 366 \cdot 365$, $N(A)$ potom môžeme vypočítať ako

$$N(A) = N(\Omega) - N(\overline{A}) = 366 \cdot 366 - 366 \cdot 365 = 366$$

Tento druhý výpočet vyzerá komplikovane, ale dá sa mu porozumieť. Počet dní, kedy nemajú naraz dvaja ľudia narodeniny, je $366 \cdot 365$, pretože prvý sa narodí v hociktorý deň v roku (366 možností) a druhý v hociktorý iný deň (365 možností). Už v ďalšom kroku bude totiž jednoduchšie spočítať počet možností komplementárnej udalosti, než udalosti pôvodnej.

V prípade, že v miestnosti sú 2 ľudia, je pravdepodobnosť, že majú narodeniny v rovnaký deň:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{366}{366^2} = \frac{1}{366} = 0.00273$$

- $k = 3$

  Množina všetkých možností Ω, ako môžu mať narodeniny 3 ľudia X, Y, Z je v priestupnom roku:

X	Y	Z
1.1.	1.1.	1.1.
1.1.	1.1.	2.1.
1.1.	1.1.	3.1.
1.1.	1.1.	4.1.
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31.12.	31.12.	30.12.
31.12.	31.12.	31.12.

$$N(\Omega) = 366 \cdot 366 \cdot 366 = 366^3$$

Možnosti, že sa aspoň dvaja z nich narodili v ten istý deň, spočítame pomocou počtu možností, v ktorých nebudú mať narodeniny súčasne:
$N(\overline{A}) = 366 \cdot 365 \cdot 364$, potom

$$N(A) = N(\Omega) - N(\overline{A}) = 366 \cdot 366 \cdot 366 - 366 \cdot 365 \cdot 364$$

V prípade, že v miestnosti sú 3 ľudia, je pravdepodobnosť, že majú aspoň dvaja z nich narodeniny v rovnaký deň:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{366 \cdot 366 \cdot 366 - 366 \cdot 365 \cdot 364}{366^3} = 0.008181$$

- $k = n$
  Množina všetkých možností Ω, ako môže mať narodeniny n ľudí je

$$N(\Omega) = 366^n$$

X	Y	Z
1.1.	2.1.	3.1.
1.1.	2.1.	4.1.
1.1.	2.1.	5.1.
1.1.	2.1.	6.1.
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31.12.	30.12.	28.12.
31.12.	30.12.	29.12.

$N(\overline{A}) = 366 \cdot 365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (366 - n + 1)$, potom

$$N(A) = N(\Omega) - N(\overline{A}) = 366^n - 366 \cdot 365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (366 - n + 1)$$

V prípade, že v miestnosti je n ľudí je pravdepodobnosť, že majú narodeniny v rovnaký deň:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{366^n - 366 \cdot 365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (366 - n + 1)}{366^n}$$

2. Vzorec, ktorý sme odvodili v predchádzajúcej úlohe môžeme ešte upraviť na tvar:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{366^n - 366 \cdot 365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (366 - n + 1)}{366^n}$$

Po ďalšej úprave dostaneme vzorec popisujúci pravdepodobnosť „celého priestoru okrem udalosti každý sa narodil inokedy".

$$P(A) = 1 - \frac{366 \cdot 365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (366 - n + 1)}{366^n}$$

Teraz už treba len dosadzovať postupne ďalšie čísla, až kým pravdepodobnosť nepresiahne hodnotu $\frac{1}{2}$.

3. Celá množina možností pre výsledky 4 hodov kockou je

$$\Omega = \{(1,1,1,1),(1,1,1,2),(1,1,1,3),\ldots,(6,6,6,6)\}$$

Jej mohutnosť je $N(\Omega) = 6^4$. Udalosť A nastane, ak padne pri 4 hodoch 1 šestka, alebo 2 šestky, alebo 3 šestky, alebo 4 šestky. Jednoduchšie bude spočítať počet možností, kedy udalosť A nenastane.

$$\overline{A} = \{(1,1,1,1),(1,1,1,2),(1,1,1,3),\ldots,(5,5,5,5)\}$$

Jej mohutnosť je $N(\overline{A}) = 5^4$. Pravdepodobnosť, že na kocke padne aspoň 1 šestka, je

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0.5177$$

Celá množina možností pre výsledky hodu dvomi kockami je

$$\Omega_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

Jej mohutnosť je

$$N(\Omega_1) = 6^2$$

Celá množina možností pre výsledky 24 hodov dvomi kockami je

$$\Omega = \{((1,1),(1,1),\ldots,(1,1)),((1,1),(1,1),\ldots,(1,2)),\ldots,$$

$$((6,6),(6,6),\ldots,(6,6))\}$$

Jej mohutnosť je

$$N(\Omega) = 36^{24}$$

Udalosť B nastane, ak padne (6,6) pri 24 hodoch 1 krát, alebo 2 krát, alebo ..., alebo 24 krát. Zase bude jednoduchšie spočítať počet možností, kedy udalosť B nenastane. To je 35 možností v prvom hode, 35 v druhom, …35 možností v 24. hode. Mohutnosť $\overline{B}$ je

$$N(\overline{B}) = 35^{24}$$

Pravdepodobnosť, že pri hode dvomi kockami aspoň raz padne výsledok (6,6) je

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0.4914$$

4. Celá množina možností pre náhodné vytočenie telefónneho čísla je

$$\Omega = \{(0,0,0,0,0,0),(0,0,0,0,0,1),\dots,(9,9,9,9,9,9),\}$$

Jej mohutnosť je

$$N(\Omega) = 10^6$$

Udalosť A nastane, ak budú všetky vytočené čísla rôzne. Mohutnosť množiny A je $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$, preto pravdepodobnosť, že náhodne zvolené šesťciferné telefónne číslo má všetky číslice rôzne, je

$$P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6} = 0.1512$$

Dalo by sa protestovať, že nikto nebude vytáčať telefónne číslo s 0 na začiatku, aj keď inak vytáča náhodne. Aká bude pravdepodobnosť udalosti A v prípade, že vieme, že nula na začiatku nebude?

5. Všetkých možných trojíc, ako si vybrať 3 rôzne otázky spomedzi 30, je $30 \cdot 29 \cdot 28$, ale v tomto počte sú ešte zahrnuté rôzne poradia tej istej trojice. Preto je treba výsledok predeliť počtom poradí, ktoré sa dajú vyrobiť z jednej trojice.

$$N(\Omega) = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Otázka zo štatistiky v sade 3 vytiahnutých otázok nebude, ak budeme vyberať iba spomedzi otázok z pravdepodobnosti.

$$N(A) = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Pravdepodobnosť, že medzi 3 náhodne vybranými otázkami nebude ani jedna otázka zo štatistiky je

$$P(A) = \frac{\frac{22\cdot 21\cdot 20}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{30\cdot 29\cdot 28}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{30 \cdot 29 \cdot 28} = 0.3793$$

6. Priebeh pokusu bude jednoduchý. s hracou kockou so šiestimi stenami budeme hádzať dovtedy, kým padne číslo 6. Potom zaznamenáme, na koľký hod tá 6-ka padla. Výsledok bude nejaké z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,. . . . Nie je jasné, ktoré bude to najväčšie zo zaznamenaných čísel. Takýchto pokusov bude aspoň 100. Priemer z týchto čísel dostaneme tak, že urobíme ich súčet a tento potom vydelíme ich počtom. To bude priemerný počet hodov, ktoré treba urobiť, kým na kocke padne šestka.
(Dá sa urobiť aj teoretický výpočet tejto hodnoty, ale to urobíme niekedy neskôr.)

   Predchádzajúci pokus dáva odpoveď aj na otázku, ktorá pravdepodobnosť je väčšia. Či je pravdepodobnejšie, že padne šestka na 2-hý krát alebo na 5-ty krát. Spočítame v zozname čísla 2 a čísla 5 a zistíme, ktorých je viac.
   Iná možnosť riešenia je urobiť myšlienkový pokus:
   Namiesto 100 hádzaní jednou kockou, budeme hádzať naraz 100 kockami, keď padne na kocke šestka, už ju nebudeme ďalej hádzať.
   Po prvom hode asi na šestine kociek padne šestka, tie vylúčime a hádžeme ďalej s menším počtom (približne 83 kockami).
   Po druhom hádzaní 83 kockami asi na šestine kociek padne šestka (asi na 14) , tie vylúčime a hádžeme ďalej s menším počtom (približne 69 kockami).
   Po treťom hádzaní 69 kockami asi na šestine kociek padne šestka, tie vylúčime a hádžeme ďalej s menším počtom (približne 57 kockami).
   Po štvrtom hádzaní 57 kockami asi na šestine kociek padne šestka, tie vylúčime a

hádžeme ďalej s menším počtom (približne 50 kockami).
Pri piatom hádzaní máme k dispozícii asi 50 kociek, na ktorých asi na šestine padne šestka. Teda asi na 8 kockách padne šestka, pričom pri druhom hode to bolo asi na 14.

Alebo ešte jednoduchšie: kocky, na ktorých šestka padla na druhý krát už nepoužívame pri hádzaní na 5. krát, takže šestiek na piaty krát bude menej. Skoro určite! Alebo presnejšie, s veľkou pravdepodobnosťou. Pri 100 pokusoch sa ešte môže stať, že tých na druhý pokus bude menej ako tých na piaty!

7. Okamihov, kedy môže zazvoniť mobil, je nekonečne veľa. Aj keď to „nekonečno" trvá len 40 minút. Tých 40 minút je vlastne miera časového intervalu, ktorý obsahuje nekonečne veľa okamihov. Takto sme si nekonečne veľa možností previedli na konečné číslo. Teda $\mu(\Omega) = 40$. Udalosť A, že telefón zazvoní počas prednášky, má mieru $\mu(A) = 10$.

   Pravdepodobnosť, že mobil zazvoní počas prednášky, je

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25$$

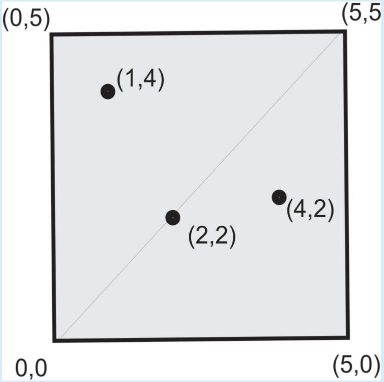
   (Aj napriek uvedenému výpočtu naša osobná skúsenosť hovorí, že pravdepodobnosť, že zazvoní nejaký mobil počas prednášky je veľmi blízka hodnote 1.)

8. Časový interval pre vysielanie prvého aj druhého zdroja pre signalizačné zariadenie plynie od časového okamihu 0 po časový okamih 5. Vypíšme si niektoré hodnoty množiny Ω.

$$\Omega = \{(0,0), (0, 0.12), (1, 2.03), \dots\}$$

   Množina Ω má nekonečne veľa hodnôt. Aby sme mohli vypočítať mieru tejto množiny, skúsme si ju najprv nakresliť.

   Množina všetkých okamihov odoslania signálu, môžeme zakresliť ako štvorec na obrázku 3.12. Jeho miera (plocha) bude $\mu(\Omega) = 25$.
   Množina na obrázku 3.13 zodpovedá udalosti A, kedy sa signalizačné zariadenie zapne, pretože správy zo zdrojov prídu za menej ako hodinu po sebe.

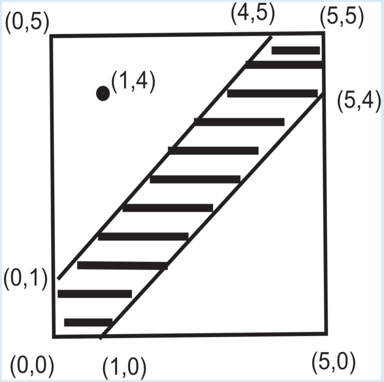


Obrázok 3.12: Množina všetkých okamihov odoslania signálu, zakreslená ako štvorec

Miera (plocha) tejto množiny bude $\mu(A) = 25 - 2 \cdot 8 = 9$.
Pravdepodobnosť, že sa signalizačné zariadenie zapne, je

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{9}{25} = 0.36$$

9. Vymyslime si cestovný poriadok metra.
Napríklad vlak k Aničke chodí v časoch 12:06, 12:10, 12:14,...
Vlak k Betke chodí 12:07, 12:11, 12:15,....
Miško príde na stanicu v náhodnom čase.
Ak to bude v intervale $(12{:}07, 12{:}10\rangle$, tak skôr príde vlak, ktorým sa odvezie ku Aničke.
Ak Miško príde na stanicu v intervale $(12{:}10, 12{:}11\rangle$, tak skôr príde vlak, ktorým sa odvezie ku Betke. Podobne to bude po celý deň.
Teda ak na stanicu príde rovnako náhodne, v ktorúkoľvek minútu dňa, tak s pravdepodobnosťou 3/4 pocestuje ku Aničke a s pravdepodobnosťou 1/4 pocestuje ku Betke.



Obrázok 3.13: Množina všetkých okamihov, kedy sa signalizačné zariadenie zapne, je vyšrafovaná časť štvorca

10. Táto úloha má podobné vysvetlenie, ako predchádzajúca úloha s metrom. Obaja majú pravdu. Keď príde ku výťahu Janko, ide výťah s väčšou pravdepodobnosťou nadol a teda Janko musí čakať, kým sa výťah vráti.
Keď príde ku výťahu Ferko, tak bude väčšia pravdepodobnosť, že výťah pôjde nahor, než pravdepodobnosť, že pôjde nadol.
Dôvod je jednoduchý: na 2. poschodí 14-poschodovej budovy je možností, že je výťah niekde vyššie určite viac, než možností, že výťah je pod úrovňou 2. poschodia.
Naopak, na 10. poschodí 14-poschodovej budovy je možností, že je výťah niekde nižšie, určite viac, než možností, že výťah je nad úrovňou 10. poschodia.
Situácia sa dá nakresliť a pravdepodobnosti spočítať presne.

3.3. Podmienená pravdepodobnosť, nezávislé udalosti, veta o úplnej pravdepodobnosti

Riešme úlohu výpočtu pravdepodobnosti udalosti A, keď vieme, že je splnená nejaká podmienka B.

Úloha 3.3.1 *Pravdepodobnosť udalosti A, že na kocke padne číslo 2, je*

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Ale pravdepodobnosť udalosti A, že na kocke padne číslo 2 za predpokladu, že vieme, že nastala udalosť B: na kocke padlo párne číslo, je iba

$$P(A/B) = \frac{1}{3}$$

□

Podmienená pravdepodobnosť udalosti A za podmienky B znamená, že namiesto pôvodnej množiny všetkých udalostí Ω budeme uvažovať len menšiu množinu B. Po tomto zúžení, nenulovú pravdepodobnosť výskytu budú mať tie prvky množiny A, ktoré sa nachádzajú v množine B.
Teda zmeníme vzorec pre pravdepodobnosť udalosti A:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

na vzorec pre pravdepodobnosť udalosti A za podmienky B

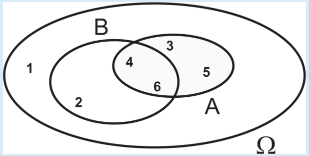
$$P(A/B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)}$$

Úloha 3.3.2 *Pravdepodobnosť udalosti A, že „na kocke padne číslo väčšie ako 2" je $P(A) = 4/6$.*

Ale pravdepodobnosť udalosti A/B, že "na kocke padne číslo väčšie ako 2 za predpokladu, že vieme, že na kocke padlo párne číslo"je

$$P(A/B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{2}{3} \tag{3.1}$$

Úloha 3.3.2 je ilustrovaná na obrázku 3.14. □



Obrázok 3.14: Pravdepodobnosť udalosti A/B, kde A znamená, že na kocke padne číslo väčšie ako 2 a B znamená, že na kocke padlo párne číslo

Vzorec 3.1 ešte môžeme upraviť na tvar

$$P(A/B) = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}}{\frac{N(B)}{N(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{3.2}$$

Uvedené vzorce platia iba pre $P(B) \neq \emptyset$.

Nasledujúce vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti ľahko pochopíme, keď príslušné množiny nakreslíme.

- $B \subseteqq A \quad \Rightarrow \quad A \cap B = B \quad \Rightarrow \quad P(A/B) = 1$

- $P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)$
- $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$

Dve **udalosti** A **a** B **nazveme nezávislé**, ak podmienená pravdepodobnosť udalosti A za podmienky B nezávisí od tejto podmienky, teda ak

$$P(A/B) = P(A)$$

Podmienka sa dá upraviť na tvar

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

a odtiaľ

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

prípadne aj na

$$P(B/A) = P(B)$$

Ak udalosti nie sú nezávislé, nazveme ich **závislé**.
Vzorec pre výpočet pravdepodobnosti prieniku dvoch udalostí, ktoré sú závislé je:

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$$

Vzorec pre výpočet pravdepodobnosti prieniku dvoch udalostí, ktoré sú nezávislé:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Úlohy, ktoré je možné riešiť pomocou vzorca pre podmienenú pravdepodobnosť sú teda úlohy o tom, aká bude pravdepodobnosť, keď sa zmení základná množina Ω.

Úloha 3.3.3 *Rodičia sa dozvedeli, že triede, kam chodí ich dieťa, niekto rozbil okno. Keďže šanca, že to bol niekto z triedy, je rovnaká pre všetkých* 30 *žiakov, každý zaplatí* $\frac{1}{30}$ *sumy za opravu.*

Na druhý deň sa zistilo, že okoloidúci zvonku videli, že to bol chlapec. Chlapcov je v triede 14 a tak rodičia musia zaplatiť inú sumu. Väčšiu ak majú v triede syna a žiadnu, ak majú v triede dcéru. Predpokladajme, že títo rodičia majú v triede syna. Aká je pravdepodobnosť, že ich syn rozbil okno?

Riešenie: Formálny výpočet by bol takýto:
Základná množina všetkých žiakov v triede je
$\Omega = \{c_1, c_2, \ldots, c_{14}, d_1, d_2, \ldots, d_{16}\}$.
Udalosti A, že konkrétny chlapec, napríklad c_1, rozbil okno, zodpovedá množina $A = \{c_1\}$.
Udalosti B, že okno rozbil chlapec zodpovedá množina $B = \{c_1, c_2, \ldots, c_{14}\}$.

Pravdepodobnosť udalosti A, že chlapec c_1 rozbil okno je

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{30}$$

Pravdepodobnosť udalosti A/B, že chlapec c_1 rozbil okno za podmienky, že okno rozbil chlapec, je

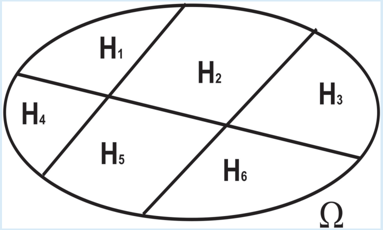
$$P(A/B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{1}{14}$$

$\square$

Dôležitou aplikáciou podmienenej pravdepodobnosti je veta o úplnej pravdepodobnosti. Táto veta rieši úlohu rozloženia komplikovanej udalosti na zjednotenie viacerých udalostí, ktorých pravdepodobnosť vieme vypočítať jednoduchšie. Rozložme základnú množinu Ω na niekoľko množín $H_k \quad k = 1, 2, \ldots$ tak, aby sa neprekrývali, ako vidno na obrázku 3.15. Takéto podmnožiny nazývame úplný systém podmnožín.

Formálne je teda **úplný systém podmnožín** množiny Ω, taký systém $H_k \quad k = 1, 2, \ldots$ pre ktorý platí:

- $H_j \cap H_i = \emptyset, \quad$ pre všetky $\quad j \neq i$



Obrázok 3.15: Rozklad množiny Ω na úplný systém podmnožín

- $\bigcup\limits_{\forall k} H_k = \Omega$

Veta o úplnej pravdepodobnosti.
Pre úplný systém podmnožín H_k množiny Ω, taký, že $\forall H_k;\ P(H_k) \neq 0$ platí

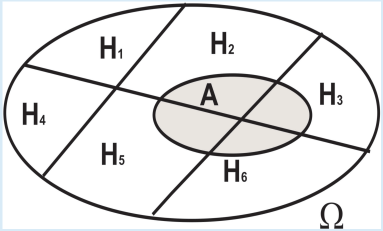
$$P(A) = \sum_{\forall k} P(A/H_k).P(H_k)$$

Množinovú schému vety o úplnej pravdepodobnosti vidíme na obrázku 3.16.
Vráťme sa k súťaži o auto

Úloha 3.3.4 *Auto je za jednými z troch dverí, za ďalšími dvoma dverami sú kozy. Nevie sa, čo kde je. Pravidlá sú nasledujúce: vyberiete si jedny dvere a moderátor, ktorý vie, čo je za dverami, otvorí iné, také kde je koza. Potom sa Vás spýta, ktoré spomedzi zatvorených dverí chcete otvoriť. Aká je pravdepodobnosť udalosti A, že auto je za inými dverami, než ktoré ste si vybrali pôvodne?*

Riešenie: Rozložme celý priestor možností na tri množiny, podľa toho, na aké dvere ste ukázali.

- H_1 znamená, že ste ukázali na prvé dvere



Obrázok 3.16: Veta o úplnej pravdepodobnosti

- H_2 znamená, že ste ukázali na druhé dvere
- H_3 znamená, že ste ukázali na tretie dvere

$$P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(A/H_k).P(H_k) =$$

$$= P(A/H_1).P(H_1) + P(A/H_2).P(H_2) + P(A/H_3).P(H_3) \tag{3.3}$$

Zoberme prvý prípad H_1 a rozdeľme ho na možnosti, ktoré môžu nastať

- C_1 znamená, že auto je za prvými dverami
- C_2 znamená, že auto je za druhými dverami
- C_3 znamená, že auto je za tretími dverami

Pravdepodobnosť udalosti $B = A/H_1$, že auto je za inými dverami, než ktoré sme si vybrali pôvodne, za podmienky, že ste ukázali na prvé dvere, je

$$P(B) = P(B/C_1) \cdot P(C_1) + P(B/C_2) \cdot P(C_2) + P(B/C_3) \cdot P(C_3) =$$

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$= P(B/C_1) \cdot \frac{1}{3} + P(B/C_2) \cdot \frac{1}{3} + P(B/C_3) \cdot \frac{1}{3} = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Dostali sme, že pravdepodobnosť udalosti $B = A/H_1$, že auto je za inými dverami, než ktoré sme si vybrali pôvodne, za podmienky, že ste ukázali na prvé dvere, sú $\frac{2}{3}$. Podobne ukážeme, že aj $P(A/H_2) = \frac{2}{3}$ a $P(A/H_3) = \frac{2}{3}$.

Po dosadení vypočítaných hodnôt do vzťahu 3.3, dostaneme

$$P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) + P(A/H_3) \cdot P(H_3) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

3.3.1. Príklady

1. Popíšte dve udalosti, ktoré sú nezávislé.

2. Pravdepodobnosť udalosti A, že na kocke padne párne číslo, je $3/6$.
   Pravdepodobnosť udalosti B, že padne číslo väčšie ako 3, je $2/6$.
   Pravdepodobnosť udalosti C, že na kocke padne párne číslo, ktoré je väčšie ako 3, je $2/6$. Vyjadrite pravdepodobnosť udalosti C pomocou pravdepodobností udalostí A a B.

3. Pravdepodobnosť udalosti A, že na kocke padne párne číslo, je $3/6$.
   Pravdepodobnosť udalosti B, že padne číslo väčšie ako 3, je $3/6$.
   Pravdepodobnosť udalosti C, že na kocke padne párne číslo alebo číslo, ktoré je väčšie ako 3, je $4/6$. Vyjadrite pravdepodobnosť udalosti C pomocou pravdepodobností udalostí A a B.

4. Pravdepodobnosť udalosti A, že na kocke padne párne číslo, je $3/6$.
   Pravdepodobnosť udalosti B, že padne číslo väčšie ako 1, je $5/6$.
   Pravdepodobnosť udalosti C, že padne párne číslo, ktoré je väčšie ako 1, je $\frac{1}{3}$. Vyjadrite pravdepodobnosť udalosti C pomocou pravdepodobností udalostí A a B.

5. Pravdepodobnosť udalosti A, že na kocke padne párne číslo, je $3/6$.
   Pravdepodobnosť udalosti B, že padne číslo väčšie ako 3, je $3/6$.
   Pravdepodobnosť udalosti C, že padne číslo menšie ako 3, je $2/6$. Pravdepodobnosť udalosti D, že na kocke padne párne číslo, alebo číslo väčšie ako 3, alebo číslo menšie ako 3, je $5/6$. Vyjadrite pravdepodobnosť udalosti D pomocou pravdepodobností udalostí A, B a C.

6. Pravdepodobnosť udalosti A, že na kocke padne párne číslo, je $3/6$.
   Pravdepodobnosť udalosti B, že padne číslo väčšie ako 4, je $2/6$.
   Pravdepodobnosť udalosti C, že padne číslo menšie ako 4, je $3/6$. Pravdepodobnosť udalosti D, že na kocke padne párne číslo, alebo číslo väčšie ako 4, alebo číslo menšie

ako 4, je 1. Vyjadrite pravdepodobnosť udalosti D pomocou pravdepodobností udalostí A, B a C.

7. Napíšte vzorec pre podmienenú pravdepodobnosť. Uveďte príklad na jeho použitie.

8. Napíšte vzorec pre pravdepodobnosť prieniku dvoch závislých udalostí. Uveďte príklad na jeho použitie.

9. Napíšte vetu o úplnej pravdepodobnosti. Uveďte príklad na jej použitie.

3.3.1.1. Riešenie príkladov

1. Napríklad udalosť, že pri hode dvoma kockami padne na prvej číslo 1 (udalosť A) a na druhej číslo 1 (udalosť B).

   Naozaj platí
$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

2. V tejto a nasledujúcich otázkach ide len o to ukázať ako súvisí formálny zápis a skutočné pravdepodobnosti pre hody kockou.
$$P(C) = P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{6}$$

3. $$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$

4. $$P(C) = P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

5. $$P(D) = P(A \cup B \cup C) =$$
$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} - \frac{0}{6} + \frac{0}{6} = \frac{5}{6}$$

6. $$P(D) = P(A \cup B \cup C) =$$
$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{0}{6} + \frac{0}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

7.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

Vo vrecúšku sú tri biele a tri modré guľôčky. Pravdepodobnosť, že z vrecúška vytiahneme bielu guľôčku, je 1/2. Guľôčku nevrátime. Pravdepodobnosť, že z vrecúška vytiahneme bielu guľôčku pri druhom ťahaní už nie je 1/2, ale $\frac{2}{5}$.

$$P(B_2/B_1) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{\frac{3}{6}} = \clubsuit$$

Na výpočet pravdepodobnosti $P(B_2 \cap B_1)$ treba spočítať všetky možnosti, ako je možné vytiahnuť guľôčky

$$\Omega = \{(B, B, B, M, M, M), (B, B, M, B, M, M), (B, B, M, M, B, M),$$

$$(B, B, M, M, M, B), (B, M, B, B, M, M), (B, M, B, M, B, M),$$

$$(B, M, B, M, M, B), (B, M, M, B, B, M), (B, M, M, B, M, B),$$

$$(B, M, M, M, B, B), (M, B, B, B, M, M), (M, B, B, M, B, M),$$

$$(M, B, B, M, M, B), (M, B, M, B, B, M), (M, B, M, B, M, B),$$

$$(M, B, M, M, B, B), (M, M, B, B, B, M), (M, M, B, B, M, B),$$

$$(M, M, B, M, B, B), (M, M, M, B, B, B)\}$$

Týchto možností je 20. Z toho 4 sú také, že sú v prvých dvoch ťahoch vytiahnuté biele guľôčky.

$$\clubsuit = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{\frac{3}{6}} = \frac{\frac{4}{20}}{\frac{3}{6}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

Počet možností ako postupne vytiahnuť 6 guľôčok z toho 3 biele a 3 modré, je rovnaký ako počet možností, ako v triede so 6 stoličkami, rozmiestniť 3 vyložené a 3 zložené stoličky.

Ak použijeme postup z príkladu o stoličkách v príklade 7 v časti 3.1.2.1, tak dostaneme:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

8. Napríklad udalosť, že pri hode kockou padne číslo párne (udalosť A) a zároveň väčšie ako 3 (udalosť B).

   Naozaj platí
   $$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

9. Pre úplný systém podmnožín H_k množiny Ω, taký, že $\forall H_k$; $P(H_k) \neq 0$ platí
   $$P(A) = \sum_{\forall k} P(A/H_k) \cdot P(H_k)$$

   Ako príklad na vetu o úplnej pravdepodobnosti sme chceli pôvodne uviesť nasledujúcu úlohu:

Príklad 3.3.1 *Pravdepodobnosť prítomnosti baktérií salmonelózy v banánovej zmrzline je* 0.03*, v jahodovej* 0.06 *a v čokoládovej* 0.12*. V zjedenej porcii boli* 2 *kopčeky banánovej a po jednom kopčeku jahodovej a čokoládovej zmrzliny. Aká je pravdepodobnosť, že v zjedenej porcii boli prítomné baktérie salmonelózy?*

Riešenie: Pravdepodobnosť, že v zjedenej porcii boli prítomné baktérie salmonelózy, sa môže, podľa vety o úplnej pravdepodobnosti, vypočítať nasledovne:

$$P(A) = P(A/H_b) \cdot P(H_b) + P(A/H_j) \cdot P(H_j) + P(A/H_c) \cdot P(H_c) =$$

$$= 0.03 \cdot \frac{2}{4} + 0.06 \cdot \frac{1}{4} + 0.12 \cdot \frac{1}{4} = 0.06 \qquad (3.4)$$

Pri riešení sme síce použili vetu o úplnej pravdepodobnosti, ale nebolo to správne:

Pravdepodobnosť, že v zjedenej porcii boli prítomné baktérie salmonelózy, je vlastne pravdepodobnosť udalosti, že aspoň v jednom kopčeku v porcii, je baktéria prítomná. Pretože zo zadania nie je jasné, ako sa chápe pravdepodobnosť výskytu baktérií salmonelózy, musíme zadanie upresniť.

Dopočítajme úlohu, ak budeme predpokladať, že „pravdepodobnosť prítomnosti baktérií salmonelózy v **jednom kopčeku** banánovej zmrzliny je 0.03, v jednom kopčeku jahodovej je 0.06 a v jednom kopčeku čokoládovej je 0.12". Pravdepodobnosť doplnkovej udalosti „v zjedenej porcii neboli prítomné baktérie salmonelózy" je:

$$(1 - 0.03) \cdot (1 - 0.03) \cdot (1 - 0.06) \cdot (1 - 0.12) = 0.8024$$

Pravdepodobnosť, že v zjedenej porcii boli prítomné baktérie salmonelózy, vypočítame ako doplnkovú pravdepodobnosť:

$$1 - (1 - 0.03) \cdot (1 - 0.03) \cdot (1 - 0.06) \cdot (1 - 0.12) = 0.1976 \qquad (3.5)$$

Treba si ešte uvedomiť, že predpoklad o nezávislosti výskytu salmonely v jednotlivých kopčekoch (ktorý sme použili, keď sme v 3.5 pravdepodobnosti násobili), v reálnej situácii nebude splnený. Je zrejmé, že keď sú v jednej porcii dva kopčeky banánovej zmrzliny, bude pravdepodobnosť výskytu salmonely v týchto kopčekoch závislá.

Takže riešenie úlohy 3.3.1 bude komplikovanejšie a určite táto úloha nie je príklad na vetu o úplnej pravdepodobnosti. Skúsme preformulovať zadanie tejto úlohy tak, aby sme mohli použiť riešenie 3.4.

Príklad 3.3.2 *Pravdepodobnosť prítomnosti baktérií salmonelózy v jednom kopčeku banánovej zmrzliny je* 0.03*, v jednom kopčeku jahodovej je* 0.06 *a v jednom kopčeku čokoládovej je* 0.12*. Náhodne vyberieme jeden kopček zmrzliny. Pravdepodobnosť, že to* *bude banánová zmrzlina je* $1/2$*, že to bude jahodová zmrzlina je* $1/4$ *a že to bude čokoládová zmrzlina je* $1/4$*. Aká je pravdepodobnosť, že vo vybratom kopčeku budú prítomné baktérie salmonelózy?*

Poznámka:
Nakoniec by sme chceli upozorniť, že pôvodný príklad 3.3.1 sme nevyriešili. Nielenže nebol zadaný úplne presne, ale navyše bolo možné pravdepodobnosť výskytu baktérií v zmrzline chápať ako podiel baktérií v jednotkovom množstve, aj ako dve nezávislé udalosti. To znamená, že rovnako dobré (realistické) sú interpretácie, v ktorých je pravdepodobnosť prítomnosti baktérií salmonelózy v dvoch kopčekoch banánovej zmrzliny: $P(A) = 0.03$, $P(A) = 0.03 \cdot 0.03$ alebo $P(A) = 0.03 \cdot p$, kde p je pravdepodobnosť, že v druhom kopčeku sú baktérie za predpokladu, že v prvom boli baktérie. Riešenie teda závisí na tom, ako porozumieme zadaniu. A čím realistickejšie je zadanie, tým rôznorodejšie interpretácie zadania dostaneme. Preto sa na prvé oboznámenie s teóriou používajú jednoduchšie úlohy, ktoré sa však obvykle dajú vypočítať aj bez uvedených teoretických výsledkov.

3.3.2. Úlohy

1. Z balíčka 32 sedmových kariet vytiahneme náhodne po sebe tri karty. Karty do balíčka nevraciame. Aká je pravdepodobnosť, že eso vytiahneme až na tretí krát?

2. Vo vrecúšku sú hlinené a kovové guľôčky. Ich farba je biela a modrá. Pravdepodobnosť, že vytiahneme bielu, hlinenú guľôčku, je 0.21 a pravdepodobnosť, že vytiahneme bielu guľôčku, je 0.32. Aká je pravdepodobnosť, že spomedzi bielych guľôčok vytiahneme hlinenú guľôčku?

3. Správa prechádzajúca sieťou musí prejsť kanálom K_1, potom jedným z kanálov A_1, A_2, A_3 a nakoniec kanálom K_2. Kanál K_1 bude mať poruchu s pravdepodobnosťou 0.2, kanál A_1 bude mať poruchu s pravdepodobnosťou 0.1, kanál A_2 bude mať poruchu s pravdepodobnosťou 0.4, kanál A_3 bude mať poruchu s pravdepodobnosťou 0.5 a kanál K_2 bude mať poruchu s pravdepodobnosťou 0.3. Predpokladáme, že všetky kanály majú poruchy navzájom nezávisle. Aká je pravdepodobnosť, že správa neprejde sieťou kvôli poruche niektorého z kanálov?

4. Štatistickým pozorovaním sa zistilo, že 8% paketov v sieti prenáša reč. Spomedzi paketov, ktoré neprenášajú reč, je 25% paketov takých, že prenášajú obraz. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný paket spomedzi všetkých prenáša obraz?

5. V losovacom zariadení sa nachádzajú tieto čísla: 2, 4, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 1, 3. Vytiahneme číslo a prezradíme, že je párne. Aká je pravdepodobnosť, že toto číslo je menšie ako 3?

6. Strelec zasiahne cieľ s pravdepodobnosťou 0.8. Aká je pravdepodobnosť, že cieľ zasiahne 10-krát za sebou, ak vieme, že jednotlivé pokusy sú na sebe nezávislé?

7. Mama troch detí pozerá telenovelu. Pravdepodobnosť, že prvé dieťa nebude od nej počas telenovely nič chcieť, je 0.9, pravdepodobnosť, že druhé dieťa nebude od nej počas telenovely nič chcieť, je 0.8 a pravdepodobnosť, že tretie dieťa nebude od nej počas telenovely nič chcieť, je 0.85. Predpokladáme, aj keď to nie je reálne, že všetky deti sa chovajú navzájom nezávisle. Aká je pravdepodobnosť, že mamu počas telenovely nevyruší žiadne z jej troch detí?

8. Na stole sú tri misky. V prvej miske sú 3 biele a 1 žltý cukrík, v druhej 1 biely a 4 žlté cukríky a v tretej miske sú 2 biele a 2 žlté cukríky. Náhodne vyberieme cukrík z 1. misky a dáme ho do 2. misky, potom náhodne vyberieme cukrík z 2. misky a potom ho dáme do 3. misky. Nakoniec náhodne vyberieme cukrík z 3. misky. Aká je pravdepodobnosť, že všetky tri vytiahnuté cukríky boli biele?

9. Na stole sú tri misky. V prvej miske sú 3 biele a 1 žltý cukrík, v druhej 1 biely a 4 žlté cukríky a v tretej miske sú 2 biele a 2 žlté cukríky. Náhodne vyberieme cukrík z 1. misky a dáme ho do 2. misky, potom náhodne vyberieme cukrík z 2. misky a dáme ho do 3. misky. Nakoniec náhodne vyberieme cukrík z 3. misky. Aká je pravdepodobnosť, že sme postupne vytiahli biely, žltý a biely cukrík?

10. Zabudli ste poslednú číslicu telefónneho čísla a preto ju vytáčate náhodne. Aká je pravdepodobnosť, že nebudete volať viac ako tri rôzne čísla?

11. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraté dvojciferné číslo je deliteľné dvomi alebo piatimi?

12. Z balíčka 32 kariet vytiahneme náhodne po sebe tri karty. Aká je pravdepodobnosť, že prvé bolo eso, druhá sedma a tretie zase eso?

13. Vo vrecúšku sú hlinené, sklenené a kovové guľôčky, ich množstvá sú v pomere 3 : 2 : 1. Farby guľôčok sú biela, modrá a červená. Pravdepodobnosť, že hlinená guľôčka je biela je 0.7.
Pravdepodobnosť, že sklenená guľôčka je biela je 0.6.
Pravdepodobnosť, že kovová guľôčka je biela je 0.8.
Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vytiahnutá guľôčka bude biela?

14. Zariadenie môže pracovať v troch režimoch. V prvom pracuje 50 % pracovného času, v druhom 35 % a v treťom 15 % pracovného času. Pravdepodobnosť poruchy v pracovnom čase závisí od režimu, v ktorom zariadenie pracuje.
a rovná sa 0.01 Pravdepodobnosť poruchy v prvom režime je rovná 0.01.
Pravdepodobnosť poruchy v druhom režime je rovná 0.03.

Pravdepodobnosť poruchy v treťom režime je rovná 0.05.
Aká je pravdepodobnosť poruchy v pracovnom čase?

15. Auto vášho budúceho šéfa bude s pravdepodobnosťou 0.3 vyrobené v Nemecku, s pravdepodobnosťou 0.5 bude vyrobené v Čechách a s pravdepodobnosťou 0.2 bude vyrobené v Japonsku.
Pravdepodobnosť, že počas prvých troch rokov sa pokazí motor je pre auto z Nemecka 0.2, pre auto z Česka 0.4 a pre auto z Japonska 0.3.
Aká je pravdepodobnosť, že autu vášho budúceho šéfa počas prvých troch rokov nepokazí motor?

16. Pri pokladni v hypermarkete bude zákazník prvý v poradí s pravdepodobnosťou 0.4, druhý v poradí s pravdepodobnosťou 0.3, tretí v poradí s pravdepodobnosťou 0.2, štvrtý v poradí s pravdepodobnosťou 0.1. Ak by mal byť viac ako štvrtý v poradí, tak ku pokladni nepôjde.
Na ktorom mieste v poradí bude zákazník v priemere?

17. Do Siemensu nastupujú študenti zo Žiliny a z Bratislavy. Študent zo Žiliny ovláda angličtinu s pravdepodobnosťou 0.82 a študent z Bratislavy ovláda angličtinu s pravdepodobnosťou 0.91. Aká je pravdepodobnosť, že novoprijatý uchádzač ovláda angličtinu?

3.3.2.1. Riešenie úloh

1. Označme udalosti tak, aby sme si udržali prehľad o tom, čo robíme. Udalosť, že z balíčka vytiahneme eso pri k-tom ťahu, označme ako E_k. Na to, aby sme eso vytiahli až na tretí krát, ho na prvýkrát ani na druhýkrát vytiahnuť nesmieme. Udalosť, že eso nevytiahneme na prvýkrát, označíme $\overline{E}_1$, že ho nevytiahneme na druhýkrát $\overline{E}_2$ a že ho vytiahneme na tretíkrát E_3.

$$P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) = P(E_3/\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2).P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2) =$$

$$= P(E_3/\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2) \cdot P(\overline{E}_2/\overline{E}_1) \cdot P(\overline{E}_1) = \frac{4}{30} \cdot \frac{27}{31} \cdot \frac{28}{32} = 0.1016$$

2. Označme udalosť, že vytiahneme bielu guľôčku, B. Udalosť, že vytiahneme hlinenú guľôčku H. Poznáme pravdepodobnosti $P(B \cap H) = 0.21$ a $P(B) = 0.32$.

   Pravdepodobnosť, že spomedzi bielych guľôčok vytiahneme hlinenú guľôčku, je podmienená pravdepodobnosť $P(H/B)$.

$$P(H/B) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)} = \frac{0.21}{0.32} = 0.6562$$

3. Správa prechádzajúca sieťou musí prejsť kanálom K_1, potom jedným z kanálov A_1, A_2, A_3 a nakoniec kanálom K_2, ako to vidíme na obrázku 3.17. Aby správa prešla sieťou, musí prejsť $K_1 \wedge (A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge K_2$. Uvedené udalosti sú nezávislé podľa predpokladu v úlohe, v praxi väčšinou porucha na jednom mieste spôsobí aj poruchy v tesnom okolí! Spočítame pravdepodobnosť jednotlivých udalostí

$$P(K_1) = 0.2,\ P(K_2) = 0.3$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) -$$

$$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

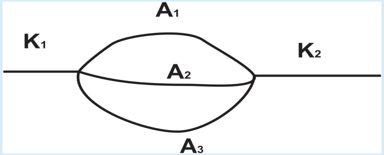
◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Obrázok 3.17: Znázornenie možností pre prechod správy sieťou

$$= 0.1 + 0.4 + 0.5 - 0.1 \cdot 0.4 - 0.1 \cdot 0.5 - 0.4 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.4 \cdot 0.5 = 0.108$$

$$P(K_1 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap K_2) = P(K_1) \cdot P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cdot P(K_2) =$$

$$= 0.2 \cdot 0.108 \cdot 0.3 = 0.0065$$

Pravdepodobnosť, že správa neprejde sieťou kvôli poruche niektorého z kanálov, je doplnková k práve vypočítanej pravdepodobnosti, že správa sieťou prejde. Pravdepodobnosť, že správa neprejde sieťou je 0.9935.

4. Označme udalosť, že paket prenáša reč, R a udalosť, že paket prenáša obraz, O. Potom $P(R) = 0.08$. Vieme, že $P(O/\overline{R}) = 0.25$ a chceme vypočítať pravdepodobnosť, že náhodne vybraný paket spomedzi všetkých prenáša obraz, teda $P(O)$. Tu treba trochu technických znalostí na to, aby sme si uvedomili, že paket ktorý prenáša obraz, neprenáša reč. Preto platí $O = O \cap \overline{R}$, čoho pravdepodobnosť už dokážeme vypočítať:

$$O = O \cap \overline{R} = P(O/\overline{R})P(\overline{R}) = 0.25 \cdot 0.92 = 0.23$$

5. Párne spomedzi čísel 2, 4, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 1, 3 sú 2, 4, 4, 4, 4, 2, teda pravdepodobnosť, že vytiahnuré číslo je párne, je $\frac{6}{10}$. Pravdepodobnosť, že číslo je párne a menšie ako 3, je $\frac{2}{10}$. Teda pravdepodobnosť, že vytiahnuté párne číslo je menšie ako 3 je $\frac{\frac{2}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{1}{3}$. Samozrejme, je aj jednoduchšia cesta ako dosiahnuť tento výsledok a to počítať priamo zo sady čísel 2, 4, 4, 4, 4, 2.

6. Strelec zasiahne cieľ s pravdepodobnosťou 0.8. Pravdepodobnosť udalosti A, že strelec zasiahne cieľ 10-krát za sebou, je dosť malá. Pretože jednotlivé pokusy sú na sebe nezávislé, vypočítame ju:
$$P(A) = 0.8^{10} = 0.1073$$

7. $$P(A) = 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.85 = 0.612$$

8. Pravdepodobnosť, že cukrík vytiahnutý z prvej misky je biely, je
$$P(B_1) = \frac{3}{4}$$
Pravdepodobnosť, že cukrík vytiahnutý z druhej misky je biely, za predpokladu, že prvý vytiahnutý cukrík bol biely, je
$$P(B_2/B_1) = \frac{2}{6}$$
Pravdepodobnosť, že cukrík vytiahnutý z tretej misky je biely, za predpokladu, že druhý a prvý cukrík bol biely, je
$$P(B_3/B_2 \cap B_1) = \frac{3}{5}$$
Pravdepodobnosť, že všetky tri vytiahnuté cukríky boli biele, je
$$P(B_3 \cap B_2 \cap B_1) = P(B_3/B_2 \cap B_1) \cdot P(B_2/B_1) \cdot P(B_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} = 0.15$$

9. Pravdepodobnosť, že cukríky boli vytiahnuté v poradí biely, žltý a biely, je
$$P(B_3 \cap Z_2 \cap B_1) = P(B_3/Z_2 \cap B_1) \cdot P(Z_2/B_1) \cdot P(B_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{4} = 0.2$$

10. Na jedno číslo budeme volať, ak číslicu uhádneme hneď na prvý raz. Pravdepodobnosť tejto udalosti je

$$P(U_1) = \frac{1}{10} = 0.1$$

Na dve čísla budeme volať, ak číslicu neuhádneme na prvý raz ale uhádneme ju na druhý raz. Pravdepodobnosť tejto udalosti je

$$P(\overline{U}_1 \cap U_2) = P(U_2/\overline{U}_1) \cdot P(\overline{U}_1) = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10} = 0.1$$

Na tri čísla budeme volať, ak číslicu neuhádneme na prvý raz a neuhádneme ju ani na druhý raz ale uhádneme ju na tretí raz.
Pravdepodobnosť tejto udalosti je

$$P(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \cap U_3) = P(U_3/\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2) \cdot P(\overline{U}_2/\overline{U}_1) \cdot P(\overline{U}_1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = 0.1$$

Pravdepodobnosť, že nebudeme volať viac ako na tri miesta, je pravdepodobnosť, že budeme volať na jedno alebo na dve alebo na tri miesta. Tieto udalosti sú dizjunktné, preto pravdepodobnosť ich zjednotenia bude súčet ich pravdepodobností.

$$P(U_1) + P(\overline{U}_1 \cap U_2) + P(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \cap U_3) = 0.3$$

11. Dvojciferných čísel je solu 90, z toho deliteľných dvomi je 45. Pravdepodobnosť udalosti A, že číslo je deliteľné dvomi, je

$$P(A) = \frac{45}{90} = 0.5$$

Pravdepodobnosť udalosti B, že číslo je deliteľné piatimi, je

$$P(B) = \frac{18}{90} = 0.2$$

Pravdepodobnosť, že náhodne vybraté dvojciferné číslo je deliteľné dvomi alebo piatimi, je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.2 - 0.1 = 0.6$$

12.

$$P(E_1 \cap S_2 \cap E_3) = P(E_3/E_1 \cap S_2) \cdot P(E_1 \cap S_2) =$$

$$= P(E_3/E_1 \cap S_2) \cdot P(S_2/E_1) \cdot P(E_1) = \frac{3}{30} \cdot \frac{4}{31} \cdot \frac{4}{32} = 0.0016$$

13. Vo vrecúšku sú hlinené (H), sklenené (S) a kovové (K) guľôčky. Ich množstvá sú v pomere $3 : 2 : 1$. Preto pravdepodobnosti, s akými vytiahneme jednotlivé druhy, sú $P(H) = \frac{3}{6}$, $P(S) = \frac{2}{6}$ a $P(K) = \frac{1}{6}$. Zo zadania vieme, že

$$P(B/H) = 0.7, \quad P(B/S) = 0.6, \quad P(B/K) = 0.8$$

Pravdepodobnosť, že náhodne vytiahnutá guľôčka bude biela, vypočítame pomocou vety o úplnej pravdepodobnosti

$$P(B) = P(B/H)P(H) + P(B/S)P(S) + P(B/K)P(K) =$$

$$= 0.7 \cdot \frac{3}{6} + 0.6 \cdot \frac{2}{6} + 0.8 \cdot \frac{1}{6} = 0.6833$$

14. Poznámka v zadaní, ktorá hovorí o tom, že sa zariadenie pokazí v pracovnom čase, je dôležitá. Keby sme zisťovali, či sa pokazí napríklad televízor, dostali by sme určite iný výsledok v prípade, že daná udalosť by sa pozorovala najbližšie 3 sekundy alebo najbližších 30 rokov. Prvá pravdepodobnosť by bola skoro 0, druhá skoro 1. Preto, ak pozorujeme udalosti, ktoré trvajú nejakú dobu, je tam potrebné túto dobu uviesť.

Pravdepodobnosť poruchy zariadenia v pracovnom čase je

$$0.5 \cdot 0.01 + 0.35 \cdot 0.03 + 0.15 \cdot 0.05 = 0.023$$

15. Motor sa pokazí s pravdepodobnosťou

$$0.3 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.32$$

Motor sa nepokazí s pravdepodobnosťou

$$1 - 0.32 = 0.68$$

16. Vypočítame vážený priemer z umiestnení v rade pri pokladni. Prvé miesto v rade má váhu 0.4, druhé 0.3, tretie 0.2 a štvrté 0.1. Iné miesta sa nevyskytujú. Vážený priemer týchto umiestnení je

$$1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = 2$$

Priemerné umiestnenie zákazníka v rade je druhé miesto.

17. Táto úloha, tak ako veľa ďalších, s ktorými sa pri štatistickom spracovávaní údajov stretneme, nie je dobre zadaná. Na to, aby sme ju mohli vypočítať, potrebujeme ešte údaj o tom, aký je podiel študentov zo Žiliny a aký z Bratislavy.

Pri takomto zadaní sú dve možnosti: buď si povedať, že chýbajúci podiel je rovnaký pre obidve mestá alebo druhá (a to je poctivejšia možnosť) si nejako tieto údaje zaobstarať. V prvom prípade by riešenie bolo:

$$0.5 \cdot 0.82 + 0.5 \cdot 0.91 = 0.865$$

V druhom prípade, za predpokladu, že sme zistili podiel uchádzačov 1:2 pre ZA : BA, by bolo:

$$\frac{1}{3} \cdot 0.82 + \frac{2}{3} \cdot 0.91 = 0.88$$

3.4. Bayesov vzorec Bernoulliho nezávislé pokusy

Použitím vzorca pre podmienenú pravdepodobnosť a vety o úplnej pravdepodobnosti dostaneme Bayesov vzorec.
Podmienená pravdepodobnosť:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Veta o úplnej pravdepodobnosti:

$$H_j \cap H_i = \emptyset, \quad \text{pre všetky} \quad j \neq i$$

$$\bigcup_{\forall k} H_k = \Omega, \quad \forall H_k;\ P(H_k) \neq 0$$

$$P(A) = \sum_{\forall k} P(A/H_k) \cdot P(H_k)$$

Odvodenie:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)}$$

$$P(A) = \sum_{\forall k} P(A/H_k) \cdot P(H_k)$$

po dosadení druhej rovnosti do prvej dostaneme **Bayesov vzorec**:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i) \cdot P(H_i)}{\sum\limits_{\forall k} P(A/H_k) \cdot P(H_k)} \tag{3.6}$$

Nasleduje úloha, ktorú vyriešime najprv pomocou zdravého sedliackeho rozumu a následne aj pomocou Bayesovho vzorca.

Úloha 3.4.1 *V červenej a modrej miske boli cukríky. Cukríky boli zelené a biele. V červenej miske boli 2 zelené a 8 bielych cukríkov, v modrej miske boli 4 zelené a 1 biely cukrík. Cukríky sme vysypali na tanier a ponúkli hosťom. Následne sa zistilo, že cukríky v modrej miske olízal pes. Aká je pravdepodobnosť, že hosť si vybral cukrík olízaný psom, ak vieme, že hosť zjedol biely cukrík?*

Riešenie: Úlohu vyriešime ľahko, bez pomoci špeciálnych vzorcov. Bielych cukríkov bolo 9, z toho jeden bol v modrej miske. Teda

$$P(M/B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{9}$$

Nie vždy sú však známe tie pravdepodobnosti, ktoré potrebujeme k takémuto jednoduchému výpočtu. Vyriešime príklad ešte raz, aby sme videli, že na výpočet môžeme použiť aj iné vstupné informácie.

Označme udalosti postupne C (cukrík z červenej misky), M (cukrík z modrej misky), B (biely cukrík)a Z (zelený cukrík). Jednotlivé pravdepodobnosti potom budú

$$P(C) = \frac{2}{3}, \quad P(M) = \frac{1}{3}, \quad P(B/C) = \frac{8}{10}, \quad P(B/M) = \frac{1}{5}$$

Použitím Bayesovho vzorca dostávame:

$$P(M/B) = \frac{P(B/M) \cdot P(M)}{P(B/M) \cdot P(M) + P(B/C) \cdot P(C)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{9} = 0.11$$

□

Pán Thomas Bayes (1701-1761), podľa ktorého je vzorec nazývaný, sa zaoberal aj testovaním štatistických hypotéz. Jeho nasledovníci, **Bayesiáni**, dosiahli v poslednom období veľký rozmach a úspechy. Ukazuje sa, že ich chápanie štatistiky je dobre použiteľné pre aplikácie v praxi. Skúsime aspoň veľmi zjednodušene popísať metódu ich práce:

Úloha 3.4.2 *Predpokladajme, že bol vyvinutý test na diagnostikovanie spavej choroby. Ak človek má spavú chorobu, tak test to potvrdí s pravdepodobnosťou* 0.95. *Ak človek nemá spavú chorobu, test to potvrdí s pravdepodobnosťou* 0.95. *Aká je pravdepodobnosť, že človek má spavú chorobu, ak mu test vyšiel pozitívne?*

Riešenie: Zo zadania by sme mohli usudzovať, že ak má test 95 % úspešnosť, tak ak test vyšiel pozitívne, tak dotyčný má spavú chorobu s pravdepodobnosťou 0.95.
Riešenie však závisí od toho, kde test použijeme. Ak budeme testovať obyvateľov Slovenska dostaneme inú pravdepodobnosť, než keď budeme testovať obyvateľov Subsaharskej Afriky. Zatiaľ, čo na Slovensku sa táto choroba nevyskytuje, v Afrike je spomedzi 60 miliónov obyvateľov nakazených ročne asi 500 tisíc.
Označme T udalosť, že test preukáže, že človek má spavú chorobu.
Potom $\overline{T}$ označuje udalosť, že test preukáže, že človek nemá spavú chorobu.
Označme C udalosť, že človek má spavú chorobu.
Potom $\overline{C}$ označuje udalosť, že človek nemá spavú chorobu.

Pravdepodobnosť udalosti C bude odlišná pre Slovensko a odlišná pre Subsaharskú Afriku.

- Slovensko:
  Predpokladajme, že pravdepodobnosť udalosti C pre Slovensko bude 0.000001. Vyjadrime pravdepodobnosti javov pre Bayesov vzorec.

$$P(T/C) = 0.95$$
$$P(\overline{T}/\overline{C}) = 0.95$$
$$P(T/\overline{C}) = 1 - P(\overline{T}/\overline{C}) = 1 - 0.95 = 0.05$$
$$P(C) = 0.000001$$
$$P(\overline{C}) = 0.999999$$
$$P(C/T) = \frac{P(T/C) \cdot P(C)}{P(T/C) \cdot P(C) + P(T/\overline{C}) \cdot P(\overline{C})} =$$
$$= \frac{0.95 \cdot 0.000001}{0.95 \cdot 0.000001 + 0.05 \cdot 0.999999} = 0.000019$$

- Subsaharská Afrika:
  Predpokladajme, že pravdepodobnosť udalosti C pre Subsaharskú Afriku bude 0.0083. Vyjadrime pravdepodobnosti javov pre Bayesov vzorec.

$$P(T/C) = 0.95$$

$$P(\overline{T}/\overline{C}) = 0.95$$

$$P(T/\overline{C}) = 1 - P(\overline{T}/\overline{C}) = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$P(C) = 0.0083$$

$$P(\overline{C}) = 0.9917$$

$$P(C/T) = \frac{P(T/C) \cdot P(C)}{P(T/C) \cdot P(C) + P(T/\overline{C}) \cdot P(\overline{C})} =$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.0083}{0.95 \cdot 0.0083 + 0.05 \cdot 0.9917} = 0.1372$$

Z riešenia úlohy môžeme urobiť dva závery.
Ak je pozitívny 95 % test na spavú chorobu, ešte to neznamená, že pacient ju má s pravdepodobnosťou 0.95. V skutočnosti je táto pravdepodobnosť omnoho nižšia.
Pravdepodobnosť toho, že pacient má spavú chorobu, sa líši v závislosti na tom, aké percento populácie chorobu má.

Tieto úvahy sa dajú ešte presmerovať a na základe toho, že vieme, že človek má spavú chorobu, môžeme usudzovať aká je pravdepodobnosť, že pochádza zo Slovenska. O Bayesiánoch sa dá dozvedieť napríklad na stránke
http://drambuie.lanl.gov/ bayes/tutorial.htm □

Poslednou témou z elementárnej pravdepodobnosti, ktorá hovorí o pravdepodobnosti náhodnej udalosti, sú **Bernoulliho nezávislé pokusy**, ktoré ilustrujeme na nasledujúcej úlohe:

Úloha 3.4.3 *Zistite, aká je pravdepodobnosť, že pri* 5 *hodoch kockou padne* 2*-krát číslo* 6*.*

Riešenie: Pravdepodobnosť, že padne 6 pri prvom hode je 1/6, že padne 6 pri druhom hode je tiež 1/6, pri ostatných už musia padnúť iné čísla, aby to boli práve 2 úspešné pokusy. Ich pravdepodobnosti sú 5/6. Podľa predpokladu sú udalosti nezávislé, preto je pravdepodobnosť, že padne 6 iba pri prvom a druhom hode

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Možností, pri ktorých pokusoch v poradí padne šestka, je ale viac:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Možností je 10, čo sa dá vypočítať aj ako

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=\frac{5\cdot 4}{2}=10$$

Každá z možností má rovnakú pravdepodobnosť

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Možnosti, v ktorých pokusoch padnú šestky, sú dizjunktné, preto pravdepodobnosť ich zjednotenia bude súčet desiatich rovnakých pravdepodobností:

$$P_5(2)=\binom{5}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{5-2}=10\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=0.16$$

Po prvýkrát sa tu stretávame so situáciou, že nie všetky možnosti sú rovnako pravdepodobné. Jedná sa o výpočet pravdepodobnosti pre sadu n rovnakých pokusov, ktorých výsledky sú, že nejaká udalosť A nastala alebo nenastala. Jednotlivé pokusy sú nezávislé, navzájom sa neovplyvňujú a pravdepodobnosť nastatia udalosti A je $P(A) = p$, $p > 0$. Pravdepodobnosť, že v sade n rovnakých pokusov nastane práve k-krát udalosť A, je

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dlho sme sa pokúšali utajiť, že počet možností ako vybrať k rovnocenných objektov spomedzi n takýchto objektov je číslo, ktoré sa na počesť tejto úlohy volá kombinačné číslo. Často sa totiž používa zlým spôsobom, čo je spôsobené tým, že užívateľ netuší, ako tento vzorec funguje. Veríme však, že čitateľ po zvládnutí úlohy o vyložených stoličkách tomuto vzorcu uverí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

V prípade, že si chceme zjednodušiť zapisovanie, môžeme namiesto súčinu $k \cdot (k-1) \cdot \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ použiť značku $k!$

$$k! = k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Vzorec pre kombinačné číslo je

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

3.4.1. Príklady

1. Napíšte Bayesov vzorec pre 3-prvkový úplný systém podmnožín. Uveďte príklad na jeho použitie.

2. Uveďte príklad na Bernouliho nezávislé pokusy.

3. V krabici je 100 kociek, 60 bielych a 40 čiernych. Kocky postupne vyťahujeme a po vytiahnutí ich nedávame naspäť. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme bielu kocku? Jedná sa o Bernouliho nezávislé pokusy?

4. Hádžeme 10-krát mincou. Aká je pravdepodobnosť, že práve 5-krát padne znak?

5. Hádžeme 10-krát mincou. Aká je pravdepodobnosť, že práve 2-krát padne znak?

6. Hádžeme 10-krát mincou. Aká je pravdepodobnosť, že práve 12-krát padne znak?

7. Hádžeme 6-krát kockou. Aká je pravdepodobnosť, že práve 2-krát padne dvojka?

8. Hádžeme 10-krát kockou. Ktorá pravdepodobnosť je väčšia, že 10-krát padne šestka, alebo že ani raz nepadne šestka?

9. Hádžeme 10-krát kockou. Vypočítajte všetky pravdepodobnosti, že práve k-krát padne šestka (pre $k = 0, 1, 2, \dots, 10$). Zakreslite tieto pravdepodobnosti do grafu.

10. Hádžeme 100-krát kockou. Vypočítajte všetky pravdepodobnosti, že práve k-krát padne šestka (pre $k = 1, 2, \dots, 100$). Zakreslite tieto pravdepodobnosti do grafu.

3.4.1.1. Riešenie príkladov

1. Bayesov vzorec pre 3-prvkový úplný systém podmnožín H_1, H_2, H_3 je

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)P(H_i)}{P(A/H_1)\cdot P(H_1) + P(A/H_2)\cdot P(H_2) + P(A/H_3)\cdot P(H_3)}$$

   Ilustračný príklad je v úvode tejto kapitoly, ale pokúste sa vymyslieť taký príklad, ktorý sa nedá vyriešiť bez pomoci Bayesovho vzorca. V prípade, že je to príliš ťažké, pozrite si zadania úloh v odseku 3.4.2.

2. Príklad na Bernouliho nezávislé pokusy je pokus s mincou, pri ktorom počítame, koľkokrát z 10 hodov padne znak.

3. Pravdepodobnosť, že vytiahneme bielu kocku v prvom ťahu, je

$$P(B_1) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 0.6$$

   Pravdepodobnosť, že vytiahneme bielu kocku v druhom ťahu, závisí od prvého ťahu. Pravdepodobnosť je rovná

$$P(B_2/B_1) = \frac{59}{99}$$

   v prípade, že prvá vytiahnutá kocka bola biela.
   Pravdepodobnosť je rovná

$$P(B_2/C_1) = \frac{60}{99}$$

   v prípade, že prvá vytiahnutá kocka bola čierna. Pravdepodobnosť, že vytiahneme bielu kocku v treťom ťahu, môže byť v závislosti od predchádzajúcich ťahov:

$$P(B_3/B_2 \cap B_1) = \frac{58}{98} \qquad P(B_3/B_2 \cap C_1) = \frac{59}{98} \qquad P(B_3/C_2 \cap C_1) = \frac{60}{98}$$

$$P(B_3/C_2 \cap B_1) = \frac{59}{98}$$

Nejedná sa o Bernouliho nezávislé pokusy. Pravdepodobnosť, že vytiahneme bielu kocku, je v každom ťahu iná a závisí od predchádzajúcich ťahov.

4.
$$P_{10}(5) = \binom{10}{5} \cdot 0.5^5 \cdot 0.5^5 = 0.246$$

5.
$$P_{10}(2) = \binom{10}{2} \cdot 0.5^8 \cdot 0.5^2 = 0.0439$$

6. Pravdepodobnosť, že pri 10-tich hodoch mincou, práve 12-krát padne znak je 0.

7.
$$P_6(2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0.2009$$

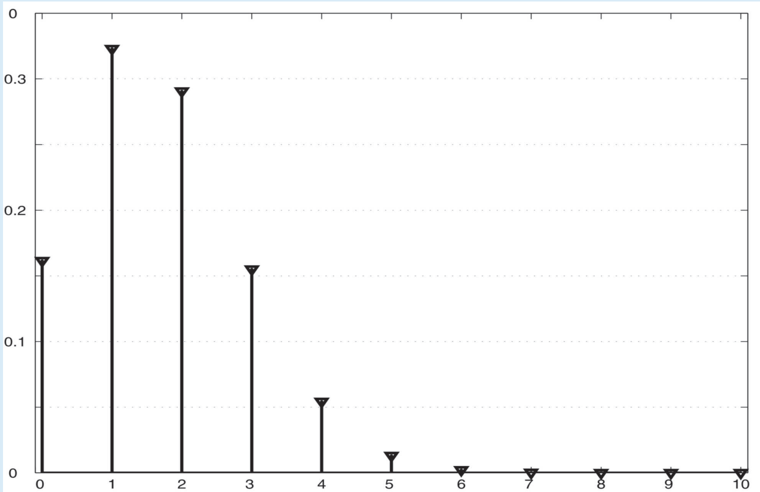
8. Pravdepodobnosť, že 10-krát padne šestka, je 0.0000000165. Táto hodnota je síce nenulová, ale prvá nenulová cifra sa objaví až na 8. mieste za desatinnou čiarkou. Pravdepodobnosť, že ani raz nepadne šestka, je podstatne väčšia a je rovná 0.1615.

9. Pravdepodobnosti, že pri desiatich hodoch práve k-krát padne šestka pre $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$, sú postupne hodnoty

k	0	1	2	3	4	5	6
$P_{10}(k)$	0.1615	0.3230	0.2907	0.1550	0.0543	0.0130	0.0022

k	7	8	9	10			
$P_{10}(k)$	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000			

Nakreslíme tieto hodnoty do grafu 3.18, kde na vodorovnej osi sú jednotlivé hodnoty k a na zvislej osi sú príslušné pravdepodobnosti.



Obrázok 3.18: Pravdepodobnosti, že pri 10 hodoch kockou, práve k krát padne šestka

10. Veríme, že túto úlohu nebude čitateľ riešiť na kalkulačke, ale použije na výpočet vhodný softvér. V grafe 3.19 sú na vodorovnej osi jednotlivé hodnoty k a na zvislej osi sú príslušné pravdepodobnosti pre sériu 100 hodov kockou.

    Pravdepodobnosť, že práve k-krát padne šestka, je najväčšia pre hodnotu $k = 16$ a je rovná číslu 0.1065.

    Je dobré si uvedomiť, že číslo $k = 16$ súvisí s pravdepodobnosťou $1/6$, s akou na kocke padne číslo 6. Skutočne, keby sme 100-krát hodili kockou (alebo hodili naraz 100 kockami), tak v približne v šestine prípadov, teda 16-krát by mala padnúť šestka. Je to síce len teoretický výsledok, ale je zrejmé, že skutočný počet 6, ktoré padnú pri 100 hodoch, nebude ďaleko od čísla 16. A keby sa predsa len stalo, že dostaneme 6 vo veľa

Home Page

Title Page

Contents

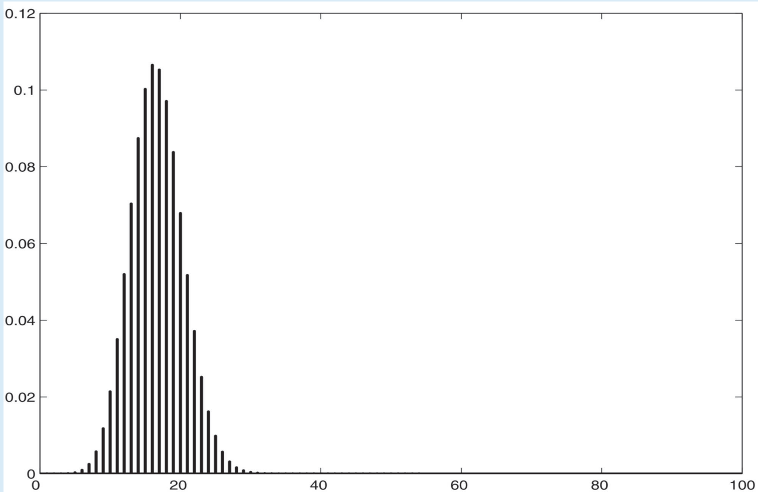
Page 116 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Obrázok 3.19: Pravdepodobnosti, že pri 100 hodoch kockou, práve k-krát padne šestka

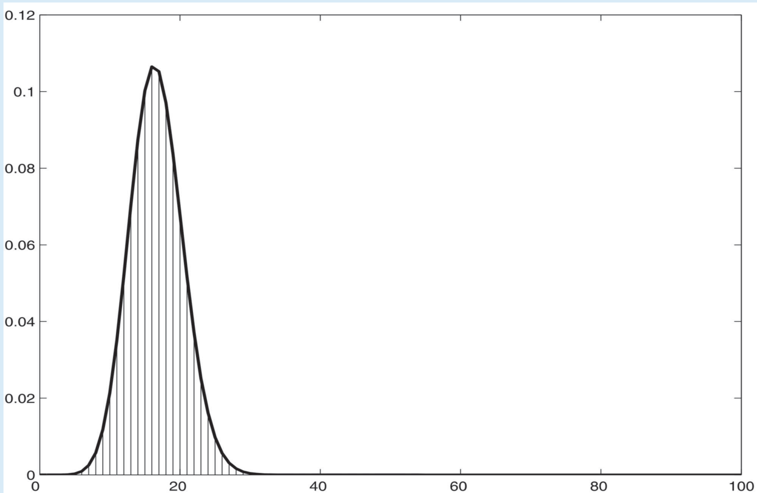
prípadoch, napríklad v 80, tak len s veľmi malou pravdepodobnosťou (už sa to viac nestane!).

Teraz už vieme napríklad povedať, že pri pokuse so 150 hodmi kockou bude vysoko pravdepodobné, že padne okolo 25 šestiek. Tiež môžeme povedať, že je nepravdepodobné, že padne 100 šestiek. V skutočnosti už pravdepodobnosť, že padne 44 šestiek, je číslo, ktoré má na prvých 4 miestach za desatinnou čiarkou číslicu 0.

Uvedená vlastnosť sa používa v teórii informácie pri kódovaní, pri ktorom sa kódujú len pravdepodobné možnosti. Tie, ktoré nastanú s takmer nulovou pravdepodobnosťou sa buď nekódujú, alebo sú všetky ukladané ako jedno slovo: „chyba".

Druhá užitočná vlastnosť, ktorú je dobré si všimnúť je tvar rozdelenia pravdepodobností jednotlivých možností (počtu, koľkokrát padla šestka). Takémuto rozdeleniu budeme neskôr hovoriť binomické.

Na obrázku 3.20 vidíme krivku, ktorá vznikne spojením hodnôt jednotlivých pravdepodobností. Neskôr sa ešte s krivkou takéhoto tvaru stretneme. Bude to v súvislosti s **normálnym rozdelením** pravdepodobnosti.



Obrázok 3.20: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej a krivka spájajúca hodnoty pravdepodobnosti

3.4.2. Úlohy

1. Robíme tri nezávislé pokusy. Pravdepodobnosť výskytu udalosti A v prvom pokuse je 0.8, pravdepodobnosť výskytu udalosti A v druhom pokuse je 0.7 a pravdepodobnosť výskytu udalosti A v treťom pokuse je 0.6. Aká je pravdepodobnosť, že udalosť A nastane pri týchto troch pokusoch aspoň 2-krát?

2. Počítačovou sieťou je prenášaný paket s hlavičkou veľkosti 4 bity a telom veľkosti 20 bitov. Pravdepodobnosť, že sa poškodí jeden z bitov pri prenose sieťou, je $P(B_E) = 10^{-2}$. Bity sa poškodia nezávisle na sebe. Pri poškodení aspoň 5 bitov v pakete sa paket nedokáže opraviť a musí sa preniesť znovu. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolený paket bude musieť byť prenášaný znovu?

3. Na pracovisko prišlo 10 balíčkov s objednanými a neoznačenými CD nosičmi. 5 balíčkov obsahuje po 5 CD nosičov s nahratým softwérom a 3 prázdne CD nosiče; 2 balíčky obsahujú po 6 CD nosičov s nahratým softwérom a 2 prázdne CD nosiče a 3 balíčky obsahujú po 7 CD nosičov s nahratým softwérom a 1 prázdny CD nosič. Náhodne vyberieme jeden prázdny CD nosič. Aká je pravdepodobnosť, že pochádza z prvých piatich balíčkov?

4. Zariadenie môže pracovať v troch režimoch. V prvom pracuje 40 % pracovného času, v druhom 35 % a v treťom 25 % pracovného času. Pravdepodobnosť poruchy závisí od režimu, v ktorom zariadenie pracuje a rovná sa 0.02 v prvom režime, 0.05 v druhom a 0.1 v treťom režime. Predpokladajme, že v pracovnom čase došlo k poruche. Aká je pravdepodobnosť toho, že zariadenie vtedy pracovalo v prvom režime?

5. Na stole sú tri misky. V prvej miske sú 3 biele a 1 žltý cukrík, v druhej 1 biely a 4 žlté cukríky a v tretej miske sú 2 biele a 2 žlté cukríky. Cukríky nasypeme na hromadu a náhodne vyberieme jeden cukrík. Vytiahnutý cukrík je biely. Aká je pravdepodobnosť, že pôvodne ležal v prvej miske?

6. Predpokladajme, že začínajúci hudobník zahrá na koncerte falošný tón s pravdepodobnosťou 0.4. Vyberme náhodne 13 hudobníkov. Aká je pravdepodobnosť, že spomedzi

týchto hudobníkov práve 6 zahrá na koncerte falošný tón?

7. Predpokladajme, že hudobník zahrá na koncerte falošný tón s pravdepodobnosťou 0.3. Vyberme náhodne 18 hudobníkov. Aká je pravdepodobnosť, že spomedzi týchto hudobníkov aspoň 3 zahrajú na koncerte falošný tón?

8. Predpokladajme, že hudobník nezahrá na koncerte falošný tón s pravdepodobnosťou 0.45. Koľko treba vybrať hudobníkov (vyberá sa náhodne), aby pravdepodobnosť, že spomedzi týchto hudobníkov aspoň jeden nezahrá na koncerte falošný tón, bola väčšia ako 0.999?

9. Pokus spočíva v súčasnom hodení kocky a mince. Aká je pravdepodobnosť, že pri 8 takýchto hodoch nastane práve trikrát udalosť A, že „na kocke padne číslo 6 a zároveň na minci padne znak"?

3.4.2.1. Riešenie úloh

1. Pravdepodobnosť výskytu udalosti A v prvom pokuse označme A_1. Pravdepodobnosť výskytu udalosti A v druhom pokuse označme A_2. Pravdepodobnosť výskytu udalosti A v treťom pokuse označme A_3.

$$P(A_1) = 0.8,\ P(A_2) = 0.7,\ P(A_3) = 0.6$$

Pravdepodobnosť udalosti B, že udalosť A nastane aspoň 2-krát je pravdepodobnosť, že A nastane práve 2-krát, alebo práve 3-krát.

$$P(B) = P\left((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup \right.$$
$$\left. \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)\right)$$

Udalosti sú dizjunktné, preto môžeme písať

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) + P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

A podľa zadania úlohy sú javy aj nezávislé, preto platí

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) +$$
$$+ P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.6 +$$
$$+ 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.6 = 0.788$$

2. Paket obsahuje 24 bitov, každý z nich má rovnakú pravdepodobnosť, že sa pokazí a kazia sa nezávisle na sebe. Pravdepodobnosť udalosti A, že náhodne zvolený paket bude musieť byť prenášaný znovu, je pravdepodobnosť, že sa poškodí 5 alebo 6 alebo $\ldots 24$ bitov. $P(A)$ vypočítame ako doplnkovú pravdepodobnoť k udalosti $\overline{A}$, že sa poškodí 0 alebo 1 alebo $\ldots 4$ bity.

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{99}{100}\right)^{24} + \binom{24}{1}\left(\frac{1}{100}\right)\left(\frac{99}{100}\right)^{23} + \binom{24}{2}\left(\frac{1}{100}\right)^{2}\left(\frac{99}{100}\right)^{22} +$$

$$+\binom{24}{3}\left(\frac{1}{100}\right)^3\left(\frac{99}{100}\right)^{21}+\binom{24}{4}\left(\frac{1}{100}\right)^4\left(\frac{99}{100}\right)^{20}=0.999996373$$

Pravdepodobnosť, že náhodne zvolený paket bude musieť byť prenášaný znovu, je malá, iba

$$P(A)=1-\overline{A}=0.000003627$$

3. Úloha na Bayesov vzorec, ktorá sa dá riešiť aj elementárne. Prázdnych CD nosičov je

$$5\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 1=22$$

V prvých piatich balíčkoch je prázdnych CD nosičov 15. Pravdepodobnosť, že náhodne vybratý prázdny CD nosič pochádza z prvých piatich balíčkov je

$$P(A)=\frac{15}{22}$$

4. V pracovnom čase došlo k poruche. Pravdepodobnosť toho, že zariadenie vtedy pracovalo v prvom režime, je

$$P(H_1/A)=\frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A/H_1)\cdot P(H_1)+P(A/H_2)\cdot P(H_2)+P(A/H_3)\cdot P(H_3)}=$$

$$=\frac{0.02\cdot 0.4}{0.02\cdot 0.4+0.05\cdot 0.35+0.1\cdot 0.25}=\frac{0.008}{0.0505}=0.1584$$

5. Na stole sú tri misky, označme ich M_1, M_2, M_3.
Pravdepodobnosť, že náhodne vytiahnutý cukrík z prvej misky bude biely, je $P(B/M_1)=\frac{3}{4}$, z druhej $P(B/M_2)=\frac{1}{5}$ a z tretej $P(B/M_3)=\frac{2}{4}$.
Pravdepodobnosť, že cukrík je z prvej misky, je $P(M_1)=\frac{4}{13}$, že je z druhej misky je $P(M_2)=\frac{5}{13}$ a že je z tretej misky je $P(M_3)=\frac{4}{13}$.
Náhodne vytiahnutý cukrík je biely. Pravdepodobnosť, že pôvodne ležal v prvej miske, je

$$P(M_1/B)=\frac{P(B/M_1)\cdot P(M_1)}{P(B/M_1)\cdot P(M_1)+P(B/M_2)\cdot P(M_2)+P(B/M_3)\cdot P(M_3)}=$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{13}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{13}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{13}} = \frac{1}{2}$$

Samozrejme, dá sa to spočítať aj bez vzorca. V miskách je 6 bielych cukríkov, z toho 3 sú v prvej miske. Preto pravdepodobnosť, že biely cukrík bude z prvej misky je 3/6.

6. Pravdepodobnosť, že spomedzi 13 náhodne vybratých hudobníkov práve 6 zahrá na koncerte falošný tón je

$$P(A) = \binom{13}{6}\cdot 0.4^6 \cdot 0.6^7 = 0.197$$

7. Pravdepodobnosť, že spomedzi 18 hudobníkov aspoň 3 zahrajú na koncerte falošný tón, vypočítame ako doplnkovú pravdepodobnosť k opačnej udalosti. Pravdepodobnosť, že falošný tón na koncerte zahrá 0 alebo 1 alebo 2 hudobníci vyžaduje totiž omnoho menej výpočtov.

$$P(\overline{A}) = \binom{18}{0}0.3^0 0.7^{18} + \binom{18}{1}0.3^1 0.7^{17} + \binom{18}{2}0.3^2 0.7^{16} = 0,0997$$
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0,9003$$

8. Treba si ujasniť, čo vlastne ideme robiť. Najlepšie si to ozrejmíme na konkrétnom príklade. Vyberme náhodne napríklad 5 hudobníkov a vypočítajme, aká je pravdepodobnosť udalosti A, že spomedzi týchto hudobníkov aspoň jeden nezahrá na koncerte falošný tón.
Táto udalosť je opačná k udalosti $\overline{A}$, ktorá spočíva v tom, že každý zahrá na koncerte falošný tón.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}); \qquad P(\overline{A}) = 0.55^5 = 0.0503; \qquad P(A) = 0.9497$$

Pravdepodobnosť udalosti A nie je viac ako 0.999. Aby sme zväčšili šancu úspechu aspoň jedného hudobníka, zoberieme väčší počet hudobníkov. Napríklad pri 15 hudobníkoch bude pravdepodobnosť udalosti A, že spomedzi týchto hudobníkov aspoň

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 123 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit

nezahrá na koncerte falošný tón, rovná

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.55^{15} = 0.9998$$

Ak vyberieme 15 hudobníkov, bude pravdepodobnosť, že spomedzi týchto hudobníkov aspoň jeden urobí skúšku z algebry na prvý termín, väčšia ako 0.999.
Môžeme si položiť aj ďalšiu otázku. Aký je najmenší počet hudobníkov, že pravdepodobnosť, že spomedzi nich aspoň jeden nezahrá na koncerte falošný tón, bude väčšia ako 0.999?

Na vyriešenie tejto úlohy môžeme použiť metódu postupných výpočtov, až kým presiahne hodnota pravdepodobnosti číslo 0.999:

k	5	6	7	8	9	10	11	12
p_k	0.9497	0.9723	0.9848	0.9916	0.9954	0.9975	0.9986	0.9992

Treba vybrať najmenej 12 hudobníkov.

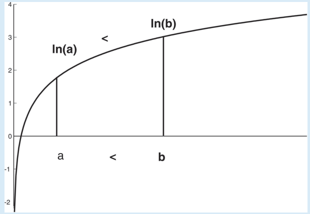
Vyriešme úlohu ešte raz, tentoraz metódou „matematické nástroje počítanie uľahčia".
Vyjadrime počet hudobníkov pomocou premennej k a zapíšme požiadavku, že pravdepodobnosť, že spomedzi k hudobníkov aspoň jeden nezahrá na koncerte falošný tón, bude väčšia ako 0.999:

$$1 - 0.55^k > 0.999$$

Úpravami postupne dostaneme

$$\begin{aligned} 1 - 0.999 &> 0.55^k \\ 0.001 &> 0.55^k \end{aligned}$$

Obe strany nerovnice zlogaritmujeme (treba si uvedomiť, že logaritmus zachová znamienko nerovnosti v prípade, že základ logaritmu je číslo väčšie ako 1, ako to vidno na obrázku 3.21).
My sme použili prirodzený logaritmus, teda logaritmus so základom e.



Obrázok 3.21: Logaritmus so základom väčším ako 1 zachováva znamienko nerovnosti

$$\ln(0.001) > \ln(0.55^k)$$
$$-6.9078 > k \cdot \ln(0.55)$$
$$-6.9078 > k \cdot (-0.5978)$$
$$6.9078 < k \cdot 0.5978$$
$$11.5546 < k$$

Aj inou metódou sme dostali rovnaký výsledok. Počet hudobníkov musí byť aspoň 12.

9. Pravdepodobnosť udalosti A, že na kocke padne šestka S a zároveň na minci znak Z je

$$P(A) = P(S \cap Z) = P(S) \cdot P(Z) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Pravdepodobnosť, že pri 8 takýchto hodoch nastane práve tri krát udalosť A je

$$P_8(3) = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^5 = 0.02097$$

Kapitola 4

Ako predpovedať čas (druhý nepravdepodobný príbeh)

Mnohým matematikom (a určite aj informatikom) robí v ich živote najväčšie problémy slovenčina a jej pravidlá. Minimálne vtedy, ak sa nestačí vyjadriť vetou alebo algoritmom, ale súvislým písaným textom. Ale odveta sa blíži a matematici začínajú na oplátku zasahovať do neprebádaných oblastí slovenčiny. Prvou z lastovičiek tohoto výskumu je analýza prísloví a porekadiel. Jednému z nich sa budeme venovať v tejto kapitole.

4.1. Ako dlho sa chodí s džbánom po vodu?

Známe slovenské porekadlo nám dáva veľmi presnú kvalitatívnu odpoveď „kým sa ucho neodtrhne." Nás ako exaktných vedcov ale zaujíma aj kvantitatívna informácia, za ako dlho k tomu dôjde. Takto budeme chápať otázku z nadpisu a odpoveď na ňu budeme hľadať v pokračovaní celej kapitoly. Pokiaľ chceme dostať presnú odpoveď, patrí sa položiť čo najpresnejšiu otázku. Popíšeme si preto základnú situáciu. Dievčina Anička býva v domčeku a každý deň ráno si chodí do studničky po vodu. Domček stojí v strede lúky a studnička je na kraji blízkeho lesa. Spája ich krivolaký chodníček, po ktorom chodí Anička s džbánom po vodu. Keďže za rána býva ešte rozospatá, pletú sa jej nohy a čas od času džbán rozbije. Keď začne používať nový džbán a podarí sa jej ho rozbiť na štvrtý deň, povieme, že s džbánom chodila po vodu 4 dni. Je to správna odpoveď na otázku, ako dlho sa chodí s džbánom po vodu? Asi nie úplne, ale už vidíme jednu z možností, ako na to.

Úloha 4.1.1 *Dá sa pozorovaním Aničky získať odpoveď na našu otázku? Je táto odpoveď úplne presná? Akým spôsobom sa dá spresniť? Aké predpoklady musíme doplniť k rozprávke o Aničke, aby výsledok a spôsob, akým sme ho získali, bol čo najhodnovernejší?*

Riešenie: Pozorovanie Aničky nás určite k nejakej odpovedi dovedie. Musíme byť predovšetkým trpezliví. Ak prvý džbán rozbila za 4 dni, druhý možno rozbila za 7 dní a ďalší už na druhý deň. Mení sa totiž stupeň rozospatosti Aničky, počasie a tým aj šmykľavosť cestičky, to, či a ako sa po vodu ponáhľa atď. V hre je teda množstvo náhodných faktorov, ktoré ovplyvňujú a menia počet dní, počas ktorých chodila s konkrétnym džbánom po vodu. Pozorovaním Aničky teda postupne získavame sadu meniacich sa (časom aj opakujúcich sa) čísiel. Je zrejmé, že čím viac ich získame, tým viac a viackrát sa mohli prejaviť rôzne kombinácie faktorov. Tých je ale určite veľa a každý môže nadobúdať množstvo hodnôt. Preto v zásade platí, že zvyšujúcim sa počtom výsledkov získavame stále lepší a lepší obraz situácie. Ak zoberieme do úvahy, že na pozorovanie Aničky máme len určité rozumné časové obdobie, určite nehrozí, že by sme jeho predlžovaním získali zbytočne veľké množstvo výsledkov.

Druhá vec je, že očakávanou odpoveďou na našu otázku nie je množina čísiel, ale len jedno jediné. Ako toto číslo vyrobiť napríklad z množiny $\{4, 7, 2, 13, 74, 5\}$, vzniknutej pozorovaním Aničky počas rozbíjania šiestich džbánov? Skúsenosť nám hovorí, že v tomto prípade je riešením priemer. Matematika aj štatistika pozná priemerov veľa, najčastejšie používaný a využívaný je aritmetický priemer. Použijeme ho preto aj my a ako odpoveď na otázku (na základe tohto pozorovania) ponúkneme číslo $\frac{4+7+2+13+74+5}{6} = 17.5$.

Debata na tému, prečo miesto aritmetického priemeru nepoužijeme geometrický priemer, harmonický priemer alebo medián, by bola určite zaujímavá, necháme ju ale na inú príležitosť.

K hodnovernosti pokusu by určite prispelo, ak by Anička používala vždy rovnaký typ džbánu. Pokiaľ by ich bolo viac, situácia by sa skomplikovala už nad únosnú mieru. Navyše otázka sa pýta na životnosť džbánu, nie džbánov. Pokiaľ ich na experimentovanie použijeme síce viac, ale identických s rovnakými parametrami, odpoveď nám hádam uznajú. Vážnejšou, ale tiež dôležitou požiadavkou je, aby stále rovnaká bola aj Anička. Pokiaľ by sa v nosení vody v džbáne priebežne zdokonaľovala, metóda dlhodobého pozorovania by stratila význam a zmysel. Skôr získané čísla by už nezodpovedali súčasným kvalitám Aničky, priemerné číslo by v sebe kumulovalo minulosť s prítomnosťou a aj tak by nie dobre odhadlo budúce schopnosti Aničky. Našim cieľom je získať odpoveď popisujúcu súčasný stav a nie Aničkinu schopnosť učiť sa. To, že pokus organizujeme v čase, je len technickou nutnosťou. Ak by sme mali k dispozícii 100 identických domčekov, studničiek, džbánov a Aničiek, urobíme súčasne 100 pokusov a získame 100 výsledkov bez nutnosti uvažovať o zdokonaľovaní sa nosiča džbánu. □

Po vyriešení úlohy 4.1.1 môžeme trochu spresniť terminológiu. Používanie jedného džbánu od jeho rozbalenia po rozbitie nazveme pokusom. To, koľko dní k tomu Anička potrebovala, nazveme dĺžkou pokusu. Pokus dĺžky n teda pozostáva z postupnosti n ciest ku studničke, pričom prvých $n-1$ ciest je úspešných (džbán sa nerozbil) a posledná n-tá je neúspešná a džbán sa rozbil. U každého pokusu pritom predpokladáme, že prebieha za rovnakých vstupných podmienok, teda s rovnakým džbánom a s rovnakou Aničkou. Pokiaľ urobíme veľa pokusov, získame veľký zoznam čísel zodpovedajúcich ich dĺžkam. Z nich urobíme aritmetický priemer, ktorý bude odpoveďou na otázku, ako dlho sa chodí s džbánom po vodu. Teraz vieme sformulovať ďalšie otázky.

Úloha 4.1.2 *Aký je najkratší pokus, ktorý môže nastať? A aký najdlhší? Pokus akej dĺžky nemôže nastať? Ako dlhé pokusy môžeme teoreticky a prakticky vidieť pri pozorovaní Aničky? Vie nám pozorovanie dať naozaj presný a jednoznačný výsledok? A nakoniec, kde je v tom matematika?*

Riešenie: Najkratší pokus má dĺžku jedna. Vtedy Anička džbán rozbila hneď prvý deň a rýchlejšie sa to už naozaj nedá.

Pri hľadaní najdlhšieho pokusu je situácia zložitejšia. Pokiaľ si Anička bude dávať pozor, džbán jej môže vydržať veľmi dlho. A keď jej náhodou vydrží napríklad až 100 dní, vždy je tu určitá šanca, že vydrží ešte jeden deň a pokus sa predĺži. Dá sa teda usúdiť, že aj keď veľmi zriedkavo, môžu nastať aj veľmi dlhé pokusy. A ak môžu nastať oni, môžu nastať aj pokusy ešte o pár dní dlhšie. Najdlhší pokus teda zrejme nebude existovať podobne, ako neexistuje najväčšie prirodzené číslo. Alebo predsa? Existuje pokus dlhší od všetkých ostatných? A dokonca aj sám od seba, aj keď sa k nemu pár dní pridá? Znie to takmer absurdne, ale teoreticky určite existuje. Stačí, ak sa nájde džbán, s ktorým by Anička po vodu chodila stále. Dĺžka pokusu by teda bola nekonečno. Treba ale starostlivo zvážiť, či takýto pokus môže vôbec nastať. Túto možnosť preto budeme skúmať aj pri riešení ďalších úloh. Teraz môžeme len skonštatovať, že pozorovacou metódou odpoveď nezískame. Aj keď náhodou máme k dispozícii správny džbán, Anička ani pozorovateľ určite nemajú potrebnú vytrvalosť a životnosť k realizácii nekonečného pokusu. Môžeme si ale pripomenúť, že najhlbší význam príslovia, ktoré tu skúmame, sa k tejto možnosti stavia skepticky.

Z predchádzajúcej argumentácie je tiež možné nahliadnuť, že realizovať sa môže pokus každej dĺžky. Pokiaľ by v množine existujúcich dĺžok pokusov bola medzera, zakázali by sme tým možnosť predĺženia alebo skrátenia najbližších „susedných" existujúcich dĺžok pokusov. (Ak by napríklad nemohol nastať pokus dĺžky 13, pokus dĺžky 12 by sa nesmel dať predĺžiť a pokus dĺžky 14 skrátiť o jeden deň.) K tomu ale nemáme žiadny rozumný dôvod, skôr naopak, možnosť zmeny dĺžky pokusu musíme nechať zachovanú.

Teraz začíname vidieť principiálne problémy pozorovacej metódy. Pri chodení s džbánom po vodu môžu nastať pokusy ľubovoľnej dĺžky. Pre správne určenie priemernej dĺžky naviac potrebujeme, aby jednotlivé pokusy nastali nie len raz, ale v počte zodpovedajúcom ich primeranému zastúpeniu v Aničkinom živote. Skutočné pozorovanie Aničky a zberanie dĺžok pokusov ale prebieha len v konečnom časovom období. Vo vytvorenom zozname dĺžok pozorovaných pokusov preto nikdy nebudú obsiahnuté všetky, ale len niektoré dĺžky, a aj tie nemusia byť v správnej početnosti. Vypočítaná priemerná hodnota preto nikdy nie je presná a aj predlžovaním pozorovania sa k presnej hodnote možno blížime, ale určite ju nedosiahneme. □

Ako sa teda dostať k presnej odpovedi? Tak, že použijeme presnú vedu, teda matematiku. Zatiaľ sme ju (okrem aritmetického priemeru) naozaj takmer nevyužili. Je preto najvyšší čas napraviť to. Matematici by predsa mali viac rátať a rozmýšľať než pozorovať dievčatá.

Miesto ďalšieho pozorovania sme sa preto vybrali navštíviť Aničkiných rodičov, ktorí ju poznajú omnoho lepšie. Zistili sme od nich jedno dôležité číslo, a to pravdepodobnosť toho, že pri jednej ceste Anička rozbije džbán. Mamička si pamätá, že to je $1/10$. Otecko má horšiu pamäť, vie ale, že táto pravdepodobnosť existuje a označuje ju číslom p. Obaja ju ale nazývajú pravdepodobnosťou neúspešnej cesty alebo neúspechu. Pokiaľ Aničkiných rodičov nepoznáme, môžeme sa hodnotu p pokúsiť získať inak. Môžeme ju opäť získať pozorovaním, možno aj výpočtom alebo odhadom. Pointa je v tom, že číslo p a jeho určenie je o stupeň jednoduchším problémom, ako zistenie všeobecnej dĺžky pokusu. Vyššie uvedené ťažkosti s pozorovaním sa preto môžu opäť prejaviť, ale v nižšej miere. Informatici si dokonca môžu Aničku rozbíjajúcu džbán naprogramovať.

Úloha 4.1.3 (Úloha pre programátorov) *Vytvorte program, ktorý bude simulovať Aničkine cesty s džbánom a zároveň evidovať a vyhodnocovať výsledky pozorovania. Dá sa z výsledkov tohto programu odhadnúť odpoveď na našu otázku? Vychádzajú presné hodnoty, rovnaké hodnoty alebo podobné hodnoty?*

Riešenie: Program by mal na najnižšej úrovni generovať pokus tak, že po skončení každého dňa náhodne rozhodne, či sa už džbán rozbil. Pokiaľ áno, pokus skončil a zapamätáme si jeho dĺžku. K rozbitiu džbánu s požadovanou pravdepodobnosťou je potrebné vhodne využiť generátor náhodných čísel. Pre mamičkin model stačí napríklad náhodne generovať prirodzené čísla z intervalu 1 až 10, a keď vyjde 1, pokus ukončiť.

Dĺžku jednotlivých pokusov si samozrejme musíme ukladať. Ale ešte jednoduchšie a šetrnejšie bude ukladať si ich priebežný súčet. Zároveň si musíme pamätať počet pokusov, aby sme na konci mohli správne spočítať aritmetický priemer. Počet pokusov, ktoré chceme uskutočniť, potom môže byť vstupný parameter, prípadne môže program skončiť generovanie pokusov príkazom užívateľa. Ako vstup môžeme zadávať aj hodnotu pravdepodobnosti rozbitia džbánu.

Zo štatistických údajov je potrebný hlavne aritmetický priemer dĺžok pokusov, možnosť jeho výpočtu sme už spomenuli. Môžeme ale evidovať aj iné hodnoty, napríklad početnosť výskytu pokusov jednotlivých dĺžok alebo ich skupín.

Či budú vychádzať rovnaké alebo podobné výsledky, závisí od dvoch vecí. Prvou sú vlastnosti použitého generátora náhodných čísiel. Pri jeho opakovanom identickom volaní sa môže stať, že bude generovať síce náhodnú, ale stále rovnakú sekvenciu čísiel. Túto vlastnosť je možné preveriť napríklad kontrolným výpisom generovaných čísiel. Problém je možné riešiť „náhodným" naštartovaním generátora, syntax tohto príkazu často obsahuje slovo „randomize". Ďalšou možnosťou je vyskúšať viac generátorov, či už na rozdielnych počítačoch (najlepšie s rozdielnym operačným systémom) alebo sa „zásobiť" na internete. Druhou vecou ovplyvňujúcou kvalitu výsledných hodnôt sú matematické vlastnosti skúmaných pokusov a celej situácie. Aké sú a či sa budú zhodovať s výsledkami počítačových experimentov ešte musíme zistiť. □

V ďalšom texte teda využijeme rodičovskú skúsenosť s pravdepodobnosťou rozbitia džbánu. Odpoveď na otázku, ako dlho s ním Anička chodí po vodu, odvodíme z tohto jediného čísla. Postup si rozdelíme na viac krokov, počas ktorých objavíme aj iné zaujímavé výsledky. Veľmi často sa v nich bude objavovať slovo pravdepodobnosť.

Úloha 4.1.4 *Pokusy, tak ako sme ich zaviedli pred úlohou 4.1.2, sú charakterizované svojou dĺžkou n. Skúsme teraz vypočítať pomocou rodičovskej informácie o pravdepodobnosti neúspechu jednotlivé pravdepodobnosti*

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_n, \ldots$$

toho, že pokus má dĺžku $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$
Vo výsledkoch budeme, ak treba, rozlišovať pravdepodobnosť MP_n (matkina pravdepodobnosť), pre výpočet ktorej budeme používať hodnotu $1/10$, a OP_n (otcova pravdepodobnosť) so všeobecnou hodnotou p. O hodnote p vieme, že je, ako sa na pravdepodobnosť patrí, z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Skúste ešte pred výpočtom odhadnúť, pokus akej dĺžky je najviac pravdepodobný a bude sa teda najčastejšie vyskytovať. Aká bude mamičkina pravdepodobnosť vyskytnutia sa pokusu dĺžky $1, 10, 100$ a tisíc?

Riešenie: Pokus dĺžky 1 mohol nastať len tak, že hneď pri prvej (a tým pádom aj jedinej) ceste Anička nový džbán rozbila.
To sa podľa mamičky stane s pravdepodobnosťou 1/10, a teda $MP_1 = 1/10$.
Podľa otecka je pravdepodobnosť tohto javu p a teda $OP_1 = p$.
Dĺžku 2 má pokus vtedy, ak prvý deň Anička džbán nerozbila a druhý deň rozbila.
Ak pravdepodobnosť rozbitia džbánu pri jednej ceste je 1/10, respektíve p, pravdepodobnosť, že džbán pri jednej ceste nerozbije, je doplnkom do jednotky (teda do istého javu). Nadobúda preto hodnotu 9/10, respektíve $1 - p$.
Pri pokuse dĺžky 2 teda Anička prvý deň džbán s príslušnou pravdepodobnosťou nerozbije a druhý deň ho s príslušnou pravdepodobnosťou rozbije.
Pokiaľ chceme získať výslednú pravdepodobnosť toho, že takéto dva javy nastanú za sebou, musíme príslušné pravdepodobnosti vynásobiť.
Mamičkinu pravdepodobnosť totiž môžeme interpretovať tak, že 9/10 Aničkiných ciest v prvý deň skončí s nerozbitým džbánom a z nich 1/10 druhý deň skončí s rozbitým džbánom.
Potrebujeme teda zistiť, koľko je 1/10 z 9/10, k čomu nám stačí tieto zlomky vynásobiť. Platí preto, že

$$MP_2 = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \qquad \text{a} \qquad OP_2 = (1 - p) \cdot p$$

Dĺžku 3 má pokus vtedy, ak za sebou nasledujú dva úspešné dni s nerozbitým džbánom a po nich tretí deň, v ktorom džbán rozbijeme. Potrebujeme teda zlúčiť dve pravdepodobnosti nerozbitia džbánu s pravdepodobnosťou jeho rozbitia v posledný deň. Podobnou úvahou ako pre MP_2 dostaneme

$$MP_3 = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} \qquad \text{a} \quad OP_3 = (1 - p)^2 \cdot p$$

Teraz je už princíp jasný, preto bude

$$MP_4 = \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} \qquad \text{a} \qquad OP_4 = (1 - p)^3 \cdot p \qquad \text{atď.}$$

Môžeme napísať aj vzorec pre všeobecnú pravdepodobnosť pokusu dĺžky n. Platí

$$MP_n = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{10} \quad \text{a} \quad OP_n = (1-p)^{n-1} \cdot p$$

Vypočítajme ešte niektoré konkrétne hodnoty mamičkiných pravdepodobností. Už sme určili $MP_1 = 1/10$. Podľa vzorca

$$MP_{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^{9} \cdot \frac{1}{10} = 0.0387420489$$

Pokus dĺžky 10 teda nastane (po zaokrúhlení) približne štyrikrát zo sto pokusov alebo 39 krát z tisíc pokusov. Podobne

$$MP_{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^{99} \cdot \frac{1}{10} = 0.000002951$$

Pokus dĺžky 100 sa teda vyskytne približne tri krát v každom milióne pokusov. Pokus dĺžky 1000 nastane s pravdepodobnosťou

$$MP_{1000} = \left(\frac{9}{10}\right)^{999} \cdot \frac{1}{10} = \dots$$

Vyjde číslo, ktoré sa začína 46 nulami za desatinou čiarkou.

Pokiaľ vás počítanie zaujalo, môžete ešte zrátať pravdepodobnosti, že džbán vydrží Aničke týždeň, mesiac alebo rok. Numerické hodnoty nám opäť ukázali ohraničenia pozorovacej metódy. Na správne započítanie početnosti pokusov dĺžky 100 by sme potrebovali milióny pokusov, ktoré by rádovo trvali desaťtisíce rokov. Na dobrý odhad výskytu pokusov dĺžky 10 by stačilo rokov len pár, ale na pokusy dĺžky 1000 by bol krátky aj vek vesmíru. Zato pomocou známej pravdepodobnosti neúspechu p, vzorca pre P_n a kalkulačky môžeme bez problémov určiť aj veľmi „nepravdepodobné" pravdepodobnosti okamžite.

Zároveň vidíme aj ďalší zaujímavý výsledok. Najpravdepodobnejší, a teda aj najčastejšie sa vyskytujúci pokus má dĺžku 1. Ten nastane priemerne v 1 z 10 (alebo v 10 zo 100) pokusov. Už pravdepodobnosť pokusu dĺžky 2 je mierne nižšia a takýto pokus sa vyskytuje priemerne len v 9 zo 100 prípadov. Dôvod je možné nájsť v predchádzajúcich úvahách. Na predĺženie pokusu o jeden deň musí pribudnúť jedna úspešná cesta po vodu. Tá nastáva s pravdepodobnosťou 9/10 respektíve $1-p$, ktorá je menšia ako jedna. A keďže ňou násobíme, pravdepodobnosti P_n sa postupne zmenšujú.

Odhadli ste tento výsledok správne? Pokiaľ áno, gratulujeme, ale patríte k výnimkám. Omnoho častejšie sú nesprávne odpovede. Môžete si skúsiť spraviť malý tipovací experiment na svojich priateľoch, spolužiakoch alebo rodine. Miesto Aničky sa ich môžete pýtať na situáciu, ktorú dobre poznáme z „človeče nehnevaj sa" alebo podobných hier. V nich často musíme hádzať kockou dovtedy, kým nepadne číslo 6. Niekedy sa to podarí na prvý, niekedy na druhý, niekedy až na 10.krát.

Otázka znie, na koľký krát padne na kocke šestka najčastejšie, s najväčšou pravdepodobnosťou. Situácia je úplne analogická s chodením po vodu, miesto pravdepodobnosti 1/10 teraz pokus končí s pravdepodobnosťou 1/6. Najčastejšie aj tu šestka padne na prvý raz, s pravdepodobnosťou 1/6, teda približne v 167 prípadoch z 1000. Odhady sú ale väčšinou iné.

Častá je napríklad odpoveď „na šiesty raz", pokus dĺžky 6 pritom nastáva s pravdepodobnosťou $(5/6)^5 \cdot 1/6$, teda približne len v 67 prípadoch z 1000. Ku otázke, prečo sa ľudia v týchto odhadoch tak často mýlia, sa vrátime ešte neskoršie. □

Určením hodnôt pravdepodobností P_n sa naša práca úspešne začala a treba v nej pokračovať. Čísla P_n majú svoj význam nielen sami o sebe, ale predstavujú aj dôležitý súhrn vzájomne súvisiacich čísiel. Na jednu z jeho vlastností, ktorú budeme potrebovať aj v nasledujúcom, sa teraz pozrieme.

Úloha 4.1.5 *Čo ak by sme sčítali všetky hodnoty P_n? Aký má tento súčet zmysel, čo vyjadruje? Dal by sa určiť aj „bez počítania", len úvahou? Vieme aspoň približne, aký výsledok môžeme očakávať? Vypočítajte skutočný súčet všetkých pravdepodobností P_n a preverte si* *správnosť vašich predpovedí.*

Riešenie: So sčítavaním môžeme začať postupne. Čo dostaneme, ak sčítame P_1 a P_2? Ide o súčet pravdepodobnosti pokusu s dĺžkou 1 a pravdepodobnosti pokusu s dĺžkou 2. Tieto dva pokusy sú jasne odlišné, nemôžu nastať súčasne a to, že nastal jeden z nich neovplyvňuje to, či nastal druhý. Sčítaním preto získame pravdepodobnosť toho, že nastal pokus dĺžky 1 alebo dĺžky 2. Aj numerický výpočet nám dá hodnotu súčtu 19/100, čo zodpovedá vyššie spomínaným počtom pokusov dĺžky 1 alebo 2 medzi náhodnými 100 pokusmi.

Podobný význam bude mať aj súčet ľubovoľného iného konečného počtu pravdepodobností P_n. Čo sa ale stane, ak ich sčítame všetky? Budeme rátať nekonečný súčet, čo nás núti použiť náročnejšiu matematiku. Stále ale platí, že sčítavame pravdepodobnosti pokusov, ktoré sa navzájom vylučujú a neovplyvňujú. Súčet preto určí pravdepodobnosť, že nastal niektorý z nich. A keďže sme sčítali pravdepodobnosti všetkých konečne dlhých pokusov, súčtom získame pravdepodobnosť toho, že džbán sa niekedy rozbije a nebude sa používať do nekonečna.

O možnosti nekonečne dlhého pokusu sme už uvažovali v riešení úlohy 4.1.2. Pokiaľ nekonečnej výdrži džbánu neveríme, súčet hodnôt P_n by mal byť presne 1. Naopak, ak je pravdepodobnosť nekonečnej výdrže nenulová, súčet P_n bude presne o túto hodnotu menší od 1. (Rozdiel ale bude veľmi malý. Spomeňte si, aká malá bola pravdepodobnosť P_{1000}, a to je od nekonečna ešte veľmi vzdialené.) V každom prípade, ak by súčet P_n vyšiel viac ako 1, niekde v predchádzajúcich úvahách máme vážnu chybu a môžeme začať rozmýšľať odznova. Takže skúsme rátať. Upravme najskôr $\sum_{n=1}^{\infty} MP_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} MP_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n}$$

Podstatou výpočtu je teda súčet

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n$$

Ide o geometrický rad, ktorého vlastnosti včítane vzorca pre hodnotu súčtu ste sa už učili. Pokiaľ si ale vzorček nepamätáte, stačí použiť jednoduchý trik na jeho výpočet.

Ak súčet označíme S, tak platí

$$S=\left(\frac{9}{10}\right)^0+\left(\frac{9}{10}\right)^1+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\cdots=$$

$$=1+\left(\frac{9}{10}\right)^1+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\cdots=$$

$$=1+\frac{9}{10}\cdot\left(1+\left(\frac{9}{10}\right)^1+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\dots\right)=1+\frac{9}{10}\cdot S$$

Dostali sme teda rovnicu

$$S=1+\frac{9}{10}\cdot S$$

z čoho $S=10$. Preto

$$\sum_{n=1}^{\infty}MP_n=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n=\frac{1}{10}\cdot S=1$$

Podobne

$$\sum_{n=1}^{\infty}OP_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left((1-p)^{n-1}\cdot p\right)=p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}=p\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n$$

Pomocný výpočet určí, že

$$S=(1-p)^0+(1-p)^1+(1-p)^2+(1-p)^3+\cdots=$$

$$=1+(1-p)^1+(1-p)^2+(1-p)^3+\cdots=$$

$$= 1 + (1-p) \cdot \big(1 + (1-p)^1 + (1-p)^2 + \dots\big) = 1 + (1-p) \cdot S$$

Z toho

$$S = \frac{1}{p} \qquad \text{pre} \qquad p \neq 0 \qquad \text{a} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} OP_n = p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = p \cdot S = 1$$

Vidíme teda, že pre konkrétnu hodnotu $1/10$, ako aj pre všeobecnú hodnotu p pravdepodobnosti neúspechu (a teda pre výpočet s jej ľubovoľnou hodnotou $p \neq 0$) je súčet pravdepodobností P_n rovný jednej. Pravdepodobnosť pokusu nekonečnej dĺžky je preto nulová a džbán nám večne nevydrží. Teraz už máme tento výsledok potvrdený nielen úvahou o podstate príslovia, ale aj výpočtom. Keď ale spomíname výpočet, vráťme sa ešte na chvíľu k úprave vedúcej ku vzťahu

$$S = 1 + (1-p) \cdot S$$

Môžeme tento postup použiť napríklad aj pre hodnotu $1-p$ rovnú 10 alebo -2? Aké hodnoty by potom nadobudol súčet $\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n$?

Pokiaľ vám nie sú jasné odpovede na tieto otázky, odporúčame sa na chvíľu vrátiť k príslušným prednáškam z matematickej analýzy. □

V našom bádaní sme už dosť pokročili. Vieme vypočítať hodnotu ľubovoľnej pravdepodobnosti P_n. Vieme, čo znamená a akú hodnotu má ich súčet a poznáme odpoveď na otázku existencie nekonečného pokusu. Zostáva nám urobiť posledný krok pri hľadaní možnosti využitia hodnôt P_n. Pripomínam, že našim hlavným cieľom je zistiť, ako dlho sa chodí s džbánom po vodu.

Úloha 4.1.6 *Dajú sa získané hodnoty P_n použiť pre určenie hľadanej priemernej dĺžky pokusov? Môžeme si pomôcť pôvodnou myšlienkou aritmetického priemeru odpozorovaných dĺžok Aničkiných pokusov? Dá sa vymyslieť jednoduchý vzorec, ktorým z P_n vypočítame priemernú dĺžku pokusu?*

Riešenie: Bolo by smutné, ak sme hodnoty P_n pre určenie priemernej dĺžky použiť nevedeli. Každá z nich totiž nesie presnú a úplnú informáciu o výskyte pokusu príslušnej dĺžky. Ľubovoľne dlhým pozorovaním Aničky a jeho vyhodnotením by sme získali len približné odhady týchto hodnôt. Každú pravdepodobnosť P_n tiež vieme interpretovať (a robili sme to v predchádzajúcich úlohách) ako počet výskytov pokusu dĺžky n vo veľkom počte pokusov. To nám ponúka možnosť predstaviť si na základe týchto hodnôt vytvorenú umelú sadu pokusov a hlavne ich dĺžok, ktorých aritmetický priemer je hľadanou priemernou dĺžkou pokusu.

Táto predstava nám ukazuje, že myšlienka aritmetického priemeru je stále aktuálna. Praktická realizácia by ale narazila na ten istý problém, ako pozorovanie skutočnej Aničky. Aj s pomocou počítačov by sme stále boli schopní vygenerovať len konečnú sadu pokusov a ich dĺžok a vypočítaný priemer by nebol presný. K úplnej presnosti vedie cesta len cez nekonečno a s tým sa najlepšie pracuje v ľudskej hlave. Skúsme preto vymyslieť presný vzorček, ktorým budeme rátať priemernú dĺžku pokusu.

Začnime tým, že si hľadanú priemernú dĺžku označíme D. Našim cieľom je nájsť predpis, ako D vypočítať z hodnôt P_n. Vypočítali sme si hodnoty P_n pre Aničku, sú ale dosť zložité a možno nám zbytočne komplikujú situáciu. Vzorec by naviac mal byť univerzálny a všeobecne platný. Skúsme preto chvíľu uvažovať o jednoduchších hodnotách pravdepodobností P_n. Musíme len dodržať podmienku, že všetky sú z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a ich súčet je jedna.

Čo by sme napríklad vedeli povedať o dievčine, pre ktorú $P_3 = 1$? Je zrejmé, že všetky ostatné pravdepodobnosti už musia byť nulové. Táto dievčina teda vždy rozbije džbán pri tretej ceste. Všetky jej pokusy sú preto dĺžky 3 a aj priemerná dĺžka pokusu je 3.

Podobne ak by $P_{10} = 1$, tak každá (a aj priemerná) dĺžka pokusu by bola 10. Všeobecne platí, že ak pre niektoré k je $P_k = 1$, tak pre ostatné $n \neq k$ je $P_n = 0$ a platí $D = k = k \cdot 1$.

Skúsme teraz o kúsok zložitejšiu situáciu. Nech pre dievčinu Marienku platí $P_2 = 1/2$ a $P_4 = 1/2$. Keďže už tieto dve pravdepodobnosti dávajú v súčte 1, ostatné sú nulové. Znamená to, že polovica jej pokusov bude mať dĺžku 2 a polovica dĺžku 4.

Priemerná dĺžka pokusu D by preto mala byť

$$(2+4)/2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 3$$

Podobne ak $P_5 = 1/2$ a $P_9 = 1/2$, bude

$$D = \frac{(5+9)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 9 = 7$$

a pre $P_{100} = 1/2$ a $P_{101} = 1/2$ bude

$$D = \frac{100+101}{2} = \frac{1}{2} \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 101 = 100.5$$

Opäť vo všeobecnosti, ak $P_k = 1/2$, $P_l = 1/2$ a ostatné P_n sú nulové, platí

$$D = k \cdot \frac{1}{2} + l \cdot \frac{1}{2}$$

Čo sa ale stane, ak Marienka zmení svoje správanie a teraz pre ňu platí $P_2 = 1/4$ a $P_4 = 3/4$?
Ešte stále sú ostatné pravdepodobnosti nulové a všetky pokusy majú dĺžku 2 alebo 4. Ich zastúpenie už ale nebude rovnaké. Len približne štvrtina pokusov bude mať dĺžku 2 a trikrát viac pokusov bude mať dĺžku 4. Priemerná dĺžka pokusu by preto mohla byť

$$\frac{2+4+4+4}{4}$$

Tu treba pripomenúť, že Marienke by sa asi nepodarilo z každých 4 pokusov raz dosiahnuť dĺžku 2 a trikrát dĺžku 3.
Podobne, ak šesť krát hodíte kockou, málokedy vám pri tom padne každé číslo presne raz, aj keď pravdepodobnosť každého z nich je 1/6. Ale pri 600 hodoch už bude počet hodených jednotiek (a aj ostatných čísel) bližšie ku 100. A aj keby ich bolo len 98, relatívna početnosť

98/600 sa už veľmi blíži teoretickej pravdepodobnosti 1/6. Pri 6000 hodoch dostaneme ešte presnejšie výsledky. Teoretické pravdepodobnosti a štatistiky pokusov sa k sebe začnú blížiť až pri ich veľkom počte. Správnejšie by sme preto mali spočítať tisíc dvojok, tritisíc štvoriek a vydeliť ich štyrmi tisícmi. Vidíme ale, že numericky by takýto výpočet dal rovnaký výsledok a po vykrátení tisíckou by bol úplne rovnaký. Platí preto naozaj, že

$$D = \frac{2+4+4+4}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} = 3.5$$

A čo ak by $P_3 = \frac{2}{7}$ a $P_6 = \frac{5}{7}$? Dlhodobo by teraz dva pokusy zo siedmych mali dĺžku 3 a päť pokusov zo siedmych malo dĺžku 6. Ich priemer by preto mal vyjsť

$$D = \frac{3+3+6+6+6+6+6}{7} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{7} + 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{7} = 3 \cdot \frac{2}{7} + 6 \cdot \frac{5}{7}$$

Podobných príkladov je možné vyskúšať viac. Vychádza nám z nich ale nasledujúci výsledok. Ak platí $P_k = q$ a $P_l = r$, pričom $q + r = 1$ a ostatné pravdepodobnosti sú preto nulové, platí vzorec

$$D = k \cdot q + l \cdot r = k \cdot P_k + l \cdot P_l$$

Ďalej by sme mohli pokračovať skúmaním Evičky, ktorá vie realizovať pokusy troch rôznych dĺžok. Obdobným spôsobom by sme odvodili, že ak $P_k = q$, $P_l = r$ a $P_m = s$, pričom $q + r + s = 1$ a ostatné pravdepodobnosti sú nulové, platí

$$D = k \cdot q + l \cdot r + m \cdot s = k \cdot P_k + l \cdot P_l + m \cdot P_m$$

Teraz už začíname vidieť podstatu. Do hodnoty priemernej dĺžky pokusu D je potrebné zarátať všetky možné dĺžky pokusov. Tie sa ale nevyskytujú rovnako často. O ich zastúpení nám dávajú informáciu pravdepodobnosti P_n. Tieto pravdepodobnosti umožňujú porovnať počet pokusov daných dĺžok. Ak je napríklad P_k desaťkrát menšia ako P_l, pokusov dĺžky k je desaťkrát menej ako pokusov dĺžky l a mali by byť desaťkrát menej „započítané" do hodnoty D. Pravdepodobnosť P_n ale zároveň hovorí aj o zastúpení pokusu dĺžky n medzi všetkým pokusmi. Ak napríklad $P_n = 1/10$, znamená to, že (dlhodobo) bude mať desatina

pokusov dĺžku n. Preto aj pri numerickom výpočte priemernej dĺžky pokusu (pozrite a premyslite si ešte raz výpočty v predchádzajúcich odstavcoch), by do výpočtu D prispel hodnotou $n \cdot 1/10$ alebo všeobecne $n \cdot P_n$. Kľúčom ku vzorcu je teda násobenie dĺžky pokusu s jeho pravdepodobnosťou. Táto úvaha platí aj pre stále sa zväčšujúci počet nenulových pravdepodobností P_n a dostávali by sme stále dlhšie a dlhšie vzorce pre výpočet D.
Navyše princíp platí aj pre pravdepodobnosti $P_n = 0$, teda pre dĺžky pokusov, ktoré sa vôbec nevyskytnú. Tie by do priemernej dĺžky pokusu nemali prispieť ničím, čo ale tiež zodpovedá hodnote $n \cdot P_n = n \cdot 0 = 0$.
Zostáva nám urobiť posledný krok. K nemu potrebujeme veriť, že argumenty platné pre konečný počet nenulových pravdepodobností zostanú v platnosti aj pre nekonečnú sadu. Žiadne vážne dôvody proti zatiaľ nevidíme. Preto môžeme slávnostne napísať hľadaný vzorec:

$$D = 1.P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 + \cdots = \sum n \cdot P_n$$

□

Získaný vzorec je správny nie len preto, že sme ho starostlivo vymysleli, ale aj preto, že sa to rovnako podarilo aj mnohým ďalším. Nazýva sa aj vzorcom na výpočet tzv. váženého priemeru, čo je iný názov nášho čísla D. Slovo „vážený" má základ v slove váha. Jednotlivé výsledky experimentov, v našom prípade dĺžky pokusov n, sú „odvážené" ich dôležitosťou, váhou. Tá je numericky vyjadrená pravdepodobnosťou ich výskytu P_n. Formálne je vzorec nekonečným súčtom, čo môže spôsobiť technické problémy pri výpočte. Pokiaľ ale skúmame také sady P_n, kde je len konečný počet nenulových pravdepodobností, nulové členy sumy nemusíme uvažovať a výraz je konečný. To bol prípad vyššie odvodených vzorcov pre Marienku a Evičku. My by sme sa ale mali vrátiť späť k Aničke s nekonečnou sadou nenulových P_n a vypočítať hodnotu D aj pre ňu.

Úloha 4.1.7 *Aký je vážený priemer D pre Aničkine hodnoty P_n?*

Riešenie: Začneme najskôr s mamičkinou hodnotou neúspechu 1/10. V úlohe 4.1.4 sme vypočítali, že

$$MP_n = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{10}$$

Platí preto, že mamičkina hodnota váženého priemeru bude

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot MP_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{10}$$

Tento súčet môžeme upraviť na tvar

$$D = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n} =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n}$$

Do súčtu sme síce pridali jeden sčítanec, ale ten má nulovú hodnotu a výsledok sa preto nezmení. Teraz si stačí spomenúť na vzorec pre súčet radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

a s jeho využitím získať výsledok. Vzorec opäť platí len pre správne hodnoty q a treba ho vedieť používať. Druhou možnosťou je nezľaknúť sa nekonečnej sumy a trochu sa s ňou pohrať. Pre prehľadnosť nebudeme používať numerické hodnoty ale len symbolické označenia. Platí teda

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot MP_n = 1 \cdot MP_1 + 2 \cdot MP_2 + 3 \cdot MP_3 + 4 \cdot MP_4 + 5 \cdot MP_5 + \cdots =$$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
= & MP_1 & + & MP_2 & + & MP_3 & + & MP_4 & + & MP_5 & + \cdots + \\
 & & + & MP_2 & + & MP_3 & + & MP_4 & + & MP_5 & + \cdots + \\
 & & & & + & MP_3 & + & MP_4 & + & MP_5 & + \cdots + \\
 & & & & & & & \cdots & & &
\end{array}
$$

Nekonečný súčet sme teda rozdelili na nekonečný počet nekonečných súčtov, z ktorých každý nasledujúci je o jeden (prvý) člen kratší. Keď sa pozrieme na prvý z nich (v druhom riadku), zistíme, že ho dobre poznáme. Súčet všetkých mamičkiných pravdepodobností $\sum MP_n$ sme počítali v úlohe 4.1.5 a vieme, že

$$MP_1 + MP_2 + MP_3 + \cdots = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} + \cdots = 1 \qquad (4.1)$$

Ďalší riadok $MP_2 + MP_3 + MP_4 + MP_5 + \dots$ má číselnú hodnotu

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} + \cdots =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} + \dots\right) =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot (MP_1 + MP_2 + MP_3 + \dots) = \frac{9}{10} \cdot 1 = \frac{9}{10}$$

Jeho súčet sa nám podarilo vypočítať pomocou súčtu radu 4.1. Tento trik môžeme zopakovať pri výpočte ďalšieho riadku.

Máme teda

$$MP_3 + MP_4 + MP_5 + \cdots = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^4 \cdot \frac{1}{10} + \cdots =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} + \dots\right) =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot (MP_2 + MP_3 + MP_4 + \dots) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^2$$

Podobne

$$MP_4 + MP_5 + MP_6 + \dots = \frac{9}{10}\,(MP_3 + MP_4 + MP_6 + \dots) = \left(\frac{9}{10}\right)^3$$

atď.
Súčty jednotlivých riadkov sú teda postupne

$$1, \frac{9}{10}, \left(\frac{9}{10}\right)^2, \left(\frac{9}{10}\right)^3, \dots$$

Hodnotu D získame ich sčítaním, teda platí

$$D = 1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \dots = 10$$

Aj tento výsledok už poznáme z úlohy 4.1.5, kde sme rovnako počítali hodnotu S.

Podľa mamičky je teda hodnota D rovná 10. Toto je hľadaný priemerný počet pokusov a odpoveď na otázku, ako dlho sa chodí s džbánom po vodu. K tomuto číslu by sa blížil aritmetický priemer získaný z pozorovania Aničky. Samozrejme ide len o priemernú hodnotu, dĺžky pokusov sa menia. Nakoniec z riešenia úlohy 2.1.3 vieme, že pokus dĺžku 10 nastane len približne 39-krát z tisíc pokusov.

Priemerná hodnota je ale dobrá informácia, ktorá napríklad Aničke pomôže pri nakupovaní džbánov. Na každý rok by ich mala mať v zásobe približne $36,5$. Pokiaľ miesto Aničky a rozbitých džbánov začneme uvažovať o technických zariadeniach a pravdepodobnosti ich poruchy, prenesieme sa z ríše rozprávok do veľmi praktických oblastí. Keďže ich chybovosť ale môže byť aj iná ako $1/10$, pokúsime sa získať všeobecnejší výsledok. K tomu použijeme všeobecnú oteckovu pravdepodobnosť p. Výpočet s ňou ale prebehne obdobným spôsobom ako pre hodnotu $1/10$, uvedieme z neho preto len dôležité časti.

Pre oteckovu priemernú dĺžku pokusu platí (pre $p \neq 0$ a $p \neq 1$):

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot OP_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-1} \cdot p = p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-1} =$$

$$= p \cdot (1-p)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-p)^n = \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-p)^n$$

Na poslednú sumu môžeme opäť použiť vzorček, alebo zopakovať postup z predchádzajúceho odstavca. Platí

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot OP_n = 1 \cdot OP_1 + 2 \cdot OP_2 + 3 \cdot OP_3 + 4 \cdot OP_4 + 5 \cdot OP_5 + \dots$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} = & OP_1 & + & OP_2 & + & OP_3 & + & OP_4 & + & OP_5 & + & \dots & + \\ & & + & OP_2 & + & OP_3 & + & OP_4 & + & OP_5 & + & \dots & + \\ & & & & + & OP_3 & + & OP_4 & + & OP_5 & + & \dots & + \\ & & & & & & & & \dots & & & & \end{array}$$

Z úlohy 2.1.3 vieme, že súčet

$$OP_1 + OP_2 + OP_3 + \dots = 1$$

Pre nasledujúci súčet platí

$$OP_2 + OP_3 + OP_4 + \dots = (1-p) \cdot (OP_1 + OP_2 + OP_3 + \dots) = 1 - p$$

súčet ďalšieho riadku bude $(1-p)^2$ atď.

Preto

$$D = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \dots = \frac{1}{p}$$

Tento súčet sme tiež spočítali v úlohe 2.1.3. Jedná sa o súčet geometrického radu s kvocientom $(1-p)$, ktorý má korektnú hodnotu.

Týmto výpočtom získaná všeobecná hodnota D je ešte cennejším výpočtom. Keď si totiž otecko spomenie sa skutočnú hodnotu p (alebo si odmeriame pravdepodobnosť poruchy zariadenia), budeme vedieť okamžite povedať hodnotu priemernej dĺžku pokusu (alebo životnosti zariadenia). □

Rozprávanie o Aničke a slovenských prísloviach sa pomaly končí. Ako sme už naznačili, nešlo len o rozprávku a získané výsledky a úvahy sa týkajú aj omnoho vážnejších oblastí. Úplne na záver preto uvedieme úlohu, ktorá ukáže, akým smerom je možné v skúmaní pokračovať.

Úloha 4.1.8 *Spomenuté dievčiny Marienka a Evička sú v skutočnosti sestrami Aničky a dobre poznajú jej problémy s chodením po vodu. Rozhodli sa preto, že si pomôžu druhým džbánom. Každá z nich preto chodí po vodu s jedným džbánom v ľavej a s jedným v pravej ruke. Predpokladajme, že pravdepodobnosť rozbitia každého z nich je už známa* 1/10. *(Môžeme uvažovať aj iné, pre ľavú a pravú ruku odlišné hodnoty. Takto ale budeme môcť výsledky sestier porovnať.)*

Pri používaní dvoch džbánov si dievčatá prinesú vždy viac vody a po cestičke chodia s lepšou rovnováhu. Veria preto, že sa aj predĺži doba, počas ktorej s nimi budú chodiť po vodu. Dievčatá ale majú rozdielnu povahu. Marienka je pesimista, a po vodu prestane chodiť hneď, keď rozbije prvý z džbánov. Jej pokus sa preto končí po rozbití prvého džbánu (alebo oboch naraz). Evička je optimista a jeden rozbitý džbán jej ešte náladu nepokazí. Chodí po vodu ďalej, kým sa jej nepodarí rozbiť aj druhý. Jej pokus sa preto končí až pri rozbití druhého džbánu. Aká bude priemerná dĺžka pokusu pre Marienku a aká pre Evičku? Bol správny ich predpoklad, že budú po vodu chodiť dlhšie ako Anička?

Riešenie: Riešenie poslednej úlohy už neuvádzame. Pokiaľ ste riešili úlohu pre programátorov, môžete sa pokúsiť vytvoriť program modelujúci aj Marienkine a Evičkine pokusy. Presné matematické riešenie úlohy už presahuje rozsah tejto knihy. Pokiaľ vás ale naozaj zaujíma, odporúčame obrátiť pozornosť na tzv. teóriu spoľahlivosti, ktorá sa venuje týmto a podobným problémom.

Kapitola 5

Náhodná premenná

V tejto kapitole zavedieme pojem náhodnej premennej a s ním súvisiace pojmy.

5.1. Popis náhodnej premennej

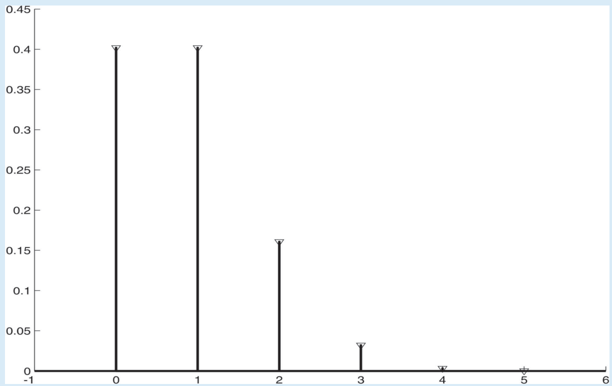
5.1.1. Rozdelenie pravdepodobnosti

V časti 3.4 sme sa stretli s úlohou, v ktorej jednotlivé udalosti nemali rovnakú pravdepodobnosť. Táto situácia nastáva dosť často a preto sa budeme v tejto kapitole venovať udalostiam, ktoré majú rôzne pravdepodobnosti. Presnejšie budeme sa zaoberať tým, ako je pravdepodobnosť rozdelená medzi jednotlivé udalosti. Odtiaľ je aj názov **rozdelenie pravdepodobnosti** (distribution).

Úloha 5.1.1 *Aké rozdelenie pravdepodobnosti majú Bernoulliho nezávislé pokusy? Aká je pravdepodobnosť, že z* 5 *pokusov padne na kocke šestka práve* k*-krát?*

Riešenie: Podobný výpočet sme už robili v predchádzajúcej kapitole. Rozdelenie pravdepodobnosti hovorí o tom, ako je rozdelená hodnota 1, teda „celá pravdepodobnosť", medzi jednotlivé možné výsledky.

Na obrázku 5.1 je rozdelená hodnota pravdepodobnosti celého pokusu na 6 častí. Celková hodnota pravdepodobnosti je 1 a je rozdelená medzi 6 udalostí. Udalosti, ktorých pravdepodobnosti sú na obrázku zakreslené, predstavujú výskyt práve k šestiek pri hode 5 kockami (alebo pri piatich hodoch jednou kockou).



Obrázok 5.1: Rozdelenie pravdepodobnosti nastatia práve k úspechov pri hode 5 kockami

Pravdepodobnosť, že spomedzi 5 hodov bude práve k-krát na kocke šestka, je:

k	0	1	2	3	4	5
$p_5(k)$	0.4019	0.4019	0.1608	0.0322	0.0032	0.0001

Rovnaká pravdepodobnosť zapísaná pomocou vzorca, je

$$P_5(k) = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

□

To, ako je pravdepodobnosť rozdelená, sa niekedy nazýva **zákon rozdelenia pravdepodobnosti** a príslušné hodnoty môžeme zakresliť do grafu, zapísať do tabuľky alebo napísať tento predpis pomocou vzorca.

5.1.2. Náhodná premenná

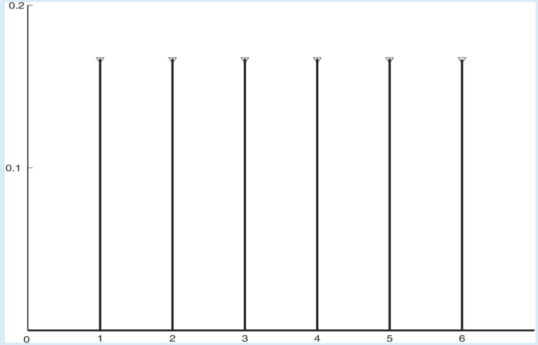
Matematika má veľa užitočných nástrojov pre prácu s číslami. Preto je rozumné urobiť prevod medzi náhodnými udalosťami a číselnými množinami. Tento prevod (zobrazenie, mapovanie) sa nazýva: **náhodná premenná**. Presnejšie, náhodná premenná je zobrazenie elementárnych náhodných udalostí na reálne čísla. Elementárnym udalostiam sú priradené čísla, ktoré ich reprezentujú. **Zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej** je popis, ako je rozdelená pravdepodobnosť medzi jednotlivé čísla. Platí pri tom, že pravdepodobnosť, že náhodná premenná nadobudne číslo x, je rovnaká ako pravdepodobnosť udalosti, zodpovedajúcej tomuto číslu x.

Úloha 5.1.2 *Náhodná premenná* $\mathbb{X}$ *popisuje hod kockou. Udalosti, že na kocke padlo číslo* 1 *priradí číslo* 1*; udalosti, že na kocke padlo číslo* 2 *priradí číslo* 2*, ..., udalosti, že na kocke padlo číslo* 6 *priradí číslo* 6*. Aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná, ktorá takýmto spôsobom popisuje hod kockou?*

Riešenie: Každá z uvedených udalostí má rovnakú pravdepodobnosť rovnú 1/6, preto aj každé z čísel $x = 1, 2, \dots, 6$ sa bude vyskytovať s touto pravdepodobnosťou. Rozdelenie pravdepodobnosti pre jednotlivé hodnoty náhodnej premennej vidíme na obrázku 5.2.

Predpis pre náhodnú premennú (prevod medzi udalosťami a číslami) je

$$\mathbb{X} : \Omega \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Obrázok 5.2: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej popisujúcej hod kockou

$$\mathbb{X}\,(\text{na kocke padlo číslo} \quad k) \mapsto k$$

$$P(\mathbb{X} = k) = \frac{1}{6}$$

$$P(\mathbb{X} = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(\mathbb{X} = 2) = \frac{1}{6}, \quad P(\mathbb{X} = 3) = \frac{1}{6}, \ldots, \quad P(\mathbb{X} = 6) = \frac{1}{6}$$

□

Táto úloha bola príliš jednoduchá na to, aby sme pojem správne pochopili. Ďalšie už budú zložitejšie.

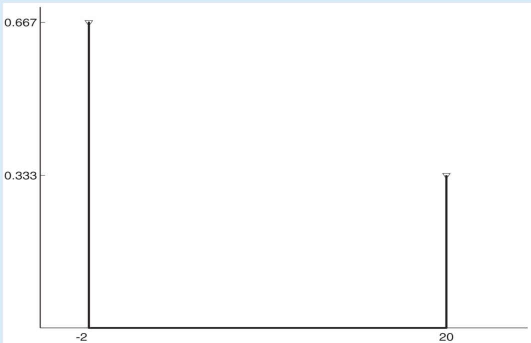
Úloha 5.1.3 *Náhodná premenná $\mathbb{X}$ popisuje hru, spočívajúcu v hode kockou a vyplatení príslušnej výhry. Ak na kocke padne číslo 1 alebo číslo 2, hráč dostane 20 Eur. Ak padne niečo iné, hráč zaplatí 2 Eurá. Aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná, ktorá popisuje túto hazardnú hru?*

Riešenie: Udalosti sú tentokrát dve, hráč dostane 20 Eur, hráč zaplatí 2 Eurá. Náhodná premenná $\mathbb{X}$ teda nadobudne dve hodnoty.

$$\mathbb{X}\,(\text{hráč dostane 20 Eur}) = 20$$

$$\mathbb{X}\,(\text{hráč zaplatí 2 Eurá}) = -2$$

Uvedené udalosti majú pravdepodobnosti rovné 2/6 a 4/6. Preto sa čísla −2 a 20 budú vyskytovať s týmito pravdepodobnosťami. Rozdelenie pravdepodobnosti vidíme na obrázku 5.3.



Obrázok 5.3: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej popisujúcej hazardnú hru s kockou

$$P(\mathbb{X} = -2) = \frac{4}{6}, \quad P(\mathbb{X} = 20) = \frac{2}{6}$$

□

5.1.2.1. Funkcia náhodnej premennej

Náhodnú premennú môžeme zmeniť tak, že zmeníme jej hodnoty, ale nezmeníme príslušné pravdepodobnosti. Riešme napríklad úlohu, ako modifikovať hru z úlohy 5.1.3 tak, aby hráči hrali s väčšími sumami.

Úloha 5.1.4 *Náhodná premenná $\mathbb{Y}$ popisuje hru, spočívajúcu v hode kockou a vyplatení príslušnej výhry. Ak na kocke padne číslo 1 alebo číslo 2, hráč dostane 2000 Eur. Ak padne niečo iné, hráč zaplatí 200 Eur. Aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná, ktorá popisuje túto hazardnú hru?*

Riešenie: Udalosti sú dve, hráč dostane 2000 Eur, hráč zaplatí 200 Eur. Náhodná premenná $\mathbb{Y}$ teda nadobudne dve hodnoty.

$$\mathbb{Y}\,(\text{hráč dostane 2000 Eur}) = 2000$$

$$\mathbb{Y}\,(\text{hráč zaplatí 200 Eur}) = -200$$

Uvedené udalosti majú pravdepodobnosti rovné 2/6 a 4/6. Preto sa čísla −200 a 2000 budú vyskytovať s týmito pravdepodobnosťami. Rozdelenie pravdepodobnosti vidíme na obrázku 5.4.

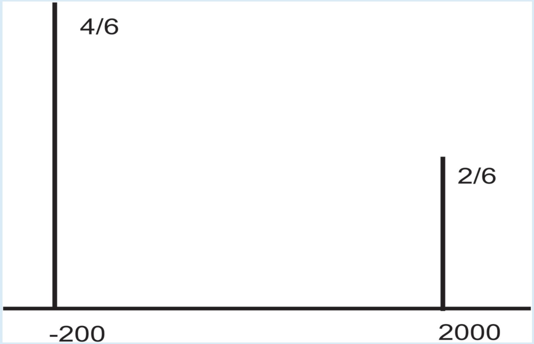
$P(\mathbb{Y} = -200) = \frac{4}{6}, \quad P(\mathbb{Y} = 2000) = \frac{2}{6}$ □

Náhodná premenná $\mathbb{Y}$ z úlohy 5.1.4 má stonásobne väčšie hodnoty ako náhodná premenná $\mathbb{X}$ z úlohy 5.1.3, pravdepodobnosti však ostali rovnaké. Náhodná premenná $\mathbb{Y} = 100 \cdot \mathbb{X}$ je funkciou náhodnej premennej $\mathbb{X}$.

Vo všeobecnosti teda funkcia náhodnej premennej priradí náhodným udalostiam iné čísla, ale zachovajú sa príslušné pravdepodobnosti.

Náhodná premenná $\mathbb{X}$

$\mathbb{X}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5



Obrázok 5.4: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej popisujúcej hazardnú hru s veľkými výhrami a prehrami

Náhodná premenná $f(\mathbb{X})$

$f(\mathbb{X})$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
P	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

5.1.2.2. Súčet náhodných premenných

Náhodné premenné definované na tom istom pravdepodobnostnom priestore môžeme sčítať. Ich súčet bude náhodná premenná, ktorá má vo všeobecnosti iné hodnoty ako pôvodné náhodné premenné.

Príklad 5.1.1 *Náhodná premenná $\mathbb{X}$ popisuje výsledky hodu nefalšovanou mincou. Hodnotu 0 priradíme výsledku „hlava" a hodnotu 1 priradíme výsledku „znak". Aké rozdelenie pravdepodobnosti bude mať náhodná premenná $\mathbb{X} + \mathbb{X}$?*

Home Page

Title Page

Contents

Page 154 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Riešenie: Rodelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{X}$ popisuje tabuľka:

$\mathbb{X}$	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Súčet $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{X}$ dostaneme, keď sčítame hodnoty pri hode dvoch mincí. Súčet $\mathbb{Z}$ môže nadobúdať hodnoty 0, 1, 2. Realizácie náhodnej udalosti (hodu dvoch mincí) môžu byť: „hlava, hlava", „hlava, znak", „znak, hlava" a „znak, znak".
Hodnotu 0 nadobudne $\mathbb{X} + \mathbb{X}$ iba v prípade nastatia udalosti „hlava, hlava".
Hodnotu 2 nadobudne $\mathbb{X} + \mathbb{X}$ iba v prípade nastatia udalosti „znak, znak".
Hodnotu 1 nadobudne $\mathbb{X} + \mathbb{X}$ v prípade nastatia udalosti „znak, hlava", alebo „hlava, znak".

V prípade hodu dvoch mincí sú výsledky na sebe nezávislé, preto pravdepodobnosť udalosti, ktorej hodnota je 0, je

$$P(\mathbb{Z} = 0) = P(\mathbb{X} = 0 \wedge \mathbb{X} = 0) = P(\mathbb{X} = 0) \cdot P(\mathbb{X} = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Pravdepodobnosť udalosti, ktorej hodnota je 1, je

$$P(\mathbb{Z} = 1) = P((\mathbb{X} = 1 \wedge \mathbb{X} = 0) \vee (\mathbb{X} = 0 \wedge \mathbb{X} = 1)) =$$

$$= P(\mathbb{X} = 0) \cdot P(\mathbb{X} = 1) + P(\mathbb{X} = 1) \cdot P(\mathbb{X} = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Pravdepodobnosť udalosti, ktorej hodnota je 2, je

$$P(\mathbb{Z} = 2) = P(\mathbb{X} = 1 \wedge \mathbb{X} = 1) = P(\mathbb{X} = 1) \cdot P(\mathbb{X} = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$\square$

Súčet náhodných premenných z príkladu 5.1.1 je znázornený na obrázku 5.5.

Príklad 5.1.2 *Náhodná premenná $\mathbb{Y}$ popisuje výsledky hodu dvomi kockami pri hre „Osadníci". Hodnoty tejto náhodnej premennej môžeme považovať za súčet dvoch náhodných premenných $\mathbb{X}$ a $\mathbb{X}$, ktoré popisujú výsledky hodu jednou kockou. Aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná $\mathbb{Y}$?*

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

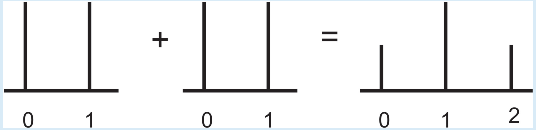
Page 155 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Obrázok 5.5: Súčet dvoch náhodných premenných popisujúcich hod mincou

Riešenie: Najmenšia hodnota, ktorú môže náhodná premenná $\mathbb{Y}$ nadobudnúť, je 2 (keď na oboch kockách padne jednotka) a najväčšia hodnota je 12 (keď na oboch kockách padne šestka). Podobným postupom ako v príklade 5.1.1 dostaneme, že náhodná premenná $\mathbb{Y}$ má rozdelenie:

$\mathbb{X}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\square$

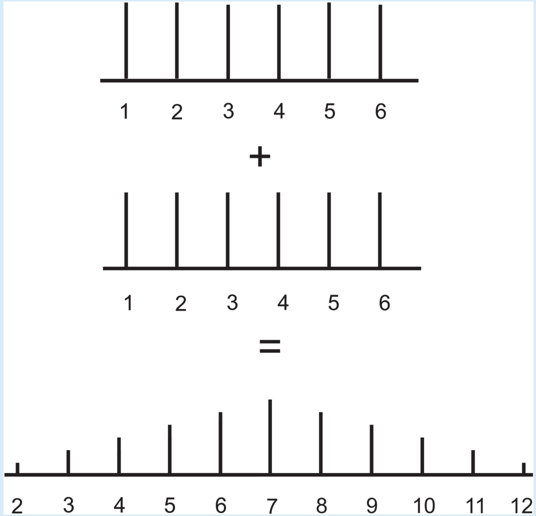
Súčet náhodných premenných z príkladu 5.1.2 je znázornený na obrázku 5.6.

Súčet náhodných premenných je vo veľkej miere využívaný v matematickej štatistike.

5.1.2.3. Charakteristiky náhodnej premennej

Charakteristiky náhodnej premennej sú čísla, ktoré určujú jej charakter, správanie sa. Úplnú predstavu o náhodnej premennej dostaneme, keď uvedieme všetky jej hodnoty a všetky príslušné pravdepodobnosti. Niektoré jej vlastnosti je však možné popísať iba jedným číslom. Hra z úlohy 5.1.3 vyzerá byť pre hráča výhodná. Nevyhráva síce príliš často, ale vyhráva dosť veľa na to, aby prípadné prehry kompenzoval výhrami. Lotérie fungujú na podobnom princípe, len to nie je tak očividné.

Aby sme vedeli spočítať, či je hra spravodlivá, alebo nie, musíme zistiť dlhodobý priemer. To sa dá buď vytrvalým pozorovaním, alebo to môžeme vypočítať teoreticky. Charakteristi-



Obrázok 5.6: Súčet dvoch náhodných premenných popisujúcich hod kockou

ka náhodnej premennej, ktorá prezradí, či je hazardná hra spravodlivá, sa nazýva **stredná hodnota**. Je to, podobne ako napríklad ťažisko, vážený priemer hodnôt náhodnej premennej. Váha, ktorú pridelíme každej hodnote je pravdepodobnosť jej výskytu. Preto na výpočet strednej hodnoty potrebujeme poznať hodnoty náhodnej premennej a pravdepodobnosti, s akými náhodná premenná tieto hodnoty nadobúda.

Stredná hodnota náhodnej premennej $\mathbb{X}$ sa označuje $E(\mathbb{X})$ a vypočíta sa ako

$$E(\mathbb{X}) = \sum_k x_k \cdot p_k \tag{5.1}$$

kde x_k sú hodnoty náhodnej premennej a $p_k = P(\mathbb{X} = x_k)$ sú pravdepodobnosti ich výskytu.

Úloha 5.1.5 *Náhodná premenná $\mathbb{X}$ popisuje hru, spočívajúcu v hode kockou a vyplatení príslušnej výhry. Ak na kocke padne číslo 1 alebo číslo 2, hráč dostane 20 Eur. Akú sumu má hráč zaplatiť ak padne niečo iné ako 1 a 2, aby hra bola spravodlivá?*

Riešenie: Hra bude spravodlivá, keď hráč zaplatí približne toľko, ako dostane. Teda keď stredná hodnota náhodnej premennej $\mathbb{X}$, ktorá popisuje hru, spočívajúcu v hode kockou a vyplatení príslušnej výhry, bude 0. Označme hľadanú sumu z.

$$z = ?$$
$$E(\mathbb{X}) = z \cdot \frac{4}{6} + 20 \cdot \frac{2}{6} = 0$$
$$z = -10$$

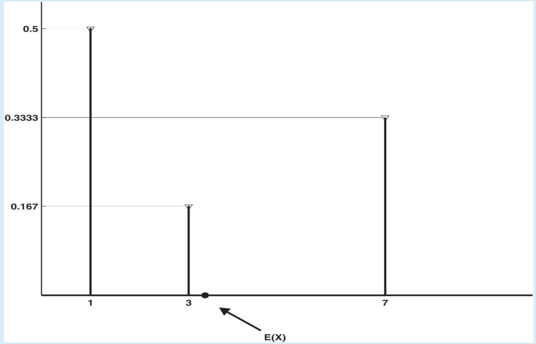
Pri sume 10 Eur, ktoré platí hráč, keď prehrá, bude popísaná hra spravodlivá. □

Vlastnosti strednej hodnoty $E(\mathbb{X})$ môžeme odvodiť od vlastností, ktoré má operácia sčítania.

- $E(c) = c$, kde c je nenáhodná hodnota, (alebo inak, táto náhodná premenná nadobúda iba jednu hodnotu c).
- $E(\,\cdot \mathbb{X}) = c \cdot E(\mathbb{X})$
- $E(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = E(\mathbb{X}) + E(\mathbb{Y})$

Na obrázkoch 5.7 a 5.8 sú znázornené rôzne náhodné premenné so svojimi rozdeleniami pravdepodobnosti a vyznačenou strednou hodnotou. Vidíme, že stredná hodnota nie je v strede medzi hodnotami, ale ak by sme si predstavili jednotlivé pravdepodobnosti ako závažia na prevažovacej hojdačke, tak stredná hodnota je to miesto, kde treba umiestniť stred, aby bola hojdačka v rovnováhe.

Pomocou strednej hodnoty náhodnej premennej môžeme dokázať existenciu objektov s danou vlastnosťou.



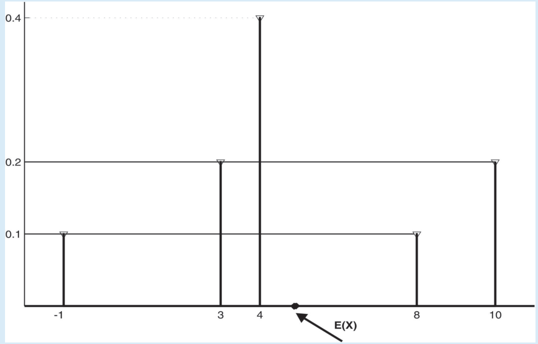
Obrázok 5.7: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s hodnotami 1,3,7 a s pravdepodobnosťami 1/2, 1/6, 1/3 a jej stredná hodnota je $E(\mathbb{X}) = 3.3333$

Úloha 5.1.6 *Nech sú všetky body kružnice zafarbené buď modrou, alebo červenou farbou. Ako sú na kružnici tieto farby rozdelené, to nevieme. Vieme iba, že 1/4 bodov je červená a 3/4 bodov sú modré. Dokážte, že pri ľubovoľnom rozložení modrých a červených bodov existuje rovnostranný trojuholník ABC vpísaný tejto kružnici, ktorého všetky tri vrcholy sú modré body.*

Riešenie: Úlohu nebudeme riešiť tak, že vykreslíme všetky možnosti zafarbenia kružnice a ku každej takejto možnosti, nájdeme trojuholník danej vlastnosti. Takéto riešenie by síce bolo korektné, ale trvalo by príliš dlho.

Namiesto toho ukážeme, že pre ľubovoľné rozloženie farieb (kde 1/5 bodov je červená a 4/5 bodov sú modré), musí existovať trojuholník požadovanej vlastnosti (= vpísaný, rovnostranný, s 3 modrými vrcholmi).

Uvažujme ľubovoľné rozloženie farieb a všetky možné vpísané trojuholníky ABC. Aký bude stredný počet červených vrcholov? Pravdepodobnosť, že vrchol A bude červený je 1/5, rovnako to platí pre vrcholy B a C. Stredná hodnota počtu červených vrcholov A je



Obrázok 5.8: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s hodnotami -1, 3, 4, 8, 10 a s pravdepodobnosťami 0.1, 0.2, 0.4, 0.1, 0.2 a jej stredná hodnota je $E(\mathbb{X}) = 6.9000$

$E(A) = 1/5$, stredná hodnota počtu červených vrcholov B je $E(B) = 1/5$ a stredná hodnota počtu červených vrcholov C je $E(C) = 1/5$.

Stredná hodnota počtu červených vrcholov je 3/5.

$$E(A \cup B \cup C) = E(A) + E(B) + E(C) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Počet červených vrcholov je jedno z čísel 0, 1, 2 a 3. Stredná hodnota z týchto čísel je 3/5, teda číslo menšie ako 1. Preto spomedzi všetkých trojuholníkov musí byť niekoľko takých, ktoré majú 0 červených vrcholov. Keby to tak nebolo, priemer by bol iba z čísel 1, 2 a 3. To by muselo byť číslo väčšie alebo rovné 1. Teda existujú trojuholníky s 0 červenými vrcholmi. To znamená, že všetky ich vrcholy sú modré.

Trojuholník s požadovanou vlastnosťou sme nanašli, ale zaručili sme jeho existenciu. $\square$

Postup použitý v úlohe 5.1.6 sa nazýva **pravdepodobnostná metóda** a rozvinul ju vo svojich prácach Paul Erdős (1913–1996).

Ďalšie charakteristiky, ktoré popisujú náhodnú premennú a umiestnenie jej hodnôt sú modus, medián a kvantily. Stredná hodnota, modus a medián sú charakteristiky, ktoré hovoria o odhade hodnoty náhodnej premennej, ktorá ju bude reprezentovať. Každé z tých čísel hovorí o reprezentantovi iného charakteru, niekedy tieto hodnoty splynú do jednej, niekedy sa treba rozhodnúť, ktorá charakteristika reprezentuje náhodnú premennú najlepšie. Iné charakteristiky sú zaujímavé pre majiteľa kasína, iné pre hazardného hráča, iné pre majiteľa poisťovne, iné pre demografický a iné pre meteorologický ústav. V tejto teoretickej časti sa budeme zaoberať hlavne spôsobom, ako tieto hodnoty vypočítať. V časti o štatistike si uvedieme aj príklady, ako sa môžu tieto hodnoty interpretovať pre konkrétne dáta.

Modus je tá hodnota náhodnej premennej, ktorá má najväčšiu pravdepodobnosť. Modus náhodnej premennej $\mathbb{X}$ sa označuje $Mo(\mathbb{X})$ a vypočíta sa ako

$$Mo(\mathbb{X}) = \max_{x_k \in \mathbb{X}} p_k$$

Medián je tá hodnota náhodnej premennej, ktorá delí hodnoty na dve časti s rovnakou pravdepodobnosťou. Vľavo od mediánu sú hodnoty náhodnej premennej, ktorých súčet pravdepodobností je $1/2$ a vpravo od mediánu sú hodnoty náhodnej premennej, ktorých súčet pravdepodobností je $1/2$. Medián sa započíta do ľavej časti.
Medián náhodnej premennej $\mathbb{X}$ sa označuje $Me(\mathbb{X})$ a vypočíta sa z rovnice

$$P(\mathbb{X} \leq Me(\mathbb{X})) = \frac{1}{2}$$

Kvantil je tá hodnota náhodnej premennej, ktorá delí hodnoty náhodnej premennej na dve časti určené parametrom α. Vľavo od α-kvantilu sú hodnoty náhodnej premennej, ktorých súčet pravdepodobností je α a vpravo od α-kvantilu sú hodnoty náhodnej premennej, ktorých súčet pravdepodobností je $1-\alpha$. α-kvantil sa započíta do ľavej časti.
Hodnota x_α sa nazýva α-kvantil náhodnej premennej $\mathbb{X}$ a vypočíta sa z rovnice

$$P(\mathbb{X} \leq x_\alpha) = \alpha$$

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 161 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Príklad 5.1.3 *1/2-kvantil je taká hodnota x_α, pre ktorú*

$$P(\mathbb{X} \leq x_{1/2}) = 1/2$$

Teda 1/2-kvantil je medián.

$$x_{1/2} = Me(\mathbb{X})$$

Číslom sa dá vyjadriť nielen umiestnenie náhodnej premennej, ale aj to, ako sú jej hodnoty rozhádzané. Charakteristikou, ktorá popisuje, ako je náhodná premenná rozptýlená okolo strednej hodnoty, je smerodajná odchýlka, ktorú vypočítame pomocou disperzie náhodnej premennej.

Disperzia náhodnej premennej $\mathbb{X}$ sa označuje $D(\mathbb{X})$ a vypočíta sa ako

$$D(\mathbb{X}) = \sum_k (x_k - E(\mathbb{X}))^2 \cdot p_k \tag{5.2}$$

kde x_k sú hodnoty náhodnej premennej a $p_k = P(\mathbb{X} = x_k)$ sú pravdepodobnosti ich výskytu.

Vlastnosti disperzie $D(\mathbb{X})$ môžeme odvodiť od vlastností strednej hodnoty.

- $D(c) = 0$, kde c je nenáhodná hodnota, (alebo inak, táto náhodná premenná nadobúda pri všetkých pokusoch iba jednu hodnotu c).
- $D(\cdot \mathbb{X}) = c^2 \cdot D(\mathbb{X})$
- ak sú $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ nezávislé, potom $D(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = D(\mathbb{X}) + D(\mathbb{Y})$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej $\mathbb{X}$ sa označuje $\sigma_\mathbb{X}$ a vypočíta sa ako

$$\sigma_\mathbb{X} = \sqrt{D(\mathbb{X})}$$

Tvrdenie 5.1.1 (Čebyševova nerovnosť) *Pre disperziu náhodnej premennej $\mathbb{X}$ a pre ľubovoľné kladné číslo b platí:*

$$P((\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))^2 \geq b) \leq \frac{D(\mathbb{X})}{b} \tag{5.3}$$

Dôkaz:

$$D(\mathbb{X}) = \sum_k (x_k - E(\mathbb{X}))^2 \cdot p_k \geq$$

$$\geq \sum_{k;\,(x_k-E(\mathbb{X}))^2 \geq b} (x_k - E(\mathbb{X}))^2 \cdot p_k \geq$$

$$\geq \sum_{k;\,(x_k-E(\mathbb{X}))^2 \geq b} b \cdot p_k = b \cdot P((\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))^2 \geq b)$$

Ak vydelíme obe strany nerovnosti parametrom b, dostaneme dokazovanú nerovnosť 5.3. □

Tvrdenie 5.1.2 *Ak za b v nerovnosti 5.3 dosadíme hodnotu $c^2 \cdot D(\mathbb{X})$ dostaneme nerovnosť:*

$$P(|\mathbb{X}-E(\mathbb{X})| \geq c \cdot \sigma) \leq \frac{1}{c^2} \tag{5.4}$$

Pomocou nerovnosti 5.4 sa dá dokázať, že takmer 90 % realizácií náhodnej premennej $\mathbb{X}$ leží v intervale $\langle E(\mathbb{X}) - 3 \cdot \sigma, E(\mathbb{X}) + 3 \cdot \sigma \rangle$.

Dosaďme do nerovnosti 5.4hodnotu $c = 3$. Dostaneme:

$$P(|\mathbb{X}-E(\mathbb{X})| \geq 3 \cdot \sigma) \leq \frac{1}{9}$$

To znamená, že pravdepodobnosť, že hodnota náhodnej premennej bude od strednej hodnoty ďalej ako $3 \cdot \sigma$ je menej ako 1/9. Teda 8/9 všetkých hodnôt náhodnej premennej je v intervale

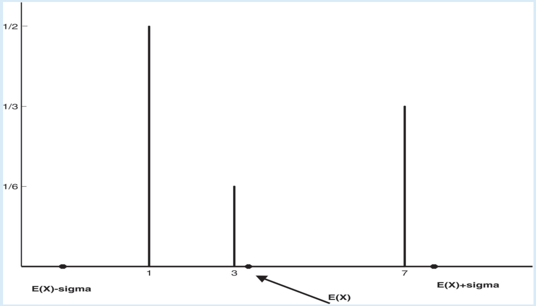
$\langle E(\mathbb{X}) - 3 \cdot \sigma, E(\mathbb{X}) + 3 \cdot \sigma \rangle$, to je približne 89 % realizácií.

Dosaďme do nerovnosti 5.4hodnotu $c = 2$. Dostaneme:

$$P(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| \geq 2 \cdot \sigma) \leq \frac{1}{4}$$

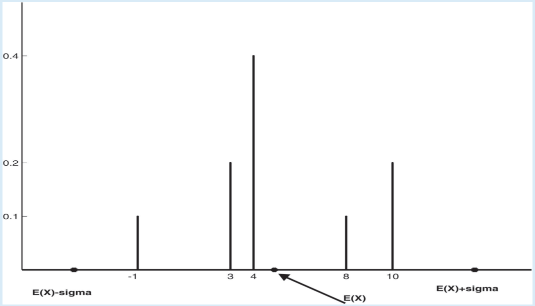
To znamená, že pravdepodobnosť, že hodnota náhodnej premennej bude od strednej hodnoty ďalej ako $2 \cdot \sigma$ je menej ako 1/4. Teda 3/4 všetkých hodnôt náhodnej premennej je v intervale $\langle E(\mathbb{X}) - 2 \cdot \sigma, E(\mathbb{X}) + 2 \cdot \sigma \rangle$, to je 75 % realizácií.

Na obrázkoch 5.9, 5.10 a 5.11 sú znázornené rôzne náhodné premenné so svojimi rozdeleniami pravdepodobnosti, vyznačenou strednou hodnotou a smerodajnou odchýlkou σ.

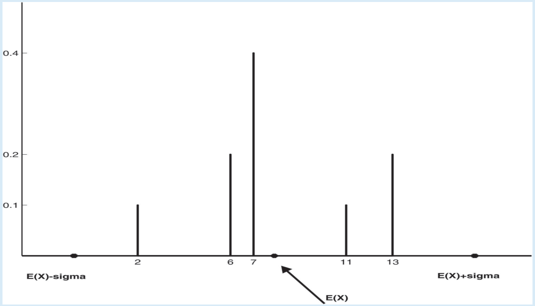


Obrázok 5.9: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s hodnotami 1, 3, 7, pravdepodobnosťami 1/2, 1/6, 1/3 a jej stredná hodnota $E(\mathbb{X})$ a interval $(E(\mathbb{X}) - \sigma, E(\mathbb{X}) + \sigma)$

Porovnajte obrázky 5.10 a 5.11. Náhodné premenné na týchto obrázkoch majú rovnakú smerodajnú odchýlku. Prečo?



Obrázok 5.10: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s hodnotami -1, 3, 4, 8, 10, pravdepodobnosťami 0.1, 0.2, 0.4, 0.1, 0.2, jej stredná hodnota $E(\mathbb{X})$ a interval $(E(\mathbb{X}) - \sigma, E(\mathbb{X}) + \sigma)$



Obrázok 5.11: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s hodnotami 2, 6, 7, 11, 13, pravdepodobnosťami 0.1, 0.2, 0.4, 0.1, 0.2, jej stredná hodnota $E(\mathbb{X})$ a interval $(E(\mathbb{X}) - \sigma, E(\mathbb{X}) + \sigma)$

5.1.3. Príklady

1. Aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná popisujúca hod hracou kockou?
2. Aký je súčet pravdepodobností všetkých hodnôt náhodnej premennej?
3. Hráči A a B hrajú hazardnú hru s kockou. A dá hráčovi B 9 Eur, ak na kocke padne 5 alebo 6. B dá hráčovi A 4 Eurá, ak na kocke padne 1, 2 alebo 3. Ak na kocke padne 4, peniaze sa nepresúvajú. Ktorý z hráčov A, B má väčšiu šancu vyhrať a prečo?
4. Hráči A a B hrajú hazardnú hru s kockou. A dá hráčovi B 8 Eur, ak na kocke padne 5 alebo 6. B dá hráčovi A 5 Eur, ak na kocke padne 1, 2, 3 alebo 4. Nakreslite rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{X}$, ktorá popisuje finančný zisk hráča A. Ďalej nakreslite rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{Y}$, ktorá popisuje finančnú stratu hráča B.
5. Aká je stredná hodnota náhodnej premennej, popisujúcej výsledok hodu pravidelnou kockou, keď na stenách kocky sú čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6?
6. Aká je stredná hodnota náhodnej premennej, popisujúcej výsledok hodu pravidelnou kockou, keď na stenách kocky sú čísla 2, 4, 6, 8, 10, 12?
7. Aká je stredná hodnota náhodnej premennej, popisujúcej výsledok hodu pravidelnou kockou, keď na stenách kocky sú čísla 1, 4, 9, 16, 25, 36?
8. Navrhnite náhodnú premennú, ktorá nadobúda 10 navzájom rôznych hodnôt a jej stredná hodnota je 5.
9. Navrhnite náhodnú premennú, ktorá popisuje platy zamestnancov nejakej firmy. Urobte to tak, aby medián bol väčší ako modus a menší ako aritmetický priemer.
10. Navrhnite náhodnú premennú, ktorej medián je väčší ako jej stredná hodnota.
11. Navrhnite náhodnú premennú, ktorej modus je menší ako jej stredná hodnota.

12. Navrhnite náhodnú premennú, ktorej 0.95-kvantil je menší ako aspoň polovica hodnôt náhodnej premennej.

5.1.3.1. Riešenie príkladov

1. Náhodná premenná popisujúca hod hracou kockou môže mať rôzne rozdelenia pravdepodobnosti. Záleží to na tom, aký náhodný pokus vlastne realizujeme.

   V prípade, že náhodná premenná popisuje, či na kocke padne, alebo nepadne šestka, náhodná premenná bude mať dve hodnoty. Ich pravdepodobnosti budú $\frac{1}{6}$ a $\frac{5}{6}$. Číselné hodnoty prislúchajúce udalostiam 'padla šestka' a 'nepadla šestka' je možné zvoliť ľubovoľne. Teda hodnoty tejto náhodnej premennej môžu byť '0' a '1', ale napríklad aj '3.1415' a '2.7183'.

   $\mathbb{X}$:

k	0	1
$p(k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

   $\mathbb{Y}$:

k	3.1415	2.7183
$p(k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

   Iné rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná, ktorá popisuje, čo (aké číslo) na kocke padlo. Možností, aké číslo padne, je 6 a každá je rovnako pravdepodobná (v prípade, že je kocka 'spravodlivá'). Pravdepodobnosť každej z udalostí bude $\frac{1}{6}$. Hodnoty takejto náhodnej premennej sú obvykle $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Aj v tomto prípade však môžeme zvoliť iné hodnoty náhodnej premennej. Na kocke napríklad nahradíme čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6$, číslami $11, 12, 13, 14, 15, 16$. Dostaneme inú náhodnú premennú s rovnakým rozdelením pravdepodobnosti, rovnakou disperziou, ale inou strednou hodnotou.

   $\mathbb{V}$:

k	1	2	3	4	5	6
$p(k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\mathbb{Z}$:

k	11	12	13	14	15	16
$p(k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ďalšie rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná, ktorá popisuje, na koľkýkrát padne v sérii nezávislých hodov na kocke po prvýkrát šestka. Teda, či šestka padne na prvý pokus, alebo až na druhý pokus, alebo až na 15-ty.
Pravdepodobnosť, že padne na prvý pokus, je $\frac{1}{6}$, na druhý pokus to bude v situácii, keď prvý krát nepadne a druhý krát padne. Dostaneme 36 dvojíc, ako mohli dva po sebe idúce pokusy vypadať, sú to možnosti

$$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\dots$$

Z toho iba 5 zodpovedá očakávanej udalosti. Sú to výsledky

$$(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)$$

Teda na druhý pokus padne šestka s pravdepodobnosťou $\frac{5}{36}$.
Na tretí pokus to bude $\frac{25}{216}$, na 15-ty $\frac{5^{14}}{6^{15}}$. Samozrejme 15-tym pokusom to nekončí a pokusy budú pokračovať ďalej. Môže sa stať, že šestka na kocke padne až na 30-ty pokus, aj keď pravdepodobnosť tejto udalosti je dosť malá. Nemôžme vlasne určiť hranicu, za ktorú sa s hádzaním nedostaneme. Teoreticky je vždy šanca, že akúkoľvek hranicu pri nejakom hádzaní prekonáme. (Pravdepodobnosť nejakého počtu hodov je $\frac{5}{6}$ násobok počtu hodov o 1 menšieho. Teda uvedená pravdepodobnosť geometricky klesá).

$\mathbb{W}$:

k	1	2	3	4	5	...	n	...
$p(k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$	...	$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$	...

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. Súčet pravdepodobností všetkých hodnôt náhodnej premennej je 1. Toto tvrdenie platí iba pre náhodné premenné, ktoré majú najviac spočítateľne veľa hodnôt.

   Súčet pravdepodobností všetkých hodnôt náhodnej premennej je pravdepodobnosť udalosti Ω, ktorá vznikne ako zjednotenie všetkých elementárnych udalostí.

   Presvedčme sa, že pre náhodné premenné z predošlej úlohy naozaj platí, že súčet pravdepodobností všetkých ich hodnôt je 1.

$$P(\mathbb{X}=0)=\frac{1}{6} \qquad P(\mathbb{X}=1)=\frac{5}{6} \qquad \frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$

$$P(\mathbb{Y}=3.1415)=\frac{1}{6} \qquad P(\mathbb{Y}=2.7183)=\frac{5}{6} \qquad \frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$

$$P(\mathbb{V}=1)=\frac{1}{6}\,, \quad P(\mathbb{V}=2)=\frac{1}{6}\,, \quad P(\mathbb{V}=3)=\frac{1}{6}\,, \quad P(\mathbb{V}=4)=\frac{1}{6}\,,$$
$$P(\mathbb{V}=5)=\frac{1}{6}\,, \quad P(\mathbb{V}=6)=\frac{1}{6}\,, \quad \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

$$P(\mathbb{Z}=11)=\frac{1}{6}\,, \quad P(\mathbb{Z}=12)=\frac{1}{6}\,, \quad P(\mathbb{Z}=13)=\frac{1}{6}\,, \quad P(\mathbb{Z}=14)=\frac{1}{6}\,,$$
$$P(\mathbb{Z}=15)=\frac{1}{6}\,, \quad P(\mathbb{Z}=16)=\frac{1}{6}\,, \quad \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

$$P(\mathbb{W}=1)=\frac{1}{6}\,, \quad P(\mathbb{W}=2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\,, \quad P(\mathbb{W}=3)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2,$$
$$P(\mathbb{W}=4)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3,\ldots,P(\mathbb{W}=n)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1},\ldots,$$

Teraz to už nie je evidentné, ale dá sa spočítať, že aj tento súčet je 1:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5+\cdots=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^4+\left(\frac{5}{6}\right)^5+\dots\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}}=1$$

Použili sme vzťah na výpočet súčtu geometrického radu s kvocientom $5/6$.

3. Hráči A a B hrajú hazardnú hru s kockou. A dá hráčovi B 9 Eur, ak na kocke padne 5 alebo 6. B dá hráčovi A 4 Eurá, ak na kocke padne 1, 2 alebo 3. Ak na kocke padne 4, peniaze sa nepresúvajú. Väčšiu šancu vyhrať má hráč podľa toho, koľko hier sa odohrá. Ak sa bude hrať iba jedna hra, tak má väčšiu šancu hráč A, pretože pravdepodobnosť, že vyhrá sú $3/6$, hráč B vyhrá s menšou pravdepodobnosťou, budú to iba $2/6$. S pravdepodobnosťou $1/6$ nevyhrá nikto.

   Situácia sa zmení, keď budú hrať napríklad 600 hier. V tom prípade hráč A vyhrá približne 300 z nich a hráč B vyhrá približne 200. Zisk hráča A bude približne 1200 Eur, zisk hráča B bude približne 1800 Eur. Tieto čísla nie sú presné, ale aj tak vidíme, že pri 600 hrách pravdepodobne vyhrá hráč B. Presne nám o rozložení šance na výhru hovorí teoretický výsledok, stredná hodnota rozdelenia $\mathbb{X}$, ktoré popisuje napríklad finančný zisk hráča A.

   Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{X}$ je popísané nasledujúcou tabuľkou.

   $\mathbb{X}$:

k	-9	0	4
$p(k)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

   Stredná hodnota $\mathbb{X}$ je

$$E\left(\mathbb{X}\right)=-9\cdot\frac{2}{6}+0\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{2}{6}=1$$

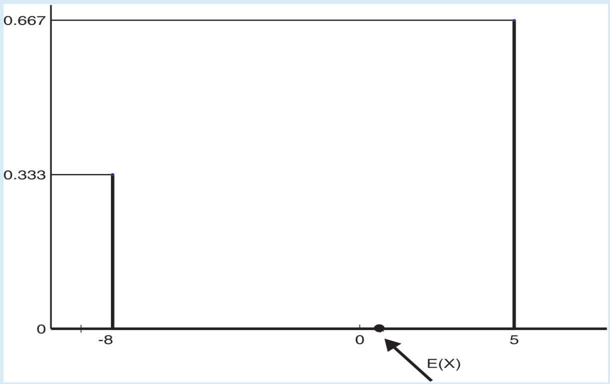
To znamená, že na jednu hru získa hráč A jedno Euro. To je samozrejme pravda len pri dostatočne veľkom počte hier. Odpoveď na to, koľko je to dostatočný počet, dá matematická štatistika. S takýmito odhadmi musia dostatočne presne pracovať poisťovne alebo lotérie. Ak teda chcú mať zisk.

4. Hráči A a B hrajú hazardnú hru s kockou. A dá hráčovi B 8 Eur, ak na kocke padne 5 alebo 6. B dá hráčovi A 5 Eur, ak na kocke padne 1, 2, 3 alebo 4. Náhodná premenná $\mathbb{X}$, ktorá popisuje finančný zisk hráča A, má dve hodnoty. Sú to čísla -8 a 5.

   Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{X}$ je popísané nasledujúcou tabuľkou alebo znázornené na obrázku 5.12.

$\mathbb{X}$:

k	-8	5
$p(k)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$



Obrázok 5.12: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s hodnotami -8, 5 a pravdepodobnosťami 2/6 a 4/6

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Náhodná premenná $\mathbb{Y}$ popisujúca finančnú stratu hráča B má rovnaké hodnoty aj rovnaké rozdelenie pravdepodobnosti ako náhodná premenná $\mathbb{X}$, ktorá popisuje finančný zisk hráča A. („Strata -8" znamená, že hráč B stratil -8, teda dostal 8. To sa stane, ak na kocke padne 5 alebo 6.)

$\mathbb{Y}$:

k	-8	5
$p(k)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$

5. Náhodná premenná $\mathbb{Z}$ popisujúca výsledok hodu pravidelnou kockou môže byť zadaná rôzne. Najčastejšie sa pod hodom kockou rozumie pokus, v ktorom čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 nastanú každé s pravdepodobnosťou 1/6. Stredná hodnota náhodnej premennej $\mathbb{Z}$ je

$$E(\mathbb{Z}) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

6. Nech náhodná premenná $\mathbb{U}$ popisuje pokus, v ktorom čísla 2, 4, 6, 8, 10, 12 nastanú každé s pravdepodobnosťou 1/6. Stredná hodnota náhodnej premennej $\mathbb{U}$ je

$$E(\mathbb{U}) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{6} = 7$$

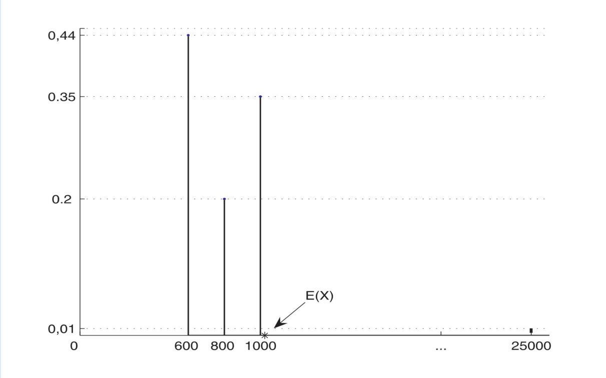
7. Nech náhodná premenná $\mathbb{W}$ popisuje pokus, v ktorom čísla 1, 4, 9, 16, 25, 36 nastanú každé s pravdepodobnosťou 1/6. Stredná hodnota náhodnej premennej $\mathbb{W}$ je

$$E(\mathbb{W}) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = 15.167$$

8. Náhodná premenná $\mathbb{V}$, ktorá nadobúda 10 navzájom rôznych hodnôt a jej stredná hodnota je 5, je napríklad náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty -2, -1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, každú z nich s pravdepodobnosťou 0.1 .

9. Predpokladajme, že vo firme sú 4 druhy platov. 44 % zamestnancov má platy v hodnote 600 euro, 35 % zamestnancov má platy v hodnote 800 euro, 20 % zamestnancov má platy v hodnote 1000 Euro,a 1 % zamestnancov má platy v hodnote 25 000 euro.

   Náhodná premenná $\mathbb{X}$, ktorá popisuje platy zamestnancov tejto firmy, bude nadobúdať hodnoty 500, 800, 1000 a 25000.



Obrázok 5.13: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s hodnotami 600, 800, 1000 a 25000 a pravdepodobnosťami 0.44, 0.2, 0.35 a 0.01

$\mathbb{X}$:

k	600	800	1000	25000
$p(k)$	0.44	0.2	0.35	0.01

$p(k)$ naozaj tvoria rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej, pretože

$$0.44 + 0.2 + 0.35 + 0.01 = 1$$

Skontrolujeme, či je medián naozaj väčší ako modus a menší ako aritmetický priemer.

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 174 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$Me(\mathbb{X}) = 800, \qquad Mo(\mathbb{X}) = 600, \qquad \overline{\mathbb{X}} = 1024$$

Teda naozaj platí,

$$Me(\mathbb{X}) > Mo(\mathbb{X}) \qquad \text{a} \qquad Me(\mathbb{X}) < \overline{\mathbb{X}}$$

Všetky tieto čísla (medián, modus, priemer) poukazujú na polohu hodnôt náhodnej premennej. Každá však hovorí niečo iné. To, že zamestnancovi tejto firmy ponúknu podpriemerný plat, môže byť najlepšia ponuka (až 1024 euro). Ak mu ponúknu väčší plat než má najväčšia skupina zamestnancov (600 euro), môže to byť horšie, než keď dostane plat väčší, než má polovica zamestnancov (800 euro).

Hoci priemer vyzerá ako najskresľujúcejší odhad strednej hodnoty, má aj svoje výhody. Ak totiž poznáme celkový počet zamestnancov, môžeme pomocou priemeru zistiť celkovú sumu vyplatených peňazí. Pomocou mediánu, ani modusu sa nám to nepodarí.

10. Náhodná premenná, ktorej medián je väčší ako jej stredná hodnota je napríklad náhodná premenná $\mathbb{Y}$, ktorá nadobúda hodnoty 500, 800, 900.

$\mathbb{Y}$:

k	500	800	900
$p(k)$	0.4	0.11	0.49

$p(k)$ naozaj tvoria rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej, pretože

$$0.4 + 0.11 + 0.49 = 1$$

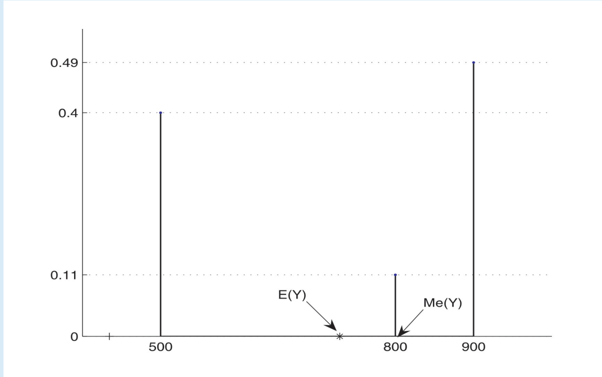
Stredná hodnota tejto náhodnej premennej je $E(\mathbb{Y}) = 729$ a jej medián je $Me(\mathbb{Y}) = 800$:

$$E(\mathbb{Y}) = 0.4 \cdot 500 + 0.11 \cdot 800 + 0.49 \cdot 900 = 729$$

$$Me(\mathbb{Y}) = 800, \qquad \text{pretože} \qquad P(\mathbb{Y} \leq 800) = \frac{1}{2}$$

Teda naozaj platí

$$Me(\mathbb{Y}) > E(\mathbb{Y})$$



Obrázok 5.14: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{Y}$ s hodnotami 500, 800, 900 a pravdepodobnosťami 0.4, 0.11, 0.49

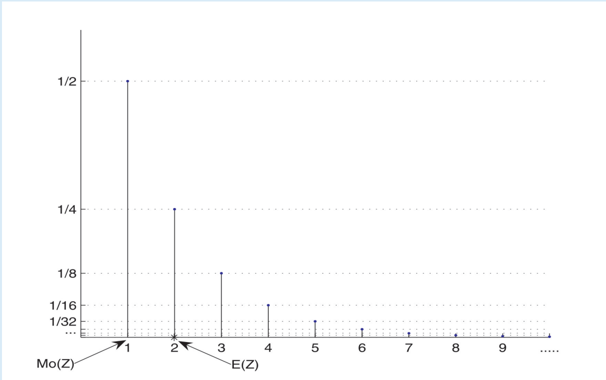
11. Náhodná premenná, ktorej modus je menší ako jej stredná hodnota je napríklad náhodná premenná $\mathbb{Z}$, ktorá popisuje, na koľký pokus padne na minci znak. Táto náhodná premenná nadobúda hodnoty 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... s pravdepodobnosťami ako udáva obrázok 5.15 alebo tabuľka.

$\mathbb{Y}:$

k	1	2	3	4	5	6	...	n	...
$p(k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...

To, že $p(k)$ naozaj tvoria rozdelenie pravdepodobnosti treba dokázať. Treba ukázať, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(k) = 1 \tag{5.5}$$



Obrázok 5.15: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{Z}$ s hodnotami 1, 2, 3, 4,… a pravdepodobnosťami $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Stredná hodnota tejto náhodnej premennej je $E(\mathbb{Z}) = 2$ a jej modus je $Mo(\mathbb{Z}) = 1$. Teda naozaj platí

$$Mo(\mathbb{Z}) < E(\mathbb{Y})$$

Výpočty:
Súčet nekonečného geometrického radu 5.5 sa dá spočítať nasledovne (pozor, tento postup niekedy dáva nezmyselné výsledky). Označme

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} p(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

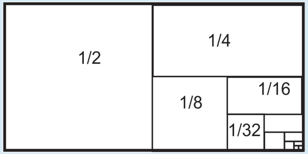
$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = \frac{1}{2}(1 + S)$$

$$S = \frac{1}{2}(1+S)$$
$$S = 1$$

Rovnaký výsledok uvidíme, keď si pozrieme obrázok 5.16, kde vidíme čokoládu rozdelenú na časti. Sú to postupne:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Tieto kúsky dohromady vytvoria celú čokoládu.



Obrázok 5.16: Súčet hodnôt $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

$$E(\mathbb{Z}) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \cdot p(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2^k} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \dots =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + 1 = 2$$

12. Náhodná premenná, ktorej 0.95-kvantil je menší ako aspoň polovica hodnôt tejto náhodnej premennej, je napríklad náhodná premenná $\mathbb{Z}$, ktorá je riešením predchádzajúcej

úlohy. 0.95-kvantil náhodnej premennej $\mathbb{Z}$ je hodnota medzi $z_{0.95} = 4$ a $z_{0.95} = 5$, pretože má platiť $P(\mathbb{Z} \leq z_\alpha) = \alpha$, teda $P(\mathbb{Z} \leq z_{0.95}) = 0.95$ Platí však, že

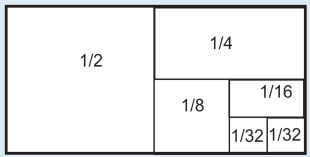
$$P(\mathbb{Z} \leq 4) = 0.9375 \leq 0.95 \quad \text{a} \quad P(\mathbb{Z} \leq 5) = 0.9688 \geq 0.95$$

Ak máme vybrať ako kvantil niektorú z hodnôt náhodnej premennej, určíme podľa charakteru úlohy, ktoré z čísel 4 alebo 5 to bude.

V oboch prípadoch však bude splnená úloha zo zadania, lebo hodnota 5 je menšia ako nekonečne veľa hodnôt náhodnej premennej $\mathbb{Z}$ a väčšia ako 4 hodnoty. Teda hodnota 5 je naozaj menšia ako aspoň polovica hodnôt náhodnej premennej $\mathbb{Z}$. Skutočne vidíme $1, 2, 3, 4, |\underline{\mathbf{5}}|, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$

$$P(\mathbb{Z} \leq z_\alpha) = \sum_{k; z_k \leq z_\alpha} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^N}$$

Na výpočet $P(\mathbb{Z} \leq z_\alpha)$ sme použili obrázok 5.17, z ktorého je vidno, že súčet prvých k kúskov čokolády (= pravdepodobností prvých k hodnôt náhodnej premennej $\mathbb{Z}$) je rovný celej čokoláde bez kúsku, ktorý má veľkosť posledného sčítanca.



Obrázok 5.17: Súčet hodnôt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 1 - \frac{1}{32}$

Teda platí

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1 \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1 \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=1 \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$$

Odtiaľ:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^N}$$

5.1.4. Úlohy

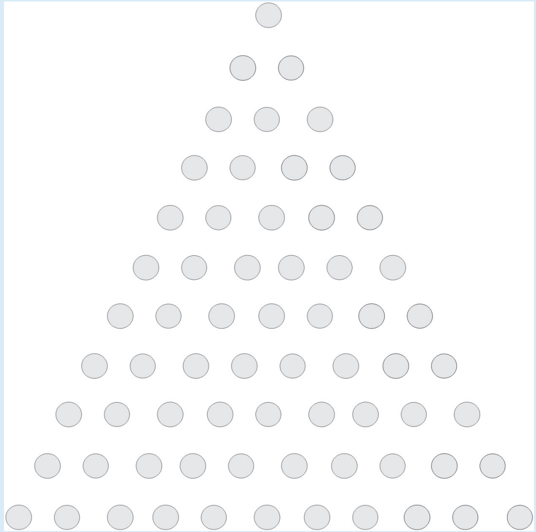
1. Auto musí prejsť 4 križovatky riadené semafórmi. Na každom zo semafórov je buď červená alebo zelená s pravdepodobnosťou 0.5 (oranžovú neuvažujeme). Označme ako náhodnú premennú počet križovatiek prejdených na zelenú (po prvú, na ktorej musí zastať, kvôli červenej, túto už nepočítame). Určte rozdelenie pravdepodobnosti tejto náhodnej premennej a znázornite ho graficky.

2. Auto má prejsť 6 križovatiek riadených semafórmi. Na každom zo semafórov je buď červená, oranžová alebo zelená s pravdepodobnosťou $\frac{1}{3}$. Označme ako náhodnú premennú počet križovatiek prejdených na zelenú (po prvú na ktorej musí zastať, kvôli červenej, alebo oranžovej). Určte rozdelenie pravdepodobnosti tejto náhodnej premennej a znázornite ho graficky.

3. Znudený stredoškolák poslal na 4 rôzne adresy spam. Pravdepodobnosť, že spam prejde na miesto určenia, je vždy 0.3. Určte rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej, ktorá popisuje, na koľko miest bol spam doručený.

4. Pozorovaním sa zistilo, že keď futbalista Jano vystrelí na bránu, dá gól s pravdepodobnosťou 0.1. Popíšte náhodnú premennú, ktorá popisuje, koľko zbytočných striel futbalista Jano spotrebuje, kým trafí bránu. Koľko priemerne zbytočných striel spotrebuje Jano na jeden gól?

5. Galtonova doska (Galton board), je zariadenie, pomocou ktorého budeme modelovať rozdelenie náhodnej premennej $\mathbb{G}$. Toto zariadenie navrhol sir Francis Galton [2]. Simulácia spočíva v prechode veľkého množstva zŕn cez dosku, na ktorej sú kolíky, usmerňujúce pohyb zŕn. Okolo každého kolíka prejde zrno vpravo alebo vľavo s rovnakou pravdepodobnosťou. Ako budú vyzerať kôpky po presune 100 zŕn? A aké je rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{G}$, ktorá popisuje, s akou pravdepodobnosťou budú zrná v jednotlivých zásobníkoch na spodku Galtonovej dosky, znázornenej na obrázku 5.18?



Obrázok 5.18: Galtonova doska s pravdepodobnoťou 1/2 a počtom 10 radov kolíkov, spodný rad predstavuje 11 zásobníkov

5.1.4.1. Riešenie úloh

1. Náhodná premenná $\mathbb{X}$ popisuje počet križovatiek prejdených na zelenú (pokým po prvýkrát auto zastane na červenú). Križovatky sú dohromady 4, preto počet prejdených križovatiek môže byť 0, 1, 2, 3 alebo 4. Pravdepodobnosť, že náhodná premenná dosiahne hodnotu 0, je taká istá ako pravdepodobnosť, že na prvej križovatke bude červená. To je 1/2.

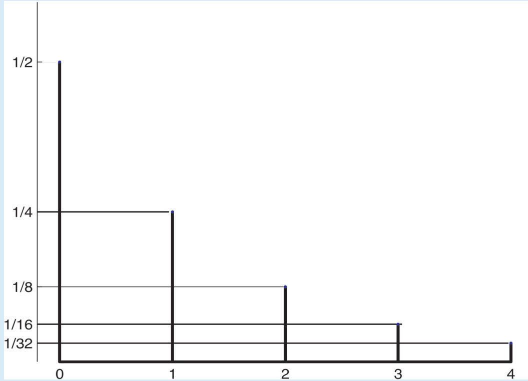
   Pravdepodobnosť, že náhodná premenná dosiahne hodnotu 1, je taká istá ako pravdepodobnosť, že na prvej križovatke bude zelená a potom na druhej červená. To je pravdepodobnosť 1/2, že na prvej križovatke bude zelená a z toho 1/2, že na druhej križovatke bude červená. Teda pravdepodobnosť, že náhodná premenná dosiahne hodnotu 1, je 1/4.

   Pravdepodobnosť, že náhodná premenná dosiahne hodnotu 2, je taká istá ako pravdepodobnosť, že na prvej križovatke bude zelená, na druhej zelená a potom na tretej červená. To je pravdepodobnosť 1/2, že na prvej križovatke bude zelená, z toho 1/2, že na druhej križovatke bude zelená a z toho 1/2, že na tretej križovatke bude červená. Teda pravdepodobnosť, že náhodná premenná dosiahne hodnotu 2, je $\frac{1}{8}$.
   Analogicky pravdepodobnosť, že náhodná premenná dosiahne hodnotu 3 je $\frac{1}{16}$ a pravdepodobnosť, že náhodná premenná dosiahne hodnotu 4 je $\frac{1}{32}$.

   Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{X}$, ktorá popisuje počet križovatiek prejdených na zelenú určuje tabuľka a obrázok 5.19.

   $\mathbb{X}$:

k	0	1	2	3	4
$p(k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$



Obrázok 5.19: Náhodná premenná popisujúca počet križovatiek prejdených na zelenú

2. Skôr ako vyriešime tento príklad, vrátime sa k príkladu 1. Jeho riešenie nie je správne. Súčet pravdepodobností všetkých hodnôt náhodnej premennej $\mathbb{X}$ v tomto riešení nie je 1.
   Chybný bol výpočet pravdepodobnosti, že auto prejde všetky križovatky na zelenú. Hodnota náhodnej premennej v tomto prípade bude 4, ale pravdepodobnosť bude rovná súčinu pravdepodobností, že na každej križovatke bude zelená, teda $\frac{1}{16}$.
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$
   Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{X}$, ktorá popisuje počet križovatiek (spomedzi 4) prejdených na zelenú určuje nasledovná tabuľka. $\mathbb{X}$:

k	0	1	2	3	4
$p(k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Súčet týchto zlomkov je skutočne 1, lebo platí:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=$$

$$=\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Veríme, že predošlá úloha nebude chápaná ako pokus zmiasť čitateľa, ale ako vážne varovanie pred unáhleným zovšeobecňovaním a pred nekritickou dôverou v tvrdenia autorít (kníh, spolužiakov, učiteľov, internetu).

Vráťme sa k riešeniu úlohy 2. V tejto úlohe má auto prejsť 6 križovatiek. Na každom zo semafórov je buď červená, oranžová alebo zelená s pravdepodobnosťou $\frac{1}{3}$. Náhodná premenná $\mathbb{Y}$ označuje počet križovatiek prejdených na zelenú (po prvú na ktorej musí zastať, kvôli červenej, alebo oranžovej).

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{Y}$ určuje tabuľka.

k	0	1	2	3	4	5	6
$p(k)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^6$

3. Určme hodnoty náhodnej premennej, ktorá popisuje na koľko miest bol spam doručený. Spam môže byť doručený na 0, 1, 2, 3 alebo 4 miesta.

0 miest znamená, že spam nebol doručený ani na miesto A, ani na miesto B, ani na miesto C, ani na miesto D. Pravdepodobnosť tejto udalosti je

$$0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 = 0.2401$$

1 miesto: spam bol doručený buď na miesto A, alebo na miesto B, alebo na miesto C, alebo na miesto D. Pravdepodobnosť tejto udalosti je

$$0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.3 =$$

$$= 4 \cdot 0.3 \cdot (0.7)^3 = 0.4116$$

2 miesta: spam bol doručený buď na miesta AB, alebo na miesta AC, alebo na miesta AD, alebo na miesta BC, alebo na miesta BC, alebo na miesta CD. Pravdepodobnosť tejto udalosti je

$$0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.3+$$

$$+0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 =$$

$$= 6 \cdot (0.3)^2 \cdot (0.7)^2 = \binom{4}{2} \cdot (0.3)^2 \cdot (0.7)^2 = 0.2646$$

3 miesta: spam bol doručený buď na miesta ABC, alebo na miesta ABD, alebo na miesta ACD, alebo na miesta BCD.
Pravdepodobnosť tejto udalosti je

$$0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3+$$

$$+0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 4 \cdot (0.3)^3 \cdot 0.7 = \binom{4}{3} \cdot (0.3)^3 \cdot (0.7)^1 = 0.0756$$

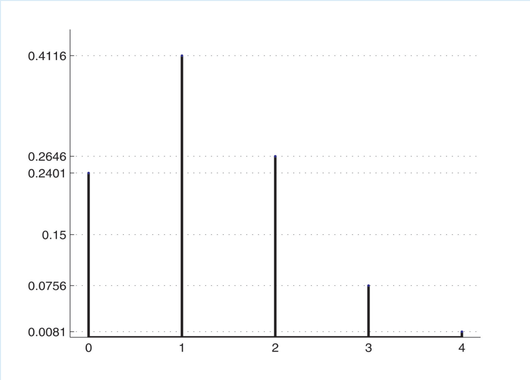
4 miesta: spam bol doručený buď na všetky štyri miesta ABCD. Pravdepodobnosť tejto udalosti je

$$0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 1 \cdot (0.3)^4 = \binom{4}{4} \cdot (0.3)^4 \cdot (0.7)^0 = 0.0081$$

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{W}$, ktorá popisuje, na koľko miest bol spam doručený, určuje tabuľka a obrázok 5.20.

$\mathbb{W}$:

k	0	1	2	3	4
$p(k)$	0.2401	0.4116	0.2646	0.0756	0.008



Obrázok 5.20: Náhodná premenná popisujúca počet miest, na ktoré bol doručený spam

4. Kým trafí bránu, potrebuje Jano niekoľkokrát zbytočne vystreliť na bránu. Napríklad ak dva razy netrafí a potom trafí, tak spotreboval dve zbytočné strely. Náhodná premenná $\mathbb{Z}$, ktorá popisuje, koľko zbytočných striel futbalista Jano potrebuje na trafenie

brány, môže nadobudnúť hodnoty 0, 1, 2, 3, 4, ...
Pravdepodobnosť, že na strelenie gólu použije 0 zbytočných striel, je zároveň pravdepodobnosť, že trafí bránu na prvýkrát, teda

$$p(0) = \frac{1}{10}$$

Pravdepodobnosť, že na strelenie gólu použije 1 zbytočnú strelu, je zároveň pravdepodobnosť, že trafí bránu na druhýkrát, teda najprv bránu netrafí a potom ju trafí.

$$p(1) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10}$$

Analogicky:

$$p(2) = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10}$$

$$p(3) = \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10}$$

$$\dots$$

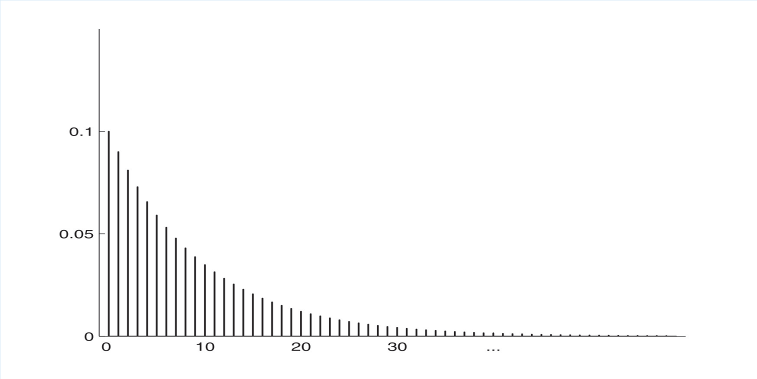
Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{Z}$, ktorá popisuje, koľko zbytočných striel treba na trafenie brány, určuje tabuľka a obrázok 5.21.

$\mathbb{Z}$:

k	0	1	2	3	4	...
$p(k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^4 \cdot \frac{1}{10}$	...

Na to, aby to naozaj bolo rozdelenie pravdepodobnosti treba ukázať, že súčet pravdepodobností všetkých hodnôt náhodnej premennej je 1.

$$\frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^4 \cdot \frac{1}{10} + \dots =$$



Obrázok 5.21: Náhodná premenná popisujúca, koľko zbytočných striel treba na trafenie brány

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \dots\right)\right)$$

Ak označíme $S = 1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \dots$, tak platí

$$S = 1 + \frac{9}{10} S$$

Odtiaľ $S = 10$ a preto súčet pravdepodobností je naozaj rovný 1.

Venujme sa teraz otázke, koľko priemerne striel spotrebuje Jano na jeden gól.

Priemer spomedzi hodnôt 0, 1, 2, 3, 4, ...spočítať nie je možné. Počet hodnôt je nekonečný, preto by sa priemer počítal nejako nasledovne:

$$\text{priemer zo } \mathbb{Z} = \frac{0+1+2+3+4+\dots}{\infty}$$

Tento výsledok nám o priemernom počte zbytočných striel veľa nepovie. Keby sme ale urobili 100 pokusov (pri ktorých by padlo 100 gólov) a zaznamenali by sme počet zbytočných striel pri každom góle, dostali by sme zrejme číslo, ktoré pravdepodobne nebude väčšie ako 30.

My sme urobili dve série po 100 pokusoch (=góloch) a dostali sme takéto výsledky:

14 8 12 13 12 2 24 11 3 10 2 3 1 1 2 1 3 2 1 2 20 10 9 3 3 18 11 6 6 6 1 6 4 4 10 39 5 9 35 10 5 2 2 70 13 17 1 1 6 12 17 8 21 1 11 3 12 2 5 0 12 7 5 16 4 2 19 1 7 5 1 13 31 0 3 2 7 3 5 3 5 2 14 8 2 10 2 6 7 5 12 2 2 4 4 15 0 6 15 8

Priemerná dĺžka spomedzi tejto série 100 pokusov je 8.26.

2 0 28 17 11 8 12 6 1 0 17 0 4 4 13 5 2 3 3 13 8 30 5 1 1 5 5 2 2 22 9 2 1 20 2 5 6 1 5 33 13 17 22 2 2 3 7 0 10 20 2 9 15 7 7 1 4 8 4 32 38 0 12 7 49 2 30 20 14 1 7 29 45 5 0 53 4 11 2 9 20 16 13 28 12 2 2 20 20 7 0 2 16 7 22 6 6 12 4 0

Priemerná dĺžka spomedzi tejto série 100 pokusov je 10.52.

Tieto čísla sú odhadmi nejakého teoretického priemeru, ktorý sa nazýva stredná hodnota náhodnej premennej.

Dá sa dokázať, že čím viac pokusov urobíme, tým ich priemer bude bližšie k tejto teoretickej strednej hodnote. Urobili sme preto ešte ďalšiu sériu, ktorá obsahovala 10 000 gólov. Jednotlivé čísla vypisovať nebudeme, ale ich priemerná hodnota vyšla 9.1301.

Tvrdenie 5.1.3 (Zákon veľkých čísel) *Pri veľkom počte nezávislých pokusov je veľmi pravdepodobné, že relatívna početnosť sa blíži k teoretickej hodnote pravdepodobnosti.*

Skúsime teraz vypočítať teoretickú hodnotu stredného počtu zbytočných striel. Je jasné, že pokus v ktorom bude 0 zbytočných striel nastane častejšie, ako pokus v ktorom bude 1 000 000 zbytočných striel. Dokonca platí, že pokus v ktorom bude 0 zbytočných striel nastane častejšie, ako pokus v ktorom budú 2 zbytočné strely. Je to preto, že pravdepodobnosť, že Jano trafí bránu na prvý krát (minie 0 zbytočných striel) je

$$\frac{1}{10}$$

Pravdepodobnosť, že Jano trafí bránu na druhý krát (minie 1 zbytočnú strelu), teda, že najprv netrafí a potom trafí, je

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}$$

Na tretí krát:

$$\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}$$

Vážený priemer z týchto hodnôt je

$$E(\mathbb{X})=\sum_k z_k\cdot p(k)=0\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{10}+\cdots=\heartsuit$$

Potrebujeme teda vypočítať nekonečný súčet, preto urobíme niekoľko úprav:

$$\begin{array}{llllll}
\heartsuit = & \tfrac{1}{10}(\tfrac{9}{10}+ & 2\cdot(\tfrac{9}{10})^2+ & 3\cdot(\tfrac{9}{10})^3+ & 4\cdot(\tfrac{9}{10})^4+ & \ldots)= \\
= & \tfrac{1}{10}\cdot(\tfrac{9}{10}+ & (\tfrac{9}{10})^2+ & (\tfrac{9}{10})^3+ & (\tfrac{9}{10})^4+ & \ldots) \\
 & \tfrac{1}{10}(& \tfrac{9}{10}(\tfrac{9}{10}+ & (\tfrac{9}{10})^2+ & (\tfrac{9}{10})^3+ & \ldots)+ \\
 & \tfrac{1}{10}(& & (\tfrac{9}{10})^2(\tfrac{9}{10}+ & (\tfrac{9}{10})^2+ & \ldots)+\cdots=
\end{array}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 9 + \frac{1}{10}\frac{9}{10} \cdot 9 + \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot 9 + \cdots = \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \ldots$$

Ak posledný súčet označíme S, tak platí

$$S = \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \cdots =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{9}{10} \cdot (1 + S)$$

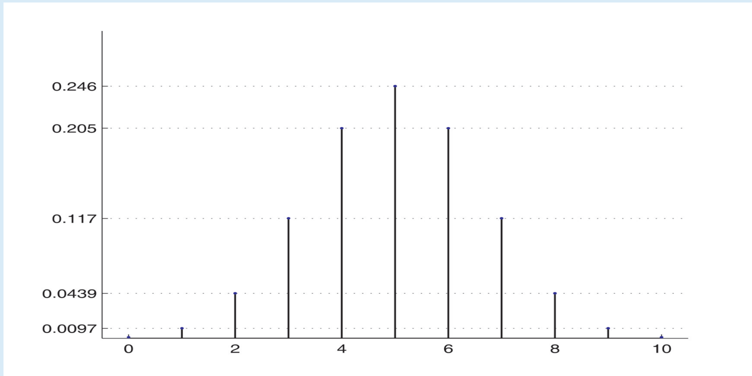
Dostali sme teda rovnicu $S = \frac{9}{10} \cdot (1 + S)$ z čoho $S = 9$.

Dôležitý je výsledok, že teoretická stredná hodnota vypočítaná na základe úvahy o tvare rozdelenia dáva skoro rovnaký výsledok (číslo 9) ako sme dostali pri vykonaní 10 000 pokusov.

Dobre odhadnutý tvar rozdelenia dokáže dať informáciu aj o pokusoch, ktoré ešte neboli vykonané.

5. Náhodná premenná $\mathbb{G}$ popisujúca Galtonovu dosku bude mať 11 hodnôt. Keby sme na vrchu dosky nasypali 1024 zŕn, tak teoreticky by sa na prvej úrovni rozdelili na dve skupiny po 512 zŕn, na druhej úrovni na tri skupiny po 256, 512 a 256 zŕn. Na tretej úrovni sa teoreticky rozdelia zrná na skupiny veľkosti 128, 384, 384 a 128. Postupne sa každá kôpka rozdelí na polovicu a vsype do priehradky na nasledujúcej úrovni. Na 11-tej úrovni bude v jednotlivých priehradkách 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 zŕn. Pravdepodobnosť, že zrno skončí v k-tej priehradke, je určená tabuľkou a obrázkom 5.22.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(k)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$210 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$252 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$210 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$



Obrázok 5.22: Náhodná premenná popisujúca koľko zŕn sa dostane do jednotlivých priehradok na spodku Galtonovej dosky

5.2. Diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti

V matematickej analýze je okrem pojmu funkcia zavedený aj pojem elementárna funkcia. Nie, že by elementárne funkcie neboli funkciami, alebo naopak, že by boli výrazne jednoduchšie (elementárnejšie) ako iné funkcie. Ich jediné špecifikum je to, že sa používajú tak často, že je jednoduchšie o nich hovoriť, keď sú nejako pomenované. Je naozaj jednoduchšie povedať, že nejaký objekt je funkcia sínus, alebo graf funkcie sínus, než vysvetľovať spôsob, akým sa k takejto funkcii dostaneme (ako súčet nekonečného radu, ako riešenie diferenciálnej rovnice, ako záznam pohybu po kružnici v komplexnej rovine).

Analogicky k elementárnym funkciám, niektoré častejšie používané rozdelenia pravdepodobnosti, sú pomenované špecifickým názvom. Dôvodom je znovu potreba vynechať popis celého procesu, ktorým vznikajú tieto náhodné udalosti. Je možné vynechať proces zisťovania aké sú pravdepodobnosti jednotlivých elementárnych udalostí a aké je zobrazenie z priestoru náhodných udalostí do číselného oboru. Toto všetko je zhrnuté v názve rozdelenia náhodnej premennej. A rovnako, ako pri funkciách nie je nutné tieto názvy používať, ale ich použite môže uľahčiť dohovor o nich.

Pre každé rozdelenie uvedieme aj výpočet jeho strednej hodnoty a disperzie. Tieto výpočty budú niekedy jednoduchšie, niekedy náročnejšie. Neskôr, v prípade spojitých náhodných premenných už uvedieme len výsledok bez výpočtu.

V tejto časti sa budeme zaoberať náhodnými premennými **s diskrétnym rozdelením pravdepodobnosti**. Sú to také náhodné premenné, ktoré majú je konečný počet hodnôt, alebo v prípade nekonečného počtu je ich toľko ako prirodzených čísel.

5.2.0.2. Náhodná premenná s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbf{A}(p)$

Toto rozdelenie popisuje náhodnú premennú, ktorá nadobúda iba dve hodnoty. Hodnotu 1 nadobudne, keď nejaká udalosť A nastane, hodnotu 0 keď táto udalosť nenastane. Parameter

p náhodnej premennej označuje pravdepodobnosť nastatia udalosti A:

$$P(A) = p$$

Pravdepodobnosť, že udalosť A nenastane označujeme q:

$$P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

Zákon rozdelenia pravdepodobnosti alternatívneho rozdelenia môže byť vyjadrený ako:

- predpis:

$$P(\mathbb{X} = 1) = p \qquad P(\mathbb{X} = 0) = q \tag{5.6}$$

- tabuľka:

k	0	1
p_k	q	p

  Napríklad pre $p = 1/4$:

k	0	1
p_k	$3/4$	$1/4$

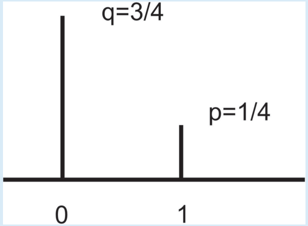
- diagram:

Že sa skutočne jedná o rozdelenie pravdepodobnosti, dokážeme tak, že sčítame pravdepodobnosti jednotlivých hodnôt náhodnej premennej. Aby to bolo rozdelenie pravdepodobnosti, ich súčet musí byť 1.
Platí:

$$p + q = p + (1 - p) = 1$$

Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti sú

$$E(\mathbb{X}) = p, \qquad D(\mathbb{X}) = p \cdot q \tag{5.7}$$



Obrázok 5.23: Alternatívne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $p = 1/4$

5.2.0.3. Náhodná premenná s binomickým rozdelením pravdepodobnosti, Bi(n, p)

Toto rozdelenie popisuje náhodnú premennú, ktorá popisuje počet nastatia udalosti A pri uskutočnení n rovnakých pokusov. Táto náhodná premenná nadobúda $n+1$ hodnôt. Hodnotu 0 nadobudne, keď udalosť A nastane v sérii n pokusov práve 0 krát, hodnotu 1 nadobudne, keď udalosť A nastane v sérii n pokusov práve 1 krát, atď. hodnotu n nadobudne, keď udalosť A nastane v sérii n pokusov práve n krát.

Parameter p náhodnej premennej označuje pravdepodobnosť nastatia udalosti A a pravdepodobnosť, že udalosť A nenastane označujeme q:

$$P(A) = p \qquad P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

Zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej s binomickým rozdelením pravdepodobnosti môže byť vyjadrený ako:

- predpis:

$$P(\mathbb{X} = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \tag{5.8}$$

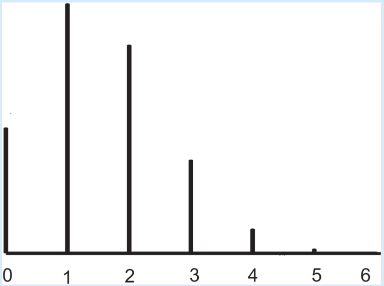
- tabuľka:

k	0	1	2	...	n
p_k	$\binom{n}{0}\cdot p^0 \cdot q^n$	$\binom{n}{1}\cdot p^1 \cdot q^{n-1}$	$\binom{n}{2}\cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	...	$\binom{n}{n}\cdot p^n \cdot q^0$

Napríklad pre $n = 6$ a $p = 1/4$:

k	0	1	2	3	4	5	6
p_k	0.178	0.356	0.2966	0.1318	0.0330	0.0044	0.0002

- diagram:



Obrázok 5.24: Binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami $n = 6$ a $p = 1/4$

Jedná sa skutočne o rozdelenie pravdepodobnosti, pretože podľa binomickej vety

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s binomickým rozdelením sú

$$E(\mathbb{X}) = n \cdot p, \qquad D(\mathbb{X}) = n \cdot p \cdot q \tag{5.9}$$

5.2.0.4. Náhodná premenná s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, Ge(p)

Toto rozdelenie popisuje náhodnú premennú, ktorá popisuje poradie pokusu, v ktorom nastala po prvý raz udalosť A, alebo v druhom prípade počet neúspešných pokusov, kým nastane udalosť A. Teraz sa budeme zaoberať prvým prípadom (poradie pokusu, v ktorom nastala udalosť A po prvý raz). Na bližšie porozumenie náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti odporúčame čitateľovi preštudovať kapitolu 4.

Náhodná premenná s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti môže nadobudnúť neohraničený počet hodnôt. Hodnotu 1 nadobudne, keď udalosť A nastane už v prvom pokuse. Hodnotu 2 nadobudne, keď udalosť A v prvom pokuse nenastala a nastala v druhom pokuse, atď. hodnotu k nadobudne, keď udalosť A v prvých $k-1$ pokusoch nenastala a nastane k-tom pokuse. Parameter p náhodnej premennej označuje pravdepodobnosť nastatia udalosti A:

$$P(A) = p$$

Zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti môže byť vyjadrený ako:

- predpis:

$$P(\mathbb{X} = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \tag{5.10}$$

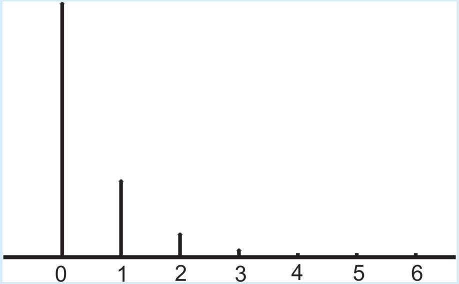
- tabuľka:

k	1	2	...	k	...
p_k	p	$(1-p) \cdot p$	...	$(1-p)^{k-1} \cdot p$	...

Napríklad pre $p = 0.7$:

k	1	2	3	4	5	...
p_k	0.7	0.21	0.063	0.0189	0.0057	...

- diagram:



Obrázok 5.25: Geometrické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $p = 0.7$

Jedná sa skutočne o rozdelenie pravdepodobnosti, pretože platí:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p = p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\cdot\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Využili sme skutočnosť, že súčet geometrického radu s kvocientom q a prvým členom a je $\frac{a}{1-q}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\cdot q^k = \frac{a}{1-q}, \qquad \text{pre } |q| < 1$$

Názov rozdelenia súvisí s geometrickou postupnosťou, ktorú tvoria pravdepodobnosti jednotlivých hodnôt 1, 2, 3, ...
Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s geometrickým rozdelením sú

$$E(\mathbb{X}) = \frac{1}{p}, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{q}{p^2} \tag{5.11}$$

5.2.0.5. Náhodná premenná s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbf{R}(n)$

Toto rozdelenie popisuje náhodnú premennú, ktorá popisuje výskyty rovnako pravdepodobných udalostí. Náhodná premenná s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti môže nadobudnúť hodnoty $1, 2, \ldots, n$. Každú hodnotu nadobudne s rovnakou pravdepodobnosťou, hodnôt je n, súčet pravdepodobností je 1. Odtiaľ dostávame, že každá hodnota má pravdepodobnosť $1/n$.
Parameter n náhodnej premennej označuje počet elementárnych udalostí, ktoré sú reprezentované hodnotami $1, 2, \ldots, n$.
Zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti môže byť vyjadrený ako:

- predpis:

$$P(\mathbb{X} = k) = \frac{1}{n} \tag{5.12}$$

- tabuľka:

k	1	2	$\ldots$	n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\ldots$	$\frac{1}{n}$

  Napríklad pre $n = 7$:

k	1	2	3	4	5	6	7
p_k	0.1429	0.1429	0.1429	0.1429	0.1429	0.1429	0.1429

- diagram:

Jedná sa skutočne o rozdelenie pravdepodobnosti, pretože platí:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

Obrázok 5.26: Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $n = 7$

Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením sú

$$E(\mathbb{X}) = \frac{n+1}{2}, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{n^2-1}{12} \tag{5.13}$$

5.2.0.6. Náhodná premenná s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, Po(λ)

Toto rozdelenie popisuje náhodnú premennú, ktorá popisuje výskyty zriedkavých udalostí. Náhodná premenná s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, popisuje počet výskytov nejakej udalosti počas súvislého, vopred určeného časového intervalu. Počet udalostí, ktoré môžu počas tohto intervalu nastať nie je ohraničený. Hodnota náhodnej premennej môže byť akékoľvek veľké prirodzené číslo.

Náhodná premenná s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti môže nadobudnúť hodnoty $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$
Hodnotu 0 nadobudne s pravdepodobnosťou $\mathrm{e}^{-\lambda}$, hodnotu 1 nadobudne s pravdepodobnosťou $\lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$, hodnotu 2 nadobudne s pravdepodobnosťou $\frac{\lambda^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$, atď. hodnotu k nadobudne s pravdepodobnosťou $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$.

Parameter λ náhodnej premennej určuje priemerný počet udalostí, ktoré nastanú počas súvislého, vopred určeného časového intervalu.
Zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti môže byť vyjadrený ako:

- predpis:

$$P(\mathbb{X} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \tag{5.14}$$

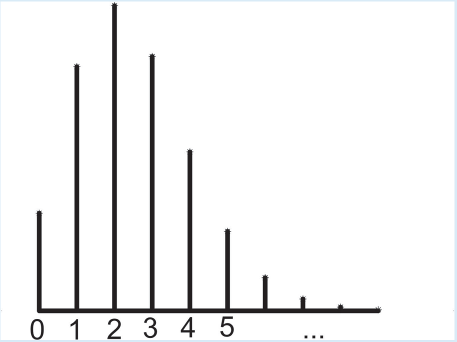
- tabuľka:

k	0	1	2	...	k	...
p_k	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$	...

Napríklad pre $\lambda = 2.5$:

k	0	1	2	3	4	5	...
p_k	0.0821	0.2052	0.2565	0.2138	0.1336	0.0668	...

- diagram:



Obrázok 5.27: Poissonove rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $\lambda = 2.5$

Jedná sa skutočne o rozdelenie pravdepodobnosti, pretože platí:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda} = 1$$

Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením sú

$$E(\mathbb{X}) = \lambda, \qquad D(\mathbb{X}) = \lambda \tag{5.15}$$

5.2.1. Príklady

1. Aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná s hodnotami:
   0, ak na kocke padne šestka
   1, ak na kocke padne niečo iné.

2. Aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná s hodnotami:
   0, ak na kocke padne šestka na prvý pokus
   1, ak na kocke padne šestka na druhý pokus
   2, ak na kocke padne šestka na tretí pokus
   3, ak na kocke padne šestka na štvrtý pokus, ...
   k, ak na kocke padne šestka na k-ty pokus, ...
   Aká je stredná hodnota a disperzia tejto náhodnej premennej?

3. Aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná s hodnotami:
   0, ak pri hode 4 kockami nepadne šestka ani raz
   1, ak pri hode 4 kockami padne šestka práve raz
   2, ak pri hode 4 kockami padne šestka práve dva razy
   3, ak pri hode 4 kockami padne šestka práve tri razy
   4, ak pri hode 4 kockami padne šestka práve štyri razy?
   Aká je stredná hodnota a disperzia tejto náhodnej premennej?

4. Aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná s hodnotami:
   1, ak na kocke padne šestka, alebo päťka
   2, ak na kocke padne dvojka, alebo trojka
   3, ak na kocke padne niečo iné?
   Aká je stredná hodnota a disperzia tejto náhodnej premennej?

5. Aké rozdelenie pravdepodobnosti a charakteristiky má náhodná premenná s hodnotami:
   1, ak na kocke padne šestka, alebo päťka
   3, ak na kocke padne niečo iné?

6. Počet „úspešných rande" nesmelého študenta počas jedného mesiaca, budeme modelovať náhodnou premennou s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti. Dlhodobým pozorovaním sme zistili, že za mesiac absolvuje tento študent „úspešné rande" tri krát. Aká je pravdepodobnosť, že za mesiac absolvuje študent 5 „úspešných rande"?
7. Uveďte príklad, ktorý môžeme modelovať náhodnou premennou s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti.
8. Uveďte príklad, ktorý môžeme modelovať náhodnou premennou s binomickým rozdelením pravdepodobnosti.
9. Uveďte príklad, ktorý môžeme modelovať náhodnou premennou s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, ktoré nemá hodnotu 0.
10. Uveďte príklad, ktorý môžeme modelovať náhodnou premennou s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, ktoré má hodnotu 0.
11. Uveďte príklad, ktorý môžeme modelovať náhodnou premennou s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti.
12. Uveďte príklad, ktorý môžeme modelovať náhodnou premennou s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti.

5.2.1.1. Riešenie príkladov

1. Náhodná premenná nadobúda dve hodnoty:
   0, ak na kocke padne šestka
   1, ak na kocke padne niečo iné.

   Hodnotu 1 nadobudne, keď udalosť A: „ na kocke padne niečo iné ako šestka" nastane.
   Hodnotu 0 nadobudne, keď udalosť A: „ na kocke padne niečo iné ako šestka" nenastane.

   Jedná sa o alternatívne rozdelenie pravdepodobnosti. Parameter p náhodnej premennej, ktorý označuje pravdepodobnosť nastatia udalosti A:

   $$P(A) = \frac{5}{6}$$

   Pravdepodobnosť, že udalosť A nenastane označujeme q:

   $$P(\overline{A}) = \frac{1}{6}$$

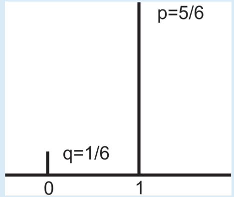
   Zákon rozdelenia pravdepodobnosti tejto náhodnej premennej vyjadríme:

   - predpis:
     $$P(\mathbb{X} = 1) = \frac{5}{6} \qquad P(\mathbb{X} = 0) = \frac{1}{6}$$
   - tabuľka:

k	0	1
p_k	$1/6$	$5/6$

   - diagram:

2. Náhodná premenná má neohraničený počet hodnôt:
   0, ak na kocke padne šestka na prvý pokus
   1, ak na kocke padne šestka na druhý pokus
   2, ak na kocke padne šestka na tretí pokus



Obrázok 5.28: Alternatívne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $p = 5/6$

3, ak na kocke padne šestka na štvrtý pokus
...
k, ak na kocke padne šestka na k-ty pokus
...

Jedná sa o náhodnú premennú s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti. Zákon rozdelenia tejto náhodnej premennej môže byť vyjadrený ako:

- predpis:

$$P(\mathbb{X} = k) = {\frac{5}{6}}^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

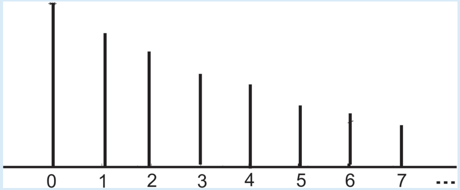
- tabuľka:

k	1	2	...	k	...
p_k	$1/6$	$5/6 \cdot 1/6$	...	$(5/6)^{k-1} \cdot 1/6$	...

- diagram:

Stredná hodnota a disperzia tejto náhodnej premennej sú podľa 5.11:

$$E(\mathbb{X}) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30$$



Obrázok 5.29: Geometrické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $p = 1/6$

3. Chceme určiť rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s piatimi hodnotami:
   0, ak pri hode 4 kockami nepadne šestka ani raz
   1, ak pri hode 4 kockami padne šestka práve raz
   2, ak pri hode 4 kockami padne šestka práve dva razy
   3, ak pri hode 4 kockami padne šestka práve tri razy
   4, ak pri hode 4 kockami padne šestka práve štyri razy.

   Jedná sa náhodnú premennú s binomickým rozdelením pravdepodobnosti Bi$(n,\ p)$=Bi$(4,\ 1/6)$.

   Stredná hodnota a disperzia tejto náhodnej premennej sú podľa 5.9:

$$E(\mathbb{X}) = n \cdot p = \frac{4}{6} = 0.67, \qquad D(\mathbb{X}) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0.56$$

4. V tomto prípade nie je rozdelenie pravdepodobnosti žiadne z nám doteraz známych rozdelení. Môžeme sa rozhodnúť pre dve cesty ako príklad riešiť. Nájsť riešenie v literatúre alebo na internete, alebo to urobiť sami. Niekedy, napríklad pri zložitých tvaroch rozdelení je rozumnejšie pozrieť najprv, či úlohu nevyriešil niekto iný. V našom prípade, ale stačí použiť vlastnú hlavu.
   Hodnoty náhodnej premennej sú tri:
   1, ak na kocke padne šestka, alebo päťka
   2, ak na kocke padne dvojka, alebo trojka

3, ak na kocke padne niečo iné

Zákon rozdelenia tejto náhodnej premennej môže byť vyjadrený ako:

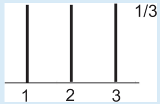
- predpis:

$$P(\mathbb{X}=1)=\frac{2}{6} \qquad P(\mathbb{X}=2)=\frac{2}{6} \qquad P(\mathbb{X}=3)=\frac{2}{6}$$

- tabuľka:

k	1	2	3
p_k	2/6	2/6	2/6

- diagram:



Obrázok 5.30: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej

Strednú hodnotu náhodnej premennej vypočítame podľa vzorca 5.1:

$$E(\mathbb{X})=\sum_{k=1}^{3} x_k \cdot p_k = 1\cdot\frac{2}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{6}+\frac{4}{6}+\frac{6}{6}=2$$

Disperziu náhodnej premennej vypočítame podľa vzorca 5.2:

$$D(\mathbb{X})=\sum_{k=1}^{3}(x_k-E(\mathbb{X}))^2\cdot p_k=(1-2)^2\cdot\frac{2}{6}+$$

$$+(2-2)^2\cdot\frac{2}{6}+(3-2)^2\cdot\frac{2}{6}=1\cdot\frac{2}{6}+0\cdot\frac{2}{6}+1\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{6}=0.67$$

Samozrejme, mohli sme predsa len hľadať v literatúre, alebo si uvedomiť, že sa vlastne jedná o náhodnú premennú s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti R(3), ktorej strednú hodnotu a disperziu vypočítame podľa vzorcov 5.13:

$$E(\mathbb{X}) = \frac{n+1}{2} = \frac{4}{2} = 2, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{3^2-1}{12} = \frac{8}{12} = 0.67$$

5. Hľadáme rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s hodnotami:
   1, ak na kocke padne šestka, alebo päťka
   3, ak na kocke padne niečo iné.

   Zákon rozdelenia tejto náhodnej premennej môže byť vyjadrený ako:

   - predpis:

   $$P(\mathbb{X}=1) = \frac{2}{6} \qquad P(\mathbb{X}=3) = \frac{4}{6}$$

   - tabuľka:

k	1	3
p_k	2/6	4/6

   Strednú hodnotu náhodnej premennej vypočítame podľa vzorca 5.1:

   $$E(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{2} x_k \cdot p_k = 1 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{6} + \frac{12}{6} = 2.33$$

   Disperziu náhodnej premennej vypočítame podľa vzorca 5.2:

   $$D(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{2} (x_k - E(\mathbb{X}))^2 \cdot p_k = (1-2.33)^2 \cdot \frac{2}{6} +$$

   $$+ (3-2.33)^2 \cdot \frac{4}{6} = 0.89$$

6. Počet „úspešných rande" nesmelého študenta počas jedného mesiaca, budeme modelovať náhodnou premennou s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti. Dlhodobým pozorovaním sme zistili, že za mesiac absolvuje tento študent „úspešné rande" tri krát, preto budeme predpokladať, že stredná hodnota Poissonovho rozdelenia bude 3. Podľa vzorca 5.15 je stredná hodnota teoreticky rovná parametru λ Poissonovho rozdelenia:

$$E(\mathbb{X}) = \lambda$$

$$\lambda \doteq 3$$

Na výpočet pravdepodobnosti, že za mesiac absolvuje študent 5 „úspešných rande" použijeme predpis pre Poissonove rozdelenie pre $k = 5$ a $\lambda = 3$.

$$P(\mathbb{X} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$P(\mathbb{X} = 5) = \frac{3^5}{5!} \cdot \mathrm{e}^{-3} = 0.1$$

To znamená, že nesmelý študent má naozaj malú šancu na 5 „úspešných rande"!

7. Náhodnou premennou s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti môžeme modelovať napríklad včasný príchod vlaku na stanicu. Ak príde vlak načas, náhodná premenná dosiahne hodnotu 1, ak bude vlak meškať, dosiahne hodnotu 0. Parameter p tohoto rozdelenia odhadneme z niekoľkých príchodov vlakov. Ak spomedzi n príchodov vlaku bolo m včas, tak parameter vypočítame:

$$p = \frac{m}{n}$$

8. Náhodnou premennou s binomickým rozdelením pravdepodobnosti môžeme modelovať napríklad počet slnečných dní v mesiaci júl. Treba síce najprv povedať, čo je to slnečný deň (napríklad v ten deň bude svietiť slnko aspoň 6 hodín a nebude pršať). Budeme predpokladať (nie príliš presne), že slnečný deň nastane v júli s rovnakou

pravdepodobnosťou p v hociktorý deň. Náhodná premenná s binomickým rozdelením $Bi(31, p)$ pravdepodobnosti je model, pomocou ktorého určíme pravdepodobnosť, že v júli bude práve m slnečných dní.

$$P(\mathbb{X} = m) = \binom{31}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{31-m}$$

Hodnotu parametra p odhadneme pomocou hodnôt nameraných v minulosti, napríklad za posledných 100 rokov. Teda p je pomer slnečných júlových dní ku všetkým júlovým dňom.
Tento model samozrejme nie je príliš presný, predpokladá napríklad, že každý deň má rovnakú šancu byť slnečným. Ale zo skúseností vieme, že ak už 3 dni prší, tak je iná pravdepodobnosť, že nasledujúci deň bude slnečný, než keď je už 2 týždne slnečno.
Preto na presnejší popis bude treba iný model, nám zatiaľ stačí aspoň takýto (ale uvedomíme si, že nie je práve najpresnejší).

9. Náhodnou premennou s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, ktoré nemá hodnotu 0, môžeme modelovať napríklad pokus, v ktorom pozorujeme, na koľký krát padne na kocke šestka. Šestka môže padnúť na prvý krát, druhý krát, tretí krát, … Teda hodnoty náhodnej premennej sú

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Pravdepodobnosti týchto hodnôt sú

$$P(\mathbb{X} = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

10. Náhodnou premennou s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, ktoré má hodnotu 0, môžeme modelovať napríklad pokus, v ktorom pozorujeme, koľko neúspešných pokusov sme urobili, kým na kocke padla šestka. Šestka môže padnúť na prvý krát (=0 neúspešných pokusov), druhý krát (=1 neúspešný pokus), tretí krát (=2 neúspešné pokusy), … Teda hodnoty náhodnej premennej sú

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

Pravdepodobnosti týchto hodnôt sú

$$P(\mathbb{X} = k) = (1 - p)^k \cdot p$$

Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s geometrickým rozdelením (obsahujúcim hodnotu 0) sú

$$E(\mathbb{X}) = \frac{q}{p}, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{q}{p^2} \tag{5.16}$$

11. Príkladom, ktorý môžeme modelovať náhodnou premennou s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, by mali byť všetky lotérie. Šanca, že všetky hodnoty majú rovnakú pravdepodobnosť nastatia by mala byť rovnaká.

12. Náhodnou premennou s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti modelujeme zriedkavé javy, napríklad výskyt študentov, ktorí si robia domáce úlohy. Ale nakoľko Poissonove rozdelenie modeluje najväčšie nepravideľnosti, zvykne sa používať aj na modelovanie výskytu udalostí v časovom úseku. Takýto model bude popisovať najvačšie nepravideľnosti, aké môžu nastať. Napríklad počet dopravných nehôd v okrese za týždeň, počet vypálených žiaroviek v podniku za mesiac, počet skrachovaných leteckých spoločností za rok...f

5.2.2. Úlohy

1. Vypočítajte strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim A(p)$.

2. Vypočítajte disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim A(p)$.

3. Vypočítajte strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s binomickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Bi(n, p)$.

4. Vypočítajte disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s binomickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Bi(n, p)$.

5. Vypočítajte strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$.

6. Vypočítajte disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$.

7. Vypočítajte strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$, v prípade, že hodnoty náhodnej premennej sú 0, 1, 2, ... Hodnoty môžu napríklad popisovať počet neúspešných pokusov, kým na kocke padne šestka.

8. Vypočítajte disperziu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$, v prípade, že hodnoty náhodnej premennej sú 0, 1, 2, ... Hodnoty môžu napríklad popisovať počet neúspešných pokusov, kým na kocke padne šestka.

9. Vypočítajte strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim R(n)$.

10. Vypočítajte disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim R(n)$.

11. Vypočítajte strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Po(\lambda)$.

12. Vypočítajte disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Po(\lambda)$.

5.2.2.1. Riešenie úloh

1. Strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim A(p)$ vypočítame:

$$E(\mathbb{X}) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

2. Disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim A(p)$ vypočítame:

$$D(\mathbb{X}) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q = p \cdot q = p \cdot (1-p)$$

3. Strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s binomickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Bi(n, p)$ vypočítame:

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-(k-1))!} \cdot p^{(k-1)} \cdot q^{(n-1-(k-1))} =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} \cdot p^k \cdot q^{(n-1-k)} =$$

$$= n \cdot p \cdot (p+q)^{n-1} = n \cdot p \cdot (1)^{n-1} = n \cdot p$$

Rovnaký výsledok dostaneme, keď si uvedomíme, že náhodnú premennú s binomickým rozdelením $\mathbb{X} \sim Bi(n, p)$ dostaneme ako súčet n rovnakých náhodných premenných s alternatívnym rozdelením $\mathbb{Y} \sim A(p)$.

$$E(\mathbb{X}) = E(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{Y}) = k \cdot E(\mathbb{Y}) = n \cdot p$$

4. Disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s binomickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Bi(n,p)$ vypočítame:

$$D(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{n}(k - n \cdot p)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(k^2 - 2 \cdot k \cdot n \cdot p + n^2 \cdot p^2) \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(k \cdot (k-1) + k(1 - 2 \cdot n \cdot p) + n^2 \cdot p^2) \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k \cdot (k-1) \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} k \cdot (1 - 2 \cdot n \cdot p) \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} n^2 \cdot p^2 \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= p^2 \cdot n \cdot (n-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-2} \cdot q^{n-k} +$$

$$+ p \cdot n \cdot (1 - 2 \cdot n \cdot p) \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k} +$$

$$+ n^2 \cdot p^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = p^2 \cdot n \cdot (n-1) + p \cdot n \cdot (1 - 2 \cdot n \cdot p) + n^2 \cdot p^2 =$$

$$= n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q$$

Pri odvodení sme použili:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-2} \cdot q^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \cdot p^{k-2} \cdot q^{n-2-k+2} = (p+q)^{n-2}$$

Rovnaký výsledok dostaneme, keď si uvedomíme, že náhodnú premennú s binomickým rozdelením $\mathbb{X} \sim Bi(n,p)$ dostaneme ako súčet n rovnakých náhodných premenných s alternatívnym rozdelením $\mathbb{Y} \sim A(p)$.

$$D(\mathbb{X}) = D\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{Y}\right) = n \cdot D(\mathbb{Y}) = n \cdot p \cdot q$$

5. Strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$ vypočítame:

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k \cdot p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(q^k\right)' =$$

$$= p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p \cdot \left(\frac{q}{1-q}\right)' = p \cdot \left(\frac{1 \cdot (1-q) - q \cdot (-1)}{(1-q)^2}\right) =$$

$$= p \cdot \left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Pri výpočte sme použili $p = (1-q)$, vzorec pre súčet geometrického radu a vetu o zámene sumácie a derivovania pre rovnomerne konvergentné rady (ktorej dôkaz nájdeme v matematickej analýze):

$$\sum f' = \left(\sum f\right)'$$

6. Disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$ vypočítame:

$$D(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(k - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot q^{k-1} \cdot p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2 - 2 \cdot \frac{1}{p} \cdot k + \frac{1}{p^2}\right) \cdot q^{k-1} =$$

$$= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} - p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{p} \cdot k \cdot q^{k-1} + p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \cdot q^{k-1} =$$

$$= p \cdot q \cdot \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot q^{k-2} - p \cdot (2 \cdot \frac{1}{p} - 1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} + \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

$$= p \cdot q \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (q^k)'' - (2-p) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' + \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} =$$

$$= p \cdot q \cdot \left(\sum_{k=2}^{\infty} q^k\right)'' - (2-p) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' + \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} =$$

$$= p \cdot (1-p) \cdot \frac{2}{p^3} + (p-2) \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{2-2p}{p^2} + \frac{p-2}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Pri výpočte sme použili

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{p^2}$$

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} q^k\right)'' = \left(\frac{q}{1-q}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)' = \frac{2}{p^3}$$

7. Strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$, v prípade, že hodnotou náhodnej premennej je aj 0, vypočítame podobne ako v predchádzajúcom prípade:

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot q^k \cdot p = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k \cdot p = p \cdot q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = p \cdot q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(q^k\right)' =$$

$$= p \cdot q \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)' = p \cdot q \cdot \left(\frac{q}{1-q}\right)' = p \cdot q \cdot \left(\frac{1 \cdot (1-q) - q \cdot (-1)}{(1-q)^2}\right) =$$

$$= p \cdot q \cdot \left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) = p \cdot q \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p}$$

$$E(\mathbb{X}) = \frac{q}{p} \tag{5.17}$$

8. Najprv si odvodíme vzťah pre jednoduchší výpočet disperzie:

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - E^2(\mathbb{X}) \tag{5.18}$$

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 = E\left(\mathbb{X}^2 - 2 \cdot \mathbb{X} \cdot E(\mathbb{X}) + E^2(\mathbb{X})\right) =$$

$$= E\left(\mathbb{X}^2\right) - E\left(2 \cdot \mathbb{X} \cdot E(\mathbb{X})\right) + E\left(E^2(\mathbb{X})\right) =$$

$$= E\left(\mathbb{X}^2\right) - 2 \cdot E\left(\mathbb{X}\right) \cdot E\left(\mathbb{X}\right) + E^2\left(\mathbb{X}\right) = E\left(\mathbb{X}^2\right) - E^2\left(\mathbb{X}\right)$$

Disperziu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$, v prípade, že hodnotou náhodnej premennej je aj 0, vypočítame:

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - E^2(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot q^k \cdot p - \left(\frac{q}{p}\right)^2 =$$

$$= p \cdot q^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot q^{k-2} + p \cdot q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 =$$

$$= p \cdot q^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(q^k\right)'' + p \cdot q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(q^k\right)' - \left(\frac{q}{p}\right)^2 =$$

$$= p \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)'' + p \cdot q \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)' - \left(\frac{q}{p}\right)^2 =$$

$$= p \cdot q^2 \cdot \frac{2}{(1-q)^3} + p \cdot q \cdot \frac{1}{(1-q)^2} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot q^2 + p \cdot q - q^2}{p^2} = \frac{q^2 + p \cdot q}{p^2} = \frac{q \cdot (q+p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$D(\mathbb{X}) = \frac{q}{p^2} \tag{5.19}$$

9. Strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim R(n)$ vypočítame:

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \frac{(1+n) \cdot n}{2} = \frac{1+n}{2}$$

10. Disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim R(n)$ vypočítame:

$$D(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{1+n}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - k \cdot (1+n) + \frac{(n+1)^2}{4}\right) \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(k^2\right) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (k \cdot (1+n)) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(n+1)^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n+1)^2}{4} =$$

$$= \frac{2 \cdot (n+1) \cdot (2n+1) - 6 \cdot (n+1)^2 + 3 \cdot (n+1)^2}{12} =$$

$$= \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}$$

11. Strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Po(\lambda)$ vypočítame:

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{k!} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda$$

Pri výpočte sme použili vzorec pre Taylorov rozvoj funkcie e^x v bode nula.

$$\mathrm{e}^x = (\mathrm{e}^x)'_{x=0} + (\mathrm{e}^x)'_{x=0} \frac{(x-0)^1}{1!} + (\mathrm{e}^x)''_{x=0} \frac{(x-0)^2}{2!} + (\mathrm{e}^x)'''_{x=0} \frac{(x-0)^3}{3!} + \cdots =$$

$$= \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 \cdot \frac{x}{1!} + \mathrm{e}^0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \mathrm{e}^0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots = 1 + \frac{x}{1!} + \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} = \frac{x^k}{k!}$$

12. Disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Po(\lambda)$ vypočítame:

$$D(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{n} (k-\lambda)^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot (k-1) \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{k!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{k!} -$$

$$- \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot k \cdot \lambda \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{k!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{n} \lambda^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} -$$

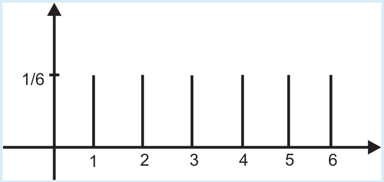
$$- \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \lambda \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \left(\lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda}\, 2 \cdot \lambda \cdot + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda} \cdot\right) = \lambda$$

5.3. Spojité rozdelenia pravdepodobnosti

V tejto časti sa budeme zaoberať náhodnými premennými **so spojitým rozdelením pravdepodobnosti**. Sú to také náhodné premenné, ktorých hodnôt je veľa. Tak veľa, že pravdepodobnosť nastatia každej z týchto hodnôt je nulová. Napriek tomu je možné vjadriť pravdepodobnosť toho, že jednotlivé hodnoty sa nachádzajú na rôznych úsekoch reálnej osi.

Uvažujme o náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, ktoré popisuje výsledky hádzania klasickou kockou. Jej hodnoty sú čísla 1, 2, 3, 4,5 a 6. Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti R(6) vyjadríme diagramom na obrázku 5.31.



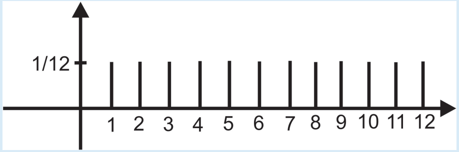
Obrázok 5.31: Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti R(6)

Zoberme teraz namiesto kocky pravidelný dvanásťsten. Každá jeho stena má šancu, že padne $\frac{1}{12}$. Hodnôt je dvanásť, súčet ich pravdepodobností je jedna. Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej R(12), vidíme na obrázku 5.32.

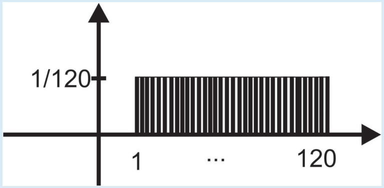
Na obrázku 5.33 je rozdelenie pravdepodobnosti pre náhodnú premennú popisujúcu výsledky hodu pravidelným 120-stenom.

V poslednom prípade (na obrázku 5.34) sa jedná o pravidelný 1000-sten. Tu už sú hodnoty náhodnej premennej zakreslené tak blízko pri sebe, že úsečky znázorňujúce pravdepodobnosti na obrázku vypĺňajú celú plochu obdĺžnika. Vieme však, že úsečiek je 1000. Preto ich súčet je $1000 \cdot \frac{1}{1000} = 1$.

Predstavme si teraz, že to, čím budeme hádzať nie je mnohosten, ale guľa. (Nebudeme



Obrázok 5.32: Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti R(12)



Obrázok 5.33: Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti R(120)

Obrázok 5.34: Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti R(1000)

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 225 of 410

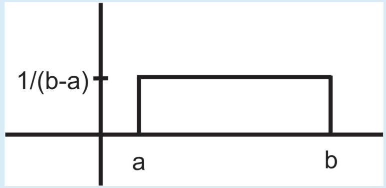
Go Back

Full Screen

Close

Quit

teraz uvažovať ako priradiť bodom na guli, body úsečky, uveríme, že sa to nejako podarí!) Každému výsledku, ktorý padne na guli priradíme jeden bod na úsečke $\langle a, b \rangle$. Tých bodov je nekonečne veľa, preto pravdepodobnosť nastatia konkrétneho bodu je $\frac{1}{\infty} = 0$.
Pokúsime sa však zachovať vlastnosť, ktorá platila pre diskrétne rozdelenia, a to, že plocha obdĺžnika nad hodnotami, ležiacimi na úsečke $\overline{ab}$ je rovná jednej.



Obrázok 5.35: Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti,R(a,b)

Zovšeobecnením pojmu rozdelenie pravdepodobnosti pre diskrétnu náhodnú premennú, dostaneme pojem **hustota rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej**. Hustota je funkcia, pomocou ktorej vieme určiť pravdepodobnosti pre hodnoty spojitej náhodnej premennej. Tieto hodnoty predstavujú body, alebo intervaly na reálnej osi. Pravdepodobnosti jednotlivých izolovaných bodov sú rovné nule, pravdepodobnosti intervalov už môžu byť aj nenulové.

Označme

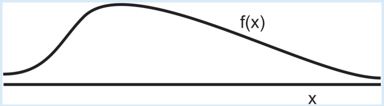
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{pre} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{pre} \quad b < x \end{cases} \tag{5.20}$$

Funkciu $f(x)$ určenú vzťahom 5.20 nazveme **hustota spojitej náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti R(a,b)**.

Hustota pravdepodobnosti náhodnej premennej je taká nezáporná funkcia definovaná na reálnych číslach, pre ktorú je veľkosť plochy medzi ňou a reálnou osou rovná 1. Hustota určuje pre spojité náhodné premenné ich zákon rozdelenia pravdepodobnosti. Pomocou hustoty vieme spočítať, akú pravdepodobnosť majú hodnoty náhodnej premennej z určitého intervalu.

Pre hustotu $f(x)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ a pre príslušné pravdepodobnosti platí:

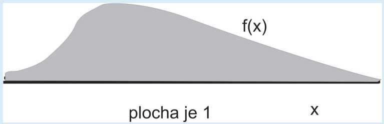
- $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$



Obrázok 5.36: Krivka hustoty rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej

- Veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x je 1. Túto plochu môžeme vypočítať ako určitý integrál z hustoty ako funkcie definovanej na celej reálnej osi:

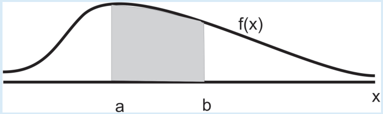
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{5.21}$$



Obrázok 5.37: Plocha medzi krivkou hustoty a osou x je 1

- Pravdepodobnosť, že náhodná premenná $\mathbb{X}$ leží v intervale $\langle a, b\rangle$ je veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a oxou x na intervale $\langle a, b\rangle$:

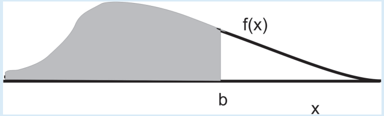
$$P(a \leq \mathbb{X} \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Obrázok 5.38: Plocha medzi krivkou hustoty a osou x na intervale $\langle a, b\rangle$

- Pravdepodobnosť, že náhodná premenná $\mathbb{X}$ leží v intervale $\langle -\infty, b\rangle$ je veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a oxou x na intervale $\langle -\infty, b\rangle$:

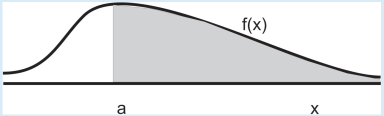
$$P(\mathbb{X} \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Obrázok 5.39: Plocha medzi krivkou hustoty a osou x na intervale $\langle -\infty, b\rangle$

- Pravdepodobnosť, že náhodná premenná $\mathbb{X}$ leží v intervale $\langle a, \infty\rangle$ je veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x na intervale $\langle a, \infty\rangle$:

$$P(a \leq \mathbb{X}) = \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$



Obrázok 5.40: Plocha medzi krivkou hustoty a osou x na intervale $\langle a, \infty\rangle$

- Pravdepodobnosť, že náhodná premenná $\mathbb{X}$ nadobudne hodnotu c je veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x v bode c:

$$P(\mathbb{X} = c) = \int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

5.3.0.2. Náhodná premenná s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, R(a, b)

Náhodná premenná s **rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti** popisuje rovnocenne zastúpené hodnoty z intervalu $\langle a, b\rangle$. Preto je niekedy označovaná aj ako $\mathrm{R}\langle a, b\rangle$. Parametre a, b sú ľubovoľné reálne čísla, pre ktoré $a < b$. Hustota rozdelnia pravdepodobnosti pre túto náhodnú premennú je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pre} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{inde} \end{cases} \tag{5.22}$$

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

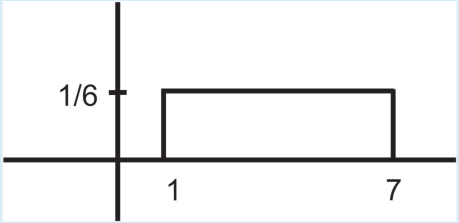
Funkcia $f(x)$ je naozaj hustota rozdelenia pravdepodobnosti, pretože veľkosť plochy medzi osou x a krivkou hustoty $f(x)$ je naozaj 1. Na výpočet veľkosti plochy môžeme, ale nemusíme použiť integrál. V tomto prípade je totiž uvedená plocha obdĺžnik so stranami veľkosti $b-a$ a $1/(b-a)$.

Uvedieme aj výpočet pomocou integrálu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} 0\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{b-a}\cdot(b-a) + 0 = 1$$

Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením sú

$$E(\mathbb{X}) = \frac{a+b}{2}, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{5.23}$$



Obrázok 5.41: Hustota náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, R(1,7)

5.3.0.3. Náhodná premenná s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti, $Exp(\lambda)$

Náhodná premenná s **exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti** popisuje najväčšmi rozhádzané nezáporné hodnoty. Hodnota $\frac{1}{\lambda}$ označuje priemernú veľkosť náhodnej premen-

nej. Preto parameter λ je kladné reálne číslo.
Navyše parameter λ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti je rovnaký ako parameter diskrétnej náhodnej premennej $\mathbb{Y}$ s Poissonovym rozdelením, ktorá určuje počet výskytov počas časového intervalu. Stredný počet výskytov je λ a stredná dĺžka intervalov medzi týmito výskytmi je $\frac{1}{\lambda}$.

Príklad 5.3.1 *Ak napríklad cez sieť prejde priemerne* 5 *paketov za minútu, tak priemerná dĺžka medzery medzi paketmi je* 1/5 *minúty, teda asi* 12 *sekúnd.*

Hustota rozdelenia pravdepodobnosti pre túto náhodnú premennú je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{5.24}$$

Funkcia $f(x)$ je naozaj hustota rozdelenia pravdepodobnosti, pretože veľkosť plochy medzi osou x a krivkou hustoty $f(x)$ je naozaj 1. Na výpočet veľkosti plochy použijeme v tomto prípade integrál:

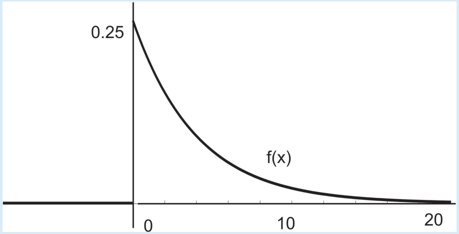
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x = 0 + \lambda \cdot \left[\frac{\mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}}{-\lambda}\right]_0^{\infty} = -\,\mathrm{e}^{-\lambda \cdot \infty} + \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 0} = 1$$

Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením sú

$$E(\mathbb{X}) = \frac{1}{\lambda}, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{5.25}$$

5.3.0.4. Náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathrm{N}(\mu,\, \sigma^2)$

Toto rozdelenie sa tiež nazýva **Gaussovo rozdelenie**, alebo z**-rozdelenie**. Náhodná premenná s **normálnym rozdelením pravdepodobnosti** má medzi rozdeleniami pravdepodobnosti výnimočné postavenie. Nielenže popisuje veľmi časté rozdelenie hodnôt reálneho



Obrázok 5.42: Hustota náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti, Exp(0.25)

sveta, ktoré je možné merať, ale navyše platí, že súčet dostatočného počtu rovnako rozdelených náhodných premenných (a následne aj ich aritmetický priemer) má normálne rozdelenie pravdepodobnosti. Táto vlastnosť sa využíva v matematickej štatistike.

Hodnota parametra μ označuje priemernú veľkosť náhodnej premennej. Parameter σ^2 označuje rozptyl hodnôt náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s normálnym rozdelením pravdepodobnosti. Preto parameter μ je reálne číslo a parameter σ^2 je kladné reálne číslo.

Hustota rozdelnia pravdepodobnosti pre túto náhodnú premennú je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.26}$$

Funkcia $f(x)$ je hustota rozdelenia pravdepodobnosti, pretože veľkosť plochy medzi osou x a krivkou hustoty $f(x)$ je naozaj 1. Výpočet veľkosti plochy pod krivkou hustoty normálneho rozdelnia však môžeme urobiť iba numericky. Funkcia hustoty normálneho rozdelenia nemá primitívnu funkciu, ktorú by sme mohli vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Preto sa hodnoty príslušného integrálu počítajú iba numericky:

$$P(\mathbb{X} \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

V minulosti, keď ešte nebolo možné vypočítať tento integrál pomocou počítačov, používali sa na vyčíslenie uvedeného integrálu tabuľky. Tabuľky boli zostavené pre pravdepodobnosť $P(\mathbb{X} \le b)$, kde $\mathbb{X}$ je náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti, N(0, 1). Normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 0$ a disperziou $\sigma^2 = 1$ sa nazýva **normované normálne rozdelenie pravdepodobnosti**.

Ak napríklad chceme vypočítať pravdepodobnosť $P(\mathbb{Y} \le b)$, pre náhodnú premennú $\mathbb{Y}$ s normálnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathrm{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 16)$, postupujeme nasledovne. Najprv $\mathbb{Y}$ normalizujeme, dostaneme

$$\mathbb{X} = \frac{\mathbb{Y} - \mu}{\sigma}$$

Potom nájdeme príslušnú hodnotu v tabuľkách normovaného normálneho rozdelenia pravdepodobnosti.

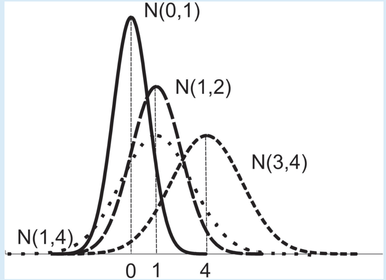
$$P(\mathbb{Y} \le b) = P(\mathbb{Y} - 3 \le b - 3) = P\left(\frac{\mathbb{Y} - 3}{\sigma} \le \frac{b-3}{\sigma}\right) = P\left(\mathbb{X} \le \frac{b-3}{4}\right)$$

Tak ako pre každú hustotu, aj pre hustotu normálneho rozdelenia pravdepodobnosti platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s normálnym rozdelením sú

$$E(\mathbb{X}) = \mu, \qquad D(\mathbb{X}) = \sigma^2 \tag{5.27}$$

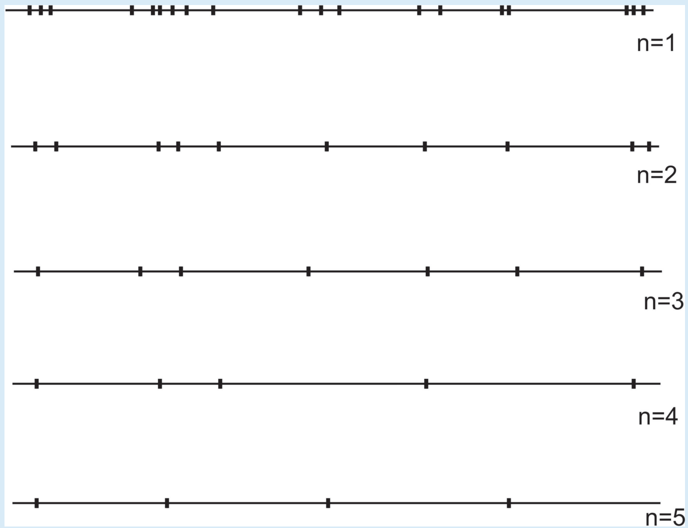


Obrázok 5.43: Náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti, N(0, 1), N(1, 2), N(1, 4) a N(3, 4)

5.3.0.5. Náhodná premenná s Erlangovým rozdelením pravdepodobnosti, Er(n, λ)

Náhodná premenná s **Erlangovým rozdelením pravdepodobnosti** popisuje menej rozhádzané nezáporné hodnoty než náhodná premenná s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti. Táto náhodná premenná vznikne ako súčet n nezávislých náhodných premenných s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti s rovnakým parametrom λ. Preto parameter n je prirodzené a parameter λ je kladné reálne číslo.

Hodnota $\frac{n}{\lambda}$ označuje priemernú veľkosť tejto náhodnej premennej. Čím väčšia je hodnota parametra n, tým sú hodnoty náhodnej premennej „pravidelnejšie". Ilustráciu tohoto tvrdenia si môžeme pozrieť na obrázku 5.44. V prvom riadku sú vyznačené náhodné úseky, ktoré predstavujú napríklad tok áut na ceste. Predpokladajme, že ich dĺžky majú exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti. Exponenciálne rozdelenie s parametrom λ môžeme považovať aj za Erlangove rozdelenie s parametrami λ a $n = 1$. V druhom riadku sú vyznačené náhodné úseky, ktoré predstavujú zriedený tok, teda napríklad každé druhé auto. Dĺžky týchto úsekov majú Erlangove rozdelenie s parametrami λ a $n = 2$. V treťom riadku sú vyznačené náhodné úseky, ktoré predstavujú každé tretie auto. Dĺžky týchto úsekov majú Erlangove rozdelenie s parametrami λ a $n = 3$. V poslednom riadku sú vyznačené náhodné úseky, ktoré predstavujú každé piate auto. Dĺžky týchto úsekov majú Erlangove rozdelenie s parametrami λ a $n = 5$. Na obrázku vidno ako sa na druhom riadku približne zdvojnásobila a na treťom riadku približne ztrojnásobila priemerná dĺžka medzi autami. Navyše dĺžky intervalov sú omnoho pravidelnejšie v poslednom riadku než v prvom (ale stále nie sú úplne pravidelné).



Obrázok 5.44: Náhodná premenná s Erlangovým rozdelením pravdepodobnosti, $Er(n, \lambda)$, pre $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

Hustota rozdelnia pravdepodobnosti pre náhodnú premennú s Erlangovým rozdelením pravdepodobnosti je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ \dfrac{\lambda^n \, x^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}}{(n-1)!} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{5.28}$$

Funkcia $f(x)$ je naozaj hustota rozdelenia pravdepodobnosti, pretože veľkosť plochy medzi osou x a krivkou hustoty $f(x)$ je naozaj 1. Na výpočet veľkosti plochy použijeme integrál (integrujeme metódou per partes):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{\lambda^n \, x^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x = 1$$

Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s Erlangovým rozdelením, $Er(n, \lambda)$:

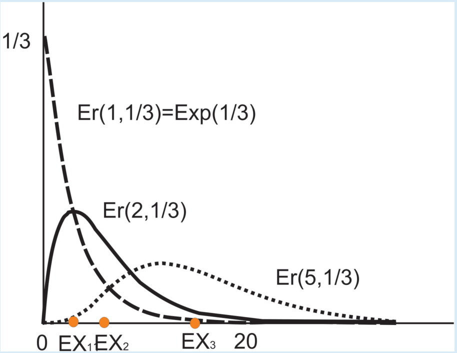
$$E(\mathbb{X}) = \frac{n}{\lambda}, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{n}{\lambda^2} \tag{5.29}$$

5.3.0.6. Náhodná premenná s Gama rozdelením pravdepodobnosti, $\Gamma(a, \lambda)$

Gama rozdelenie pravdepodobnosti je zovšeobecnením Erlangovho rozdelenia pravdepodobnosti. Parametre a a λ sú kladné reálne čísla. Na rozdiel od Erlangovho rozdelenia parameter a nemusí byť prirodzené číslo. Hodnota $\frac{a}{\lambda}$ označuje priemernú veľkosť náhodnej premennej. Hustota náhodnej premennej s Gama rozdelením pravdepodobnosti je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ \dfrac{\lambda^a \, x^{a-1} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}}{\Gamma(a)} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}, \qquad \text{pre}\, a \in R^+,\ \lambda \in R^+ \tag{5.30}$$

Funkcia $\Gamma(z)$ je funkcia definovaná na komplexných číslach s kladnou reálnou zložkou. Funkcia $\Gamma(z)$ je zovšeobecnením faktoriálu, ktorý je definovaný pre prirodzené čísla. Hodnota funkcie $\Gamma(z)$ je

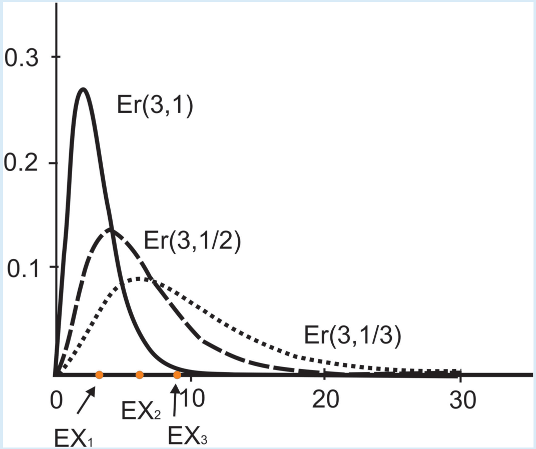


Obrázok 5.45: Náhodné premenné s Erlangovým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X}_1 \sim \mathrm{Er}(1, 1/3)$, $\mathbb{X}_2 \sim \mathrm{Er}(2, 1/3)$ a $\mathbb{X}_3 \sim \mathrm{Er}(5, 1/3)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{pre } z \in C \text{ také, že reálna časť } z \text{ je kladná}$$

Pre funfciu Γ platí:

- $\Gamma(n) = (n-1)!$ pre $n \in N$
- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pre $z \in C$ také, že reálna časť z je kladná
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$



Obrázok 5.46: Náhodné premenné s Erlangovým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X}_1 \sim \mathrm{Er}(3,1)$, $\mathbb{X}_2 \sim \mathrm{Er}(3,1/2)$ a $\mathbb{X}_3 \sim \mathrm{Er}(3,1/3)$

- $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!}$

Funkcia $f(x)$ je naozaj hustota rozdelenia pravdepodobnosti, pretože veľkosť plochy medzi osou x a krivkou hustoty $f(x)$ je 1.

Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s Gama rozdelením sú

$$E(\mathbb{X}) = \frac{a}{\lambda}, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{a}{\lambda^2} \tag{5.31}$$

5.3.0.7. Náhodná premenná s Chí-kvadrát rozdelením pravdepodobnosti, $\chi^2(n)$

Špeciálnym prípadom náhodnej premennej s Γ rozdelením pravdepodobnosti je náhodná premenná **Chí-kvadrát rozdelením pravdepodobnosti** s n stupňami voľnosti , $\chi^2(n)$. Parametre Gama rozdelenia sú $a = \frac{n}{2}$, kde n je prirodzené číslo a $\lambda = \frac{1}{2}$.

$\chi^2(n)$ zodpovedá náhodnej premennej s rozdelením pravdepodobnosti $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Iný spôsob vyjadrenia náhodnej premennej $\mathbb{Y}$ s Chí-kvadrát rozdelením pravdepodobnosti je jej vyjadrenie ako súčtu druhých mocnín nezávislých náhodných premenných $\mathbb{X}$ s normovaným normálnym rozdelením pravdepodobnosti $\mathrm{N}(0,1)$.

$$\mathbb{Y} \sim \chi^2(n): \qquad \mathbb{Y} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k^2, \qquad \text{kde} \quad \mathbb{X} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Špeciálne, ak $\mathbb{X} \sim \mathrm{N}(0,1)$, potom pre $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$ platí $\mathbb{Y} \sim \chi^2(1)$.

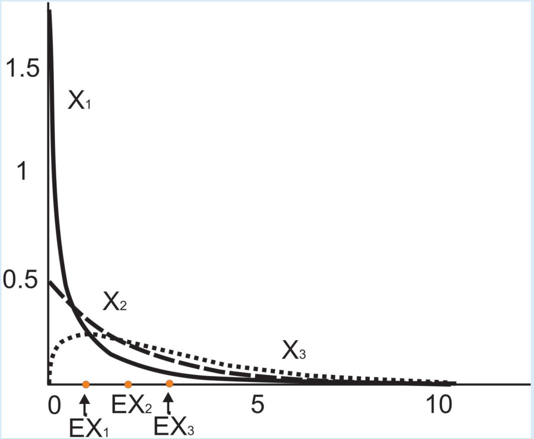
Hustota náhodnej premennej s Chí-kvadrát rozdelením pravdepodobnosti je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}, \qquad \text{pre}\, n \in N \tag{5.32}$$

Toto rozdelenie sa používa v štatistike, napríklad pri teste dobrej zhody, ktorým sa overuje, či sa namerané hodnoty riadia podľa nejakého konkrétneho rozdelenia pravdepodobnosti.

Stredná hodnota a disperzia náhodnej premennej s Chí-kvadrát rozdelením pravdepodobnosti sú

$$E(\mathbb{X}) = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 \cdot n \tag{5.33}$$



Obrázok 5.47: Náhodné premenné s Chí-kvadrát rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X}_1 \sim \chi^2(1)$, $\mathbb{X}_2 \sim \chi^2(2)$ a $\mathbb{X}_3 \sim \chi^2(3)$

5.3.0.8. Náhodná premenná so Studentovým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbf{T}(n)$

Náhodná premenná má **Studentovo rozdelenie pravdepodobnosti** s n stupňami voľnosti, označované aj t-rozdelenie, ak je jej hustota definovaná nasledovne:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad \text{pre} \quad x \in R,\, n \in N \tag{5.34}$$

Iný spôsob vyjadrenia náhodnej premennej $\mathbb{T}$ so Studentovým rozdelením pravdepodobnosti, je jej vyjadrenie ako podielu, v ktorom vystupujú nezávislé náhodné premenné $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}_1$,$\mathbb{X}_2$,…, $\mathbb{X}_n$, s normovaným normálnym rozdelením pravdepodobnosti $\mathrm{N}(0,1)$.

$$\mathbb{T} \sim \mathrm{St}(n): \qquad \mathbb{T} = \frac{\mathbb{X}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{X}_k^2}$$

$$\text{kde} \quad \mathbb{X} \sim \mathrm{N}(0,1),\, \mathbb{X}_1 \sim \mathrm{N}(0,1),\, \ldots,\, \mathbb{X}_n \sim \mathrm{N}(0,1)$$

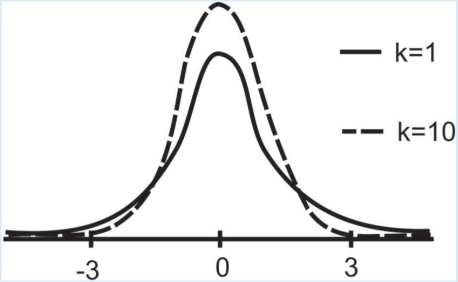
Stredná hodnota (pre $n > 1$) a disperzia (pre $n > 2$) náhodnej premennej so Studentovým rozdelením pravdepodobnosti sú

$$E(\mathbb{T}) = 0, \qquad D(\mathbb{T}) = \frac{n}{n-2} \tag{5.35}$$

Náhodná premenná so Studentovým rozdelením pravdepodobnosti sa využíva v matematickej štatistike pri testovaní hypotéz (napríklad o parametroch normálneho rozdelenia). K tomu je potrebné poznať pravdepodobnosť s akou náhodná premenná nadobudne hodnotu väčšiu ako nejaká konkrétna hodnota t_α. Alebo naopak, treba k zadanej pravdepodobnosti α nájsť takzvanú **kritickú hodnotu** t_α, pre ktorú platí

$$P(\mathbb{T} > t_\alpha) = \alpha$$

Pre Studentovo rozdelenie sú vypracované tabuľky kritických hodnôt (a samozrejme výpočet týchto hodnôt robia rôzne štatistické softvéry).



Obrázok 5.48: Náhodné premenné so Studentovým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X}_1 \sim \mathrm{St}(1)$, $\mathbb{X}_2 \sim \mathrm{St}(2)$ a $\mathbb{X}_3 \sim \mathrm{St}(5)$

5.3.0.9. Náhodná premenná so Fischer-Snedecorovým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbf{F}(n_1, n_2)$

Náhodná premenná má **Fischer-Snedecorovo rozdelenie pravdepodobnosti** s n_1 a n_2 stupňami voľnosti (ozn. F-rozdelenie), ak je jej hustota definovaná nasledovne:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \le 0 \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \dfrac{n_1}{n_2} x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & \text{pre} \quad x > 0 \end{cases} \tag{5.36}$$

Iný spôsob vyjadrenia náhodnej premennej $\mathbb{F}$ so Fischer-Snedecorovým rozdelením pravdepodobnosti, je jej vyjadrenie ako podielu, v ktorom vystupujú nezávislé náhodné premenné $\mathbb{X}_1$ a $\mathbb{X}_2$ s Chí-kvadrát rozdelením pravdepodobnosti, $\chi^2(n_1)$ a $\chi^2(n_2)$.

$$\mathbb{F} \sim \mathrm{F}(n_1, n_2): \qquad \mathbb{F} = \frac{\frac{\mathbb{X}_1}{n_1}}{\frac{\mathbb{X}_2}{n_2}}, \qquad \text{kde} \quad \mathbb{X}_1 \sim \chi^2(n_1),\, \mathbb{X}_2 \sim \chi^2(n_1)$$

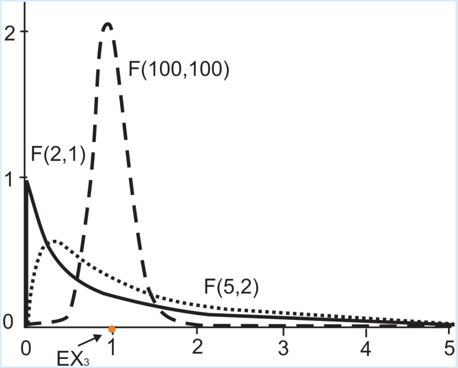
Stredná hodnota (pre $n_2 > 2$) a disperzia (pre $n_2 > 4$) náhodnej premennej s Fischer-Snedecorovým rozdelením pravdepodobnosti sú

$$E(\mathbb{F}) = \frac{n_2}{n_2 - 2}, \qquad D(\mathbb{F}) = \frac{2\,n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)} \tag{5.37}$$

Náhodná premenná so Fischer-Snedecorovým rozdelením pravdepodobnosti sa využíva v matematickej štatistike pri testovaní hypotéz (napríklad pri porovnávaní parametrov dvoch normálnych rozdelení). K tomu je potrebné poznať pravdepodobnosť s akou náhodná premenná nadobudne hodnotu väčšiu ako nejaká konkrétna hodnota f_α. Alebo naopak, treba k zadanej pravdepodobnosti α nájsť takzvanú **kritickú hodnotu** f_α, pre ktorú platí

$$P(\mathbb{F} > f_\alpha) = \alpha$$

Pre Fischer-Snedecorovo rozdelenie sú vypracované tabuľky kritických hodnôt (a samozrejme výpočet týchto hodnôt robia rôzne štatistické softvéry).



Obrázok 5.49: Náhodné premenné s Fischer-Snedecorovým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X}_1 \sim \mathrm{F}(2,1)$, $\mathbb{X}_2 \sim \mathrm{F}(5,2)$ a $\mathbb{X}_3 \sim \mathrm{F}(100,100)$

5.3.1. Príklady

1. Na grafe hustoty náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením, ktorá popisuje dobu obsluhy pri pokladni, nakreslite plochu zodpovedajúcu pravdepodobnosti, že obsluha bude kratšia ako 3 minúty. Predpokladáme, že stredná doba obsluhy je 5 minút.

2. Na grafe hustoty náhodnej premennej s normálnym rozdelením, s parametrami $175\,cm$ a $40\,cm^2$, ktorá popisuje výšku študenta našej školy, nakreslite plochu zodpovedajúcu pravdepodobnosti, že študent bude vyšší ako $180\,cm$. Potom zakreslite plochu zodpovedajúcu pravdepodobnosti, že študent bude nižší ako $165\,cm$. Ktorá možnosť má väčšiu pravdepodobnosť, vyšší ako $180\,cm$ alebo nižší ako $165\,cm$?

3. Doba obsluhy automatom na kávu sa skladá z dvoch častí. Jedna je náhodná (výber nápoja, vhadzovanie mincí), modelujeme ju exponenciálnym rozdelením a trvá priemerne $1/2$ minúty. Druhá časť (nalievanie nápoja) je nenáhodná (deterministická) a trvá presne 20 sekúnd. Aká je pravdepodobnosť, že celá obsluha trvá viac ako 1 minútu.

4. Doba skúšania jedného študenta trvá priemerne 15 minút a predpokladáme, že sa riadi náhodnou premennou s exponenciálnym rozdelením. Vyznačte na grafe pravdepodobnosť, že 5 študentov bude skúšaných kratšie ako hodinu!

5. Generátor náhodných čísel generuje rovnomerne čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Nakreslite a potom vypočítajte, aká je pravdepodobnosť, že takto vygenerované číslo bude z intervalu $\langle 0.68, 1.25\rangle$!

6. Generátor náhodných čísel generuje rovnomerne čísla z intervalu $\langle 1, 2\rangle$. Nakreslite a potom vypočítajte, aká je pravdepodobnosť, že takto vygenerované číslo bude z intervalu $\langle 0.68, 1.25\rangle$!

7. Nakreslite graf hustoty náhodnej premennej s Erlangovým rozdelením pravdepodobnosti, ktoré vzniklo ako súčet dvoch náhodných premenných s exponenciálnym rozdelením s parametrom 2! Na grafe nakreslite plochu zodpovedajúcu pravdepodobnosti, že náhodná premenná dosiahne hodnotu väčšiu ako 2.3!

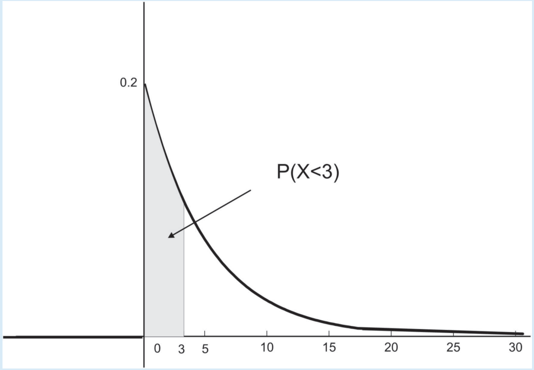
8. Na grafe hustoty náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením s parametrom 5 (ktorá popisuje napr. dobu obsluhy pri pokladni), nakreslite plochu zodpovedajúcu pravdepodobnosti, že obsluha bude kratšia ako pol minúty!

9. Predpokladajme, že priemerná doba obsluhy v kaderníctve je 80 minút. Doba obsluhy pozostáva zo 4 fáz. Dobu trvania každej z nich budeme modelovať náhodnou premennou s exponenciálnym rozdelením s rovnakým parametrom. Nakreslite plochu predstavujúcu pravdepodobnosť, že obsluha bude trvať viac ako 100 minút.

10. Pri štatistickom pozorovaní sa zistilo, že priemerná doba trvania jazdy vlaku zo Žiliny do Bratislavy je 45 minút. Odchýlka od tejto hodnoty je vyjadrená odhadom disperzie a činí 9 minút^2. Chceme modelovať náhodnú premennú, popisujúcu dobu jazdy vlaku zo Žiliny do Bratislavy, pomocou Erlangovho rozdelenia. Aké parametre má mať toto rozdelenie?

5.3.1.1. Riešenie príkladov

1. Na obrázku 5.50 je graf hustoty náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením, ktorá popisuje dobu obsluhy pri pokladni. Stredná doba obsluhy je 5 minút. Plocha, ktorá je taká veľká ako pravdepodobnosť, že obsluha bude kratšia ako 3 minúty, je znázornená na obrázku sivou farbou.



Obrázok 5.50: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $(-\infty, 3)$

2. Na grafe hustoty náhodnej premennej s nakreslite plochu zodpovedajúcu pravdepodobnosti, že študent bude vyšší ako $180\,cm$. Potom zakreslite plochu zodpovedajúcu pravdepodobnosti, že študent bude nižší ako $160\,cm$. Na obrázkoch 5.51 a 5.52 sú grafy hustoty náhodnej premennej s normálnym rozdelením, s parametrami $175\,cm$ a $40\,cm^2$, ktoré popisuje výšku študenta našej školy. Plocha, ktorá je taká veľká ako pravdepodobnosť, že študent bude vyšší ako $180\,cm$, je znázornená na obrázku 5.51 a plocha, ktorá je taká veľká ako pravdepodobnosť, že študent bude nižší ako $165\,cm$, je

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 247 of 410

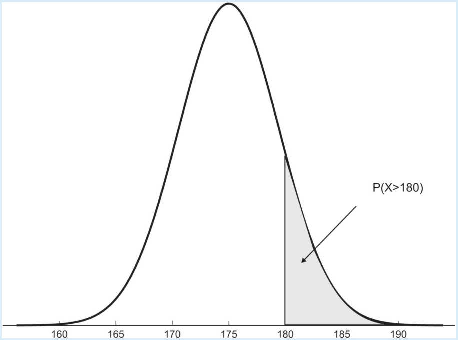
Go Back

Full Screen

Close

Quit

znázornená na obrázku 5.52.

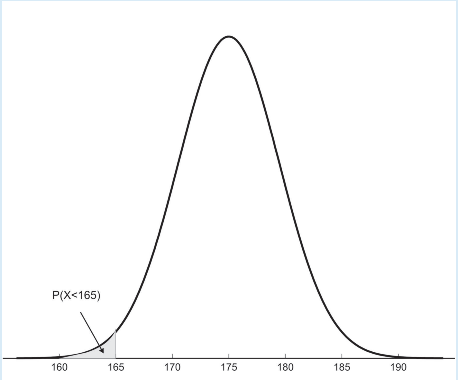


Obrázok 5.51: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $(180, \infty)$

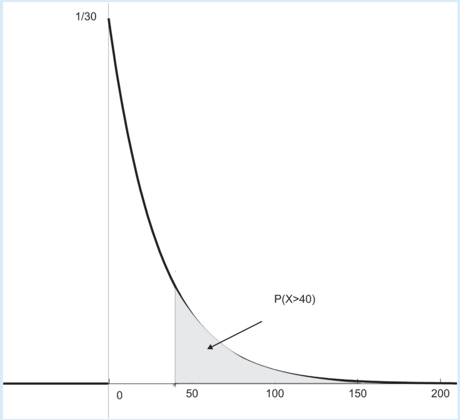
Z obrázku je zrejmé, že väčšiu pravdepodobnosť má možnosť, že študent je vyšší ako $180\,cm$.

3. Doba obsluhy automatom na kávu sa skladá z dvoch častí. Jedna je náhodná (výber nápoja, vhadzovanie mincí), modelujeme ju exponenciálnym rozdelením a trvá priemerne $1/2$ minúty. Druhá časť (nalievanie nápoja) je nenáhodná (deterministická) a trvá presne 20 sekúnd. Pravdepodobnosť, že celá obsluha trvá viac ako 1 minútu je taká istá ako pravdepodobnosť, že prvá časť trvá viac ako 40 sekúnd. Teda počítame pravdepodobnosť, že náhodná premenná s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti, so strednou hodnotou približne 30 sekúnd, dosiahne hodnotu väčšiu ako 40 sekúnd.

   Na obrázku 5.53 je táto pravdepodobnosť zobrazená ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x na intervale $(40, \infty)$.



Obrázok 5.52: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $(-\infty, 165)$



Obrázok 5.53: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $(40, \infty)$

Parameter rozdelenia je $\lambda = 1/30$. Vypočítajme obsah znázornenej plochy pomocou integrálu.

$$\int_{40}^{\infty} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, \mathrm{d}x = \left[-\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right]_{40}^{\infty} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{30}\, 40} = 0.26$$

4. Zadanie nie je jednoznačné, tak si ho musíme doplniť. Skúšanie piatich študentov sa môže realizovať aj paralelne, ale my predpokladajme, že budú skúšaní za sebou a medzi skúšaním nebudú prestávky. Doba skúšania jedného študenta trvá priemerne 15 minút a predpokladáme, že sa riadi náhodnou premennou s exponenciálnym rozdelením. Súčet piatich exponenciálnych rozdelení je Erlangovo rozdelenie pravdepodobnosti. Parameter $\lambda = 1/15$ je rovnaký ako má exponenciálne rozdelenie, ktorého súčtom Erlangovo rozdelenie vzniklo, druhý parameter tohto rozdelenia je $n = 5$. Pravdepodobnosť, že 5 študentov bude skúšaných kratšie ako hodinu je zobrazená na obrázku 5.54.

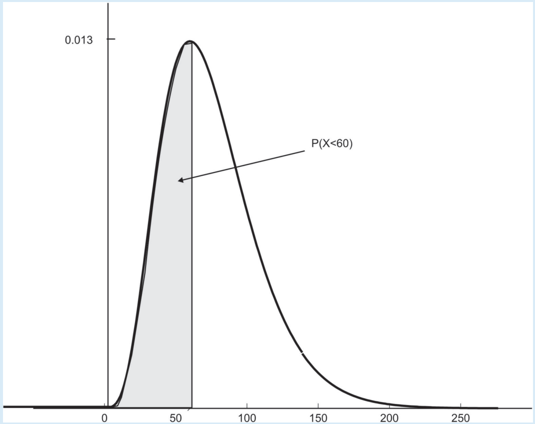
5. Generátor náhodných čísel generuje rovnomerne čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Pravdepodobnosť výskytu týchto čísel budeme modelovať pomocou náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti. Na obrázku 5.55 je pravdepodobnosť, že takto vygenerované číslo bude z intervalu $\langle 0.68, 1.25\rangle$, zobrazená ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x na intervale $\langle 0.68, 1.25\rangle$.

   Vypočítajme obsah znázornenej plochy pomocou vzorca pre obsah obdĺžnika aj pomocou integrálu:

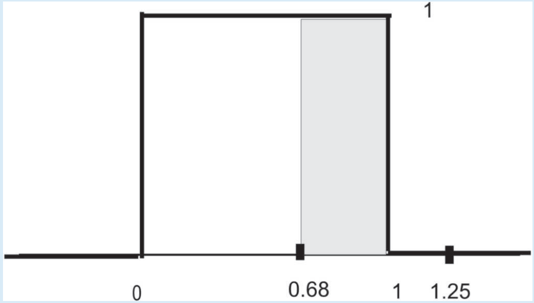
$$P(\mathbb{X} \in \langle 0.68, 1.25\rangle) = 0.32 \cdot 1 = 0.32$$

$$\int_{0.68}^{1.25} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{0.68}^{1} 1\, \mathrm{d}x + \int_{1}^{1.25} 0\, \mathrm{d}x = [x]_{0.68}^{1} + 0 = 1 - 0.68 = 0.32$$

   Stačilo samozrejme urobiť iba jeden z výpočtov (výsledky oboch postupov sú rovnaké). Dva spôsoby výpočtu sú tu uvedené preto, aby čitateľ videl, že obsah sa dá niekedy vypočítať aj inak ako pomocou integrálu.



Obrázok 5.54: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $(-\infty, 60)$

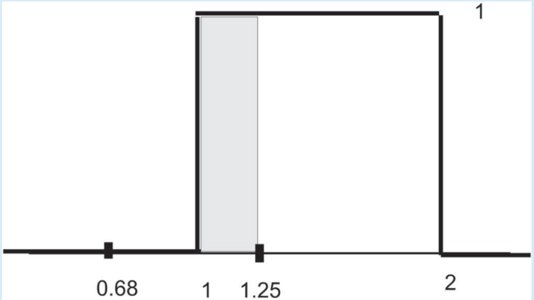


Obrázok 5.55: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $\langle 0.68, 1.25\rangle$

6. Generátor náhodných čísel generuje rovnomerne čísla z intervalu $\langle 1, 2\rangle$. Pravdepodobnosť výskytu týchto čísel budeme modelovať pomocou náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti. Na obrázku 5.56 je pravdepodobnosť, že takto vygenerované číslo bude z intervalu $\langle 0.68, 1.25\rangle$, zobrazená ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x na intervale $\langle 0.68, 1.25\rangle$.

   Vypočítajme obsah znázornenej plochy pomocou vzorca pre obsah obdĺžnika aj pomocou integrálu:
$$P(\mathbb{X} \in \langle 0.68, 1.25\rangle) = 0.25 \cdot 1 = 0.25$$
$$\int_{0.68}^{1.25} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0.68}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{1.25} 1\,\mathrm{d}x = 0 + [x]_1^{1.25} = 1.25 - 1 = 0.25$$

7. Nakreslite graf hustoty náhodnej premennej s Erlangovým rozdelením pravdepodobnosti, ktoré vzniklo ako súčet dvoch náhodných premenných s exponenciálnym rozdelením s parametrom 2. Na grafe nakreslite plochu zodpovedajúcu pravdepodobnosti,



Obrázok 5.56: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $\langle 0.68, 1.25\rangle$

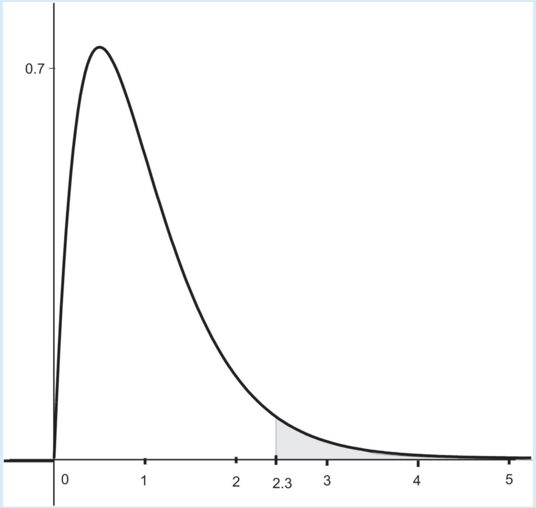
že náhodná premenná dosiahne hodnotu väčšiu ako 2.3.

8. Na obrázku 5.58 je graf hustoty náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením s parametrom 5 (ktorá popisuje napr. dobu obsluhy pri pokladni). Veľkosť vyznačenej plochy , zodpovedá pravdepodobnosti, že obsluha bude kratšia ako pol minúty.

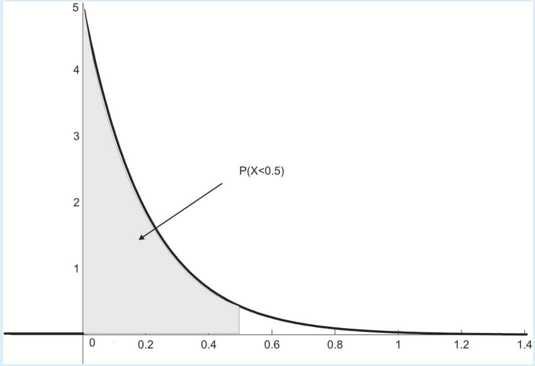
9. Priemerná doba obsluhy v kaderníctve je 80 minút. Doba obsluhy pozostáva zo 4 fáz. Dobu trvania každej z nich budeme modelovať náhodnou premennou s exponenciálnym rozdelením s rovnakým parametrom. Náhodná premená, ktorá bude modelovať celkovú dobu obsluhy sa bude riadiť Erlangovym rozdelením pravdepodobnosti. Stredná hodnota tejto náhodnej premennej je podľa 5.29 rovná

$$E(\mathbb{X}) = \frac{4}{\lambda} = 80$$

Preto parameter $\lambda = 1/20$. Na obrázku 5.59 je graf hustoty náhodnej premennej s Erlangovym rozdelením s parametrom 1/20 s vyznačenou plochou, ktorej veľkosť zodpovedá predstavuje pravdepodobnosť, že obsluha bude trvať viac ako 100 minút.



Obrázok 5.57: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $(2.3, \infty)$



Obrázok 5.58: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $(-\infty, 0.5)$

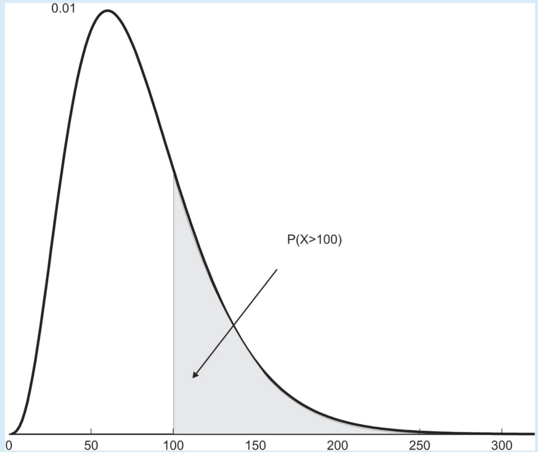
10. Chceme zistiť aké parametre má mať Erlangovo rozdelenie $\mathrm{Er}(n, \lambda)$, ktorým budeme modelovať trvanie jazdy vlaku zo Žiliny do Bratislavy. Priemerná hodnota je 45 minút, budeme túto hodnotu považovať za strednú hodnotu rozdelenia. Odchýlka od tejto hodnoty je vyjadrená odhadom disperzie a činí 9 minút^2. Vzorce pre strednú hodnotu a disperziu Erlangovho rozdelenia sú podľa vzorca 5.29:

$$E(\mathbb{X}) = \frac{n}{\lambda}, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{n}{\lambda^2}$$

Zostavíme sústavu dvoch rovníc pre neznáme parametre n, λ:

$$\frac{n}{\lambda} = 45$$

$$\frac{n}{\lambda^2} = 9$$



Obrázok 5.59: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $(100, \infty)$

Riešením tejto sústavy dostaneme parametre Erlangovho rozdelenia

$$n = 225, \quad \lambda = 5$$

Nehovorili sme o tom, či Erlangovo rozdelenie dobre modeluje náš problém, počítali sme iba odhad parametrov, keď sem predpokladali, že sa jedná o Erlangovo rozdelenie a poznali sme priemernú hodnotu aj priemernú odchýlku trvaní jazdy vlakov.

5.3.2. Úlohy

1. Nech funkcia $f(x)$ je hustota nejakej náhodnej premennej. Vypočítajte parameter k, ak predpis pre hustotu je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ k \cdot x & \text{pre} \quad 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{pre} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

2. Hustota rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej je daná vzťahom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ k \cdot x & \text{pre} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{pre} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

   Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodná premenná dosiahne hodnotu väčšiu ako 0.25 a menšiu ako 0.5.

3. Pre akú hodnotu k je funkcia $f(x)$ hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej? Nakreslite túto hustotu!

$$f(x) = \frac{k}{1 + x^2}$$

4. Nech náhodná premenná $\mathbb{X}$ má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $\lambda = 4$. Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodná premenná $\mathbb{X}$ dosiahne hodnotu väčšiu ako -0.1 a menšiu ako 0.4.

5. Hustota rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{X}$ je daná vzťahom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ x & \text{pre} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{pre} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{pre} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodná premenná $\mathbb{X}$ dosiahne hodnotu väčšiu ako 0.75.

6. Nech funkcia $f(x)$ je hustota nejakej náhodnej premennej. Vypočítajte parameter k, ak predpis pre hustotu je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 1 \\ k \cdot x & \text{pre} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{pre} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

7. Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti s parametrami $\mu = 12$ a $\sigma = 5$, dosiahne hodnotu väčšiu ako 14.

8. Pre náhodnú premennú $\mathbb{X}$ s normálnym rozdelením pravdepodobnosti s parametrami $\mu = 1$ a $\sigma = 9$, vypočítajte pravdepodobnosť

$$P(|\mathbb{X}| > 3)$$

9. Predpokladáme, že namerané hodnoty sú generované z rovnakého rozdelenia a sú to: 12, 1.3, 2, 2.1, 6, 5, 2, 4, 3.4, 2.6, 5, 6, 9, 2.9, 3.4, 1.5, 0.3, 0.4, 3.1, 2.7, 8.2, 3.7, 2, 0, 1.5, 9, 14, 3, 2, 1, 6, 8, 5.6, 11, 1.2, 0.9, 4.1, 5, 2, 3.9, 5.2, 4, 5.2, 4.1, 2.2, 10.2, 2.3, 1.9, 2.1, 5.3, 2, 3.2, 3.7, 2.4, 7.2, 6.1.

   Hodnoty chceme popísať náhodnou premennou s niektorým z nasledujúcich rozdelení: rovnomerným, exponenciálnym, Erlangovým, alebo normálnym. Ktoré rozdelenie máme vybrať?

10. Pri výrobe krajčírskych metrov sa zistilo, že ich skutočná dĺžka je skoro vždy v intervale $\langle 1-\alpha, 1+\alpha \rangle$.

    Modelujme túto situáciu pomocou normálneho rozdelnia pravdepodobnosti. Predpokladáme, že dĺžka krajčírskeho metra sa riadi normálnym rozdelením so strednou hodnotou 1 meter a disperziou 25 milimetrov štvorcových.

Predpokladajme, že tvrdenie „dĺžka krajčírskeho metra je skoro vždy v intervale $\langle 1-\alpha, 1+\alpha\rangle$" znamená, že je veľká pravdepodobnosť, že dĺžka je z uvedeného intervalu. Dohodnime sa, že táto pravdepodobnosť je aspoň 0.95.

Určite číselné hodnoty pre hranice intervalu, z ktorého sú hodnoty náhodnej premennej popisujúcej dĺžku metra.

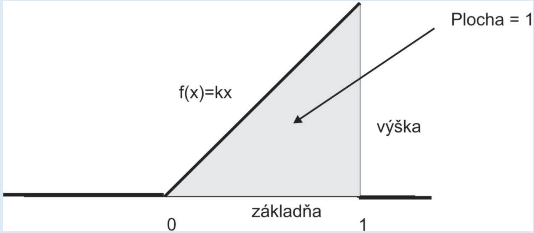
5.3.2.1. Riešenie úloh

1. Na to, aby funkcia $f(x)$ mohla byť hustota nejakej náhodnej premennej, musí platiť vzťah 5.21:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$
Funkcia $f(x)$ je rôzna od nuly iba na intervale $\langle 0, 2)$:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ k \cdot x & \text{pre} \quad 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{pre} \quad 2 \le x \end{cases}$$
Preto hľadáme takú hodnotu parametra k, aby platilo:
$$\int_0^2 k \cdot x\,\mathrm{d}x = 1$$
$$\int_0^2 k \cdot x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{k \cdot x^2}{2}\right]_0^2 = k \cdot \frac{2^2}{2} - k \cdot \frac{0^2}{2} = k \cdot 2$$
$$k \cdot 2 = 1$$
Na to, aby funkcia $f(x)$ bola hustotou musí byť parameter $k = \dfrac{1}{2}$.

2. Hustota rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej je daná vzťahom
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ k \cdot x & \text{pre} \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{pre} \quad 1 \le x \end{cases}$$

Máme vypočítať pravdepodobnosť, že náhodná premenná dosiahne hodnotu väčšiu ako 0.25 a menšiu ako 0.5. Rovnako ako v predchádzajúcej úlohe, potrebujeme najprv vypočítať hodnotu parametra k. Použijeme iný (rovnako dobrý) spôsob výpočtu, aby si čitateľ mohol sám vybrať, ako takéto úlohy riešiť.

Zo zadania vidíme, že funkcia hustoty je nenulová iba na intervale $\langle 0, 1)$. Na tomto intervale má lineárny priebeh, preto plocha medzi krivkou hustoty a osou x je plocha trojuholníka ako vidíme na obrázku 5.60 Obsah trojuholníka vypočítame ako



Obrázok 5.60: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy trojuholníka

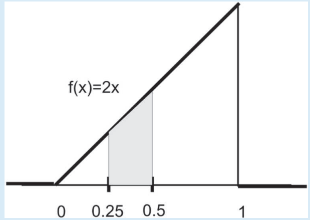
$$S = \frac{\text{základňa} \cdot \text{výška}}{2}$$

$$S = \frac{1 \cdot k \cdot 1}{2} = \frac{k}{2}$$

$$\frac{k}{2} = 1$$

Na to, aby funkcia $f(x)$ bola hustotou musí byť parameter $k = 2$.

Pravdepodobnosť, že náhodná premenná dosiahne hodnotu väčšiu ako 0.25 a menšiu ako 0.5 je znázornená na obrázku 5.61



Obrázok 5.61: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $(0.25, 0.5)$

Plochu vypočítame ako rozdiel obsahov dvoch trojuholníkov (ale samozrejme rovnako úspešní budeme ak použijeme integrál na príslušnom intervale).

$$P(0.25 < \mathbb{X} < 0.5) = S_1 - S_2 = \frac{0.5 \cdot 1}{2} - \frac{0.25 \cdot 0.5}{2} = \frac{3}{16} \doteq 0.19$$

3. Chceme zistiť, pre akú hodnotu k je funkcia $f(x)$ hustotou pravdepodobnosti náhodnej premennej:

$$f(x) = \frac{k}{1+x^2}$$

Hodnoty funkcie budú nezáporné pre $k \geq 0$. Hľadáme také k, pre ktoré platí vzťah 5.21:

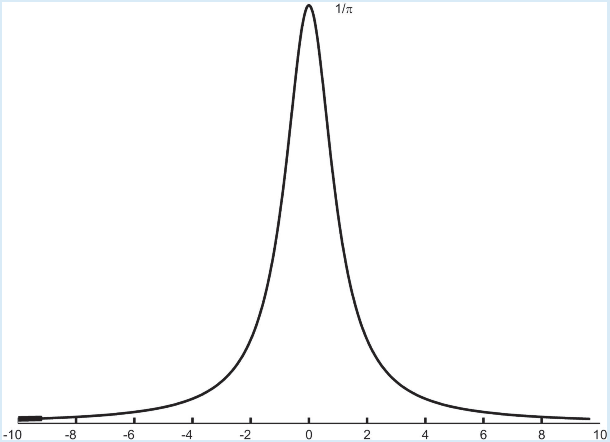
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [k \cdot \arctan(x)]_{-\infty}^{\infty} = k\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = k \cdot \pi$$

Pre parameter k dostávame podmienku

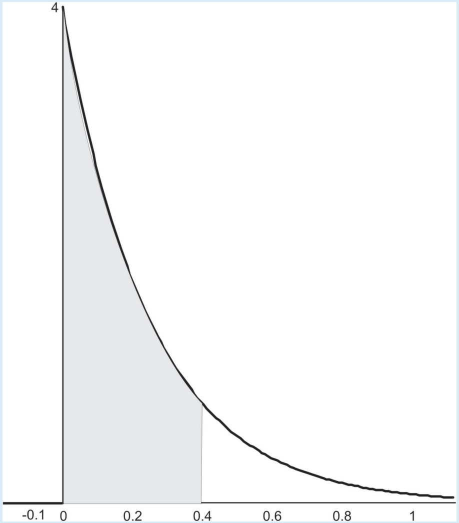
$$k \cdot \pi = 1$$

Teda $k = \dfrac{1}{\pi}$, krivka hustoty je znázornená na obrázku 5.62



Obrázok 5.62: Krivka hustoty $f(x) = \dfrac{\frac{1}{\pi}}{1+x^2}$

4. Náhodná premenná $\mathbb{X}$ má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $\lambda = 4$. Máme vypočítajteť pravdepodobnosť, že náhodná premenná $\mathbb{X}$ dosiahne hodnotu väčšiu ako -0.1 a menšiu ako 0.4. Táto pravdepodobnosť taká veľká ako plocha medzi krivkou hustoty a osou x na intervale (plocha je zakreslená na obrázku 5.63).



Obrázok 5.63: Pravdepodobnosť, ako veľkosť plochy medzi krivkou hustoty a osou x, na intervale $(-0.1, 0.4)$

Hustota rozdelnia pravdepodobnosti pre náhodnú premennú s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti s parametrom $\lambda = 4$ má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ 4 \cdot \mathrm{e}^{-4 \cdot x} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Hľadanú pravdepodobnosť vypočítame ako integrál

$$\int_{-0.1}^{0.4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-0.1}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{0.4} 4 \cdot \mathrm{e}^{-4 \cdot x}\,\mathrm{d}x = \left[-\,\mathrm{e}^{-4 \cdot x}\right]_0^{0.4} = 1 - \mathrm{e}^{-4 \cdot 0.4} \doteq 0.8$$

5. Hustota rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{X}$ je daná vzťahom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ x & \text{pre} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{pre} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{pre} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

Hľadáme pravdepodobnosť, že náhodná premenná $\mathbb{X}$ dosiahne hodnotu väčšiu ako 0.75. Veľkosť plochy, ktorá je rovnako veľká, ako hľadaná pravdepodobnosť, vypočítame ako integrál:

$$\int_{0.75}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0.75}^{1} x\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} 2 - x\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.75}^{1} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 0 =$$

$$= 0.5 - 0.28 + (4 - 2) - (2 - 0.5) = 0.72$$

6. Hľadáme parameter k tak, aby funkcia $f(x)$ bola hustota:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 1 \\ k \cdot x & \text{pre} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{pre} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

Na to, aby funkcia $f(x)$ mohla byť hustota nejakej náhodnej premennej, musí platiť vzťah 5.21:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Má platiť:

$$\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} k \cdot x\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = 1$$

Po úpravách:

$$0 + \left[k \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 0 = 1$$

$$k \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 1$$

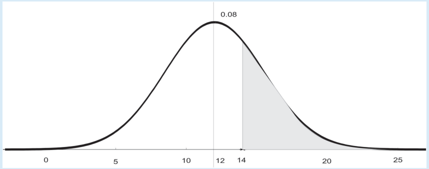
$$k \cdot \frac{3}{2} = 1$$

Parameter $k = \dfrac{2}{3}$

7. Pravdepodobnosť, že náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ s parametrami $\mu = 12$ a $\sigma = 5$, dosiahne hodnotu väčšiu ako 14 je vyznačená na obrázku 5.64.

   Veľkosť plochy (= hľadanú pravdepodobnosť) vypočítame ako integrál z funkcie hustoty $f(x)$ normálneho rozdelenia na intervale $(14, \infty)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Obrázok 5.64: Pravdepodobnosť, že náhodná premenná N(12, 25) s normálnym rozdelením pravdepodobnosti dosiahne hodnotu väčšiu ako 14

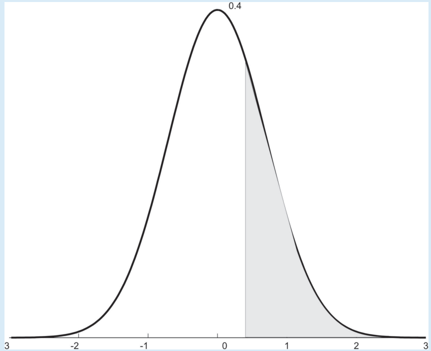
$$P(\mathbb{X} > 14) = \int_{14}^{\infty} \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-12)^2}{2 \cdot 25}} \, \mathrm{d}x$$

Na výpočet tohoto integrálu je potrebné použiť numerické metódy, nakoľko primitívnu funkciu nie je možné vyjadriť v tvare elementárnej funkcie.
Prvý, aj keď nepresný odhad môžeme urobiť priamo z obrázku. Iná možnosť, ako zistiť túto pravdepodobnosť je, že na numerický výpočet integrálu použijeme vhodný softvér (Matlab, Mathematica, Maple, Octave, R).
Iná možnosť je použiť tabuľky už vypočítaných integrálov pre normované normálne rozdelenie N(0, 1). Náhodná premenná $\mathbb{X}$ má normálne rozdelenie N(12, 25). Na jej normovanie, teda na konštrukciu náhodnej premennej $\mathbb{Y}$ s normovaným normálnym rozdelením použijeme predpis:

$$\mathbb{Y} = \frac{\mathbb{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\mathbb{X} - 12}{5}$$

Plocha pre náhodnú premennú $\mathbb{X}$ na obrázku 5.64 je rovnako veľká ako plocha pre náhodnú premennú $\mathbb{Y}$ na obrázku 5.65.

$$P(\mathbb{X} > 14) = P(\frac{\mathbb{X} - 12}{5} > \frac{14 - 12}{5}) = P(\mathbb{Y} > 0.4) = 1 - P(\mathbb{Y} \leq 0.4)$$



Obrázok 5.65: Pravdepodobnosť, že náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti N(0, 1) dosiahne hodnotu väčšiu ako $\frac{14-12}{5} = 0.4$

Hodnotu pravdepodobnosti $P(\mathbb{Y} \leq 0.4)$ nájdeme v tabuľkách distribučnej funkcie, napríklad na *http://www.math.unb.ca/ knight/utility/NormTble.htm*. Pre normovanú normálnu náhodnú premennú platí $P(\mathbb{Y} \leq 0.4) \doteq 0.6554$.

$$P(\mathbb{X} > 14) = 1 - P(\mathbb{Y} \leq 0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446$$

8. Pre náhodnú premennú $\mathbb{X}$ s normálnym rozdelením pravdepodobnosti s parametrami $\mu = 1$ a $\sigma = 9$, vypočítajte pravdepodobnosť

$$P(|\mathbb{X}| > 3)$$

9. Predpokladáme, že namerané hodnoty sú generované z rovnakého rozdelenia a sú to: 12, 1.3, 2, 2.1, 6, 5, 2, 4, 3.4, 2.6, 5, 6, 9, 2.9, 3.4, 1.5, 0.3, 0.4, 3.1, 2.7, 8.2, 3.7, 2, 0, 1.5, 9, 14, 3, 2, 1, 6, 8, 5.6, 11, 1.2, 0.9, 4.1, 5, 2, 3.9, 5.2, 4, 5.2, 4.1, 2.2, 10.2, 2.3, 1.9, 2.1, 5.3, 2, 3.2, 3.7, 2.4, 7.2, 6.1.

Hodnoty chceme popísať náhodnou premennou s niektorým z nasledujúcich rozdelení: rovnomerným, exponenciálnym, Erlangovým, alebo normálnym. Ktoré rozdelenie máme vybrať?

Pozrime sa, ako často sa vyskytujú hodnoty z jednotliných úsekov intervalu $\langle 0, 14\rangle$, v ktorom ležia všetky namerané hodnoty. V prvej polovici je hodnôt omnoho viac ako v druhej.

Rozdeľme interval $\langle 0, 14\rangle$ na 5 rovnakých častí. Jednotlivé intervaly budú mať dĺžku 14/5=2.8 a v tabuľke 5.1 sú uvedené početnosti výskytov hodnôt v týchto intervaloch.

intervaly	$\langle 0, 2.8)$	$\langle 2.8, 5.6)$	$\langle 5.6, 8.4)$	$\langle 8.4, 11.2)$	$\langle 11.2, 14\rangle$
početnosti	23	19	7	4	3
relatívne početnosti	0.4107	0.3393	0.1250	0.0714	0.0536

Tabuľka 5.1: Početnosti výskytov nameraných hodnôt v 5 intervaloch

Na obrázku 5.66 je znázornených 5 obdĺžnikov, ktorých plochy zodpovedajú početnostiam hodnôt v danom intervale. Súčet plochy všetkých obdĺžnikov je 1. V tom istom obrázku je zakreslená hustota exponenciálneho rozdelenia, ktorého stredná hodnota je rovná priemeru nameraných hodnôt.

Pri rozdelení do 5 intervalov je z obrázku zrejmé, že namerané dáta sú generované z exponenciálneho rozdelenia.

Pozrime sa teraz, ako sa budú dáta javiť, keď ich rozdelíme do 7 intervalov.

Rozdeľme interval $\langle 0, 14\rangle$ na 7 rovnakých častí. Jednotlivé intervaly budú mať dĺžku 14/7=2 a v tabuľke 5.2 sú uvedené početnosti výskytov hodnôt v týchto intervaloch.

Home Page

Title Page

Contents

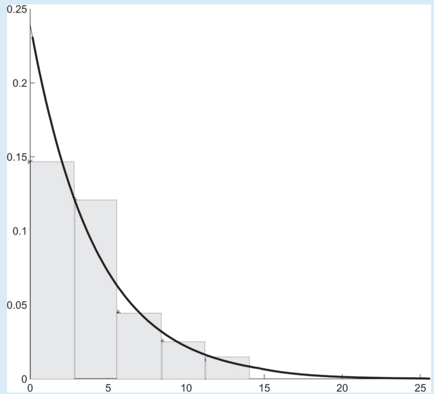
Page 271 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Obrázok 5.66: Početnosti výskytov hodnôt v 5 intervaloch a hustota pravdepodobnosti exponenciálneho rozdelenia zakreslená v tom istom obrázku

intervaly	⟨0, 2)	⟨2, 4)	⟨4, 6)	⟨6, 8)	⟨8, 10)	⟨10, 12)	⟨12, 14)
početnosti	10	22	11	5	4	2	2
relatívne početnosti	0.1786	0.3929	0.1964	0.0893	0.0714	0.0357	0.0357

Tabuľka 5.2: Početnosti výskytov nameraných hodnôt v 5 intervaloch

Home Page

Title Page

Contents

Page 272 of 410

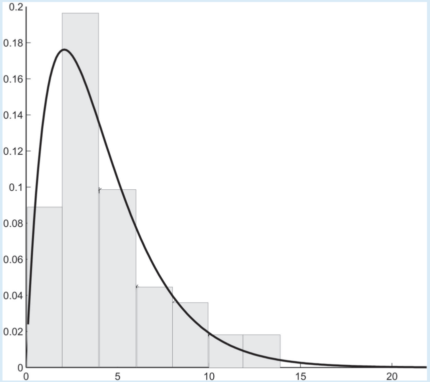
Go Back

Full Screen

Close

Quit

Na obrázku 5.67 je znázornených 7 obdĺžnikov, ktorých plochy zodpovedajú početnostiam hodnôt v danom intervale. Súčet plochy všetkých obdĺžnikov je 1. V tom istom obrázku je zakreslená hustota Erlangovho rozdelenia, ktorého stredná hodnota je rovná priemeru nameraných hodnôt.



Obrázok 5.67: Početnosti výskytov hodnôt v 7 intervaloch a hustota pravdepodobnosti Erlangovho rozdelenia zakreslená v tom istom obrázku

Pri rozdelení do 7 intervalov je z obrázku zrejmé, že namerané dáta sú generované z Erlangovho rozdelenia.

Na to, aby sme sa skutočne ubezpečili, či sa jedná o exponenciálne, alebo Erlangovo rozdelenie budeme musieť venovať štatistike viac času. V tomto príklade sme ukázali jeden z faktorov, ktorý môže ovplyvniť výsledok: počet intervalov, do ktorých rozdelíme odob hodnôt spojitej náhodnej premennej.

10. Pri výrobe krajčírskych metrov sa zistilo, že ich skutočná dĺžka je skoro vždy v intervale

$\langle 1-\alpha, 1+\alpha\rangle$.

Modelujeme túto situáciu pomocou normálneho rozdelnia pravdepodobnosti. Predpokladáme, že dĺžka krajčírskeho metra sa riadi normálnym rozdelením so strednou hodnotou 1 meter a disperziou 25 milimetrov štvorcových. Prevedieme metre na milimetre, aby nevznikli problémy pri používaní rôznych jednotiek.

Máme určiť hodnotu α tak, aby pre hodnoty náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s normálnym rozdelením pravdepodobnosti N(1000, 25) platilo:

$$P(\mathbb{X} \in \langle 1000-\alpha, 1000+\alpha\rangle) \geq 0.95$$

$$P(1000-\alpha \leq \mathbb{X} \leq 1000+\alpha) =$$

$$= P\left(\frac{1000-\alpha-1000}{5} \leq \frac{\mathbb{X}-1000}{5} \leq \frac{1000+\alpha-1000}{5}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{\alpha}{5} \leq \mathbb{Y} \leq \frac{\alpha}{5}\right) = P\left(\mathbb{Y} \leq \frac{\alpha}{5}\right) - P\left(\mathbb{Y} \leq -\frac{\alpha}{5}\right) \geq 0.95$$

Náhodná premenná $\mathbb{Y}$ má normované normálne rozdelenie pravdepodobnosti, ktoré je párnou funkciou (symetrickou podľa osi y). Ako vidno z obrázku 5.68, stačí nájsť takú hodnotu α, aby platilo

$$P\left(\mathbb{Y} \leq \frac{\alpha}{5}\right) = 0.975 \qquad \text{a} \qquad P\left(\mathbb{Y} \leq -\frac{\alpha}{5}\right) = 0.025$$

$$P\left(\mathbb{Y} \leq 1.96\right) = 0.975 \qquad \text{a} \qquad P\left(\mathbb{Y} \leq -1.96\right) = 0.025$$

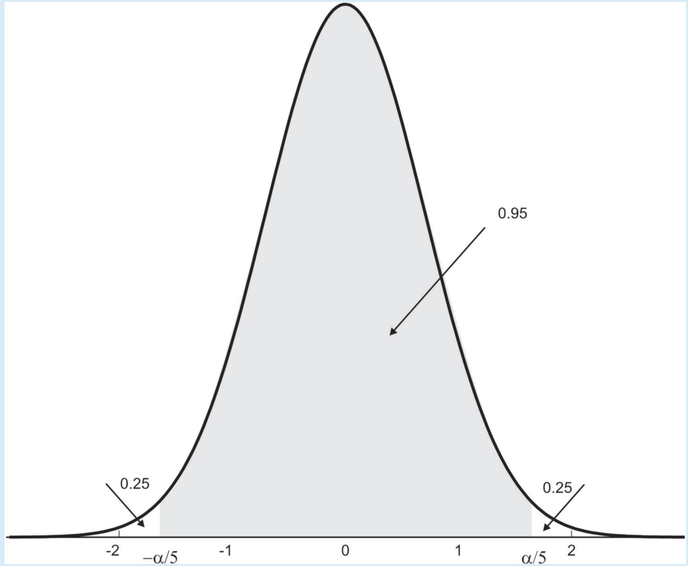
Odtiaľ

$$\frac{\alpha}{5} = 1.96 \qquad \text{resp.} \qquad -\frac{\alpha}{5} = -1.96$$

$$\alpha = 9.8$$

Dĺžka 95 zo 100 krajčírskych metrov vyhovujúcich zadaniu tejto úlohy, bude z intervalu:

$$\langle 1000-\alpha,\ 1000+\alpha\rangle = \langle 990.2,\ 1009.8\rangle$$



Obrázok 5.68: Hodnoty riadiace sa normovaným normálnym rozdelením sa v intervale $\langle -\frac{\alpha}{5}, \frac{\alpha}{5} \rangle$ vyskytnú s pravdepodobnosťou 0.95

5.4. Užitočné funkcie a vlastnosti náhodných premenných

5.4.1. Distribučná funkcia náhodnej premennej

V odseku o spojitých náhodných premenných sme ukázali, ako je možné popísať rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej pomocou funkcie hustoty. Pre výpočet pravdepodobnosti, že spojitá náhodná premenná dosiahne hodnotu z intervalu I (ktorý môže byť konečný aj nekonečný), sme použili predpis:

$$P(\mathbb{X} \in I) = \int\limits_I f(x)\,\mathrm{d}x$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej je funkcia, ktorá je vyjadrením pravdepodobnosti, že hodnota náhodnej premennej je menšia ako nejaká konkrétna číselná hodnota x.

$$F(x) = P(\mathbb{X} \le x)\,, \qquad \text{kde } x \in R$$

Distribučná funkcia je definovaná pre spojité aj diskrétne náhodné premenné.

Pre diskrétne náhodné premenné môžeme distribučnú funkciu vyjadriť ako:

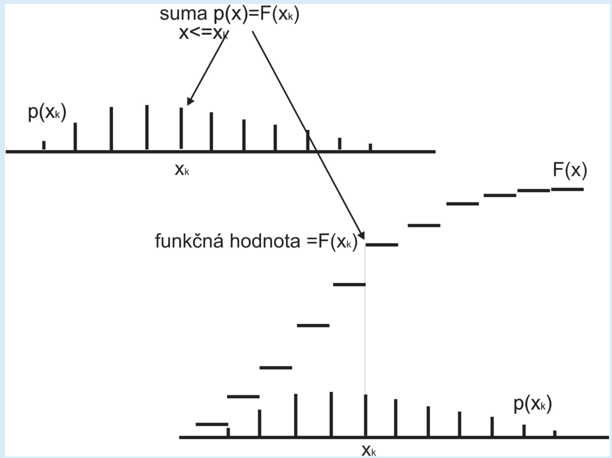
$$F(x) = P(\mathbb{X} \le x) = \sum_{x_k \le x} p_k = \sum_{x_k \le x} P(\mathbb{X} = x_k)\,, \qquad \text{kde } x \in R$$

Pre spojité náhodné premenné môžeme distribučnú funkciu vyjadriť ako:

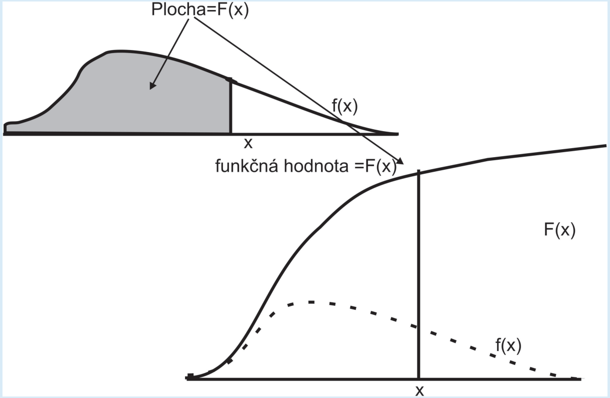
$$F(x) = P(\mathbb{X} \le x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \text{kde } x \in R$$

V spojitom prípade platí, že distribučná funkcia je primitívna funkcia k funkcii hustoty. Teda distribučná funkcia je integrál z hustoty. Naopak hustotu dostaneme ako deriváciu distribučnej funkcie.

$$f(x) = F'(x)\,, \qquad \text{kde } x \in R$$



Obrázok 5.69: Vzťah mezdi hodnotami pravdepodobnosti a distribučnou funkciou $F(x)$



Obrázok 5.70: Vzťah mezdi plochou pod krivkou hustoty $f(x)$ a distribučnou funkciou $F(x)$

Ďalšie vlastnosti distribučnej funkcie vidno z grafu tejto funkcie:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
- distribučná funkcia je neklesajúca, zľava spojitá funkcia

Hodnoty plochy pod krivkou hustoty môžeme vyjadriť ako hodnoty distribučnej funkcie:

$$P(a \leq \mathbb{X} \leq b) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$P(a \leq \mathbb{X}) = \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - F(a)$$

$$P(\mathbb{X} \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)$$

Pre spojitú náhodnú premennú je distribučná funkcia nástrojom, pomocou ktorého je možné vypočítať hustotu rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej v situácii, keď poznáme pravdepodobnosť $P(\mathbb{X} \leq x)$.

Úloha 5.4.1 *Počet dopravných nehôd v Žiline počas jedného mesiaca budeme modelovať náhodnou premennou s Poissonvým rozdelením pravdepodobnosti. Chceme zistiť, aké rozdelenie bude mať dĺžka intervalu medzi nehodami.*

Aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná popisujúca dĺžku intervalu medzi výskytmi náhodnej premennej s Poissonvým rozdelením pravdepodobnosti?

Riešenie: Náhodná premenná $\mathbb{X}$ s Poissonvým rozdelením pravdepodobnosti nadobúda hodnoty 0, 1, 2, 3, … Nastatie 5 nehôd za mesiac teda modelujeme $\mathbb{X} = 5$. Príslušná pravdepodobnosť je $P(\mathbb{X} = 5) = \frac{\lambda^5}{5!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$.

Všeobecne, pravdepodobnosť k nehôd za mesiac je:

$$P(\mathbb{X} = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Stredná hodnota náhodnej premennej s Poissonvým rozdelením pravdepodobnosti je

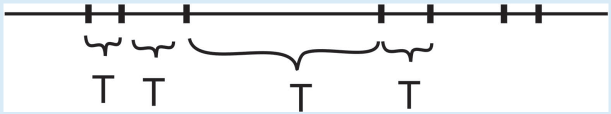
$$E(\mathbb{X}) = \lambda$$

Znamená to, že za mesiac nastane „priemerne" λ nehôd. Za dva mesiace by to bolo priemerne $2 \cdot \lambda$ nehôd. Za t mesiacov by to bolo priemerne $t \cdot \lambda$ nehôd.

Ak namiesto parametra λ v popise náhodnej premennej s Poissonvým rozdelením pravdepodobnosti, použijeme parameter $t\,\lambda$, dostaneme vyjadrenie pravdepodobnosti pre počet nehôd počas t mesiacov.

$$P(\mathbb{X} = k) = \frac{(t\,\lambda)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-t\,\lambda}$$

Chceme vypočítať rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{T}$, popisujúcej dĺžku časového intervalu medzi jednotlivými nehodami. Na obrázku 5.71 je zakreslených niekoľko výskytov náhodnej premennej $\mathbb{T}$, popisujúcej intervaly medzi výskytmi udalostí popísaných náhodnou premennou s Poissonvým rozdelením pravdepodobnosti $\mathbb{X}$.



Obrázok 5.71: Niekoľko realizácií náhodnej premennej $\mathbb{T}$, popisujúcej intervaly medzi výskytmi Poissonovských udalostí

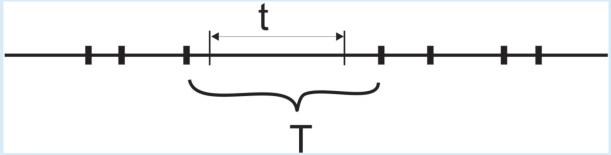
Vypočítajme teraz pravdepodobnosť, že interval medzi udalosťami bude väčší ako nejaká konkrétna hodnota času t. Teda počítame pravdepodobnosť, že náhodná premenná $\mathbb{T} > t$. Na obrázku 5.72 vidíme, že táto nerovnosť platí vtedy, keď počas časového intervalu dĺžky t, nenastane žiadna nehoda.

Teda náhodná premenná $\mathbb{X}$ má na intervale t hodnotu 0, medzera je väčšia ako t, počas t nastane 0 udalostí:

$$P(\mathbb{T} > t) = P(\mathbb{X} = 0)$$

Dosaďme pravdepodobnosť, $P(\mathbb{X} = 0)$ pre Poissonove rozdelenie, pre interval dĺžky t:

$$P(\mathbb{T} > t) = P(\mathbb{X} = 0) = \frac{\lambda^0}{0!}\,\mathrm{e}^{-t\,\lambda} = \mathrm{e}^{-t\,\lambda}$$



Obrázok 5.72: Ak $\mathbb{T} > t$, potom počas časového intervalu dĺžky t platí $\mathbb{X} = 0$

Dostávame vzťah $P(\mathbb{T} > t) = \mathrm{e}^{-t\,\lambda}$, z ktorého vyjadríme distribučnú funkciu náhodnej premennej $\mathbb{T}$.
Uvedomíme si ešte, že interval medzi udalosťami nemôže byť menší než 0.

$$F_T(t) = P(\mathbb{T} \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-t\,\lambda} & \text{pre} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Hustotu náhodnej premennej $\mathbb{T}$ vypočítame ako deriváciu distribučnej funkcie.

$$f(t) = F_T'(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad t < 0 \\ \lambda\,\mathrm{e}^{-t\,\lambda} & \text{pre} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Dostali sme hustotu náhodnej premennej $\mathbb{T}$ s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti, s rovnakým parametrom λ ako má náhodná premenná $\mathbb{X}$ s Poissonvým rozdelením pravdepodobnosti, z ktorej premenná $\mathbb{T}$ vznikla. $\square$

5.4.2. Momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej

Ďalšou funkciou, pomocou ktorej môžeme popísať náhodnú premennú a vypočítať jej strednú hodnotu a disperziu, je **momentová vytvárajúca funkcia**, nazývaná aj **pravdepodobnostná generujúca funkcia**.

Generujúce funkcie sú vo všeobecnosti funkcie, ktoré sa dajú napísať v tvare nekonečného rozvoja aj v tvare jednoduchej funkcie (uzavretom tvare). Príkladom takéhoto rozvoja je **generujúca funkcia**:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad \text{pre} \quad |x| < 1$$

Funkcia $\frac{1}{1-x}$ generuje nekonečnú postupnosť koeficientov $\{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$.
Oproti generujúcim funkciám majú pravdepodobnostné vytvárajúce funkcie vlastnosť, že postupnosť koeficientov tejto funkcie tvoria pravdepodobnosti jednotlivých hodnôt náhodnej premennej.

Momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej $\mathbb{X}$ sa vypočíta podľa predpisu:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathbb{X}\,t}) \tag{5.38}$$

V prípade diskrétnej náhodnej premennej s hodnotami 0, 1, 2, ... má momentová vytvárajúca funkcia tvar:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathbb{X}\,t}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\mathbb{X} = k) \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t} \tag{5.39}$$

V prípade spojitej náhodnej premennej má momentová vytvárajúca funkcia tvar:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathbb{X}\,t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \mathrm{e}^{x \cdot t}\,\mathrm{d}x \tag{5.40}$$

Dôležitou vlastnosťou momentovej vytvárajúcej funkcie je jej jednoznačnoť. Náhodná premenná s určitým rozdelením pravdepodobnosti má momentovú vytvárajúcu funkciu určitého tvaru a naopak ak má nejaká náhodná premenná momentovú vytvárajúcu funkciu daného tvaru, má aj príslušné rozdelenie pravdepodobnosti.

Home Page

Title Page

Contents

Page 282 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Pretože súčet pravdepodobností je 1, musí v diskrétnom prípade platiť:

$$m_{\mathbb{X}}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\mathbb{X} = k) \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 0} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\mathbb{X} = 1$$

Analogické tvrdenie v spojitom prípade je

$$m_{\mathbb{X}}(0) = E(\mathrm{e}^{\mathbb{X}\,0}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \mathrm{e}^{x \cdot 0}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Užitočné vlastnosti momentovej vytvárajúcej funkcie sú

- $m_{\mathbb{X}}(t)$ generuje postupnosť koeficientov, ktoré sú pravdepodobnosti jednotlivých hodnôt náhodnej premennej $\mathbb{X}$. Pretože súčet pravdepodobností je 1, musí platiť:

$$m_{\mathbb{X}}(0) = 1$$

- Hodnota derivácie funkcie $m_{\mathbb{X}}(t)$ v bode nula je stredná hodnota náhodnej premennej $\mathbb{X}$:

$$E(\mathbb{X}) = m'_{\mathbb{X}}(t)|_{t=0}$$

- Hodnota druhej derivácie funkcie $m_{\mathbb{X}}(t)$ v bode nula je $E(\mathbb{X}^2)$. Pomocou tejto hodnoty vypočítame disperziu:

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - E^2(\mathbb{X}), \qquad E(\mathbb{X}^2) = m''_{\mathbb{X}}(t)|_{t=0}$$

- Každá náhodná premenná je jednoznačne určená tvarom svojej momentovaj vytvárajúcej funkcie.

Úloha 5.4.2 *Nájdite momentovú vytvárajúcu funkciu náhodnej premennej s Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti. Pomocou tejto funkcie vypočítajte strednú hodnotu a disperziu tohoto rozdelenia.*

Riešenie: Momentová vytvárajúca funkcia pre diskrétnu náhodnú premennú je podľa definície:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathbb{X}\,t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}(\mathrm{e}^t)^k = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\cdot\mathrm{e}^t)^k}{k!}$$

Taylorov rozvoj funkcie e^x je:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Použitím Taylorovho rozvoja pre $x = \lambda\cdot\mathrm{e}^t$ dostávame momentovú vytvárajúcu funkciu náhodnej premennej s Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\cdot\mathrm{e}^t)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda\cdot\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(\mathrm{e}^t-1)}$$

Dosadením môžeme overiť, že

$$m_{\mathbb{X}}(0) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(\mathrm{e}^0-1)} = \mathrm{e}^0 = 1$$

Stredná hodnota náhodnej premennej s Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti je

$$E(\mathbb{X}) = m'_{\mathbb{X}}(t)|_{t=0} = \left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot(\mathrm{e}^t-1)}\right)'|_{t=0} = \left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot(\mathrm{e}^t-1)}\right)\cdot\lambda\cdot\mathrm{e}^t\,|_{t=0} = \mathrm{e}^{\lambda\cdot 0}\cdot\lambda\cdot\mathrm{e}^0 = \lambda$$

K výpočtu disperzie potrebujeme druhú deriváciu

$$E(\mathbb{X}^2) = m''_{\mathbb{X}}(t)|_{t=0} = \left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot(\mathrm{e}^t-1)}\cdot\lambda\cdot\mathrm{e}^t\right)'|_{t=0} =$$

$$= \lambda\cdot\mathrm{e}^t\cdot\mathrm{e}^{\lambda\cdot(\mathrm{e}^t-1)} + \lambda\cdot\mathrm{e}^t\,\lambda\cdot\mathrm{e}^t\cdot\mathrm{e}^{\lambda\cdot(\mathrm{e}^t-1)}\,|_{t=0} = \lambda+\lambda^2$$

Disperzia náhodnej premennej s Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti je

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - E^2(\mathbb{X}) = \lambda+\lambda^2-\lambda^2 = \lambda$$

□

Úloha 5.4.3 *Nájdite momentovú vytvárajúcu funkciu náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti. Pomocou tejto funkcie vypočítajte strednú hodnotu a disperziu tohoto rozdelenia.*

Riešenie: Momentová vytvárajúca funkcia pre spojitú náhodnú premennú je podľa definície:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathbb{X}\,t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \mathrm{e}^{x\cdot t}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ \int_0^\infty \lambda\cdot \mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\cdot \mathrm{e}^{x\cdot t}\,\mathrm{d}x & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{x\cdot(t-\lambda)}\,\mathrm{d}x = \lambda\left[\frac{\mathrm{e}^{x\cdot(t-\lambda)}}{(t-\lambda)}\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{x\cdot(t-\lambda)}}{(t-\lambda)} - \frac{\lambda}{t-\lambda}$$

Limita v poslednom výraze závisí od veľkosti t a λ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{x\cdot(t-\lambda)}}{(t-\lambda)} = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad t < \lambda \\ \infty & \text{pre} \quad t > \lambda \\ 1 & \text{pre} \quad t = \lambda \end{cases}$$

V momentovej vytvárajúcej funkcii nás budú zaujímať hodnoty t blízke 0. Hodnotu 0 dosadzujeme pri vyjadrení rozdelenia pravdepodobnosti aj pri výpočte strednej hodnoty a disperzie.
V prípade, že budeme uvažovať hodnoty t blízke 0, dostaneme vzťah $t < \lambda$, pretože λ je kladný parameter. Preto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{x\cdot(t-\lambda)}}{(t-\lambda)} = 0$$

$$m_{\mathbb{X}}(t) = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{x\cdot(t-\lambda)}}{(t-\lambda)} - \frac{\lambda}{t-\lambda} = \frac{\lambda}{t-\lambda}$$

Dosadením môžeme overiť, že

$$m_{\mathbb{X}}(0) = \frac{\lambda}{0-\lambda} = 1$$

Stredná hodnota náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti je

$$E(\mathbb{X}) = m'_{\mathbb{X}}(t)|_{t=0} = \left(\frac{\lambda}{t-\lambda}\right)'|_{t=0} = \frac{(-1)\lambda(-1)}{(t-\lambda)^2}|_{t=0} = \frac{\lambda}{(0-\lambda)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

K výpočtu disperzie potrebujeme druhú deriváciu

$$E(\mathbb{X}^2) = m''_{\mathbb{X}}(t)|_{t=0} = \left(\frac{\lambda}{t-\lambda}\right)''|_{t=0} = \left(\frac{\lambda}{(t-\lambda)^2}\right)'|_{t=0} = \frac{2\cdot\lambda}{(t-\lambda)^3}|_{t=0} =$$

$$= \frac{2\cdot\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Disperzia náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením je:

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - E^2(\mathbb{X}) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$\square$

Úloha 5.4.4 *Nájdite momentovú vytvárajúcu funkciu náhodnej premennej $\mathbb{X}$, ktorá je súčtom dvoch nezávislých náhodných premenených $\mathbb{X}_1$ a $\mathbb{X}_2$ s Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti s parametrami λ_1 a λ_2. Pomocou tejto funkcie určite, aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná $\mathbb{X}$.*

Riešenie: Momentové vytvárajúce funkcie náhodných premenných $\mathbb{X}_1$ a $\mathbb{X}_2$ s Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti s parametrami λ_1 a λ_2 sú:

$$m_{\mathbb{X}_1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1\cdot(\mathrm{e}^t-1)} \qquad m_{\mathbb{X}_2}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2\cdot(\mathrm{e}^t-1)}$$

Momentovú vytvárajúcu funkciu náhodnej premennej $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$ vypočítame:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E\left(e^{\mathbb{X}\,t}\right) = E\left(e^{(\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2)\,t}\right) = E\left(e^{\mathbb{X}_1\,t}\cdot e^{\mathbb{X}_2\,t}\right) = E\left(e^{\mathbb{X}_1\,t}\right)\cdot E\left(e^{\mathbb{X}_2\,t}\right) =$$

$$= m_{\mathbb{X}_1}(t)\cdot m_{\mathbb{X}_2}(t) = e^{\lambda_1\cdot(e^t-1)}\cdot e^{\lambda_2\cdot(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot(e^t-1)}$$

Momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej $\mathbb{X}$ je momentovou vytvárajúcou funkciou náhodnej premennej s Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti s parametrom $\lambda_1 + \lambda_2$. „Súčet dvoch náhodných premenných s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti je znovu náhodná premenná s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, s parametrom rovným súčtu pôvodných parametrov."

□

Úloha 5.4.5 *Nájdite momentovú vytvárajúcu funkciu náhodnej premennej $\mathbb{X}$, ktorá je súčtom dvoch nezávislých náhodných premenených $\mathbb{X}_1$ a $\mathbb{X}_2$ s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti s rovnakým parametrom λ. Pomocou tejto funkcie určite, aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná $\mathbb{X}$.*

Riešenie: Momentové vytvárajúce funkcie náhodných premenných $\mathbb{X}_1$ a $\mathbb{X}_2$ s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti s parametrami λ sú:

$$m_{\mathbb{X}_1}(t) = m_{\mathbb{X}_2}(t) = \frac{\lambda}{t-\lambda}$$

Momentovú vytvárajúcu funkciu náhodnej premennej $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$ vypočítame:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E\left(e^{\mathbb{X}\,t}\right) = E\left(e^{(\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2)\,t}\right) = E\left(e^{\mathbb{X}_1\,t}\cdot e^{\mathbb{X}_2\,t}\right) = E\left(e^{\mathbb{X}_1\,t}\right)\cdot E\left(e^{\mathbb{X}_2\,t}\right) =$$

$$= m_{\mathbb{X}_1}(t)\cdot m_{\mathbb{X}_2}(t) = \frac{\lambda}{t-\lambda}\cdot\frac{\lambda}{t-\lambda} = \frac{\lambda^2}{(t-\lambda)^2}$$

Momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej $\mathbb{X}$ je momentovou vytvárajúcou funkciou náhodnej premennej s Erlangovým rozdelením pravdepodobnosti a parametrami λ a $n = 2$.

(Tvar momentovej vytvárajúcej funkcie vypočítame v časti príklady.) □

5.4.3. Typické chovanie

Hodnoty náhodných premenných a ich pravdepodobnosti môžeme nielen teoreticky vypočítať, ale aj odhadnúť z nameraných hodnôt. Riešme napríklad úlohu: „Koľko je potrebné urobiť hodov kockou, kým na kocke padne šestka? "
Túto úlohu sme riešili už niekoľko krát a odpoveď je, že niekedy stačí jeden hod, inokedy traba hodiť aj 30-krát, kým na kocke prvý krát padne šestka. Keby sme sa pýtali, koľkokrát priemerne treba hodiť kockou, aby padla šestka, teoretická odpoveď by bola 6. Hodnota 6 je totiž stredná hodnota náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, ktoré uvedenú situáciu popisuje.

Urobíme teraz experiment a budeme hádzať kockou kým padne šestka. Potrebovali sme 4 hody. Urobili sme tento experiment ešte 9-krát. Potrebovali sme postupne 6 hodov, 1 hod, 4 hody, 3, 2, 17, 7, 2, 1. Priemerný počet hodov, kým padla šestka bol

$$\overline{X} = \frac{4+6+1+4+3+2+17+7+2+1}{10} = 4.7$$

Zodpovedá náš teoretický výsledok vykonanému pokusu? Hodnota 4.7 sa od teoretickej hodnoty 6 odlišuje. Má teda význam robiť teoretické odhady, keď nehovoria nič o skutočných hodnotách, nameraných pri experimentoch? Odpoveď je áno. Dá sa dokázať, že ak urobíme experimentov dostatočne veľa, začnú sa chovať podľa teoretických výpočtov. V našom prípade s kockou to znamená, že ak urobíme pokusov nie 10, ale 10 tisíc, bude priemerný počet hodov, potrebných k hodeniu šestky, veľmi blízko k číslu 6.

Charakteristiky, vypočítané z nameraných hodnôt sa tým viac približujú k teoretickým hodnotám, čím väčší počet experimentálnych výsledkov k výpočtu použijeme. Čím viac nameraných hodnôt použijeme, tým väčšia je pravdepodobnosť výsledku blízkeho k teoretickej hodnote. Uvedené tvrdenia sa nazývajú **zákony veľkých čísel**. Platí, že čím viac meraní

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

náhodnej premennej $\mathbb{X}$ použijeme na výpočet aritmetického priemeru, tým bude aritmetický priemer bližšie k teoretickej strednej hodnote $E(\mathbb{X})$.

Veta 5.4.1 (Čebyševova veta) *Nech $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n$ sú navzájom nezávislé náhodné premenné, ktoré majú rovnakú strednú hodnotu $E(\mathbb{X}_i) = a < \infty$ a ich disperzie sú ohraničené rovnakou konštantou $D(\mathbb{X}_i) \leq c$. Potom pre každé reálne číslo $\delta > 0$ platí:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\mathbb{X}_i)\right| < \delta\right) = 1$$

Postupnosť aritmetických priemerov náhodných premenných $\mathbb{X}_i$ konverguje podľa pravdepodobnosti k aritmetickému priemeru ich stredných hodnôt.

Veta 5.4.2 (Bernoulliho zákon veľkých čísel) *Nech udalosť A nastane v jednom pokuse s pravdepodobnosťou p, kde $p \in (0,1)$. Nech v sérii n nezávislých pokusov nastane táto udalosť m-krát. Potom pre $\delta > 0$ platí:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \delta\right) = 1$$

Postupnosť podielov $\frac{m}{n}$ konverguje podľa pravdepodobnosti k aritmetickému priemeru ich stredných hodnôt.

□

Problémom pri určovaní hodnôt binomického rozdelenia môže byť výpočet veľkých kombinačných čísel. Zatiaľ čo číslo $\binom{10}{3}$ vypočítame aj na kalkulačke, vypočítať číslo $\binom{100000}{3000}$ už bude náročnejšie. Pre hodnoty p blízke 0 je dobrou aproximáciou binomického rozdelenia pravdepodobnosti rozdelenie Poissonove. Presný spôsob odhadu udáva nasledujúca veta.

Veta 5.4.3 (Poissonova veta) *Nech $\{\mathbb{X}_n\}$ je postupnosť nezávislých náhodných premenných s binomickým rozdelením pravdepodobnosti s parametrami n a p_n. Nech $\lim\limits_{n\to\infty} E(\mathbb{X}_n) = \lambda$. Potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$$

Príklad 5.4.1 *Predpokladajme, že pravdepodobnosť, že náhodne vybraný hudobník zahrá na koncerte falošne je* 0.14.

a) *Vyčíslite pravdepodobnosť, že spomedzi* 10 *vybraných hudobníkov budú* 4 *takí, ktorí zahrajú na koncerte falošne.*

b) *Vyčíslite pravdepodobnosť, že spomedzi* 170 *vybraných hudobníkov bude* 20 *takých, ktorí zahrajú na koncerte falošne.*

Riešenie:

a) Už v kapitole 3.4 sme odvodili vzorec pre výpočet pravdepodobnosti udalosti, že spomedzi 10 vybraných hudobníkov budú 4 takí, ktorí zahrajú na koncerte falošne:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Po dosadení dostávame:

$$P_{10}(4) = \binom{10}{4} \cdot 0.14^4 \cdot 0.86^6 = 0.0326$$

b) Vzorec je rovnaký, len dosadíme iné hodnoty. $n = 170$ a $k = 20$.

$$P_{170}(20) = \binom{170}{20} \cdot 0.14^{20} \cdot 0.86^{160} = 0.0715$$

Výpočet pomocou kombinačných čísel môžeme nahradiť odhadom. Hodnota parametra p je blízko hodnote 0, preto môžeme použiť odhad pomocou Poissonovho rozdelenia.

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$$

Hodnotu λ Poissonovho rozdelenia odhadneme ako strednú hodnotu tohoto rozdelenia.

$$E\mathbb{X} = n\,p \doteq \lambda \qquad \lambda \doteq 140$$

Hľadaná hodnota je približne

$$\frac{\lambda^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} = \frac{140^{20} \cdot \mathrm{e}^{-140}}{20!} = 0.0692$$

□

Pre hodnoty p blízke 0.5 je dobrou aproximáciou binomického rozdelenia pravdepodobnosti rozdelenie normálne. Presný spôsob odhadu dáva nasledujúca veta.

Veta 5.4.4 (Moivre-Laplaceova lokálna veta) *Nech pri každom pokuse udalosť A nastane s pravdepodobnosťou p, kde p je blízke 0.5. Označme $P_n(k)$ pravdepodobnosť, že v sérii n nezávislých pokusov nastane táto udalosť k-krát. Nech $q = 1 - p$. Potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\dfrac{(k-np)^2}{2npq}}} = 1$$

teda

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \doteq \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot n\cdot p\cdot q}} e^{-\dfrac{(k-n\cdot p)^2}{2\cdot n\cdot p\cdot q}}$$

Príklad 5.4.2 *Predpokladajme, že pravdepodobnosť, že náhodne vybraný hudobník zahrá na koncerte falošne je* 0.54.

Vyčíslite pravdepodobnosť, že spomedzi 170 *vybraných hudobníkov bude* 100 *takých, ktorí zahrajú na koncerte falošne.*

Riešenie: Tento príklad sa od príkladu 5.4.1 líši veľkosťou pravdepodobnosti, že hudobník zahrá na koncerte falošne a počtom hudobníkov k. V prípade, že je táto pravdepodobnosť blízka 0.5, je lepšie aproximovať pomocou normálneho rozdelenia pravdepodobnosti, než pomocou Poissonovho. Binomické rozdelenie v našom príklade má parametre $n = 170$, $p = 0.54$. Chceme vedieť, aká je pravdepodobnosť nastatia $k = 100$ udalostí.

$$P_{170}(100) = \binom{170}{100} 0.54^{100} \cdot 0.46^{170-100} = 0.0278$$

$$P_{170}(100) \doteq \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 170 \cdot 0.54 \cdot 0.46}} e^{-\dfrac{(100 - 170 \cdot 0.54)^2}{2 \cdot 170 \cdot 0.54 \cdot 0.46}} = 0.0277$$

□

Pri štatistickom spracovaní nameraných experimentálnych hodnôt je dôležité vedieť, aké rozdelenie pravdepodobnosti má ich aritmetický priemer. Touto otázkou sa zaoberajú **limitné vety** a približne platí, že aritmetický priemer rovnako rozdelených nezávislých náhodných premenných má normálne rozdelenie pravdepodobnosti.

Veta 5.4.5 (Centrálna limitná veta, Lindebergova-Lévyho) *Nech $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n$ sú navzájom nezávislé náhodné premenné s rovnakým rozdelením pravdepodobnosti, ďalej $E(\mathbb{X}_k) = \mu < \infty$ a $D(\mathbb{X}_k) = \sigma^2 < \infty$ pre všetky $k = 1, 2, \ldots, n$. Potom platí*

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k\right) = n \cdot \mu \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k\right) = n \cdot \sigma^2$$

Pre distribučnú funkciu $F_{\mathbb{V}_n}(x)$ normovanej náhodnej premennej $\mathbb{V}_n$, definovanej

$$\mathbb{V}_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}}$$

Home Page
Title Page
Contents
Page 292 of 410
Go Back
Full Screen
Close
Quit

platí

$$\lim_{n\to\infty} F_{\mathbb{V}_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = F_{\mathbb{N}}(x)$$

Súčet veľkého počtu navzájom nezávislých náhodných premenných s rovnakým rozdelením a charakteristikami má približne normálne rozdelenie pravdepodobnosti.

Binomické rozdelenie pravdepodobnosti môžeme chápať ako súčet n náhodných premenných s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti. Preto podľa vety 5.4.5 môžeme binomické rozdelenie so strednou hodnotou $n\,p$ a disperziou $n\,p\,(1-p)$ aproximovať pomocou normálneho rozdelenia s rovnakou strednou hodnotou a disperziou (veta 5.4.4).
Poissonovo rozdelenie s parametrom λ môžeme chápať ako súčet n náhodných premenných s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti s parametrami $\frac{\lambda}{n}$. Preto podľa vety 5.4.5 môžeme Poissonovo rozdelenie so strednou hodnotou λ a disperziou λ aproximovať pomocou normálneho rozdelenia s so strednou hodnotou λ a disperziou λ.
Vzťahom medzi teoretickými výsledkami a nameranými hodnotami sa zaoberá matematická disciplína nazývaná **matematická štatistika**. Slovom **štatistika** sa označuje aj zber, sumarizácia a publikovanie údajov o spoločenských, či ekonomických javoch. Teoretické hodnoty a hodnoty získané z experimentov označujú nejakú charakteristiku a jej odhad. Pri jednoduchších a zrozumiteľnejších pojmoch sú slová označujúce teoretickú hodnotu iné, ako slová označujúce hodnotu odhadnutú z experimentu. Pri niektorých pojmoch sú tieto názvy rovnaké, ako ukazuje tabuľka 5.3. Napríklad slovo medián je rovnaké pre teoretickú hodnotu aj pre odhad vypočítaný z experimentu.

Ako vidno z uvedenej tabuľky, slová, používané na pomenovanie štatistických charakteristík, získaných z meraní, sú niekedy rovnaké a teda zameniteľné so slovami, ktoré sa používajú v teoretickej oblasti, v pravdepodobnosti a matematickej štatistike. Nebudeme tvrdiť, že niekto používa tieto pojmy správne a niekto nie, len upozorňujeme na to, aby si čitateľ skôr než začne s daným pojmom pracovať najprv uzrejmil, čo naozaj znamená.

Úlohou matematickej štatistiky je nájsť pre namerané dáta teoretické rozdelenie pravdepodobnosti, ktorému dáta zodpovedajú, prípadne násť charakteristiky a parametre tohto

Home Page
Title Page
Contents
Page 293 of 410
Go Back
Full Screen
Close
Quit

teoretická hodnota	označenie	odhad	označenie
stredná hodnota	$E(\mathbb{X})$	aritmetický priemer	$\overline{X}$
disperzia (rozptyl)	$D(\mathbb{X})$	výberový rozptyl	S^2
medián	$Me_{\mathbb{X}}$	medián	$Me_{\mathbb{X}}$
α-kvantil	x_α	α-kvantil	x_α

Tabuľka 5.3: Teoretická hodnota a odhad vypočítaný z výsledkov experimentu

rozdelenia a určiť, aká je pravdepodobnosť, že je tomu naozaj tak.

Alebo naopak, pre dané dáta nájsť teoretické rozdelenie, ktoré je čo najlepším modelom týchto dát. A pomocou modelu potom generovať ďalšie napríklad dáta pre potreby simulácie.

5.4.4. Zabúdanie

Spomedzi všetkých rozdelení pravdepodobnosti majú iba dve vlastnosť **zabúdania na minulosť**. Sú to exponenciálne a geometrické rozdelenie pravdepodobnosti. Zabúdaním na minulosť rozumieme, že pravdepodobnosť budúceho vývoja nezáleží na predchádzajúcom vývoji.

Úloha 5.4.6 *Priemerná doba telefónneho hovoru je 5 minút.*

- *Aká je pravdepodobnosť, že telefónny hovor bude trvať ešte 2 minúty ak vieme, že hovor trval už 4 minúty?*
- *Aká je pravdepodobnosť, že telefónny hovor bude trvať ešte 2 minúty ak vieme, že hovor trval už 50 minút?*

- *Aká je pravdepodobnosť, že telefónny hovor bude trvať ešte 2 minúty ak vieme, že hovor práve začal?*

Dobu hovoru modelujeme exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti.

Riešenie: Je dopredu určené, akou náhodnou premennou modelujeme dobu hovoru. Označme náhodnú premennú popisujúcu dĺžku hovoru a riadiacu sa exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti znakom $\mathbb{X}$. Hustota rozdelnia pravdepodobnosti pre túto náhodnú premennú je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ \mu \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Priemerná doba hovoru je 5 minút, preto odhad strednej hodnoty je:

$$E(\mathbb{X}) = \frac{1}{\mu} \doteq 5, \qquad \mu \doteq \frac{1}{5}$$

K riešeniu stačí vypočítať podmienené pravdepodobnosti:

- Počítajme pravdepodobnosť udalosti A (hovor bude dlhší ako 6 minút), za predpokladu, že nastala udalosť B (hovor už trvá 4 minúty).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\mathbb{X} > 6 \wedge \mathbb{X} > 4)}{P(\mathbb{X} > 4)} = \frac{P(\mathbb{X} > 6)}{P(\mathbb{X} > 4)} =$$

$$= \frac{\int_6^\infty \mu \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\, \mathrm{d}x}{\int_4^\infty \mu \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\, \mathrm{d}x} = \frac{\left[-\mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\right]_6^\infty}{\left[-\mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\right]_4^\infty} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu \cdot 6}}{\mathrm{e}^{-\mu \cdot 4}} = \mathrm{e}^{-\mu \cdot 2} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}} = 0.6703$$

- Počítajme pravdepodobnosť udalosti A (hovor bude dlhší ako 52 minút), za predpokladu, že nastala udalosť B (hovor už trvá 50 minút).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\mathbb{X} > 52 \cap \mathbb{X} > 50)}{P(\mathbb{X} > 50)} = \frac{P(\mathbb{X} > 52)}{P(\mathbb{X} > 50)} =$$

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 295 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$= \frac{\int\limits_{52}^{\infty} \mu \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\, \mathrm{d}x}{\int\limits_{50}^{\infty} \mu \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\, \mathrm{d}x} = \frac{\left[-\,\mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\right]_{52}^{\infty}}{\left[-\,\mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\right]_{50}^{\infty}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu \cdot 52}}{\mathrm{e}^{-\mu \cdot 50}} = \mathrm{e}^{-\mu \cdot 2} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}} = 0.6703$$

- Počítajme pravdepodobnosť udalosti A (hovor bude dlhší ako 2 minúty).

$$P(A) = P(\mathbb{X} > 2) = \int\limits_{2}^{\infty} \mu \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\, \mathrm{d}x = ee^{-\frac{2}{5}} = 0.6703$$

Výpočty ukazujú, že pri modelovaní doby hovoru pomocou exponenciálneho rozdelenia pravdepodobnosti, nie je potrebné uvažovať o doterajšom priebehu. Pravdepodobnosť toho, ako dlho bude ešte hovor prebiehať nezávisí od toho, ako dlho už hovor prebieha.

Hovoríme, že exponenciálne rozdelenie **zabúda na minulosť**. $\square$

Úloha 5.4.7 *Priemerná doba telefónneho hovoru je* 5 *minút.*

- *Aká je pravdepodobnosť, že telefónny hovor bude trvať ešte* 2 *minúty ak vieme, že hovor trval už* 4 *minúty?*
- *Aká je pravdepodobnosť, že telefónny hovor bude trvať ešte* 2 *minúty ak vieme, že hovor trval už* 50 *minút?*
- *Aká je pravdepodobnosť, že telefónny hovor bude trvať ešte* 2 *minúty ak vieme, že hovor práve začal?*

Dobu hovoru modelujeme Erlangovým rozdelením pravdepodobnosti s parametrom $n = 2$.

Riešenie: Je dopredu určené, akou náhodnou premennou modelujeme dobu hovoru. Označme náhodnú premennú popisujúcu dĺžku hovoru a riadiacu sa Erlangovým rozdelením pravdepodobnosti znakom $\mathbb{X}$. Hustota tohoto rozdelenia je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ \mu^2\, x \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Priemerná doba hovoru je 5 minút, preto odhad strednej hodnoty je:

$$E(\mathbb{X}) = \frac{2}{\mu} \doteq 5, \qquad \mu \doteq \frac{2}{5}$$

K riešeniu stačí vypočítať podmienené pravdepodobnosti:

- Počítajme pravdepodobnosť udalosti A (hovor bude dlhší ako 6 minút), za predpokladu, že nastala udalosť B (hovor už trvá 4 minúty).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\mathbb{X} > 6 \wedge \mathbb{X} > 4)}{P(\mathbb{X} > 4)} = \frac{P(\mathbb{X} > 6)}{P(\mathbb{X} > 4)} =$$

$$= \frac{\int\limits_6^\infty \mu^2\, x \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\, \mathrm{d}x}{\int\limits_4^\infty \mu^2\, x \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\, \mathrm{d}x} = \frac{\left[-\,\mathrm{e}^{-\mu \cdot x}(1 + \mu \cdot x)\right]_6^\infty}{\left[-\,\mathrm{e}^{-\mu \cdot x}(1 + \mu \cdot x)\right]_4^\infty} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\mu \cdot 6}(1 + \mu \cdot 6)}{\mathrm{e}^{-\mu \cdot 4}(1 + \mu \cdot 4)} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{5} \cdot 6}(1 + \frac{2}{5} \cdot 6)}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{5} \cdot 4}(1 + \frac{2}{5} \cdot 4)} = 0.5876$$

- Počítajme pravdepodobnosť udalosti A (hovor bude dlhší ako 52 minút), za predpokladu, že nastala udalosť B (hovor už trvá 50 minút).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\mathbb{X} > 52 \cap \mathbb{X} > 50)}{P(\mathbb{X} > 50)} = \frac{P(\mathbb{X} > 52)}{P(\mathbb{X} > 50)} =$$

$$= \frac{\int\limits_{52}^{\infty} \mu^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\, \mathrm{d}x}{\int\limits_{50}^{\infty} \mu^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\, \mathrm{d}x} = \frac{[-\mathrm{e}^{-\mu \cdot x}(1+\mu \cdot x)]_{52}^{\infty}}{[-\mathrm{e}^{-\mu \cdot x}(1+\mu \cdot x)]_{50}^{\infty}} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\mu \cdot 52}(1+\mu \cdot 52)}{\mathrm{e}^{-\mu \cdot 50}(1+\mu \cdot 50)} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{5} \cdot 52}(1+\frac{2}{5} \cdot 52)}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{5} \cdot 50}(1+\frac{2}{5} \cdot 50)} = 0.4664$$

- Počítajme pravdepodobnosť udalosti A (hovor bude dlhší ako 2 minúty).

$$P(A) = P(\mathbb{X} > 2) = \int\limits_{2}^{\infty} \mu^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot x}\, \mathrm{d}x = ee^{-\frac{4}{5}} \cdot (1 + \frac{2}{5} \cdot 2) = 0.8088$$

Výpočty ukazujú, že pri modelovaní doby hovoru pomocou Erlangovho rozdelenia pravdepodobnosti je potrebné uvažovať o doterajšom priebehu. Pravdepodobnosť toho, ako dlho bude ešte hovor prebiehať závisí od toho, ako dlho už hovor prebieha. Pravdepodobnejšie budú také dĺžky hovorov, ktoré sa blížia k strednej hodnote hovoru (v našom prípade ku hodnote $5/2 = 2.5$ minúty).

Hovoríme, že Erlangovho rozdelenie **si pamätá minulosť**. □

Úloha 5.4.8 *Hádžeme kockou dovtedy, kým padne šestka. Vieme, že priemerná dĺžka pokusu je 6 hodov. Pokus modelujeme geometrickým rozdelením pravdepodobnosti.*

- *Aká je pravdepodobnosť, že v pokuse budú nasledovať ešte aspoň 2 hody, ak vieme, že už sme hádzali 4 krát? (Urobili sme 4 hody, pri ktorých šestka nepadla.)*
- *Aká je pravdepodobnosť, že v pokuse budú nasledovať ešte aspoň 2 hody, ak vieme, že už sme hádzali 10 krát? (Urobili sme 10 hodov, pri ktorých šestka nepadla.)*
- *Aká je pravdepodobnosť, že v pokuse budú nasledovať ešte aspoň 2 hody, ak vieme, že sme práve začali? (Ešte sme nehádzali.)*

Riešenie: Je dopredu určené, akou náhodnou premennou modelujeme dobu hovoru. Označme náhodnú premennú s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, popisujúcu počet hodov, ktoré potrebujeme kým padne šestka, znakom $\mathbb{X}$. Pre túto náhodnú premennú platí

$$P(\mathbb{X}=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p$$

Priemerný počet hodov je 6 minút, pretože stredná hodnota náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti je:

$$E(\mathbb{X})=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$$

K riešeniu stačí vypočítať podmienené pravdepodobnosti:

- Počítajme pravdepodobnosť udalosti A (pokus bude pozostávať aspoň zo 6 hodov), za predpokladu, že nastala udalosť B (urobili sme už 4 neúspešné hody).

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\mathbb{X}>6\wedge\mathbb{X}>4)}{P(\mathbb{X}>4)}=\frac{P(\mathbb{X}>6)}{P(\mathbb{X}>4)}=$$

$$=\frac{1-(p+(1-p)\cdot p+(1-p)^2\cdot p+(1-p)^3\cdot p+(1-p)^4\cdot p+(1-p)^5\cdot p)}{1-(p+(1-p)\cdot p+(1-p)^2\cdot p+(1-p)^3\cdot p)}=$$

$$=\frac{1-\left(\frac{p}{1-(1-p)}-\frac{(1-p)^6\cdot p}{1-(1-p)}\right)}{1-\left(\frac{p}{1-(1-p)}-\frac{(1-p)^4\cdot p}{1-(1-p)}\right)}=\frac{1-(1-(1-p)^6)}{1-(1-(1-p)^4)}=$$

$$=\frac{(1-p)^6}{(1-p)^4}=(1-p)^2=\frac{25}{36}$$

- Počítajme pravdepodobnosť udalosti A (pokus bude pozostávať aspoň z 52 hodov), za predpokladu, že nastala udalosť B (urobili sme už 50 neúspešných hodov).

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\mathbb{X}>52\wedge\mathbb{X}>50)}{P(\mathbb{X}>50)}=\frac{P(\mathbb{X}>52)}{P(\mathbb{X}>50)}=$$

$$= \frac{1 - \left(\sum_{k=0}^{51} (1-p)^k \cdot p\right)}{1 - \left(\sum_{k=0}^{49} (1-p)^k \cdot p\right)} =$$

$$= \frac{1-(1-(1-p)^{52})}{1-(1-(1-p)^{50})} = (1-p)^2 = \frac{25}{36}$$

- Počítajme pravdepodobnosť udalosti A (pokus bude pozostávať aspoň z 2 hodov).

$$P(A) = P(\mathbb{X} > 2) = 1 - p - (1-p)\cdot p = (1-p)(1-p) = \frac{25}{36}$$

Výpočty ukazujú, že pravdepodobnosť, že šestka nepadne ešte aspon 2 hody, nezávisí od toho, koľko hodov už bolo vykonaných.

Hovoríme, že geometrické rozdelenie **zabúda na minulosť**. □

Rozdelenia, ktoré zabúdajú na minulosť sa nazývajú **bezpamäťové rozdelenia pravdepodobnosti**. Sú to iba dve rozdelenia, geometrické a exponenciálne.

Vlastnosť zabúdania sa využíva pri modeloch vývoja pravdepodobnosti v čase, pri náhodných procesoch. Vlastnosť zabúdania pri náhodných procesoch sa nazýva **Markovova vlastnosť**. Modely s exponenciálnym rozdelením popisujú najväčšie nepravidelnosti v pravdepodobnosti. To, že exponenciálne rozdelenie zabúda na minulosť znamená, že nevieme predpovedať, ako bude vývoj pokračovať. Ale na druhej strane, ak urobíme model, ktorý používa exponenciálne rozdelenie, dostaneme najhorší možný odhad. Napríklad, keď modelujeme intervaly príchodu paketov do uzla v sieti, alebo príchodu zákazníkov k jedinému okienku na pošte. Skutočné hodnoty ako budú pakety alebo zákazníci prichádzať, už nemôžu byť horšie ako v modeli. Nemôžu byť viac nepravidelné!

Teda pomocou exponenciálneho rozdelenia pravdepodobnosti môžeme urobiť taký model, ktorý bude ohraničením pre všetky ostatné modely.

5.4.5. Príklady

1. Nájdite distribučnú funkciu $F(x) = F_{Ge(p)}(x)$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$.
2. Nájdite momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$.
3. Nájdite distribučnú funkciu $F(x) = F_{Po(\lambda)}(x)$ náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Po(\lambda)$.
4. Nájdite momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Po(\lambda$.
5. Nájdite distribučnú funkciu $F_{R(a,b)}(x)$ spojitej náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim R(a, b)$.
6. Nájdite momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ spojitej náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim R(a, b)$.
7. Nájdite distribučnú funkciu $F_{Exp(\lambda)}(x)$ náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Exp(\lambda)$.
8. Nájdite momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Exp(\lambda)$.
9. Nájdite distribučnú funkciu $F_{Er(n,\lambda)}(x)$ náhodnej premennej s Erlangovym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Er(n, \lambda)$.
10. Nájdite momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ náhodnej premennej s Erlangovym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Er(n, \lambda)$.
11. Nájdite distribučnú funkciu $F_{N(\mu,\, \sigma^2)}(x)$ náhodnej premennej s normálnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim N(\mu,\, \sigma^2)$.

12. Nájdite momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ náhodnej premennej s normálnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim N(\mu,\, \sigma^2)$.

5.4.5.1. Riešenie príkladov

1. Hľadáme tvar distribučnej funkcie $F(x) = F_{Ge(p)}(x)$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$ (5.10):

$$P(\mathbb{X} = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Distribučná funkcia pre diskrétnu náhodnú premennú má tvar:

$$F(x) = P(\mathbb{X} \le x) = \sum_{x_k \le x} p_k = \sum_{x_k \le x} P(\mathbb{X} = x_k)\,, \qquad \text{kde } x \in R$$

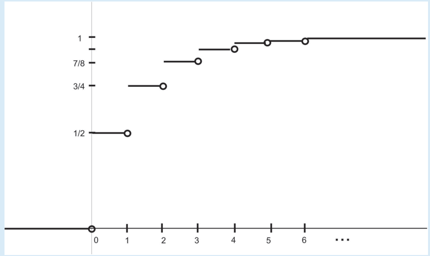
$$F_{Ge(p)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ p & \text{pre} \quad 0 \le x < 1 \\ (1-p) \cdot p & \text{pre} \quad 1 \le x < 2 \\ (1-p)^2 \cdot p & \text{pre} \quad 2 \le x < 3 \\ (1-p)^3 \cdot p & \text{pre} \quad 3 \le x < 4 \\ \vdots & \\ (1-p)^k \cdot p & \text{pre} \quad k \le x < k+1 \\ \vdots & \end{cases}$$

Priebeh distribučnej funkcie si môžeme pozrieť na obrázku 5.73.

2. Momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Ge(p)$ vyjadríme podľa predpisu 5.39:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathbb{X}\,t}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\mathbb{X} = k) \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t} = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t} =$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p) \cdot \mathrm{e}^t\right)^k = \frac{p}{1-p} \frac{(1-p) \cdot \mathrm{e}^t}{1-(1-p) \cdot \mathrm{e}^t} =$$



Obrázok 5.73: Distribučná funkcia $F_{Ge(p)}(x)$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti s parametrom $p = 1/2$

$$= \frac{p\,\mathrm{e}^t}{1-(1-p)\,\mathrm{e}^t}$$

3. Hľadáme tvar distribučnej funkcie $F(x) = F_{Po(\lambda)}(x)$ náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Po(\lambda)$, (5.14):

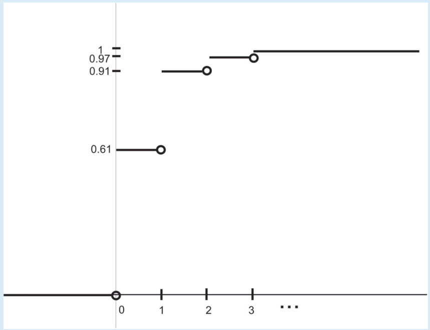
$$P(\mathbb{X} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$$

Distribučná funkcia pre diskrétnu náhodnú premennú má tvar:

$$F(x) = P(\mathbb{X} \leq x) = \sum_{x_k \leq x} p_k = \sum_{x_k \leq x} P(\mathbb{X} = x_k)\,, \qquad \text{kde } x \in R$$

$$F_{Po(\lambda)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ \mathrm{e}^{-\lambda} & \text{pre} \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{\lambda}{1!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} & \text{pre} \quad 1 \le x < 2 \\ (\frac{\lambda^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} & \text{pre} \quad 2 \le x < 3 \\ \vdots & \\ \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} & \text{pre} \quad k \le x < k+1 \\ \vdots & \end{cases}$$

Priebeh distribučnej funkcie si môžeme pozrieť na obrázku 5.74.



Obrázok 5.74: Distribučná funkcia $F_{Po(\lambda)}(x)$ náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti s parametrom $\lambda = 1/2$

4. Momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s Poissonovym rozdele-

ním pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Po(\lambda)$ vyjadríme podľa predpisu 5.39:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathbb{X}\,t}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\mathbb{X} = k) \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\lambda \cdot \mathrm{e}^{t}\right)^k}{k!} \cdot = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda \cdot \mathrm{e}^{t}} = \mathrm{e}^{\lambda\left(\mathrm{e}^{t} - 1\right)}$$

5. Hľadáme tvar distribučnej funkcie $F_{R(a,b)}(x)$ spojitej náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim R(a, b)$, s hustotou (5.22):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pre} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$

Distribučná funkcia pre spojitú náhodnú premennú má tvar:

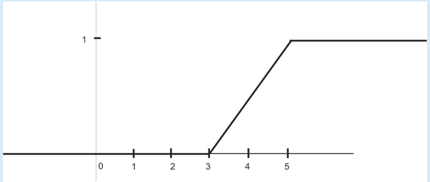
$$F(x) = P(\mathbb{X} \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \text{kde } x \in R$$

$$F_{R(a,b)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pre} \quad a \le x \le b \\ 1 & \text{pre} \quad x > a \end{cases}$$

Priebeh distribučnej funkcie si môžeme pozrieť na obrázku 5.75.

6. Momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim R(a, b)$ vyjadríme podľa predpisu 5.40:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathbb{X}\,t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \mathrm{e}^{x \cdot t}\,\mathrm{d}x = 0 + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} \cdot \mathrm{e}^{x \cdot t}\,\mathrm{d}x + 0 =$$



Obrázok 5.75: Distribučná funkcia $F_{R(a,b)}(x)$ náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti s parametrami $a = 3$, $b = 5$

$$= \left[\frac{1}{b-a} \cdot \frac{\mathrm{e}^{x\cdot t}}{t}\right]_a^b = \frac{\mathrm{e}^{b\cdot t} - \mathrm{e}^{a\cdot t}}{t(b-a)}$$

7. Hľadáme tvar distribučnej funkcie $F_{Exp(\lambda)}(x)$ spojitej náhodnej premennej exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Exp(\lambda)$ s hustotou (5.24):

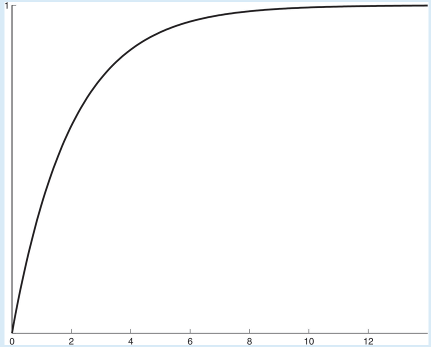
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda\cdot x} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Distribučná funkcia pre spojitú náhodnú premennú má tvar:

$$F(x) = P(\mathbb{X} \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \text{kde } x \in R$$

$$F_{Exp(\lambda)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 0 \\ \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\cdot x} & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Priebeh distribučnej funkcie si môžeme pozrieť na obrázku 5.76.



Obrázok 5.76: Distribučná funkcia $F_{Exp(\lambda)}(x)$ náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti s parametrom $\lambda = 0.5$

8. Momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Exp(\lambda)$ vyjadríme podľa predpisu 5.40:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathbb{X}\,t}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \mathrm{e}^{x \cdot t}\,\mathrm{d}x = 0 + \int\limits_{0}^{\infty} \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathrm{e}^{x \cdot t}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{\lambda}{t-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{(t-\lambda)\cdot x}\right]_0^{\infty} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda - t} & \text{pre} \quad t < \lambda \\ -\infty & \text{pre} \quad t > \lambda \\ neexistuje & \text{pre} \quad t = \lambda \end{cases}$$

V teoretickej časti sme hovorili, že momentová vytvárajúca funkcia sa používa na vytváranie momentov. K tomu sa počítajú derivácie tejto funkcie a potom sa dosadí

$t = 0$. Z tohto dôvodu stačí, aby sme vypočítali tvar momentovej vytvárajúcej funkcie v okolí bodu 0, teda pre $t < \lambda$:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

9. Distribučnú funkciu $F_{N(\mu,\,\sigma^2)}(x)$ náhodnej premennej s normálnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim N(\mu,\,\sigma^2)$, nie je možné vyjadriť v tvare elementárnej funkcie. Hustota tohto rozdelenia je podľa (5.26):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Distribučná funkcia pre spojitú náhodnú premennú má tvar:

$$F(x) = P(\mathbb{X} \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \text{kde } x \in R$$

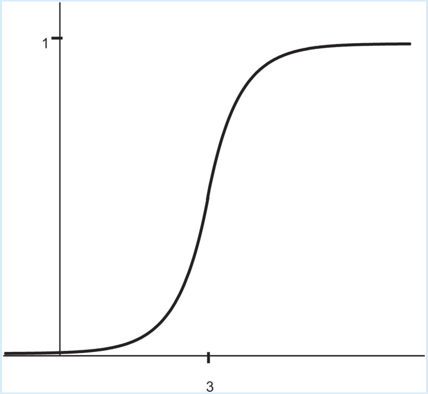
$$F_{N(\mu,\,\sigma^2)}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$

Hodnoty tejto distribučnej funkcie počítame numericky, alebo hľadáme v tabuľkách.

Priebeh distribučnej funkcie si môžeme pozrieť na obrázku 5.77.

10. Momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s normálnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim N(\mu,\,\sigma^2)$ vyjadríme podľa predpisu 5.40:

$$m_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{\mathbb{X}\,t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \mathrm{e}^{x \cdot t}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathrm{e}^{x \cdot t}\,\mathrm{d}x =$$



Obrázok 5.77: Distribučná funkcia $F_{N(\mu,\,\sigma^2)}(x)$ náhodnej premennej s normálnym rozdelením pravdepodobnosti s parametrami $\mu = 3$, $\sigma^2 = 1$)

$$= \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\dfrac{x^2-2x\mu+\mu^2}{2\sigma^2}}\cdot \mathrm{e}^{x\cdot t}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\dfrac{-x^2+2x\mu-\mu^2+2\sigma^2x\cdot t}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\dfrac{-x^2+2x(\mu+\sigma^2\cdot t)\pm(\mu+\sigma^2\cdot t)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\dfrac{\mu^2+(\mu+\sigma^2\cdot t)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\dfrac{-x^2+2x(\mu+\sigma^2\cdot t)-(\mu+\sigma^2\cdot t)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \mathrm{e}^{\dfrac{-\mu^2+(\mu+\sigma^2\cdot t)^2}{2\sigma^2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\dfrac{-x^2+2x(\mu+\sigma^2\cdot t)-(\mu+\sigma^2\cdot t)^2\cdot t}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x}_{=1} =$$

$$= \mathrm{e}^{\dfrac{-\mu^2+\mu^2+2\mu\sigma^2\cdot t+\sigma^4\cdot t^2}{2\sigma^2}} = \mathrm{e}^{\mu\cdot t+\dfrac{\sigma^2\cdot t^2}{2}}$$

Momentovú vytvárajúcu funkciu $m_{\mathbb{X}}(t)$ náhodnej premennej s normálnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X}\sim N(\mu,\,\sigma^2)$ je

$$m_{\mathbb{X}}(t) = \mathrm{e}^{\mu\cdot t+\dfrac{\sigma^2\cdot t^2}{2}}$$

5.4.6. Úlohy

1. Rozdelenie pravdepodobnosti, popisujúce koľko áut prejde okolo radaru za časový úsek dĺžky 1 minúty, modelujeme pomocou náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti s parametrom $\lambda = 6$. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolená medzera medzi autami bude viac ako pol minúty?

2. Rozdelenie pravdepodobnosti, popisujúce dĺžku intervalu medzi prejazdmi áut popri radare na diaľnici, modelujeme pomocou náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti s parametrom $\lambda = 1/10$. Priemerná dĺžka intervalu je 10 sekúnd. Aká je pravdepodobnosť, že počas jednej minúty prejdú okolo radaru práve 3 autá?

3. Aké rozdelenie pravdepodobnosti má náhodná premenná, ktorej hodnoty sú súčty bodiek pri hode dvomi kockami?

4. Určite interval, v ktorom sa bude nachádzať aspoň 88 % hodnôt, predstavujúcich počet hodov potrebných na hodenie šestky.

5. Aká je pravdepodobnosť, že počet hodov, ktorý potrebujeme urobiť, aby prvý krát padla šestka, bude aspoň 4?

6. Aká je pravdepodobnosť, že počet hodov, ktorý potrebujeme ešte urobiť, aby prvý krát padla šestka, bude aspoň 4, ak vieme, že už bolo urobených 5 hodov?

7. V automobilovej skúšobni overovali trvanlivosť predného skla automobilu úderom kovovou tyčou, vždy rovnakou silou. Údery opakovali, až kým sa sklo nerozbilo. Pravdepodobnosť, že sklo vydržalo bola $p = 0.7$. Vypočítajte strednú hodnotu $E(\mathbb{X})$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$, ktorá popisuje počet úderov, ktoré sklo vydržalo, kým sa rozbilo.

8. Nech náhodná premenná $\mathbb{X}$ má normálne rozdelenie pravdepodobnosti $\mathbb{X} \sim N(\mu, \sigma^2) = N(1, 4)$. Vypočítajte pravdepodobnosť, že $\mathbb{X}$ nadobudne hodnoty

   a) väčšie ako -0.76

b) menšie ako 1.73

c) menšie ako -0.76

d) menšie ako -1.88

e) z intervalu $\langle -0.05, 1.05\rangle$

9. Náhodná premenná $\mathbb{X}$ popisuje finančný zisk hráča pri hre s kockou, ktorý dostane 10 korún ak na kocke padne 5, alebo 6. Zaplatí 2 koruny ak padne 4, 3 alebo 1 a zaplatí 5 korún ak padne 2. Nakreslite distribučnú funkciu $F(x)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ a vypočítajte hodnotu distribučnej funkcie v číslach -5, -3, -1, 0, 2, 4, 5, 9, 10, 12.

10. Distribučná funkcia $F(x)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ je daná vzťahom:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 3 \\ k \cdot x - 1 & \text{pre} \quad 3 \leq x < 6 \\ 1 & \text{pre} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

Vypočítajte konštantu k, určite hustotu pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{X}$ a napíšte o aké rozdelenie pravdepodobnosti sa jedná!

5.4.6.1. Riešenie úloh

1. Rozdelenie pravdepodobnosti, popisujúce koľko áut prejde okolo radaru za časový úsek dĺžky 1 minúty, modelujeme pomocou náhodnej premennej $\mathbb{X}$ s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti s parametrom $\lambda = 6$. Stredná hodnota Poissonovho rozdelenia je λ, teda priemerný počet áut, ktoré prejdú okolo radaru za minútu je 6. Všeobecnejšie, áut ktoré prejdú okolo radaru za t minút je $6\,t$.

   Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $\mathbb{T}$, ktorá popisuje dĺžku intervalu medzi prejazdmi áut je exponenciálne rozdelenie s rovnakým parametrom λ, ako má Poissonovo rozdelenie, z ktorého vzniklo. Stredná hodnota náhodnej premennej $\mathbb{T}$ s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti $Exp(\lambda)$ je $E(\mathbb{T}) = \dfrac{1}{\lambda}$. To znamená, že priemerná dĺžka medzery je $1/6$ minúty.

$$P(\mathbb{T} > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}\,\mathrm{d}t = \left[-\,\mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}\right]_{\frac{1}{2}}^{\infty} = 0 - (-\,\mathrm{e}^{-6\cdot\frac{1}{2}}) = \mathrm{e}^{-3} = 0.0498$$

2. Rozdelenie pravdepodobnosti, popisujúce dĺžku intervalu medzi prejazdmi áut popri radare na diaľnici, modelujeme pomocou náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti s parametrom $\lambda = 1/10$. Priemerná dĺžka intervalu je 10 sekúnd.

   Ak sú intervaly medzi výskytmi udalostí exponenciálne, tak sa výskyt udalostí riadi náhodnou premennou $\mathbb{X}$ s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti s rovnakým parametrom λ. Tento parameter znamená, že za sekundu prejde okolo radaru priemerne $\lambda = 1/10$ auta. Pre 60 sekúnd bude mať parameter hodnotu 6.
   (6 áut prejde za 60 sekúnd, 1 auto za 10 sekúnd, $1/10$ auta za sekundu.)
   Pravdepodobnosť, že počas jednej minúty (teda) prejdú okolo radaru práve 3 autá je

$$P(\mathbb{X} = 3) = \frac{\lambda^3}{3!} \cdot \mathrm{e}^{-6} = 0.0892$$

Home Page

Title Page

Contents

Page 314 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit

3. Zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej, ktorej hodnoty sú súčty bodiek pri hode dvomi kockami vyjadríme v tabuľke:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

4. Chceme určiť interval, v ktorom sa bude nachádzať aspoň 88 % hodnôt, predstavujúcich počet hodov potrebných na hodenie šestky. Náhodná premenná $\mathbb{X}$ popisujúca počet hodov potrebných na hodenie šestky sa riadi geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, Ge(1/6). Jej hodnoty sú čísla 1, 2, 3, …
   Stredná hodnota a disperzia sú:

$$E(\mathbb{X}) = \frac{1}{p}, \qquad D(\mathbb{X}) = \frac{q}{p^2}$$

   Na odhad použijeme Čebyševovu nerovnosť 5.4:

$$P(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| \geq c \cdot \sigma) \leq \frac{1}{c^2}$$

$$P\left(|\mathbb{X} - 6| \geq c \cdot \sqrt{\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}}}\right) \leq \frac{1}{c^2}$$

$$P\left(|\mathbb{X} - 6| \geq c \cdot \sqrt{30}\right) \leq \frac{1}{c^2}$$

   Ak položíme $c = 3$, tak dostaneme $\frac{1}{c^2} = 0.1111$ a $1 - \frac{1}{c^2} = 0.8889$:

$$P\left(|\mathbb{X} - 6| \geq 3 \cdot 5.4772\right) \leq 0.1111$$

$$P\left(|\mathbb{X} - 6| \leq 16.4317\right) \geq 0.8889$$

Priemerne spomedzi 100 pokusov kým padne šestka, bude viac ako 88 takých, že na pokus bude treba k hodov, kde $k \in \langle -10.4317 \;\; 22.4317 \rangle$, alebo zrozumiteľnejšie, počet hodov bude medzi 0 až 23.

5. Pravdepodobnosť, že počet hodov, ktorý potrebujeme urobiť, aby prvý krát padla šestka, bude aspoň 4 vypočítame ako pravdepodobnosť, že náhodná premenná $\mathbb{X}$ s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti Ge(1/6), dosiahne hodnotu väčšiu nanajvýš rovnú 4.

$$P(\mathbb{X} \geq 4) = 1 - P(\mathbb{X} < 4) = 1 - P(\mathbb{X} = 1) - P(\mathbb{X} = 2) - P(\mathbb{X} = 3) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) = 0.5787$$

6. Počítame pravdepodobnosť, že počet hodov, ktorý potrebujeme urobiť, aby prvý krát padla šestka, bude ešte aspoň 4, ak vieme, že už bolo urobených 5 hodov, pri ktoých šestka nepadla. Vypočítame ju ako podmienenú pravdepodobnosť, že náhodná premenná s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti dosiahne hodnotu väčšiu nanajvýš rovnú 4+5 za podmienky, že je viac ako 5.

$$P(\mathbb{X} \geq 9 / \mathbb{X} > 5) = \frac{P(\mathbb{X} \geq 9 \bigwedge \mathbb{X} > 5)}{P(\mathbb{X} > 5)} = \frac{P(\mathbb{X} \geq 9)}{P(\mathbb{X} > 5)} = \frac{1 - P(\mathbb{X} < 9)}{1 - P(\mathbb{X} \leq 5)} =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \frac{1}{6} \right)}{1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} \right)} =$$

$$= \frac{0.2326}{0.4019} = 0.5787$$

Dostali sme rovnaký číselný výsledok ako v predchádzajúcej úlohe. To je dobre, lebo podľa teórie uvedenej v časti 5.4.4, má geometrické rozdelenie pravdepodobnosti vlastnosť zabúdania.
Pravdepodobnosť, že počet hodov, ktorý potrebujeme urobiť, aby prvý krát padla šestka, bude ešte aspoň 4, je rovnaká, nech už bolo v minulosti hodených koľkokoľvek neúspešných pokusov.

7. Hľadáme strednú hodnotu náhodnej premennej $\mathbb{X}$, ktorá popisuje počet úderov kovovou tyčou, ktoré predné sklo automobilu vydržalo, kým sa rozbilo.
Táto náhodná premenná môže nadobudnúť hodnoty 0, 1, 2,... a riadi sa geometrickým rozdelením pravdepodobnosti Ge(0.3). Stredná hodnota $E(\mathbb{X})$ je podľa vzťahu 5.17:
$$E(\mathbb{X}) = \frac{q}{p}$$
$$E(\mathbb{X}) = \frac{0.7}{0.3} = 2.33$$
Približný počet úderov, ktoré sklo vydrží, kým sa rozbije je 2.33.

8. Je daná náhodná premenná $\mathbb{X}$ s normálnym rozdelením pravdepodobnosti $\mathbb{X} \sim N(1,4)$. Hodnoty pravdepodobnosti budeme hľadať v tabuľkách náhodnej premennej $\mathbb{Y} \sim N(0,1)$, napríklad na stránke *http://math2.org/math/stat/distributions/z-dist.htm*
Náhodnú premennú $\mathbb{X}$ prevedieme na náhodnú premennú $\mathbb{Y}$ nasledovne:
$$\mathbb{Y} = \frac{\mathbb{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\mathbb{X} - 1}{2}$$
Pravdepodobnosť, že $\mathbb{X}$ nadobudne hodnoty
   a) väčšie ako -0.76
$$P(\mathbb{X} > -0.76) = P\left(\frac{\mathbb{X}-1}{2} > \frac{-0.76-1}{2}\right) = P\left(\mathbb{Y} > -0.88\right) =$$
$$= 1 - P\left(\mathbb{Y} \leq -0.88\right) = 1 - 0.1894 = 0.8106$$

b) menšie ako 1.73

$$P(\mathbb{X} < 1.73) = P\left(\frac{\mathbb{X}-1}{2} < \frac{1.73-1}{2}\right) = P\left(\mathbb{Y} < 0.365\right) = 0.642$$

c) menšie ako -0.76

$$P(\mathbb{X} < -0.76) = P\left(\frac{\mathbb{X}-1}{2} < \frac{-0.76-1}{2}\right) = P\left(\mathbb{Y} < -0.88\right) = 0.1894$$

d) menšie ako -1.88

$$P(\mathbb{X} < -1.88) = P\left(\frac{\mathbb{X}-1}{2} < \frac{-1.88-1}{2}\right) = P\left(\mathbb{Y} < -1.44\right) = 0.0749$$

e) z intervalu $\langle -0.05, 1.05\rangle$

$$P(-0.05 \leq \mathbb{X} \leq 1.05) = P\left(-0.525 \leq \frac{\mathbb{X}-1}{2} \leq 0.025\right) =$$

$$= P\left(\mathbb{Y} \leq 0.025\right) - P\left(\mathbb{Y} \leq -0.525\right) = 0.51 - 0.299 = 0.211$$

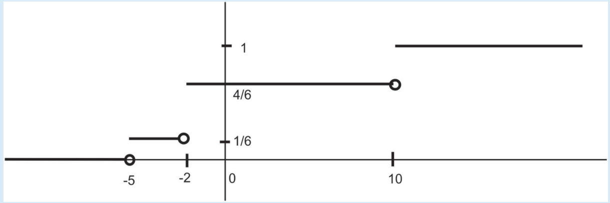
9. Náhodná premenná $\mathbb{X}$ popisuje finančný zisk hráča pri hre s kockou, ktorý dostane 10 korún ak na kocke padne 5, alebo 6. Zaplatí 2 koruny ak padne 4, 3 alebo 1 a zaplatí 5 korún ak padne 2. Distribučná funkcia $F(x)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ má predpis:

$$F(x) = P(\mathbb{X} \leq x) = P(\mathbb{X} = x_k)\,, \qquad \text{kde } x \in R$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < -5 \\ 1/6 & \text{pre} \quad -5 \leq x < -2 \\ 4/6 & \text{pre} \quad -2 \leq x < 10 \\ 1 & \text{pre} \quad 10 \leq x \end{cases}$$

Nadobúda hodnoty:

x_k	-5	-3	-1	0	2	4	5	9	10	12
$F(x_k)$	$1/6$	$1/6$	$4/6$	$4/6$	$4/6$	$4/6$	$4/6$	$4/6$	1	1



Obrázok 5.78: Distribučná funkcia $F(x)$ náhodnej premennej, ktorá popisuje zisk hráča pri hre s kockou

10. Distribučná funkcia $F(x)$ náhodnej premennej $\mathbb{X}$ je daná vzťahom:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 3 \\ k \cdot x - 1 & \text{pre} \quad 3 \leq x < 6 \\ 1 & \text{pre} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

Zodpovedajúca hustota je je daná vzťahom:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < 3 \\ k & \text{pre} \quad 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{pre} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

Koeficient k musí byť rovný $1/3$, aby pre hustotu platilo

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Podľa tvaru hustoty vidíme, že sa jedná o rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti $\mathrm{R}\langle 3,\, 6\rangle$.

Kapitola 6

Štatistika

V predchádzajúcej časti sme hovorili o tom, že čím väčší počet nameraných hodnôt náhodnej premennej máme, tým presnejšie vieme o tejto náhodnej premennej niečo povedať. Matematická štatistika ponúka metódy, ako spracovať súbor hodnôt, ktorý vznikol meraním. Táto matematická disciplína používa náročný matematický aparát a preto je dosť ťažké jej porozumieť. Pokúsili sme sa nájsť jednoduché ilustračné príklady, pomocou ktorých by sme chceli čitateľa neodradiť. Uvedené zjednodušenia síce ukážu riešenie len malej triedy úloh, ale veríme, že po ich pochopení, bude mať čitateľ odvahu, prečítať si ako fungujú štatistické metódy v nasledujúcom diely tejto učebnice.

Pre potreby tohoto výkladu si dohodneme význam niektorých slov, ktoré budeme používať. Chceme porozumieť dátam, alebo niečo tvrdiť o **základnom súbore**, ak poznáme časť tohto súboru, ktorú nazývame **náhodný výber**. **Rozsahom náhodného výberu** nazývame počet prvkov náhodného výberu.

Teoreticky, základný súbor predstavuje všetky realizácie náhodnej premennej a náhodný výber je niekoľko z týchto realizácií. Funkciu, ktorá priradí náhodnému výberu jedno číslo nazývame **štatistika**. Štatistikou je napríklad **aritmetický priemer**, alebo **výberový**

rozptyl.

$$\overline{X} = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2$$

Pomocou náhodného výberu a štatistík, ktoré priradia náhodnému výberu nejaké čísla, môžeme určiť aké rozdelenie pravdepodobnosti má základný súbor. V prípade, že poznáme rozdelenie pravdepodobnosti základného súboru, môžeme odhadovať parametre tohto rozdelenia.

Podľa toho, či odhadujeme neznámy tvar rozdelenia, alebo odhadujeme parametre známeho rozdelenia, rozlišujeme **neparametrické** a **parametrické** odhady alebo testy.

6.1. Test na tvar rozdelenia

Podľa kategorizácie v úvode, sú testy na tvar rozdelenia neparametrickými testami. Najjednoduchším spôsobom, ako zistiť tvar rozdelenia je nakresliť diagram, v ktorom sú znázornené **početnosti**, pre jednotlivé číselné hodnoty. Číselné hodnoty predstavujú hodnoty náhodnej premennej. Početnosti budú predstavovať pravdepodobnosti. Obrázok nazveme **histogram** porovnáme ho s tvarmi rozdelení, ktoré poznáme.

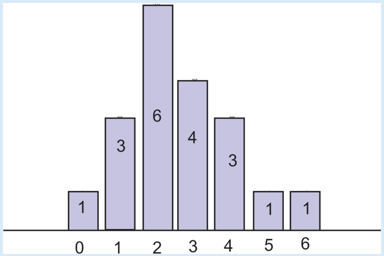
Úloha 6.1.1 *Pri zisťovaní počtu prinesených domácich úloh počas šiestich cvičení sme zistili, že jeden žiak neodovzdal žiadnu úlohu,* 3 *žiaci odovzdali jednu úlohu,* 6 *žiaci odovzdali dve úlohy,* 4 *žiaci odovzdali tri úlohy,* 3 *žiaci odovzdali štyri úlohy,* 1 *žiak odovzdal päť úloh a* 1 *žiak odovzdal všetkých šesť úloh. Akým rozdelením pravdepodobnosti môžeme modelovať náhodnú premennú popisujúcu pravdepodobnosť počtu odovzdných úloh?*

Riešenie: Príslušné početnosti si zapíšeme do tabuľky 6.1 a nakreslíme histogram.

Podľa tvaru histogramu usúdime, o aké rozdelenie by sa mohlo jednať.

počet úloh	0	1	2	3	4	5	6
počet žiakov	1	3	6	4	3	1	1

Tabuľka 6.1: Žiaci, ktorí odovzdali daný počet úloh



Obrázok 6.1: Histogram počtu odovzdaných úloh

Navrhneme binomické rozdelnie s parametrom $p = 1/2$. Teoretické pravdepodobnosti pre toto rozdelenie, vypočítané podľa vzorca $P_k = \binom{6}{k} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{6-k}}$ a z nich odvodené teoretické početnosti sú v tabuľke 6.2. Dalo by sa ešte vyskúšať, či je parameter $p = 1/2$ zvolený

počet úloh	0	1	2	3	4	5	6
teor. pravdep.	0.02	0.09	0.23	0.31	0.23	0.09	0.02
skutočný poč. žiak.	1	3	6	4	3	1	1
teor. poč. žiak.	0.38	1.71	4.37	5.89	4.37	1.71	0.38

Tabuľka 6.2: Žiaci, ktorí odovzdali daný počet úloh

správne. Stredná hodnota binomického rozdelenia je podľa teórie $E(\mathbb{X}) = n \cdot p$. Odhanime hodnotu $n \cdot p$ aritmetickým priemerom nameraných hodnôt $\overline{X} = \frac{0\cdot1+1\cdot3+2\cdot6+3\cdot4+4\cdot3+5\cdot1+6\cdot1}{19} = 2.63$, teda $7 \cdot p \doteq 2.63$, preto $p \doteq 0.3878$. Ak je teda rozdelenie naozaj binomické, malo by mať parameter $p = 0.3878$.

Skúsme ešte použiť Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti. Toto rozdelenie by síce malo mať nekonečný počet hodnôt, ale my použijeme iba hodnoty 0 až 6. Ako parameter použijeme odhad pomocou aritmetického priemeru. Platí $E(\mathbb{X}) = \lambda$ a $\overline{X} = \frac{0\cdot1+1\cdot3+2\cdot6+3\cdot4+4\cdot3+5\cdot1+6\cdot1}{19} = 2.63$, preto odhad parametra bude $\lambda \doteq 2.63$.

Rozdelenie pravdepodobnosti máme odhadnuté, len sa ešte treba rozhodnúť, ktoré je lepšie. Teoretické hodnoty, vypočítané pre Poissonove rozdelenie sú bližšie k nameraným hodnotám, preto ako model našich hodnôt vyberieme Poissonove rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $\lambda \doteq 2.63$. $\square$

Nasledujúci test na tvar rozdelenia využíva podobné úvahy, ako sme urobili v úlohe 6.1.1.

6.1.1. χ^2 test dobrej zhody

χ^2 test dobrej zhody je test na tvar rozdelenia, je to neparametrický test. Využíva podobné úvahy, ako sme urobili v úlohe 6.1.1. Týmto testom chceme overiť hypotézu, že náhodný

počet úloh	0	1	2	3	4	5	6
binom teor. pravd.	0.05	0.2	0.32	0.27	0.13	0.03	0
Poiss. teor. pravd.	0.68	0.26	0.05	0.01	0	0	0
skutočný poč. žiak.	1	3	6	4	3	1	1
teor. poč. binom	0.95	3.8	6.08	5.13	2.47	0.57	0
teor. poč. Poiss.	1.26	3.43	4.64	4.19	2.84	1.54	0.7

Tabuľka 6.3: Odhad pomocou binomického a Poissonovho rozdelenia s vypočítanými parametrami

výber o rozsahu n (n nameraných hodnôt) pochádza zo základného súboru s určitým rozdelením pravdepodobnosti.
Pre každú hodnotu x_j náhodnej premennej $\mathbb{X}$ určíme jej početnosť m_k v náhodnom výbere. Pomocou pravdepodobnosti $p_j = P(\mathbb{X} = x_j)$ určíme teoretickú početnosť $p_j \cdot n$ hodnoty x_j náhodnej premennej.

hodnota náh. premennej	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k
nameraná početnosť	m_1	m_2	m_3	$\dots$	m_k
teoretická pravdepodobnosť	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k
teoretická početnosť	$p_1 \cdot n$	$p_2 \cdot n$	$p_3 \cdot n$	$\dots$	$p_k \cdot n$

Tabuľka 6.4: Namerané a teoretické početnosti pre rozsah výberu n a počet hodnôt náhodnej premennej k

Ak sú namerané početnosti blízke teoretickým početnostiam, môžeme predpokladať, že sme vybrali správne rozdelenie pravdepodobnosti.

Namerané a teoretické početností sú blízko k sebe, ak rozdiely $m_j - p_j \cdot n$ sú malé. Presnejšie, chceme, aby súčet absolútnych hodnôt, alebo druhých mocnín týchto rozdielov bol malý.

$$\sum_{j=1}^{k} |m_j - p_j \cdot n| , \quad \text{alebo} \sum_{j=1}^{k} (m_j - p_j \cdot n)^2$$

Posledným krokom pri určovaní miery vzdialenosti je zamedzenie vzniku relatívne väčšej chyby pre väčšie hodnoty m_j. Zabezpečíme to delením hodnotou $p_j \cdot n$.
Mierou vzdialenosti medzi nameranými a teoretickými početnosťami je číslo H určené vzťahom

$$H = \sum_{j=1}^{k} \frac{(m_j - p_j \cdot n)^2}{p_j \cdot n}$$

Ak je číslo H malé, sú namerané a teoretické početností blízko k sebe a môžeme **prijať** predpoklad (hypotézu) o tom, že sme vybrali správne rozdelenie pravdepodobnosti.
Ak je číslo H veľké, sú namerané a teoretické početností ďaleko od seba a predpoklad (hypotézu) o tom, že sme vybrali správne rozdelenie pravdepodobnosti **zamietneme**.

Treba už len rozhodnúť, ktoré čísla H sú malé a ktoré čísla H sú veľké. A kde je hranica medzi nimi. Túto hranicu nazveme kritická hodnota a označíme w.
Ak je $H \leq w$, tak hypotézu o tvare rozdelenia prijmeme.
Ak $H > w$,tak hypotézu o tvare rozdelenia zamietneme.

Posledná úloha pri testovaní tvaru rozdelenia spočíva v nájdení kritickej hodnoty w. Túto hodnotu odvodíme od požiadavky, aká má byť pravdepodobnosť omylu pri určovaní tvaru rozdelenia.
Dopredu určíme pravdepodobnosť nastatia chyby pri určení tvaru rozdelenia. Teda určíme číslo α, označujúce pravdepodobnosť, že zamietneme hypotézu o tvare rozdelenia, aj keď **hypotéza bola správna**. Takáto chyba sa nazýva **chyba prvého druhu**.

$$\alpha = P(\text{zamietnutie hypotézy/hypotéza bola správna})$$

Číslo α sa nazýva **hladina významnosti testu**(significance level) a zvykne mať hodnoty 0.1, 0.01 alebo 0.05.

Pri penvej hodnote α, sa niekedy ešte snažíme minimalizovať takzvanú **chybu druhého druhu**, ktorá nastane, ak prijmeme hypotézu o tvare rozdelenia, aj keď **hypotéza bola nesprávna**. Pravdepodobnosť takejto chyby označujeme β a vypočítame:

$$\beta = P(\text{prijatie hypotézy/hypotéza bola nesprávna})$$

Hodnotu $1-\beta$ nazývame **sila testu**. Výpočtom sily testu sa teraz zaoberať nebudeme, stačí ak si zapamätáme, že pri fixovanej hladine významnosti sa snažíme dosiahnuť maximálnu silu testu (= minimálnu pravdepodobnosť chyby druhého druhu).

Predpokladajme teraz, že číslo H je jednou realizáciou náhodnej premennej $\mathbb{H}$. Takýto predpoklad urobiť môžeme, lebo pre rôzne náhodné výbery, dostaneme rôzne hodnoty H. Náhodná premenná $\mathbb{H}$ má rozdelenie pravdepodobnosti χ^2 s $k-1-r$ stupňami voľnosti, kde k je počet tried a r je počet odhadnutých parametrov. Aj takýto predpoklad urobiť môžeme, ale argumenty prečo to tak je, už necháme na matematikov.

Pravdepodobnosť chyby α pre náhodnú premennú $\mathbb{H}$ znamená, že náhodná premenná dosiahne hodnotu väčšiu ako kritická hodnota.

$$\alpha = P(\text{zamietnutie hypotézy/hypotéza bola správna}) = P(\mathbb{H} > w)$$

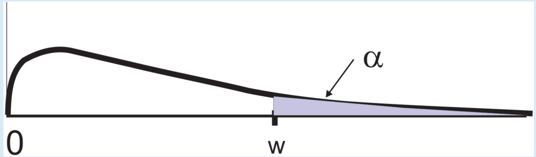
Na obrázku 6.2 s grafom hustoty náhodnej premennej $\mathbb{H}$ s χ^2 rozdelením pravdepodobnosti vidíme, že pre interval (w, ∞) je plocha pod krivkou hustoty rovná α.

Pre určenú hodnotu hladina významnosti testu α, pri známom počte hodnôt k, známom počte odhadnutých parametrov r, nájdeme kritickú hodnotu w pomocou χ^2 rozdelenia pravdepodobnosti s $k-1-r$ stupňami voľnosti.
Hľadáme v tabuľkách kvantilov pre χ^2 rozdelenie:

$$P(\mathbb{H} > w) = \alpha, \qquad \mathbb{H} \sim \chi^2(k-1-r)$$

Alebo využitím vhodného softvéru vypočítame integrál:

$$\int_w^\infty \frac{x^{\frac{k-1-r}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k-1-r}{2}}\,\Gamma(\frac{k-1-r}{2})}\,\mathrm{d}x = \alpha$$



Obrázok 6.2: Hodnoty väčšie ako w dosiahne $\mathbb{H}$ s pravdepodobnosťou menšou ako α

Poznámka:

Náhodná premenná $\mathbb{H}$ má χ^2 rozdelenie pravdepodobnosti pre dostatočne veľký počet pozorovaní. Preto pri teste treba zabezpečiť, aby bol výberový súbor dosť veľký, počet hodnôt náhodnej premennej by mal byť aspoň 5 a mal by platiť aj vzťah $p_j \cdot n \geq 5$. Ak to neplatí, zlúčime hodnoty do menšieho počtu skupín, ktoré budú predstavovať hodnoty náhodnej premennej a pravdepodobnosti vypočítame z podmienky:

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$$

6.2. Odhady parametrov

V predchádzajúcej časti sme potrebovali z hodnôt náhodného výberu odhadúť veľkosti parametrov rozdelení náhodnej premennej. V tejto časti ukážeme postupy, akými sa dajú odhady parametrov urobiť. Riešime úlohu odhadunúť parametre náhodnej premennej v prípade, že poznáme jej rozdelenie pravdepodobnosti a máme k dispozícii hodnoty náhodného výberu (= výsledky pozorovania).

Odhad je funkciou (štatistikou) náhodného výberu $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ktorá slúži na odhadovanie neznámeho parametra. Takou štatistikou môže byť napríklad aritmetický priemer:

$$z(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \overline{X} = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Inou štatistikou je výberový rozptyl:

$$Z_n = z(X_1, X_2, \ldots, X_n) = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2$$

Úlohou teórie je nájsť také štatistiky, pomocou ktorých urobíme odhady, ktoré budú mať dobré vlastnosti. Dohodnime sa teraz na niekoľkých „dobrých vlastnostiach", ktoré by mal odhad mať.

Štatistika, ktorou urobíme dobrý odhad by mala mať nasledujúce vlastnosti:

- Hodnota odhadu by mala byť blízko hodnote odhadovaného parametra λ.
- Štatistika by mala byť **neskresleným (=nevychýleným) odhadom** neznámeho parametra. Výsledky štatistík rôznych náhodných výberov by mali byť rovnako v ľavom aj pravom okolí parametra λ. Presnejšie, hodnoty Z_n chápeme ako hodnoty náhodnej premennej $\mathbb{Z}$ a chceme, aby platilo:

$$E(\mathbb{Z}) = \lambda$$

- Štatistika by mala byť **efektívnym odhadom** neznámeho parametra. Znamená to, že náhodná premenná $\mathbb{Z}$ by mala mať najmenší možný rozptyl okolo parametra λ.

$$D(\mathbb{Z}) \leq D(\mathbb{Z}^o) \qquad \text{pre ľubovoľnú štatistiku } \mathbb{Z}^o$$

- Štatistika by mala byť **konzistentným odhadom** neznámeho parametra. To znamená, že zväčšením rozsahu náhodného výberu dostaneme odhad, ktorý bude ľubovoľne blízko neznámemu parametru λ.

$$\lim_{n \to infty} P(|Z_n - \lambda| < \varepsilon) = 1$$

Odhady parametrov delíme na **bodové ohady** a **intervalové odhady**.
Bodové odhady sú odhady pomocou jednej hodnoty (jedného bodu). Parameter odhadneme jednou hodnotou, napríklad $\lambda = 5$.
Intervalové odhady sú odhady pomocou intervalu, teda odhadneme, že hodnota parametra je napríklad $\lambda \in \langle 4, 6\rangle$.

6.2.1. Momentová metóda

Momentová metóda je bodová metóda odhadu parametra, pri ktorej pomocou štatisík náhodného výberu urobíme odhady charakteristík (= momentov) náhodnej premennej.

Pomocou aritmetického priemeru odhadneme strednú hodnotu náhodnej premennej.

$$E(\mathbb{X}) \doteq \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Pomocou výberového rozptylu odhadneme disperziu náhodnej premennej.

$$D(\mathbb{X}) \doteq S^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2$$

Z predpokladu o tvare rozdelenia vieme, nielen to, o aké rozdelenie sa jedná, ale aj akú má toto rozdelenie strednú hodnotu a disperziu.

Príklad 6.2.1 *Odhadnite parameter λ náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti.*

Riešenie: Náhodná premenná s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, Po(λ) má strednú hodnotu:

$$E(\mathbb{X}) = \lambda$$

$$E(\mathbb{X}) \doteq \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

Odhad parametra λ je

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

□

Príklad 6.2.2 *Odhadnite parametre a, b náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti.*

Riešenie: Náhodná premenná s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, R$\langle a, b\rangle$ má strednú hodnotu:

$$E(\mathbb{X}) = \frac{a+b}{2}$$

disperziu:

$$D(\mathbb{X}) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$E(\mathbb{X}) \doteq \overline{X} = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$D(\mathbb{X}) \doteq S^2 = \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2$$

Odhady parametrov a, b sú riešeniami sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2} = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$\frac{(b-a)^2}{12} = \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2$$

□

6.2.2. Metóda maximálnej vierohodnosti

Metóda maximálnej vierohodnosti (maximum likelihood) je bodová metóda odhadu parametra náhodnej premennej, ktorej rozdelenie poznáme. Spočíva v skonštruovaní funkcie L, ktorá vyjadruje pravdepodobnosť nastatia všetkých hodnôt x_k súčasne. Funkcia L závisí od tvaru rozdelenia a parametra tohto rozdelenia λ. Hodnota λ^*, v ktorej funkcia L dosiahne maximálnu hodnotu, je najpravdepodobnejšia hodnota λ.

$$L((X_1, X_2, \ldots, X_n)/\lambda) = \prod_{j=1}^{n} P(\mathbb{X} = X_j/\lambda)$$

Príklad 6.2.3 *Odhadnite parameter λ náhodnej premennej s Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti, ak viete, že boli namerané hodnoty:*

x_j	0	1	2	3	4	5	6
m_j	1	3	6	4	3	1	1

Tabuľka 6.5: Hodnoty náhodného výberu

Riešenie: Funcia maximálnej vierohodnosti pre náhodnú premennú s Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti má tvar:

$$L((X_1, X_2, \dots, X_n)/\lambda) = \prod_{j=1}^{n} P(\mathbb{X} = X_j/\lambda)$$

$$L((0,1,2,3,4,5,6)/\lambda) = \prod_{j=1}^{19} P(\mathbb{X} = X_j/\lambda) =$$

$$= \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^1 \cdot \left(\frac{\lambda^1}{1!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^3 \cdot \left(\frac{\lambda^2}{2!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^6 \cdot \left(\frac{\lambda^3}{3!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^4 \cdot \left(\frac{\lambda^4}{4!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^3 \cdot \left(\frac{\lambda^5}{5!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^1 \cdot \left(\frac{\lambda^6}{6!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^1 =$$

$$= \mathrm{e}^{-19\cdot\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda^1}{1!}\right)^3 \cdot \left(\frac{\lambda^2}{2!}\right)^6 \cdot \left(\frac{\lambda^3}{3!}\right)^4 \cdot \left(\frac{\lambda^4}{4!}\right)^3 \cdot \left(\frac{\lambda^5}{5!}\right)^1 \cdot \left(\frac{\lambda^6}{6!}\right)^1 =$$

Hľadať extrém takejto funkcie by bolo výpočtovo náročné. Metódami matematickej analýzy však vieme ukázať, že funkcia $L((X_1, X_2, \dots, X_n)/\lambda)$ má extrém pre rovnakú hodnotu λ, ako funkcia $\ln(L((X_1, X_2, \dots, X_n)/\lambda))$.

$$\ln(L((0,1,2,3,4,5,6)/\lambda)) = \ln(\mathrm{e}^{-19\cdot\lambda}) + \ln\left(\frac{\lambda^{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot4+4\cdot3+5\cdot1+6\cdot1}}{1!\cdot2!\cdot3!\cdot4!\cdot5!\cdot6!}\right) =$$

$$= -19\cdot\lambda + \ln(\lambda^{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot4+4\cdot3+5\cdot1+6\cdot1}) - \ln(1!\cdot2!\cdot3!\cdot4!\cdot5!\cdot6!)$$

Pre hľadanie extrému použijeme deriváciu funkcie $L((X_1, X_2, \dots, X_n)/\lambda)$ podľa parametra λ.

$$\frac{\partial \ln(L((0,1,2,3,4,5,6)/\lambda))}{\partial\lambda} = -19 + (1\cdot3+2\cdot6+3\cdot4+4\cdot3+5\cdot1+6\cdot1)\cdot\frac{\partial(\ln(\lambda))}{\partial\lambda} =$$

$$= -19 + (1\cdot3+2\cdot6+3\cdot4+4\cdot3+5\cdot1+6\cdot1)\cdot\frac{1}{\lambda}$$

Stacionárny bod je taký bod λ^*, v ktorom je derivácia rovná 0.

$$-19 + (1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1) \cdot \frac{1}{\lambda^*} = 0$$

Odtiaľ

$$\lambda^* = \frac{50}{19}$$

Ešte treba ukázať, že v bode λ^* má funkcia maximum. To ukážeme tak, keď zistíme, že znamienko druhej derivácie je záporné:

$$\frac{\partial^2 \ln(L((0,1,2,3,4,5,6)/\lambda))}{\partial \lambda} = -\frac{50}{\lambda^2}$$

Metódou maximálnej vierohodnosti sme za apriórneho predpokladu, že náhodný výber je z Poissonovho rozdelenia vypočítali odhad neznámeho parametra λ^* tohto rozdelenia. Ak použijeme tento parameter pri výpočte Poissonovskej pravdepodobnosti nastatia hodnôt uvedených v tabuľke 6.5, dostaneme väčšiu pravdepodobnosť, než pre akýkoľvek iný parameter λ. □

6.2.3. Intervaly spoľahlivosti

V prípade, že vieme o aké rozdelenie pravdepodobnosti sa jedná, potrebujeme poznať aj parametre tohoto rozdelenia. Samozrejme, odhad hodnôt parametra nie je presný. V predchádzajúcej časti sme robili bodové odhady, u ktorých nevieme určiť, ako sú presné. V tejto časti budeme parametre odhadovať intervalmi, teda nepovieme presne htorá hodnota je daný parameter. Na druhej strane, pri odhade parametra intervalom vieme povedať, aká je pravdepodobnosť, že parameter je v tomto intervale. Rovnako vieme povedať, aká je pravdepodobnosť chyby, to znamená, aká je pravdepodobnosť, že parameter sa v intervale nenachádza.

Interval, krorý obsahuje hľadaný (odhadovaný) parameter λ, sa nazýva **interval spoľahlivosti** (confidence interval, credible interval). Pravdepodobnosť $1-\alpha$, s ktorou sa λ nachádza v intervale spoľahlivosti sa nazýva **spoľahlivosť intervalu**. Najčastejšie sa používajú hodnoty $\alpha = 0.01$ alebo $\alpha = 0.05$. Vtedy sa jedná o 99 % alebo 95 % interval spoľahlivosti.

Intervaly spoľahlivosti ešte môžeme deliť na obojstranné $\langle h_D, h_H\rangle$, ľavostranné $\langle h_D, \infty)$ a pravostranné $(\infty, h_H\rangle$.

6.2.3.1. Interval spoľahlivosti pre neznámu strednú hodnotu náhodnej premennej $\mathbb{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$

Výpočet (konštrukcia) koncových bodov intervalu spoľahlivosti závisí od tvaru rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej, ktorá ho popisuje. Najviac používané sú intervaly spoľahlivosti pre náhodnú premennú s normálnym rozdelením pravdepodobnosti. V nasledujúcom príklade odvodíme interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu normálneho rozdelenia.

Príklad 6.2.4 *Tablička čokolády na varenie váži* 200 *gramov. Táto váha samozrejme nie je presná, v skutočnosti sa váhy jednotlivých čokolád sa môžu o pár miligramov líšiť. Nájdite* 99 % *interval spoľahlivosti pre neznámu strednú hodnotu pre váhu čokolády, ak sú známe výsledky váženia* 10 *čokolád. Tieto váhy sú* 200.4, 201.1, 200.5, 201.2, 200.3, 201.6, 199.4, 201.2, 200.7, 201.6. *Predpokladajme, že hmotnosť tabličky čokolády budeme modelovať náhodnou premennou s normálnym rozdelením pravdepodobnosti s disperziou $\sigma^2 = 0.4$. Aký bude obojstranný* 99 % *interval spoľahlivosti pre neznámu strednú hodnotu náhodnej premennej popisujúcej váhu čokolády?*

Riešenie: Váhy jednotlivých čokolád sa môžu o pár miligramov líšiť. Ale vieme, že váha sa príliš nevzdiali od hodnoty 200 gramov. Preto je rozumné modelovať váhu náhodnou premennou s normálnym rozdelením pravdepodobnosti.

V našom príklade poznáme presne hodnotu disperzie σ^2, ale nepoznáme strednú hodnotu μ. Napríklad poznáme, akú odchýlku zvykne urobiť stroj na výrobu čokolády (disperzia), ale nepoznáme momentálne nastavenie stroja, koľko je stred. Je stredná hodnota naozaj $\mu = 200$ a odlišnosti sú spôsobené nepresnosťou stroja?

Hľadaný interval spoľahlivosti $\langle h_D, h_H \rangle$ má spĺňať požiadavku, aby pravdepodobnosť

$$P(\mu \in \langle h_D, h_H \rangle) = 1 - \alpha \tag{6.1}$$

Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu obsahuje bodový odhad strednej hodnoty, teda aritmetický priemer $\overline{X}$ z nameraných hodnôt 200.4, 201.1, 200.5, 201.2, 200.3, 201.6, 199.4, 201.2, 200.7, 201.6, ktoré predstavujú realizácie náhodnej premennej s normálnym rozdelením pravdepodobnosti $\mathbb{X} \sim N(\mu,\, \sigma^2)$.

Budeme hľadať interval $\langle h_D, h_H \rangle$ v tvare $\langle \overline{X} - \delta, \overline{X} + \delta \rangle$.

$$\overline{X} = 200.8$$

Hodnota $\overline{X}$ závisí od toho, aké hodnoty sú namerané (aké hodnoty má náhodný výber). Pre každú sadu čokolád má $\overline{X}$ inú hodnotu. Teda $\overline{X}$ môžeme považovať za realizácie náhodnej premennej $\overline{\mathbb{X}}$.

Dá sa ukázať, že pri výbere n hodnôt z normálneho rozdelenia, aritmetický priemer týchto hodnôt má tiež normálne rozdelenie, pričom stredná hodnota a disperzia tohoto rozdelenia sú

$$E(\overline{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mu = \mu$$

$$D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2) = \frac{1}{n^2}\, n\, \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Z predošlého vyplýva, že náhodná premenná $\overline{\mathbb{X}}$ má normálne rozdelenie pravdepodobnosti

$$\overline{\mathbb{X}} \sim N(\mu,\, \frac{\sigma^2}{n})$$

Označme $\mathbb{Z}$ náhodnú premennú s normovaným normálnym rozdelením pravdepodobnosti

$$\mathbb{Z} = \frac{\overline{\mathbb{X}} - \mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \qquad \mathbb{Z} \sim N(0, 1)$$

Upravujme vzťah 6.2.3.1

$$P(\mu \in \langle h_D, h_H \rangle) = 1 - \alpha$$

v ktorom dolná hranica má tvar $h_D = \overline{\mathbb{X}} - \delta$ a horná hranica má tvar $h_H = \overline{\mathbb{X}} - \delta$. Hľadáme teda takú hodnotu δ, pre ktorú platí:

$$P(\overline{\mathbb{X}} - \delta \leq \mu \leq \overline{\mathbb{X}} + \delta) = 1 - \alpha$$

respektíve

$$P(-\overline{\mathbb{X}} + \delta \geq -\mu \geq -\overline{\mathbb{X}} - \delta) = 1 - \alpha$$

$$P(\delta \geq \overline{\mathbb{X}} - \mu \geq -\delta) = 1 - \alpha$$

$$P(\frac{\delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \geq \frac{\overline{\mathbb{X}} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \geq \frac{-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}) = 1 - \alpha$$

$$P(\underbrace{\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}}_{z_\alpha} \geq \mathbb{Z} \geq -\underbrace{\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}}_{-z_\alpha}) = 1 - \alpha$$

$$F_{N(0,1)}(z_\alpha) - F_{N(0,1)}(-z_\alpha) = 1 - \alpha$$

Pre distribučnú funkciu normovaného normálneho rozdelenia platí

$$F_{N(0,1)}(-z_\alpha) = 1 - F_{N(0,1)}(z_\alpha)$$

$$F_{N(0,1)}(z_\alpha) - F_{N(0,1)}(-z_\alpha) = 2\,F_{N(0,1)}(z_\alpha) - 1$$

Dosadením dostávame

$$2\,F_{N(0,1)}(z_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$$

$$F_{N(0,1)}(z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Numerickým výpočtom, alebo z tabuliek distribučnej funkcie normovaného normálneho rozdelenia zistíme hodnotu z_α, v našom prípade $F_{N(0,1)}(z_\alpha) = 0.995$, $z_\alpha = 2.575$ a δ vypočítame zo vzťahu:

$$z_\alpha = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \qquad \delta = \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.575 \cdot 0.633}{\sqrt{10}} = 0.515$$

interval spoľahlivosti je

$$\langle \overline{\mathbb{X}} - \delta, \overline{\mathbb{X}} + \delta \rangle = \langle 202.85, 201.315 \rangle$$

Teda s pravdepodobnosťou 0.99 sa neznáma stredná hodnota náhodnej premennej popisujúcej váhu tabličky čokolády nachádza v intervale $\langle 202.85, 201.315 \rangle$. Presnejšie, ak urobíme 100 krát náhodný výber a k nemu príslušné intervaly spoľahlivosti, tak približne 99 intervalov bude obsahovať strednú hodnotu μ. □

Je odvodených veľa postupov pre intervalové odhady parametrov, keď vieme o aké rozdelenie sa jedná. Napríklad:

- Interval spoľahlivosti pre neznámu strednú hodnotu μ náhodnej premennej $\mathbb{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$, ak je disperzia σ^2 známa
- Interval spoľahlivosti pre neznámu strednú hodnotu μ náhodnej premennej $\mathbb{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$, ak je disperzia σ^2 neznáma
- Interval spoľahlivosti pre neznámu disperziu σ^2 náhodnej premennej $\mathbb{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt náhodných premenných $\mathbb{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $\mathbb{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, ak sú disperzie σ_1^2 a σ_2^2 známe
- Interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt náhodných premenných $\mathbb{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $\mathbb{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, ak sú disperzie σ_1^2 a σ_2^2 neznáme
- Interval spoľahlivosti pre neznámu pravdepodobnosť p alternatívneho rozdelenia pravdepodobnosti.

Kapitola 7

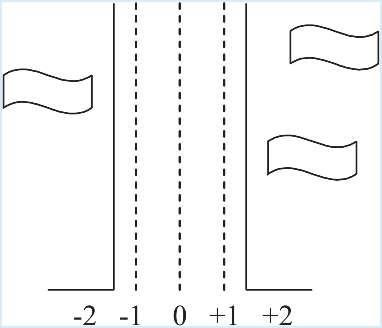
Ako predpovedať nešťastie (tretí nepravdepodobný príbeh)

V našom živote nás nestretajú len udalosti, ktoré sú príjemné alebo zábavné. Naopak, môžu sa objavovať aj rizikové alebo priamo nebezpečné momenty. Snažíme sa im vyhýbať, ale pripúšťame, že úplne ich vylúčiť nie je možné. (Tento náš opatrný pesimizmus umožňuje existenciu poisťovní.) Práve pri týchto fatálnych situáciách veľmi oceníme všetky kvalifikované predpovede a odhady, k čomu a ako často môže alebo nemusí dôjsť. V nasledujúcom texte sa pokúsime získať takéto odhady pre určitý druh na prvý pohľad nesúvisiacich udalostí. Využijeme pri tom skúsenosti z predchádzajúcich príbehov a kapitol, naučíme sa ale aj niečo celkom nové.

7.1. O opitom námorníkovi a zruinovaných hazardéroch

Počas ťažkého semestra často hľadáme morálnu podporu a povzbudenie v spomienkach na príjemné chvíle prázdnin. Pre nás suchozemcov sú obzvlášť vzácne a atraktívne zážitky z prímorských krajín. Romantika morí, lodí a prístavov nás hlboko oslovuje. Romantickú atmosféru žiaľ často narúšajú nezodpovední námorníci, ktorí sa po dlhšom pobyte v prístavných krčmách potácavým krokom vracajú na svoje lode. Kým kráčajú mestom, je (pre nás) nebezpečný najmä ich falošný spev. Vážnejšia situácia (pre nich) nastane, keď námorník príde na nábrežie a začne hľadať svoju loď. Tá býva zakotvené na konci móla, ktoré vybieha ďaleko do mora. A práve nebezpečná chôdza po úzkych mólach bude objektom nášho skúmania. Každý pokus námorníka dostať sa po ňom na svoju loď budeme považovať za jeden experiment.

Na začiatku experimentu teda stojí námorník na začiatku móla vybiehajúceho do mora. Chce sa dostať na jeho veľmi vzdialený koniec, kde kotví jeho loď. (Naše spomienky sa budú týkať veľkých prístavov, kde sú móla veľmi dlhé a na ich koniec ani poriadne nedovidíme. Ako matematici budeme občas predpokladať, že mólo je nekonečné.) Náčrtrt móla je na obrázku 7.1.



Obrázok 7.1: Mólo pre opitého námorníka

Námorník štartuje zo stredu móla, z pozície 0. Pozíciou označujeme jeho vzdialenosť od stredovej osi móla. Dôležité je, že v dôsledku popíjania sa pri každom kroku vpred námorník súčasne (s rovnakou pravdepodobnosťou 1/2) zapotáca napravo alebo naľavo. Dostane sa teda nielen o krok vpred, ale aj do pozície +1 alebo −1. Nasleduje ďalší krok, ktorý sa opäť riadi rovnakým pravidlom. Pritom mólo je natoľko úzke, že už krok do pozície +2 alebo −2 znamená kúpeľ v mori. Náš experiment a aj chôdza námorníka sa pádom do vody končí. V jeho stave neuvažujeme o možnosti vyškriabať sa späť na mólo, predpokladáme ale, že sa udrží na hladine a vráti sa do mesta s ranným prílivom. Keď je jasné, čo je experiment, mali by sme sa zamyslieť, čo v ňom chceme skúmať.

Úloha 7.1.1 *Ktoré udalosti pri pohybe námorníka si v experimente môžeme všímať a skúmať? Čo na nich môžeme číselne popísať a vyhodnotiť?*

Čitateľovi na tomto mieste pripomíname, že pre rozvoj jeho vedomostí je najlepšie pokúsiť sa jednotlivé úlohy najskôr samostatne vyriešiť a až potom svoj postup porovnať s tu uvedenými riešeniami.

Riešenie: Najpútavejšia je samozrejme otázka, či námorník spadne do vody. Túto otázku môžeme „rozmeniť na drobné". Dá sa skúmať, po koľkých krokoch do vody spadne, na ktorej strane móla sa to stane a podobne. Zaujímavé je tiež vedieť, či sa naopak námorníkovi môže podariť vhodným kompenzovaním tackania sa vľavo a vpravo udržať na móle dostatočne dlho a dôjsť ku svojej vzdialenej lodi. Matematici sa môžu zamyslieť, či sa dá udržať na móle neobmedzene dlho, teda kráčať do nekonečna. Ďalšou možnosťou je sledovať námorníka „krok po kroku". Môžeme sa pýtať, na akej pozícii sa nachádza po prvom, druhom, treťom,. . . kroku.

Odpovede na tieto otázky ale nebudú presné. Pohyb námorníka v sebe totiž obsahuje náhodný prvok, a to stranu, na ktorú sa pri každom kroku zapotáca. Naše odpovede preto budú musieť túto náhodnosť zahŕňať. Pre skúmané charakteristiky a udalosti teda často nebudeme vedieť presne povedať, akú majú hodnotu alebo či nastali, ale len pravdepodobnosti týchto výsledkov. □

Vyjasnili sme si, čo všetko môžeme pri experimente sledovať a vyhodnocovať. Dá sa tiež tušiť, že tieto otázky a odpovede na ne budú navzájom súvisieť. Zostáva rozhodnúť, ako sa k odpovediam dopracovať. Jednou z možností je prenajať si byt s výhľadom na prístav a postupne noc čo noc sledovať tackajúcich sa námorníkov. O tom, kedy a ako (ne)padali do vody si môžeme viesť rôzne štatistiky a z nich, pomocou výpočtu priemerných hodnôt, získať odpovede na naše otázky. Z rozprávania o Aničke a jej džbáne, z kapitoly 4 vieme, že pozorovacia metóda náhodne sa správajúcich udalostí nás dovedie len k približným výsledkom. Za zvyšovanie ich presnosti musíme platiť predlžovaním pozorovania a tým aj zvyšovaním nákladov na dovolenku. Naučili sme sa ale tiež, že pokiaľ máme sledovanú udalosť kompletne popísaný jeho východiskovými pravdepodobnosťami, vieme si skúmaný experiment predstaviť a nasimulovať. Vhodné metódy sa budú podobať na postupy použité v rozprávaní o Janíčkovi, Marienke a zabavených kartách, v kapitole 2.

Úloha 7.1.2 *Navrhnite spôsob myšlienkového pokusu a jeho zápisu, pomocou ktorého môžeme sledovať a vyhodnocovať pohyb námorníkov po móle.*

Riešenie: Máme už skúsenosť, že miesto skúmania priebehu jedného experimentu je efektívnejšie nechať prebehnúť dostatočne veľké množstvo experimentov súčasne. Janíčkovi a Marienke k tomu pomáhalo stádo netopierov. V prístavoch sú netopiere vzácne, vieme sa ale obísť aj bez týchto pomocníkov. Miesto nich si môžeme priamo predstaviť, že na začiatku móla stojí celá skupina námorníkov. V skutočnosti by sa zrejme ušliapali, v našich predstavách je ale pre ich pohyb miesta dosť.

Je na našom rozhodnutí, koľko námorníkov na mólo pustíme. Pokiaľ chceme mať dostatočnú zásobu na ich delenie podľa smeru, ktorým sa pri jednotlivých krokoch zapotácajú, treba zvoliť dosť veľké číslo, napríklad 1000. Ak správne tušíme, že deliť sa bude vždy na polovice, môžeme použiť niektorú z veľkých mocnín dvojky, napríklad 1024, pri ktorých sa na polovice delí veľmi ľahko. Ďalšia možnosť je neuvažovať o konkrétnom počte námorníkov, ale o celej ich skupine. V nej je na začiatku 100 % námorníkov, tí sa po prvom kroku rozdelia na 50 % a 50 % atď. Číslo, s ktorým budeme pracovať, je teda 100. Pokiaľ sa nebojíme zlomkov, môžeme si povedať, že na začiatku móla stojí jedna skupina námorníkov a v ďalšom postupne deliť jednotku.

Poslednou možnosťou je číslo 1 interpretovať ako jedného námorníka. Zlomky potom neznamenajú jeho časti (aj keď u piráta s drevenou nohou a hákom miesto ruky by to možno šlo), ale pravdepodobnosť, s akou sa na určitom mieste môže nachádzať.

Úvahy o význame „štartovacieho" čísla sú zhodné s tými, pomocou ktorých sme v príbehu o zabavených kartách riešili úlohy 2.1.5 a 2.1.9. Pokiaľ sa chcete nad problémom ešte raz hlbšie zamyslieť, môžete sa k nim vrátiť. V riešeniach tohto rozprávania budeme najčastejšie používať ako štartovacie číslo jednotku.

Teraz sa zamyslime nad samotným zápisom, pomocou ktorého budeme pohyb námorníkov zaznamenávať. Mali by sme mať možnosť zaznačiť si pozíciu na móle (koľko je námorník odchýlený od jeho osi) a vzdialenosť respektíve počet námorníkových krokov od začiatku móla. Tým vieme presne určiť jeho polohu. Zápis by navyše mal byť taký, aby v ňom prechod medzi polohami čo najlepšie zodpovedal skutočnému pohybu námorníka. Pre každú takúto polohu ešte potrebujeme miesto, kam si zapíšeme, aká časť skupiny námorníkov sa na ňom nachádza, alebo aká je pravdepodobnosť, že sa tam nachádza jediný námorník.

pozícia	- 2	-1	0	+1	+2
krok	voda	mólo	mólo	mólo	voda
0.					
1.					
2.					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabuľka 7.1: Tabuľka pre zápis pohybu námorníka

Možností vhodného zápisu je určite viac. Dá sa použiť napríklad stromový graf z druhej úlohy rozprávania o zabavených kartách. Iná možnosť je využiť tu nakreslenú tabuľku, ktorú budeme používať aj v našich riešeniach. Jednotlivé riadky zodpovedajú krokom a stĺpce pozíciám. V ľavom a hornom záhlaví máme vysvetlivky a do vzniknutých okienok budeme zapisovať sledované počty respektíve pravdepodobnosti. □

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Keď máme premyslený spôsob zápisu, je najvyšší čas využiť ho.

Úloha 7.1.3 *Zapíšte zvoleným spôsobom výsledky dostatočne rozsiahleho simulovania pohybu námorníkov. Skúste popísať všetky zaujímavé vlastnosti získané z experimentov a ich zápisu. Pokiaľ je to možné, pokúste sa získané výsledky zovšeobecniť.*

Riešenie: Náš zápis experimentu je v tabuľke 7.2.

pozícia	- 2	-1	0	+1	+2
Krok	voda	mólo	mólo	mólo	voda
0.			1		
1.		1/2		1/2	
2.	1/4		1/2		1/4
3.		1/4		1/4	
4.	1/8		1/4		1/8
5.		1/8		1/8	
6.	1/16		1/8		1/16
7.		1/16		1/16	
8.	1/32		1/16		1/32
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabuľka 7.2: Vyplnená tabuľka pre zápis pohybu námorníka

Na začiatku, teda po 0 krokoch, stojí námorník (alebo celá ich skupina) v strede móla v pozícii 0. Pri prvom kroku sa námorník s rovnakou pravdepodobnosťou 1/2 zatacká doprava alebo doľava. Preto sa po prvok kroku nachádza s pravdepodobnosťou 1/2 v pozícii -1 a s pravdepodobnosťou 1/2 v pozícii $+1$ (alebo sa na nich nachádza vždy polovica skupiny námorníkov). Nasleduje druhý krok. Pokiaľ sa námorník z pozície -1 zatacká ešte raz doľava (z nášho pohľadu), ocitol sa už v mori na ľavej strane móla. Keďže v pozícii -1 bol s pravdepodobnosťou $1/2$ a ďalšie zatackanie doľava nastáva tiež s pravdepodobnosťou $1/2$, v pozícii -2 a tým aj vo vode sa ocitol s pravdepodobnosťou

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Pokiaľ rozmýšľame o skupine námorníkov, v pozícii -2 vo vode nájdeme štvrtinu z nej. Z pozície -1 sa ale môžeme zatackať aj späť smerom ku stredu móla a vrátiť sa do pozície 0. To sa nám tiež podarí s pravdepodobnosťou

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

respektíve do stredu sa z pozície -1 vrátila štvrtina námorníkov. Týmto sme zvážili možnosti druhého kroku z pozície -1. Pokiaľ prvý krok viedol do pozície $+1$, situácia je rovnaká, len symetricky prevrátená. Do pozície $+2$ a teda do vody (z nášho pohľadu) na pravej strane móla sa dostal po dvoch zatackaniach doprava, teda s pravdepodobnosťou $1/4$. A pokiaľ sa po prvom kroku doprava v druhom kroku vrátil doľava, s pravdepodobnosťou $1/4$ sa vrátil na pozíciu 0. Návrat na pozíciu 0 cez pozície -1 a $+1$ sú ale dve udalosti, ktoré nemajú (a ani nemôžu) nastať súčasne. Naopak sú od seba nezávislé a nastať mohol len jeden z nich. Preto celková pravdepodobnosť toho, že po 2 kroku je námorník opäť na pozícii 0 je $1/4 + 1/4 = 1/2$ (alebo sa na tejto pozícii nachádza $1/2$ pôvodnej skupiny).

Teraz máme vyplnený celý riadok po druhom kroku. Vidíme, že vo vode (na jednej alebo druhej strane) sa námorník nachádza s pravdepodobnosťou

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Dlhodobo by preto mal do vody po druhom kroku spadnúť v každom druhom experimente. Pokiaľ sme sledovali pohyb jednej skupiny, po druhom kroku je z nej vo vode už polovica. Naopak, po druhom kroku sa s pravdepodobnosťou $1/2$ nachádza námorník opäť v strede móla na pozícii 0. Podobne by sa tam nachádzala $1/2$ z pôvodnej skupiny námorníkov.

Nasledujúce riadky zodpovedajúce ďalším krokom sú vytvárané podobným spôsobom. Pri každom kroku sa pravdepodobnosť miesta pobytu námorníka respektíve počet námorníkov v skupine delí na polovice. Takto môžeme vypĺňať ďalšie riadky. Po určitej dobe si začneme všímať určité zákonitosti. Vidíme napríklad, že tabuľka je symetrická podľa osi, zodpovedajúcej pozícii nula. Pre pozície $+1$ a -1 teda dostávame rovnaké hodnoty, podobne aj pre pozície $+2$ a -2. Pády do vody na pravej a ľavej strane móla sa preto vyskytujú rovnako často a v súčte dávajú pád do vody ako taký.

Ďalej je vidieť, že po nepárnom počte krokov sa námorník (námorníci) nachádza v pozícii $+1$ a -1 a nehrozí mu pád do vody. Do vody sa padá po párnom počte krokov, pričom do vody sa (v súčte na oboch stranách) padá s rovnakou pravdepodobnosťou, s akou sa námorník vráti do stredovej pozície 0.

Je tiež vidieť, že každý z riadkov sa podobá na riadok „o dve poschodia" vyššie. Všetky hodnoty v ňom sú presne polovičné v porovnaní s hodnotami v rovnakých stĺpcoch. Z toho sa dá usúdiť, že pokiaľ si ich označíme pomocou premennej (s rozlíšením párnych a nepárnych riadkov), vieme si určiť ich všeobecnú hodnotu. Výsledok vidíme v tabuľke 7.3.

pozícia	- 2	-1	0	+1	+2
Krok	voda	mólo	mólo	mólo	voda
...					
$2 \cdot n$	$1/2^{n+1}$		$1/2^n$		$1/2^{n+1}$
$2 \cdot n + 1$		$1/2^{n+1}$		$1/2^{n+1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabuľka 7.3: Vyplnené riadky $2 \cdot n$ a $2 \cdot n + 1$

□

Po tomto zovšeobecnení nám môže pohľad do tabuľky a práca s ňou priniesť odpovede na otázky z úlohy 7.1.1. Takže nech sa páči.

Úloha 7.1.4 *Aká je pravdepodobnosť, že po K krokoch je námorník ešte na móle? Aká je pravdepodobnosť, že pri K-tom kroku spadne do vody? Aká je pravdepodobnosť, že do vody spadne po tom, ako po móle urobí najviac K krokov? Pokiaľ si predstavíme, že mólo je neobmedzene dlhé, môžeme sa pýtať, aká je pravdepodobnosť toho, že námorník z neho nespadne nikdy a dokráča po ňom na nekonečne vzdialený druhý breh mora.*

Riešenie: Postupne odpovieme na jednotlivé otázky. Najskôr si uvedomíme, že odpovede sú zaujímavé hlavne pre párne hodnoty K. Pri párnych krokoch sa rozhoduje, či námorník zostáva na móle alebo padá do vody. Pri nepárnom kroku sa námorník len presúva z pozície 0 do pozície $+1$ alebo -1 a pád do vody nehrozí. Pravdepodobnosť, že námorník je na móle po 11 (alebo $2 \cdot n + 1$) krokoch je preto rovnaká, ako že na ňom zostal po 10 (alebo $2 \cdot n$) krokoch.

V ďalšom preto budeme predpokladať, že K je párne číslo a môžeme ho vyjadriť v tvare $K = 2 \cdot L$. Teraz odpovieme na prvú otázku. K tomu sa stačí lepšie pozrieť na tabuľku uvedená vyššie. Riadok zodpovedajúci $2 \cdot n$ krokom sa samozrejme hodí aj pre $K = 2 \cdot L$ krokov. Platí preto, že pravdepodobnosť, že po K krokoch je námorník stále na móle je

$$\frac{1}{2^L} = \frac{1}{2^{\frac{K}{2}}}$$

Výsledok si môžeme overiť na tabuľke s prvými 8 krokmi.

Aj odpoveď na druhú otázku ľahko nájdeme v tabuľkách. Musíme si len uvedomiť, že pokiaľ sa pýtame na pravdepodobnosť pádu do vody, je potrebné spočítať pravdepodobnosti pádu na ľavej a pádu na pravej strane móla. Pravdepodobnosť pádu do vody po $K = 2 \cdot L$ krokoch je preto

$$\frac{1}{2^{L+1}} + \frac{1}{2^{L+1}} = \frac{1}{2^L} = \frac{1}{2^{\frac{K}{2}}}$$

Vždy po párnom kroku je preto rovnaká pravdepodobnosť toho, že sa ním ocitneme vo vode a toho, že zostaneme na móle (a to v jeho strede). Pri nasledujúcom nepárnom kroku je pravdepodobnosť pádu do vody nulová. Pravdepodobnosť zotrvania na móle je rovnaká, rozdelí sa ale na dve polovičné hodnoty zodpovedajúce pozícii $+1$ alebo -1.

Tretia otázka je už zložitejšia. Ak námorník urobil pred pádom do vody po móle najviac K krokov, znamená to, že do nej spadol po K-tom alebo niektorom z predchádzajúcich krokov. Vieme tiež, že k pádu došlo len pri niektorom z párnych krokov, a že do vody sa dá spadnúť len raz. Pravdepodobnosť pádu do vody najneskôr po $K = 2L$ krokoch je preto súčtom pravdepodobností pádu do vody po $2, 4, 6, \ldots, K$ alebo aj $2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, \ldots 2L$ krokoch. Z predchádzajúceho ale vieme, že teda pôjde o súčet

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^L}$$

Spočítavané zlomky predstavujú členy geometrického radu s koeficientom 1/2 a na určenie hodnoty jeho súčtu je slúži známy vzorec. Pokiaľ si ho ale nepamätáme a nechce sa nám ho vyhľadávať alebo odvodzovať, stačí si skusmo vypočítať pár prvých súčtov. Platí

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Na základe týchto výsledkov môžeme uveriť, že

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^L} = \frac{2^L - 1}{2^L} = \frac{2^{K/2} - 1}{2^{K/2}}$$

Komu uveriť nestačí, môže si vzťah dokázať napríklad upravením súčtu zlomkov na spoločný menovateľ a oplatí sa použiť aj matematickú indukciu.

V každom prípade pravdepodobnosť toho, že do vody spadneme napríklad najneskôr po 20 krokoch je

$$\frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}$$

Opakom tejto udalosti je udalosť, že po 20 krokoch sme ešte stále na móle. Keďže žiadna iná možnosť už neexistuje, pravdepodobnosť zotrvania na móle po 20 krokoch je

$$1 - \frac{1023}{1024} = \frac{1}{1024}$$

Tento výsledok síce už poznáme z odpovede na prvú otázku, teraz ale jasnejšie vidíme, ako sú navzájom prepojené pravdepodobnosti pádu do vody a zotrvania na móle.

Toto využijeme pri odpovedi na poslednú otázku. Opakom udalosti, že námorník sa udrží na móle večne je udalosť, že niekedy, po ľubovoľnom (párnom) počte krokov do vody spadne. Tieto dve udalosti sa navzájom vylučujú a zároveň dopĺňajú. Súčet ich pravdepodobností je preto jedna a ak poznáme jednu z nich, ľahko určíme aj druhú. Miesto hľadania pravdepodobnosti toho, že z móla **nikdy** nespadneme, môžeme určiť pravdepodobnosť, že z móla **niekedy** spadneme. K tomu nám stačí rozšíriť úvahy z predchádzajúceho odseku. Ak niekedy z móla spadneme, znamená to, že z neho spadneme po $2, 4, 6, 8, \dots, 2L, 2L+2, \dots$ krokoch. Rozdiel je v tom, že „zoznam" riskantných krokov nekončí pri $2L$, ale pokračuje do nekonečna. Stále ale platí, že žiadne z udalostí „pád do vody po n krokoch" nemôžu nastať súčasne. Celková pravdepodobnosť, že nastala niektorá z nich, je preto súčtom jednotlivých pravdepodobností, ktoré už poznáme. Jej hodnota je preto

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^L} + \frac{1}{2^{L+1}} + \dots$$

Ide síce o nekonečný súčet, ale našťastie dobre známeho geometrického radu s koeficientom 1/2. My sme sa mu podrobnejšie venovali v rozprávaní o Aničke, v kapitole 4. Na výpočet je možné využiť postupy z uvedenej kapitoly.

Tento špeciálny rad ale umožňuje určiť jeho hodnotu aj inou úvahou. Predstavte si, že máte veľmi radi čokoládu. Pri otvorení nového balenia sa rozhodnete riadiť túto svoju závislosť a konzumovať ju s určitým obmedzením. Každý deň si z čokolády odhryznete len raz, a vždy to bude presne jedna polovica z toho, čo vám z čokolády zostalo. Ako bude vyzerať vaša konzumácia v jednotlivé dni, a podarilo sa vám skutočne redukovať jej rozsah? Ľahko vidieť, že prvý zjeme 1/2 čokolády, druhý deň bude polovica z polovice predstavovať 1/4 (a presne toľko nám aj zostalo), ďalší deň 1/8 atď. Pokiaľ chceme zistiť koľko čokolády zjeme celkovo, musíme tieto hodnoty sčítať. Tým sa ale opäť dostávame k súčtu

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^L} + \frac{1}{2^{L+1}} + \dots$$

Jeho hodnotu ale teraz určíme úvahou. Za prvé, určite nám nie je treba viac ako jedna čokoláda. Systém konzumácie zabezpečuje, že po každom dni nám zostal ešte kúsok z pôvodnej čokolády a nie je treba rozbaľovať novú. Na druhej strane, pokiaľ by sme mali menej ako jednu celú čokoládu, po určitom počte dní by sme zostali o hlade. Po L dňoch sme totiž zjedli

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^L} = \frac{2^L - 1}{2^L}$$

z pôvodnej čokolády, a je vidieť, že táto hodnota sa s rastúcim L môže ľubovoľne priblížiť k hodnote 1.

Viacerými spôsobmi sme tak dospeli k tomu, že pravdepodobnosť pádu do vody je 1. Komplementárna pravdepodobnosť udržania sa na móle „navždy" je preto 0. Výsledok je teda jasný, udržať sa na móle večne nie je možné a je isté, že raz námorník do vody spadne. □

Posledný výsledok nám hovorí, že nemá zmysel pýtať sa, či sa na nekonečnom móle udržíme alebo nie. Jasná odpoveď je „nie". Zaujímavá sa tým ale stáva iná otázka: ako dlho sa na nekonečnom móle udržíme, koľko krokov po ňom spravíme pred nevyhnutným pádom. Samozrejme pokiaľ nás zaujíma jednoduchá odpoveď, pôjde o určitú priemernú hodnotu. K jej nájdeniu už máme určité informácie. Vieme, že do vody padáme po párnom počte krokov a pre každý takýto počet krokov poznáme pravdepodobnosť pádu. Sú tieto informácie dostatočné?

Úloha 7.1.5 *Koľko krokov vykoná v priemere námorník po nekonečnom móle? Vieme túto hodnotu určiť približne a vieme tento odhad vylepšovať? Vieme ju určiť presne?*

Riešenie: Pre odpoveď na prvé dve otázky si opäť vyplníme tabuľku, pomocou ktorej sme sledovali pohyb námorníkov. Do štartovej pozície umiestnime skupinu 512 námorníkov a rozpíšeme si ich pohyb a pozície v niekoľkých nasledujúcich krokoch. Po každom párnom kroku si teraz môžeme spočítať priemerný počet krokov po móle pre tých námorníkov, ktorí sú už vo vode. Ostatných ešte kráčajúcich ignorujeme, čo spôsobuje nepresnosť vypočítanej hodnoty. Ich počet sa ale postupne zmenšuje, čím dostávame stále lepšie a lepšie hodnoty.

Začnime druhým krokom. Po ňom je samozrejme priemerný počet krokov po móle 2 a vo vode je polovica, teda 256 námorníkov. Po štvrtom kroku už treba brať do úvahy okrem

- 2	-1	0	+1	+2
		512		
	256		256	
128		256		128
	128		128	
64		128		64
	64		64	
32		64		32
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabuľka 7.4: Pohyb 512 námorníkov

týchto 256 námorníkov s počtom krokov 2 aj 128 námorníkov s počtom krokov 4. Spolu 384 námorníkov teda po móle vykonalo $256 \cdot 2 + 128 \cdot 4 = 1024$ krokov. Priemerný počet krokov do pádu je:

$$\frac{256 \cdot 2 + 128 \cdot 4}{256 + 128} = \frac{1024}{384} = \frac{8}{3} = 2.\overline{66}$$

Po 6 krokoch už treba zrátať priemernú hodnotu pre $256 + 128 + 64 = 448$ námorníkov, ktorý po móle vykonali $256 \cdot 2 + 128 \cdot 4 + 64 \cdot 6 = 1408$ krokov. Približná priemerná hodnota je teraz

$$\frac{1408}{448} = \frac{22}{7} = 3.1428$$

Rozdiel od presnej hodnoty teraz spôsobuje už len 64 nezarátaných námorníkov, ktorí sú stále nad hladinou. Pokiaľ pokračujeme v tomto postupe (môžeme si pomôcť kalkulačkou alebo tabuľkou v MS EXCEL), okolo 20-teho kroku sa už získavané hodnoty ustália a blížia sa k presnej priemernej hodnote.

Tým sme prešli k hľadaniu odpovede na poslednú otázku. Našťastie väčšinu práce sme už vykonali pri riešení úloh v rozprávaní o chodení s džbánom po vodu. V nej sme hľadali

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

a našli metódu pre určenie hodnoty priemernej dĺžky pokusu na základe pravdepodobností jednotlivých dĺžok.

Teraz sme v rovnakej situácii. Dĺžky pokusov (chôdza po móle po pád do vody) sú párne čísla v tvare $2 \cdot L$ a pravdepodobnosť ich výskytu sme v úlohe 7.1.4 určili ako $1/2^L$. Priemerná dĺžka pokusu sa v tejto situácii určí ako tzv. vážený priemer, kde jednotlivé dĺžky „odvážime" ich pravdepodobnosťami. Hľadaná presná hodnota priemeru je preto

$$2 \cdot \frac{1}{2^1} + 4 \cdot \frac{1}{2^2} + 6 \cdot \frac{1}{2^3} + 8 \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots + 2L \cdot \frac{1}{2^L} + (2L+2) \cdot \frac{1}{2^{L+1}} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} 2i \cdot \frac{1}{2^i}$$

Nebudeme sa teraz vracať k detailom výpočtu takejto sumy a zopakujeme už použitý postup:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot \tfrac{1}{2^1} + 4 \cdot \tfrac{1}{2^2} + 6 \cdot \tfrac{1}{2^3} + 8 \cdot \tfrac{1}{2^4} + \cdots + 2L \cdot \tfrac{1}{2^L} + \cdots = \\
&= 2\left(\tfrac{1}{2^1} + 2 \cdot \tfrac{1}{2^2} + 3 \cdot \tfrac{1}{2^3} + 4 \cdot \tfrac{1}{2^4} + \cdots + L \cdot \tfrac{1}{2^L} + \dots\right) = \\
&= 2\big(\tfrac{1}{2^1} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^4} + \cdots + \tfrac{1}{2^L} + \cdots + \\
&\qquad \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^4} + \cdots + \tfrac{1}{2^L} + \cdots + \\
&\qquad \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^4} + \cdots + \tfrac{1}{2^L} + \cdots + \\
&\qquad \tfrac{1}{2^4} + \cdots + \tfrac{1}{2^L} + \cdots + \\
&\qquad \dots\big) =
\end{aligned}$$

$$2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^L} + \dots\right) = 2 \cdot 2 = 4$$

K výsledku sme samozrejme mohli dôjsť aj použitím príslušného vzorca. V každom prípade, tackajúci sa námorník prejde po móle v priemere 4 kroky. □

Zdá sa, že vlastnosti v úvode popísaného experimentu sme preskúmali do značnej hĺbky a dospeli sme k zaujímavým výsledkom. Dôležité ale sú najmä použité metódy. Podmienky experimentu sa totiž môžu meniť a jeho číselné charakteristiky je treba znovu vypočítať.

Úloha 7.1.6 *Aké parametre experimentu je možné zmeniť?*

Riešenie: Tri základné parametre asi ľahko nájdeme. Za prvé sa môže meniť šírka móla, čím sa v zásade zvyšuje alebo znižuje nebezpečenstvo pádu do vody a skracuje alebo predlžuje pobyt na móle. Druhým parametrom je štartovacia pozícia námorníka, ktorý nemusí začínať len v strede móla. Pri tejto zmene dôjde k strate symetrie situácie a väčšinu úloh treba riešiť zvlášť pre „pravý" a pre „ľavý" variant. Riešenie úloh je väčšinou po numerickej a technickej stránke náročnejšie. Podobný dôsledok má aj zmena tretieho parametra, pravdepodobností zatackania sa vľavo alebo pravo. Tieto hodnoty nemusia byť identické, ale pre pravý a ľavý smer sa môžu líšiť. Ďalšie modifikácie si už vyžadujú viac fantázie. Treba ale počítať s tým, že pri týchto zmenách doteraz používané metódy skúmania už nemusia stačiť. Je napríklad možné meniť tvar móla, jeho šírka nemusí byť konštantná, môže meniť smer a podobne. Potácanie námorníka môže byť zložitejšie, do viac ako dvoch smerov, s prípadným zastavením alebo cúvaním. Niektoré parametre pohybu námorníka sa môžu meniť a vyvíjať v čase atď. Čitateľ má určite ďalšie nápady. □

Na tomto mieste sa teraz obmedzíme na vyšetrenie experimentu, kde zmeníme len tretí zo základných parametrov. (Zmene druhého sa budeme venovať neskôr.) Predpokladajme, že na začiatku móla s vyššie používanou šírkou a v štandardnej pozícii 0 stojí kapitán Silver. Ako dobre vieme, kapitán má pravú nohu drevenú. Následkom tohto literárneho hendikepu sa pri každom kroku vpred zapotáca doľava s pravdepodobnosťou $1/3$ a doprava s pravdepodobnosťou $2/3$.

Úloha 7.1.7 *Popíšte základné charakteristiky pohybu kapitána Silvera po móle. Musí aj on v prípade nekonečného móla nevyhnutne skončiť v mori? Stačia na získanie odpovedí na tieto otázky vyššie uvedené postupy?*

Riešenie: Začneme s pevnou vierou, že odpoveď na poslednú otázku je kladná. Tým je dané, čo budeme robiť a v prípade konečného úspechu bol tento predpoklad oprávnený.

Najskôr si vyplníme tabuľku 7.5 pravdepodobností pohybu námorníka a začneme v nej hľadať zákonitosti.

pozícia	- 2	-1	0	+1	+2
Krok	voda	mólo	mólo	mólo	voda
0.			1		
1.		$1/3$		$2/3$	
2.	$1/9$		$4/9$		$4/9$
3.		$4/27$		$8/27$	
4.	$4/81$		$16/81$		$16/81$
5.		$16/243$		$32/243$	
6.	$16/729$		$64/729$		$64/729$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2n.	$4^{n-1}/9^n$		$4^n/9^n$		$4^n/9^n$
2n+1.		$2^{2n}/3^{2n+1}$		$2^{2n}/3^{2n+1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabuľka 7.5: Pohyb námorníka s drevenou nohou

Opäť vidíme, že dôležité zmeny sa dejú vždy po párnom kroku. V ňom je pravdepodobnosť pádu do mora na pravej strane rovnaká ako pravdepodobnosť zotrvania v strede móla, a je štyrikrát väčšia ako pravdepodobnosť pádu na ľavej strane móla. Ďalej je vidieť podobnosť o dva kroky posunutých riadkov. Východiskové hodnoty z prvého a druhého riadku sa znova pravidelne opakujú, vždy ale prenásobené koeficientom $4/9$. To nám po krátkej úvahe umožňuje vypísať aj hodnoty pravdepodobností pre všeobecné riadky.

Zamyslime sa ešte nad prípadom nekonečného móla. Pokiaľ si budeme všímať súhrnnú pravdepodobnosť pádu do mora po párnom počte krokov na oboch stranách móla, dostaneme geometrickú postupnosť s prvým členom $5/9$ a už známym koeficientom $4/9$. Teda pri druhom kroku je pravdepodobnosť pádu $5/9$, pri 4-tom $20/81$, pri 6-tom $80/729$ atď. Celkovú pravdepodobnosť pádu do vody dostaneme sčítaním všetkých týchto hodnôt. Môžeme použiť vzorec pre súčet geometrického radu, na počudovanie ale aj v tomto prípade nám pomôže čokoládový model. Na začiatku opäť máme 1 čokoládu, z ktorej prvý deň zjeme jej $5/9$. Zostalo nám $4/9 = 36/81$ čokolády. Druhý deň chceme zjesť $20/81$ (celej) čokolády. Ale $20/81$ zo zvyšujúcich $36/81$ predstavuje zase $5/9$ z toho, čo máme. Na dvoch dňoch nám teraz zostalo $16/81 = 144/729$ čokolády a našim cieľom je zjesť tretí deň $80/729$ čokolády. A keďže $80/144 = 5/9$, opäť zjeme $5/9$ zo zvyšku čokolády. Inými slovami, zvolili sme stratégiu zjesť každý deň $5/9$ z toho, čo nám z čokolády ostalo. V riešení úlohy 7.1.4 sme rozoberali, prečo na nekonečnú konzumáciu týmto spôsobom potrebujeme presne jednu čokoládu.

Ak sa vrátime späť k námorníkom, tento výsledok znamená, že ani kapitán Silver sa na móle neudrží večne a je isté, že niekedy skončí v mori. Výhodou je drevená noha, ktorá mu pomôže udržať sa na hladine. Hľadanie priemerného počtu jeho krokov po móle už necháme na usilovnosť čitateľov. Tí, ktorí ho zvládnu, získajú ďalšiu užitočnú skúsenosť s výpočtom zložitých radov. □

Na tomto mieste vyskúšame pozornosť čitateľov. Pamätáte si ešte, čo sme vám sľubovali v nadpise? A splnili sme tento sľub? O živote námorníkov sme sa dozvedeli naozaj veľa. Ale kde zostali hazardní hráči a ich smutný koniec? Je najvyšší čas tento nedostatok napraviť.

Presuňme sa preto z romantického prístavu do zadymeného hráčskeho brlohu. Za jedným zo stolov sedia dvaja hráči a hrajú hazardnú hru. Keďže ide o hazard, hrá sa o peniaze. Na začiatku má prvý hráč A a druhý hráč B dolárov. Spolu ich teda majú $A+B=N$. Po každej odohranej partii víťaz dostane od porazeného 1$. Na základe ich dlhodobého pozorovania poznáme tiež pravdepodobnosti víťazstva prvého resp. druhého hráča v jednej partii. Keďže nikto tretí sa hry nezúčastňuje a remíza nie je možná, súčet týchto pravdepodobností je jedna a môžeme ich označiť p a $(1-p)$.

Teraz poznáme podmienky a hra sa môže začať. Vieme aj kedy sa skončí? Žiaľ, hazardná hra je choroba a nečakajte žiadny „happyend". Koniec nastáva až vtedy, keď jeden z hráčov prehrá aj posledný dolár a je definitívne zruinovaný. Zatiaľ čo si víťaz odnáša všetkých N dolárov a začína rozmýšľať, kto bude jeho ďalším súperom, porazený odchádza s plačom domov a spomína, kde má odložené to pevné lano alebo aspoň ako pri príchode nezobudiť manželku. Tak ako v prípade neistých námorníkov pohybujúcich sa po úzkom móle aj teraz tušíme, že sa schyľuje k nešťastiu. Je to ale jediná vec, ktorá spája tieto dve situácie?

Úloha 7.1.8 *V čom sa líši a v čom zhoduje tackavý pohyb opitého námorníka po móle a priebeh zápasu dvoch hazardných hráčov? Viete nájsť vzájomné súvislosti a korešpondencie?*

Riešenie: Pokiaľ sa vám v hľadaní súvislostí darilo, poznáte už odpoveď na prvú otázku. Ak si odmyslíme rozprávanie, ktorým sme oba príbehy uvádzali a sústredíme sa len na ich matematický popis a podstatu, objavíme prekvapujúci výsledok. Obe situácie sú naprosto identické. Skúsme sa o tom presvedčiť. Postupný pohyb námorníka po móle korešponduje s priebehom zápasu hráčov. Každý krok námorníka zodpovedá odohraniu jednej partie. Jeho zatackanie doprava alebo doľava (včítane príslušných pravdepodobností) zodpovedá výhre prvého alebo druhého hráča. Pozícia námorníka, teda to, ako ďaleko je od ľavého respektíve pravého okraja móla zodpovedá aktuálnemu finančnému stavu prvého a druhého hráča. Námorník pri každom kroku vpred zmení svoju pozíciu o 1, čím sa posunie k jednému a vzdiali od druhého okraja móla. Podobne po každej partii jeden z hráčov zvýši svoj majetok o dolár a druhý ho presne o ten istý dolár zmenší.

Po každom kroku sa ale nezmení súčet vzdialenosti od pravého a ľavého okraja móla a tak isto zostáva nemenný celkový obnos N vo vreckách oboch hráčov. Vidíme, že táto suma N korešponduje s celkovou šírkou móla. Presnejšie, pokiaľ má po partii prvý (alebo druhý) z hráčov vo vrecku od 1 po $N-1$ dolárov, zápas pokračuje a zodpovedajúci námorník je stále na móle. Naopak pokiaľ hráčovi ostalo 0 alebo N dolárov, zápas skončil. Kritická situácia pre námorníka, teda pád do vody na pravej alebo ľavej strane móla zodpovedá definitívnemu víťazstvu prvého alebo druhého hráča a zruinovaniu jeho súpera. Zodpovedajúca šírka móla je preto $N-1$ a celkový počet sledovaných pozícií je $N+1$. □

Pokiaľ tvrdíme, že obe situácie sú identické, mali by sme vedieť aj naopak opísať kráčanie námorníka po móle ako variant hazardnej hry. To by sme určite zvládli.

Vráťme teraz do našich úvah oba príbehy. Aj keď ich matematická podstata je rovnaká, vedú nás k odlišnému pohľadu na to, ktoré vstupné parametre a ktoré výsledné hodnoty dôležité a významné. Kým pri námorníkoch bola prirodzená predstava pravo-ľavej symetrie ich pohybu a aj štartovacej pozície, v prípade hráčov očakávame skôr opak. Pravdepodobnosti ich výhier v partii nebývajú rovnaké a môžeme tiež predpokladať, že každý začína hru s inou sumou peňazí. Tušíme tiež, že tlstejšia peňaženka môže kompenzovať horšiu výkonnosť alebo menšie šťastie v hre. Ďalší rozdiel sa tiež týka pravo-ľavého pohľadu. V prípade pádu námorníka do vody neboli závažné dôvody pre rozlíšenie pádu na ľavej a pravej strane móla a tieto udalosti sme zlučovali. V prípade hazardných hráčov je naopak toto rozlíšenie kľúčové. Ide predsa o to, kto z hráčov je absolútny víťaz a kto je definitívne porazený. Pri skúmaní námorníkov nás tiež zaujímali aj určité číselné charakteristiky ich pohybu po móle, napríklad pravdepodobnosť, že po ňom zvládnu určitý počet krokov, priemerný počet krokov pred pádom a podobne. Hazardní hráči hrajú až do úplného konca a priebeh zápasu často upadne do zabudnutia. Dôležitý je preto v prvom rade celkový výsledok: vyhral prvý alebo druhý hráč?

Odpoveď na túto otázku samozrejme nebude jednoznačná. Pretože pre popis situácie používame pravdepodobnostné hodnoty, pravdepodobnosť bude obsiahnutá aj vo výsledku. Presne ale vieme povedať, aký problém nás teraz bude zaujímať. Uvažujeme situáciu, kedy sú dané pravdepodobnosti p a $1-p$ výhry prvého respektíve druhého hráča v jednej partii. Druhým dôležitým parametrom je, koľko peňazí má ktorý z hráčov k dispozícii. Aby sme mali v skúmaní poriadok a mohli naviazať na postupy, ktoré poznáme z problémov námorníkov na móle, budeme vždy analyzovať situáciu, v ktorej máme fixovaný celkový obnos N oboch hráčov. Následne preberieme všetky jednotlivé možnosti toho, koľko je na začiatku zápasu vo vrecku prvého hráča, teda $0, 1, \ldots, N-1, N$ dolárov.

Ako sme už povedali, hodnota $N-1$ zodpovedá šírke móla, a peniaze prvého hráča na začiatku zápasu jeho štartovacej pozícii. Pozície ale teraz pre lepšiu zrozumiteľnosť budeme číslovať od 0 naľavo po N napravo a budeme ich nazývať stavy. (Nemyslíme tým stav zápasu, ale stav peňaženky prvého hráča.) Stav 0 zodpovedá krachu prvého hráča (a pádu do vody na ľavej strane móla), stav N zodpovedá definitívnemu víťazstvu prvého hráča (a do vody na pravej strane spadol druhý hráč). Skúsime sa teraz pozrieť na „hráčsky" variant experimentu zo začiatku tohto rozprávania. Dvaja hazardný hráči majú spolu 4 koruny. Mólo má teda šírku 3 a možné štartovné a následne aj priebežné stavy budú (z pohľadu prvého hráča) 0, 1, 2, 3 a 4. Ako sme už povedali, nebude nás zatiaľ zaujímať priebeh zápasu. Chceme sa čo najskôr dozvedieť ako dopadne z pohľadu prvého hráča v závislosti od toho, s koľkými korunami začínal. Postupné vypĺňanie tabuliek pre jednotlivé počiatočné stavy preto zrejme nie je najlepšou metódou a chcelo by to nový popis a postup.

Úloha 7.1.9 *Navrhnite vhodné premenné, ktorých zatiaľ neznáme hodnoty po ich určení popíšu možnosti bankrotu prvého hráča.*

Riešenie: Odpoveď je už obsiahnutá v predchádzajúcich úvahách. Hovorili sme, že odpovede budú závisieť od východiskového stavu prvého hráča a nebudú jednoznačné, ale „pravdepodobnostné". Označíme preto postupne P_0, P_1, P_2, P_3 a P_4 pravdepodobnosti toho, že prvý hráč zápas prehrá a zbankrotuje (po ľubovoľnom počte partií), ak mal na začiatku zápasu 0, 1, 2, 3 alebo 4 doláre. $\square$

Pripomeniem, že v prípade námorníka by tieto pravdepodobnosti popisovali jeho pád do mora na ľavej strane móla v závislosti od štartovacej pozície. Teraz nás ale viac zaujíma, ako hodnoty týchto pravdepodobností určiť. Zdá sa to ťažké, ale nie pre všetky prípady.

Úloha 7.1.10 *Dve z hľadaných pravdepodobností vieme určiť úvahou hneď. Ktoré to sú a aká je ich hodnota?*

Riešenie: Ide o dve „okrajové" hodnoty, ktoré sú z hľadiska nášho príbehu skoro nezmyselné. Ak prvý hráč začína s 0 dolármi vo vrecku, skrachoval už pred prvou partiou. Inými slovami jeho bankrot je „istá vec". Preto $P_0 = 1$. Naopak ak má na začiatku vo vrecku N dolárov, na druhého hráča už nezostal žiadny. Teraz teda už pred prvou partiou zbankrotoval druhý hráč, a prvého toto nešťastie určite nepostihne. Preto $P_4 = 0$. □

Ľahšiu časť práce máme za sebou. Potrebujeme ale určiť aj hodnoty ostatných, dôležitejších pravdepodobností P_1 až P_3. K tomu je potrebné uvedomiť si dve dôležité veci.

Za prvé hodnoty pravdepodobností P_n napriek ich definícii v skutočnosti nezávisia od toho, či sme na úplnom začiatku zápasu alebo už prebehol určitý počet partií. Pokiaľ má prvý hráč teraz vo vrecku n dolárov, pravdepodobnosť P_n, že túto sumu nakoniec prehrá a zbankrotuje, nezávisí od toho, či sa zápas práve začal alebo v ňom už prebehlo 5 alebo 50 partií. V herni sa nepatrí vyrušovať, preto ak sme ako pozorovatelia zápas práve teraz začali sledovať, informáciu o doterajšom priebehu zápasu ani nemáme odkiaľ získať. (Podobne sa na predchádzajúci priebeh zápasu niekedy snaží zabudnúť aj jeden z hráčov!) Táto vlastnosť je daná tým, že ostatné parametre zápasu, celkový počet dolárov v hre a pravdepodobnosť výhry hráčov v jednej partii, sa počas zápasu v našom modely nemenia. Hodnota P_n teda označuje pravdepodobnosť bankrotu (v budúcnosti) prvého hráča s n dolármi (práve teraz), bez ohľadu na to, koľko partií má už za sebou (a koľko pred sebou).

Teraz si môžeme uvedomiť druhú dôležitú skutočnosť. Hodnoty hľadaných pravdepodobností spolu navzájom súvisia. A to nie len niektorými očividnými spôsobmi (napríklad sú zrejme usporiadané zľava doprava podľa veľkosti), ale aj presne kvantifikovanými vzťahmi. Uvažujme spolu. Nech je hráč v stave n (rôznom od 0 a N), pravdepodobnosť jeho bankrotu je P_n. Teraz hráč odohrá jednu partiu. Ak ju vyhrá, prejde do stavu $n+1$ a pravdepodobnosť bankrotu sa zmení na P_{n+1}. Pokiaľ by to bola jediná možnosť pokračovania zápasu, mohli by sme na základe tejto úvahy usúdiť, že $P_n = P_{n+1}$. Naozaj, ak zo stavu n musíme **vždy** prejsť do stavu $n + 1$, náhodné udalosti, ktoré ovplyvnia pravdepodobnosť bankrotu sa prejavia až v ďalšom pokračovaní zápasu. Neprejavia sa pri prechode zo stavu n do stavu $n + 1$. Rozdelenie šancí medzi celkovú prehru a výhru, teda pravdepodobnosť budúceho bankrotu, je preto pre stav n rovnaká ako keď sa z neho prejdeme do jediného možného nasledujúceho stavu $n + 1$.

Náš hráč ale má aj druhú možnosť. Ak partiu prehrá, prejde do stavu $n - 1$ a pravdepodobnosť bankrotu sa zmení na P_{n-1}. Stav n teda prejde v pomere p ku $1-p$ do stavov $n+1$ a $n-1$. Podobne sa pôvodná pravdepodobnosť P_n transformuje do pravdepodobností P_{n+1} a P_{n-1} , pričom hodnoty p a $1-p$ by opäť mali určiť pomer ich „zmiešania". Malo by teda platiť, že

$$P_n = p \cdot P_{n+1} + (1-p) \cdot P_{n-1}$$

Tejto rovnici hovoríme stavová rovnica alebo prechodová rovnica. Môžeme ju vysvetliť aj na základe interpretácie pravdepodobnosti ako (teoretického) pomeru sledovaných a všetkých možností. P_n na ľavej strane hovorí, aká časť zápasov začínajúcich stavom n vedie k bankrotu prvého hráča. Na pravej strane p hovorí, aká časť zápasov prejde do stavu $n+1$ a z nich P_{n+1} skončí bankrotom. Preto tieto dve pravdepodobnosti vynásobíme. Zároveň $(1-p)$ zo všetkých zápasov prejde do stavu $n-1$ a z nich P_{n-1} skončí bankrotom prvého hráča. Týmto druhým spôsobom teda k bankrotu dospeje $(1-p) \cdot P_{n-1}$ zo všetkých zápasov. Popísané dva spôsoby sa navzájom vylučujú a zároveň pokrývajú všetky možnosti, preto v súčte určujú pravdepodobnosť P_n.

Pre lepšie pochopenie uvedieme príklad s vymyslenými konkrétnymi hodnotami. Pokúsme sa napríklad určiť P_4, teda pravdepodobnosť skrachovania hráča so 4 dolármi vo vrecku. Ak $p = 1/3$, v jednej tretine partií hráč vyhrá dolár a prejde do stavu 5. Ak vieme, že $P_5 = 1/4$, teda že s 5 dolármi vo vrecku prehrá štvrtinu zápasov, celkovo týmto spôsobom zbankrotuje v $1/3 \cdot 1/4 = 1/12$ všetkých možných zápasov. Zároveň ale v $(1-p) = 2/3$ prípadov hráč dolár prehrá a prejde do stavu 3. Ak vieme, že z tohto stavu prehrá napríklad $P_3 = 3/4$ zápasov, znamená to, že zbankrotuje v $2/3 \cdot 3/4 = 6/12 = 1/2$ všetkých zápasov, ktoré začnú v stave 4 a pokračujú do stavu 3. Celkovo teda zo stavu 4 prehrá $1/12 + 1/2 = 7/12$ všetkých zápasov, teda $P_4 = 7/12$.

Vráťme sa teraz k nášmu príkladu. Analyzujeme zápas, v ktorom majú hráči spolu 4 doláre. Vieme už, že $P_0 = 1$ a $P_4 = 0$. Dohodneme sa, že hráči sú vyrovnaní, a preto $p = 1 - p = 1/2$.

Úloha 7.1.11 *Napíšte stavové rovnice pre P_1 , P_2 a P_3 .*

Riešenie: V podstate stačí dosadiť do všeobecného vzorčeka spomenutého vyššie. Dostaneme

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot P_2 + \frac{1}{2} \cdot P_0$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot P_3 + \frac{1}{2} \cdot P_1$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot P_4 + \frac{1}{2} \cdot P_2$$

□

Teraz už môžeme dosiahnuť náš cieľ a popísať pravdepodobnosti bankrotu prvého hráča pre všetky možné „štartovacie" sumy v jeho vrecku.

Úloha 7.1.12 *Určite všetkých 5 hodnôt P_0, P_1, P_2, P_3 a P_4.*

Riešenie: Riešenie spočíva len vo výpočte. Z týchto piatich hodnôt totiž už dve poznáme ($P_0 = 1$ a $P_4 = 0$) a na určenie zvyšných máme tri rovnice. Dosaďme najskôr do prvej a poslednej rovnice známe hodnoty, dostaneme

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot P_2 + \frac{1}{2} \qquad P_3 = \frac{1}{2} \cdot P_2$$

Tieto vyjadrenia P_1 a P_2 môžeme dosadiť do prostrednej rovnice, ktorá sa zmení na

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_2 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot P_2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \cdot P_2 + \frac{1}{4} \cdot P_2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot P_2 + \frac{1}{4}$$

Z tejto rovnice už ľahko vypočítame, že $P_2 = 1/2$ a spätným dosadením $P_1 = 3/4$ a $P_3 = 1/4$. Celkovo teda máme

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \frac{3}{4}, \quad P_2 = \frac{1}{2}, \quad P_3 = \frac{3}{4}, \quad P_4 = 0$$

□

Metódu si hneď môžeme precvičiť na trochu zložitejšom príklade.

Úloha 7.1.13 *Teraz mám spolu zo svojim súperom vo vrecku 5 dolárov. Okrem toho som lepší hráč ako on, pravdepodobnosť mojej výhry v partii je preto* $3/5$ *a pravdepodobnosť prehry len* $2/5$. *S akými pravdepodobnosťami bankrotu v závislosti od mojej počiatočnej hotovosti mám počítať?*

Riešenie: Stavov teraz máme o jeden viac, potrebujeme preto určiť hodnoty P_0 , P_1, P_2, P_3 , P_4 a P_5 . Opäť vieme, že $P_0 = 1$ a $P_5 = 0$. Na určenie zvyšných štyroch hodnôt zostavíme 4 rovnice. Treba si uvedomiť, že k stavu s menej dolármi teraz prechádzam s pravdepodobnosťou $2/5$ a dolár vyhrám s pravdepodobnosťou $3/5$. Rovnice teda budú vyzerať nasledovne:

$$P_1 = \tfrac{3}{5} \cdot P_2 + \tfrac{2}{5} \cdot P_0 = \tfrac{3}{5} \cdot P_2 + \tfrac{2}{5}$$

$$P_2 = \tfrac{3}{5} \cdot P_3 + \tfrac{2}{5} \cdot P_1$$

$$P_3 = \tfrac{3}{5} \cdot P_4 + \tfrac{2}{5} \cdot P_2$$

$$P_4 = \tfrac{3}{5} \cdot P_5 + \tfrac{2}{5} \cdot P_3 = \tfrac{2}{5} \cdot P_3$$

Do prvej a poslednej sme už aj dosadili známe hodnoty P_0 a P_5. Dosadením prvej rovnice do druhej a poslednej do predposlednej dostaneme dve rovnice s neznámymi P_2 a P_3, ktorých doriešenie už necháme na čitateľa. □

V zložitejších úlohách, hlavne pri väčšom počte dolárov N v hre, by sme museli riešiť stále väčšie sústavy rovníc. Pokiaľ ich chceme zvládnuť vlastnoručne, v úlohe 7.1.12 a 7.1.13 je naznačená všeobecná metóda. Použijeme a dosadíme konštanty $P_0 = 1$ a $P_N = 0$ a postupujeme od krajov ku stredu. Druhá možnosť je rovnice pre P_1 až P_{N-1} upraviť na sústavu lineárnych rovníc a na ich riešenie použiť niektorý z existujúcich softvérov.

Teraz sa ešte pozrieme na podobné riešenie problému určenia počtu partií, ktoré prebehnú do ukončenia zápasu bankrotom niektorého z hráčov. Keďže je v hre pravdepodobnosť, tento počet sa bude meniť a hľadať budeme jeho priemernú hodnotu. V úlohe 7.1.5 sme videli, ako sa dá pomocou tabuľky a výpočtu získať riešenie pre konkrétnu štartovaciu pozíciu na móle (alebo stav dolárov vo vrecku). Pokiaľ ale chceme tieto hodnoty naraz vypočítať pre všetky možné stavy, opäť namiesto vypĺňania množstva tabuliek použijeme radšej vhodné písmenká.

Ak je celkové množstvo dolárov dvoch hráčov a tým aj počet stavov N, označme D_0, D_1, D_2, D_3, $\ldots$, D_N priemernú dĺžku zápasu, v ktorého prvej partii má prvý hráč vo vrecku 0, 1, 2, 3, $\ldots$, N dolárov. Zápas sa končí v okamžiku, keď **ľubovoľný** z hráčov zbankrotoval. Pravdepodobnosť víťazstva prvého z hráčov v jednej partii označíme p.

Úloha 7.1.14 *Ktoré z hodnôt D_n vieme určiť okamžite? Platí pre susedné hodnoty D_{n-1}, D_n a D_{n+1} podobný vzájomný vzťah, ako pre hodnoty P_{n-1}, P_n a P_{n+1}?*

Riešenie: Jasné sú opäť „krajné" hodnoty D_0 a D_N. V týchto situáciách prvý, resp. druhý hráč už zápas prehral, teda počet partií do jeho konca nula. Preto $D_0 = 0$ a $D_N = 0$. Vzájomný vzťah pre hodnoty D_{n-1}, D_n a D_{n+1} opäť vychádza z toho, že zo stavu n po jednej partii p zo všetkých zápasov prejde do stavu $n-1$, z ktorého sa skončí priemerne po D_{n-1} partiách a $(1-p)$ zápasov prejde do stavu $n+1$ a bude pokračovať priemerne ešte D_{n+1} partiami. Vo vzájomnom vzťahu musíme započítať aj jednu partiu, ktorou sme prešli medzi stavmi. Platí preto

$$D_n = p \cdot (1 + D_{n+1}) + (1-p) \cdot (1 + D_{n-1})$$

□

Úloha 7.1.15 *Vypočítajte hodnoty D_n pre situáciu z úloh 7.1.9 až 7.1.12, teda pre $N = 4$ a $p = 1/2$.*

Riešenie: Použijeme výsledky z úlohy 7.1.14, $D_0 = 0$ a $D_4 = 0$ a pre ďalšie hodnoty platia rovnice

$$D_1 = \tfrac{1}{2} \cdot (1 + D_2) + \tfrac{1}{2} \cdot (1 + D_0) = \tfrac{1}{2} \cdot (1 + D_2) + \tfrac{1}{2}$$

$$D_2 = \tfrac{1}{2} \cdot (1 + D_3) + \tfrac{1}{2} \cdot (1 + D_1)$$

$$D_3 = \tfrac{1}{2} \cdot (1 + D_4) + \tfrac{1}{2} \cdot (1 + D_2) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot (1 + D_2)$$

Keď výrazy pre D_1 a D_3 z prvej a poslednej rovnosti dosadím do prostrednej, dostaneme

$$D_2 = \frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot(1+D_2)) + \frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot(1+D_2))$$

a z toho po úprave $D_2 = 4$. Potom už môžeme dopočítať $D_1 = 3$ a $D_3 = 3$. □

Podobné úlohy pre iné vstupné parametre môžeme zvládnuť opäť zostavením príslušných rovníc a ich vyriešením.

Skúsme ešte chvíľu analyzovať získané výsledky. Pokiaľ do zápasu vstupujem s 3 dolármi vo vrecku, z hodnoty $P_3 = 3/4$ vieme, že priemerne tri zápasy zo štyroch skončia mojou výhrou a jeden zo štyroch mojou prehrou. Hodnota D_3, teda priemerný počet partií do skončenia zápasu je 3. Toto číslo ale „zmiešalo" dĺžky víťazných a prehraných zápasov. Dá sa pritom tušiť, že zápasy, v ktorých vyhrám, budú v priemere kratšie ako prehrané zápasy. Vieme pomocou hodnôt D_3 a P_3 určiť priemernú dĺžku víťazných a priemernú dĺžku prehraných zápasov?

Možno ani netreba určovať a stačí uhádnuť. Ak bude priemerná dĺžka víťazných zápasov 1 a prehraných 9, všetko je zdá sa v poriadku. V priemere by na tri víťazstvá mala pripadať jedna prehra. Pokiaľ by dĺžky zápasov presne zodpovedali priemerným hodnotám, pri výpočte priemernej dĺžky by mala na 3 jednotky pripadať jedna deviatka. Výsledok potom bude

$$\frac{1+1+1+9}{4} = 3$$

čo presne zodpovedá nájdenej hodnote D_3. Môžeme sa tešiť, že sme našli správnu odpoveď? Len dovtedy, kým si nevšimneme, že rovnako spokojní by sme boli aj s hodnotou 2 pre víťazné a 6 pre prehrané zápasy. Pretože aj

$$\frac{2+2+2+6}{4} = 3$$

Potom nás možno napadne, že aj

$$\frac{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+8}{4} = 3$$

alebo

$$\frac{2.5 + 2.5 + 2.5 + 4.5}{4} = 3$$

Z toho sa už dá tušiť aj všeobecný záver. Na základe hodnôt D_3 a P_3 môžeme len povedať, že priemerná dĺžka vyhraných zápasov je $3 - a$ a prehraných zápasov $3 + 3 \cdot a$ pre každú hodnotu a medzi 0 a 3. Pre ktoré a dostaneme správnu odpoveď, musíme zistiť lepšími metódami.

To už ale je iné rozprávanie…

Kapitola 8

Náhodné procesy

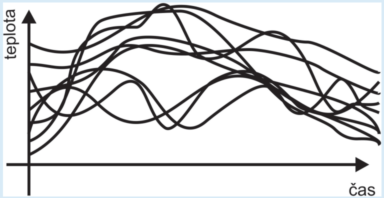
Pri riešení úloh v kapitole 7, o opitom námorníkovi, sme použili aparát, ktorý nám umožnil popis vývoja pravdepodobnosti v závislosti od času. Matematický pojem, ktorý túto závislosť popisuje sa nazýva **náhodný proces**. Označujeme ho $\mathbf{X}(t, \omega)$. Je to funkcia času t a výsledku náhodného pokusu ω. Keby sme v tejto funkcii fixovali nejaký konkrétny čas t_0, dostali by sme náhodnú premennú. Keby sme v tejto funkcii fixovali nejakú konkrétnu realizáciu „náhody" ω_0, dostali by sme deterministickú funkciu času.

8.1. Klasifikácia, popis a vlastnosti náhodných procesov

Náhodné procesy delíme na **spojité náhodné procesy** a **diskrétne náhodné procesy**, podľa hodnôt času, v akom sú jednotlivé hodnoty procesu udávané. Ak sú zo súvisleho intervalu, alebo celej časovej osi, jedná sa o spojitý proces. Ak sa jedná len o izolované body na časovej osi, jedná sa o diskrétny náhodný proces.

Príklad 8.1.1 *Teplotu v miestnosti, meranú počas 24 hodín, môžeme považovať za jednu* **realizáciu spojitého náhodného procesu**. *Záznam z iných 24 hodín bude iná realizácia náhodného procesu.*

Na obrázku 8.1 je niekoľko realizácií spojitého náhodného procesu, predstavujúceho teplotu v miestnosti počas 24 hodín. □

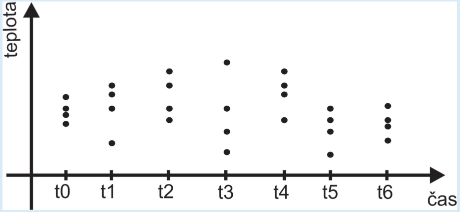


Obrázok 8.1: Niekoľko realizácií spojitého náhodného procesu

Príklad 8.1.2 *Teplotu v miestnosti, meranú počas 24 hodín, ale iba každú štvrtú hodinu, môžeme považovať za jednu* **realizáciu diskrétneho náhodného procesu**. *Záznam z iných 24 hodín bude aj v tomto prípade iná realizácia náhodného procesu.*

Na obrázku 8.2 je niekoľko realizácií diskrétneho náhodného procesu, predstavujúceho teplotu v miestnosti počas 24 hodín. Teptola je v tomto prípade zaznamenaná v 7 časových okamihoch $t_0, t_1, \ldots, t_6$. □

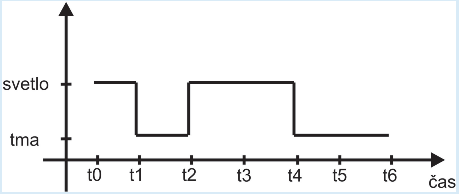
Iná klasifikácia spomedzi náhodných procesov vyčleňuje **náhodné reťazce**. Sú to také náhodné procesy, ktorých hodnoty sú izolované body.



Obrázok 8.2: Niekoľko realizácií diskrétneho náhodného procesu

Príklad 8.1.3 *Zasvietené svetlo (alebo zhasnuté) v miestnosti, zaznamenávané počas 24 hodín, môžeme považovať za jednu realizáciu spojitého náhodného reťazca. Záznam z iných 24 hodín bude iná realizácia tohoto náhodného reťazca.*

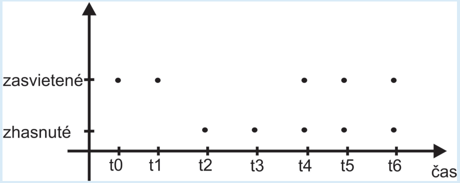
Na obrázku 8.3 je jedna realizácia spojitého náhodného reťazca, predstavujúceho „zasvietené" alebo „zhasnuté" v miestnosti počas 24 hodín. □



Obrázok 8.3: Jedna realizácia spojitého náhodného reťazca

Príklad 8.1.4 *Zasvietené svetlo (alebo zhasnuté) v miestnosti, merané počas 24 hodín, ale iba v 7 časových okamihoch* $t_0, t_1, \ldots, t_6$*, môžeme považovať za jednu realizáciu diskrétneho* *náhodného reťazca. Záznam z iných 24 hodín bude iná realizácia náhodného reťazca.*

Na obrázku 8.4 je jedna realizácia diskrétneho náhodného reťazca, predstavujúceho „zasvietené" alebo „zhasnuté" v miestnosti počas 24 hodín. Hodnoty sú merané v 7 časových okamihoch $t_0, t_1, \dots, t_6$. □



Obrázok 8.4: Jedna realizácia diskrétneho náhodného reťazca

Náhodný proces nazveme **homogénny v čase**, ak sa nemenia jednotlivé pravdepodobnosti v závislosti od času.

Príklad 8.1.5 *Teplota v miestnosti, meraná počas 24 hodín nebude realizáciou homogénneho náhodného procesu. Honoty tohoto procesu budú závisieť od toho, či meranie začalo cez deň, alebo v noci, či skoro ráno. Na druhej strane o procese, popisujúcom teplotu v miestnosti, meranú počas 1 minúty s tým, že začiatok tejto minúty bude v priebehu hodiny, už môžeme považovať za homogénny.*

Hodnoty, ktoré môže náhodný reťazec nadobudnúť nazývame stavy náhodného reťazca.

Príklad 8.1.6 *Náhodný reťazec z príkladu 8.1.3 má dva stavy, aj reťazec z príkladu 8.1.4 má dva stavy. Sú to stavy „zasvietené" a „zhasnuté".*

Pravdepodobnosť, že diskrétny náhodný reťazec je v čase t_k v stave i nazývame **pravdepodobnosťou stavu** i **v čase** t_k a označujeme $p_i(t_k)$.

$$P(\mathbf{X}(t_k) = i) = p_i(t_k)$$

Vektor pravdepodobností všetkých stavov reťazca v jednom časovom okamihu t_k nazývame **rozdelenie pravdepodobností stavov reťazca v čase** t_k a označujeme $\mathbf{p}(t_k)$.

$$\mathbf{p}(t_k) = (p_1(t_k), p_2(t_k), \ldots, p_i(t_k))$$

Vektor pravdepodobností všetkých stavov reťazca v časovom okamihu t_0 nazývame **počiatočné rozdelenie pravdepodobností stavov reťazca** a označujeme $\mathbf{p}(t_0)$, prípadne $\mathbf{p}(0)$. Pravdepodobnosť, že diskrétny náhodný reťazec bude v čase t_{k+1} v stave j, ak bol v čase t_k v stave i, nazývame **pravdepodobnosťou prechodu zo stavu i do stavu j v čase** t_k a označujeme $p_{i,j}(t_k)$.

$$P(\mathbf{X}(t_k) = j/\mathbf{X}(t_{k-1}) = i) = p_{i,j}(t_k)$$

Náhodný reťazec nazveme **homogénny v čase**, ak pravdepodobnosť prechodu zo stavu i do stavu j nezávisí od času t_k. Pre homogénny reťazec platí:

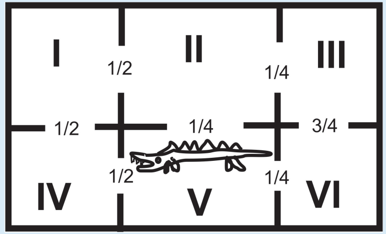
$$p_{i,j}(t_k) = p_{i,j}(t_l)\,, \quad \text{pre všetky stavy}\, i,\ j\,,\ \text{a pre všetky časy}\, t_k,\ t_l$$

Tvrdenie 8.1.1 *Keď je náhodný reťazec homogénny, tak namiesto $p_{i,j}(t_k)$, stačí používať pravdepodobnosť $p_{i,j}$.*

Homogénny náhodný reťazec nazveme **Markovovský**, ak sa nemenia pravdepodobnosti prechodu zo stavu i do stau j v závislosti od predchádzajúceho vývoja. Markovovu vlastnosť má reťazec, ktorého pravdepodobnosti prechodov spĺňajú rovnosť:

$$P(\mathbf{X}(t_k) = j/\mathbf{X}(t_{k-1} = i) = P(\mathbf{X}(t_k) = j/\mathbf{X}(t_{k-1}) = i,\ \mathbf{X}(t_{k-2}) = i_1,\ \ldots)$$

Príklad 8.1.7 *V zoologickej záhrade vybudovali experimentálne bludisko pre krokodíla, pozostávajúce zo 6 miestností. Na obrázku 8.5 sú vykreslené miestnosti bludiska, označené rímskymi číslicami I, II, III, IV, V a VI. Pravdepodobnosti prechodu krokodíla cez otvory (=dvere) medzi jednotlivými miestnosťami sú napísané na príslušných miestach. Popíšte putovanie krokodíla po bludisku ak viete, že začínal v miestnosti číslo V. Ako model použite diskrétny Markovovský reťazec, ktorého stavy budú predsatvovať miestnosti, v ktorých sa krokodíl nachádza.*



Obrázok 8.5: Bludisko so 6 miestnosťami

Riešenie: Pohyb krokodíla po bludisku chceme modelovať ako diskrétny Markovovský reťazec. Teda budeme predpokladať, že krokodíl si nepamätá, ako sa mu páčilo v predchádzajúcich miestnostiach. Jeho výber, ktorými dvermi z miestnosti odíde závisí napríklad len od šírky dverí. Krokodíl si vyberá dvere podľa pravdepodobností, ktoré sú ku dverám priradené. Rovnako výber ďalšej miestnosti nezávisí od toho, aká denná alebo nočná hodina je. Reťazec je homogénny v čase.

Spojitý priebeh času, v ktorom sa krokodíl pohybuje, zmeníme na diskrétny tak, že budeme zaznamenávať iba časy, v ktorých sa krokodíl presunie z jednej miestnosti do inej. Tieto časy postupne označíme t_0, t_1, t_2, $t_3, \ldots$
Rozdelenie pravdepodobností stavov Markovovského reťazca v čase t_k je:

$$\mathbf{p}(t_k) = (p_I(t_k), p_{II}(t_k), \ldots, p_{VI}(t_k))$$

Ak pozíciu na obrázku 8.5 považujeme za počiatočné rozdelenie v čase t_0, tak toto rozdelenie je:

$$\mathbf{p}(t_0) = (p_I(t_0), p_{II}(t_0), \ldots, p_{VI}(t_0)) = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$$

Rozdelenie v čase t_1 predstavuje pravdepodobnosti, s akými sa krokodíl bude nachádzať v jednotlivých miestnostiach po prvom prechode dvermi.
Krokodíl nemôže byť v miestnosti V, pretož tam bol v čase t_0 a odvtedy raz prešiel dvermi.

Môže byť v miestnostiach II, IV alebo VI. Pravdepodobnosti, s akými bude krokodíl v týchto miestnostiach (Markovov reťazec v týchto stavoch) sú určené podľa pravdepodobností, ktoré sú ku dverám do týchto miestností priradené.

$$\mathbf{p}(t_1) = \left(0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$$

Rozdelenie v čase t_2 predstavuje pravdepodobnosti, s akými sa krokodíl bude nachádzať v jednotlivých miestnostiach po dvoch prechodoch dvermi. Do miestnosti I sa z miestnosti V na dva prechody dostane buď cez miestnosť IV, alebo cez miestnosť II s pravdepodobnosťou

$$P(V \to IV \to I) + P(V \to II \to I) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Podobne vypočítame pravdepodobnosti pre ostatné miestnosti a dostaneme:

$$\mathbf{p}(t_2) = \left(\frac{3}{8},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{3}{8},\ 0\right)$$

Rovnaký výsledok dostaneme, aj keď si uvedomíme, že platí

$$2 = 1 + 1$$

teda, že stav po 2 krokoch dosiahne krokodíl tak, že sa dostane do stavu po jednom kroku a potom urobí ešte jeden krok:

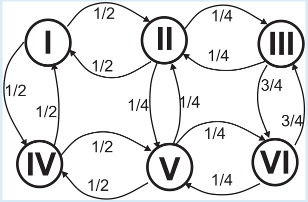
$$p_I(t_2) = p_{II}(t_1) \cdot \frac{1}{2} + p_{IV}(t_1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Jedná sa vlastne o aplikáciu vety o úplnej pravdepodobnosti a presný zápis je nasledovný:

$$p_I(t_2) = p_I(t_1) \cdot 0 + p_{II}(t_1) \cdot \frac{1}{2} + p_{III}(t_1) \cdot 0 + p_{IV}(t_1) \cdot \frac{1}{2} + p_V(t_1) \cdot 0 + p_{VI}(t_1) \cdot 0$$

Rovnakou úvahou sa vypočítajú ostatné pravdepodobnosti v čase t_2. Na popis Markovovského reťazca môžeme použiť aj **maticu prechodov** (=stochastickú maticu) alebo **prechodový graf**.

Prechodový graf pre Markovovský reťazec je graf, ktorého vrcholy predstavujú stavy reťazca a orientované hrany medzi vrholmi majú ohodnotenie rovné pravdepodobnosti prechodu medzi zodpovedajúcimi stavmi. Diagram grafu pre naše bludisko s krokodílom je na obrázku 8.6.



Obrázok 8.6: Prechodový graf pre bludisko

Matica prechodov $\mathbf{P}$ je matica, ktorej prvky p_{ij} označujú pravdepodobnosť prechodu reťazca zo stavu i do stavu j.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Vynásobením vektora $\mathbf{p}(t_1)$ rozdelenia pravdepodobnosti v čase t_1 maticou prechodov $\mathbf{P}$ dostaneme rozdelenie pravdepodobnosti v čase t_2.

$$\mathbf{p}(t_2) = \mathbf{p}(t_1) \cdot \mathbf{P}$$

Všeobecnejšie

$$\mathbf{p}(t_k) = \mathbf{p}(t_{k-1}) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}(t_{k-2}) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}(t_{k-2}) \cdot \mathbf{P}^2 = \mathbf{p}(t_0) \cdot \mathbf{P}^k$$

Výpočtom sa dá zistiť, že po 100 krokoch, teda po 100 prechodoch dvermi bude rozdelenie pravdepodobnosti stavov reťazca nasledovné:

$$\mathbf{p}(t_{100}) = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0\right)$$

V nasledujúcom 100+1 kroku, teda po 101 prechodoch dvermi bude rozdelenie pravdepodobnosti stavov reťazca nasledovné:

$$\mathbf{p}(t_{101}) = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0\right) \cdot \mathbf{P} = \left(0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3}\right)$$

Rozdelenie pravdepodobnosti sa bude v každom nasledujúcom kroku meniť.

Dá za však nájsť aj rozdelenie, ktoré sa meniť nebude. Takéto rozdelenie nazveme **invariantné rozdelenie pravdepodobnosti** stavov náhodného reťazca. V našom prípade je invariantným rozdelenie

$$\pi = \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$$

Invariantné rozdelenie sa nazýva také rozdelnie stavov náhodného reťazca, ktoré spĺňa podmienku 8.1:

$$\pi = \pi \cdot \mathbf{P} \tag{8.1}$$

V našej úlohe sa dá ukázať, že ak je počiatočné rozdelenie pravdepodobnosti napríklad $\mathbf{p}(t_0) = (1/2,\ 1/2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$, potom rozdelenie po 100 krokoch bude

$$\mathbf{p}(t_{100}) = \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$$

Teda pre náhodný reťazec popisujúci prítomnosť krokodíla v bludisku existuje počiatočné rozdelenie, ktoré konverguje k invariantnému rozdeleniu a existuje aj počiatočné rozdelenie, ktoré nekonverguje ku žiadnemu rozdeleniu. □

Nasleduje príklad náhodného reťazca, ktorého rozdelenia pravdepodobnosti konvergujú k jedinému rozdeleniu. Po niekoľkých krokoch sa rozdelenie ustáli na nejakýchkonštantných hodnotách. Rozdelenie, ku ktorému pravdepodobnosti konvergujú je práve invariantné rozdelenie.

Príklad 8.1.8 *Pozorovaním skupiny respondentov sa zistilo, že po roku ostane 70 % slobodných 30 % sa ožení. Naopak 5 % sa po roku rozvedie. Aká bude, pri modelovaní Markovovým reťazcom, pravdepodobnosť, že po niekoľkých rokoch bude respondent ženatý?*

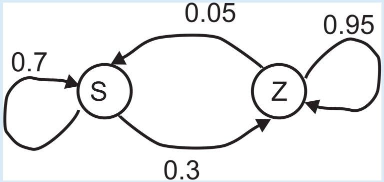
Riešenie: Pri riešení si treba najskôr uvedomiť, že neriešime skutočnú situáciu, ale iba jej model. Veľa predpokladov nasledujúceho modelu je nerealistických, bez týchto predpokladov by však bol model omnoho komplikovanejší. Náš model teda nebude popisom skutočnosti, ale len jej priblížením.
Predpoklady pre model:

- skupina respondentov sa nemení, (nikto nový sa počas experimentu nenarodí, nikto nezomrie)
- jednotlivé pozorovania sa konajú 31.12. o 24:00, (časy t_0 , t_1,…,t_k, …sú vždy po roku, ak nastalo počas roku viac zmien, uvažujeme iba stavy, ktoré boli na Silvestra o polnoci)
- chovanie skupiny je homogénna v čase, (respondent sa ožení každý rok s rovnakou pravdepodobnosťou, takže nezáleží, či má dotyčný 15 rokov, alebo 60, aj keď podľa prvej podmienky respondenti vlastne nestarnú)
- skupina sa chová Markovovsky, (pravdepodobnosť, že sa respondent ožení, alebo rozvedie nezáleží na jeho minulých skúsenostiach, respondenti sú nepoučiteľní)
- na začiatku experimentu sú všetci slobodní, (táto podmienka môže byť splnená)

Model má dva stavy, teda Markovov reťazec môže nadobudnúť dve hodnoty: slobodný S a ženatý Z.
Pravdepodobnosti prechodov medzi týmito stavmi sú:

$$p_{sz} = 0.3, \quad p_{zs} = 0.05, \quad p_{ss} = 0.7, \quad p_{zz} = 0.95$$

Iným popisom modelu je prechodový graf na obrázku 8.7.



Obrázok 8.7: Prechodový graf pre pravdepodobnosti slobodných a ženatých

Informáciu o stavoch a pravdepodobnostiach prechodov medzi nimi, dostaneme aj z matice prechodov pravdepodobností. Matica je síce menej prehľadná ako graf, no omnoho jednoduchšie reprezentovateľná v počítači.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$$

Predpokladáme sme, že na začiatku sú všetci respondenti slobodní. Počiatočné rozdelenie reťazca je vektor, v ktorom pravdepodobnosť stavu slobodný je 1 a stavu ženatý je 0:

$$\mathbf{p}(t_0) = (1,\ 0)$$

Po jednom roku bude ženatých 30 % spomedzi slobodných. Teda pravdepodobnosť, že bude respondent ženatý je 0.3, ostatní budú slobodní.

$$\mathbf{p}(t_1) = (0.7 \cdot 0.3)$$

Po druhom roku bude ženatých 30 % spomedzi slobodných. Teda pravdepodobnosť, že bude ženatý taký respondent, ktorý bol vlani slobodný je $0.7 \cdot 0.3$. Druhá možnosť ako byť ženatý je, že respondent bol ženatý aj vlani a za posledný rok sa nerozviedol. To nastane s pravdepodobnosťou $0.3 \cdot 0.95$, teda pravdepodobnosť, že respondent bude ženatý v druhom roku je $0.21 + 0.285 = 0.495$. Pravdepodobnosť, že respondent bude slobodný je $1 - 0.495 = 0.505$, in[možnosť v našom modeli nemá. V realite má respondent možnosti 3: slobodný, ženatý alebo nežije. Tretiu možnosť sme ale v predpokladoch o našom modeli vylúčili. Rozdelenie pravdepodobnosti v čase t_2 bude:

$$\mathbf{p}(t_2) = (0.505,\ 0.495)$$

Po treťom roku, teda v čase t_3 bude:

$$\mathbf{p}(t_3) = (0.3782,\ 0.6218)$$

Rovnaké výsledky dostaneme, ak počiatočné rozdelenie $\mathbf{p}(t_0) = (1,\ 0)$ násobíme maticou pravdepodobností prechodov $\mathbf{P}$.

$$\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{p}(t_0) \cdot \mathbf{P} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.05 & 0.95 \end{pmatrix} = (0.7, 0.3)$$

$$\mathbf{p}(t_2) = \mathbf{p}(t_1) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}(t_0) \cdot \mathbf{P}^2 = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0.505 & 0.495 \\ 0.0825 & 0.9175 \end{pmatrix} = (0.505, 0.495)$$

$$\mathbf{p}(t_3) = \mathbf{p}(t_2) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}(t_0) \cdot \mathbf{P}^3 = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0.3782 & 0.6218 \\ 0.1036 & 0.8964 \end{pmatrix} = (0.3782, 0.6218)$$

Riešme úlohu, aké je rozdelenie v čase t_{25}, ak poiatočné rozdelenie bolo $\mathbf{p}(t_0) = (1,\ 0)$. K riešeniu stačí umocniť maticu $\mathbf{P}$ na 25.

$$\mathbf{P}^{25} = \begin{pmatrix} 0.1429 & 0.8571 \\ 0.1429 & 0.8571 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}(t_{25}) = \mathbf{p}(t_0)\cdot\mathbf{P}^{25} = (1,0)\cdot\begin{pmatrix} 0.1429 & 0.8571 \\ 0.1429 & 0.8571 \end{pmatrix} = (0.1429, 0.8571)$$

Toto rozdelenie sa už ďalej v čase nemení, je ustálené. V čase 26 a všetkých ďalších časoch je rozdelenie rovnaké ako v čase 25.

$$\mathbf{p}(t_{26}) = \mathbf{p}(t_{25})\cdot\mathbf{P}$$

Na obrázku 8.8 vidíme vývoj pravdepodobností p_S a p_Z v závislosti od času.

Rovnakým postupom dostaneme, že ak sú na začiatku všetci respondenti ženatí, tak po 25 rokoch bude rozdelenie

$$\mathbf{p}(t_{25}) = \mathbf{p}(t_0)\cdot\mathbf{P}^{25} = (0,1)\cdot\begin{pmatrix} 0.1429 & 0.8571 \\ 0.1429 & 0.8571 \end{pmatrix} = (0.1429, 0.8571)$$

Aj keď je na začiatku polovica ženatých a polovica slobodných, tak

$$\mathbf{p}(t_{25}) = \mathbf{p}(t_0)\cdot\mathbf{P}^{25} = (0.5,0.5)\cdot\begin{pmatrix} 0.1429 & 0.8571 \\ 0.1429 & 0.8571 \end{pmatrix} = (0.1429, 0.8571)$$

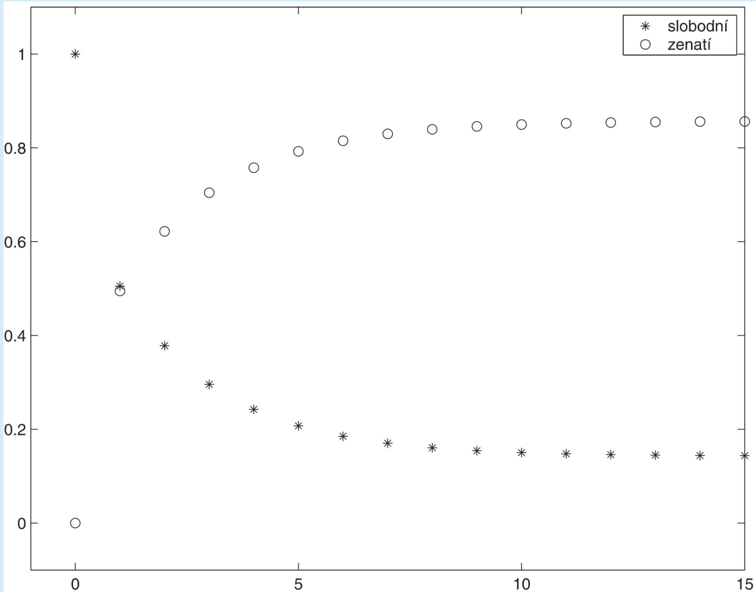
Alebo všeobecne, nech pravdepodobnosť, že respondent je na začiatku slobodný, je rovná r. Potom

$$\mathbf{p}(t_{25}) = \mathbf{p}(t_0)\cdot\mathbf{P}^{25} = (r,1-r)\cdot\begin{pmatrix} 0.1429 & 0.8571 \\ 0.1429 & 0.8571 \end{pmatrix} =$$

$$= (0.1429\cdot r + 0.1429\cdot(1-r), 0.8571\cdot r + 0.8571\cdot(1-r)) = (0.1429, 0.8571)$$

Teda z akéhokoľvek počiatočného rozdelenia pravdepodobnosti sa po 25 krokoch dostaneme k rozdeleniu ustálenému, ktoré sa v čase nemení. Toto rozdelenie sa nazýva stabilizované rozdelenie pravdepodobnosti a má rovnakú vlastnosť ako invariantné rozdelenie:

$$\mathbf{p}(t_k) = \mathbf{p}(t_{k+1}) = \mathbf{p}(t_k)\cdot\mathbf{P} = \pi$$



Obrázok 8.8: Vývoj pravdepodobností p_S a p_Z v závislosti od času, na začiatku sú všetci slobodní

kde π je nejaká konštantná pravdepodobnosť (nie je to 3.1415...). Odtiaľ

$$\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$$

To ale znamená, že stabilizované rozdelenie pravdepodobnosti pre slobodných a ženatých môžeme vypočítať aj zo vzťahu:

$$(\pi_S, \pi_Z) = (\pi_S, \pi_Z) \cdot \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$$

Rovnice, ktoré dostaneme sú dve rovnice s dvomi premennými, ich riešenie však nie je jednoznačné, pretože jedna rovnica je násobkom druhej, rovnice sú zavislé. Aby sme dostali jednoznačné riešenie, pridáme ešte tretiu rovnicu, ktorá hovorí, že súčet pravdepodobností všetkých stavov reťazca v rovnakom čase je rovný 1.

$$\pi_S = 0.7 \cdot \pi_S + 0.05 \cdot \pi_Z$$
$$\pi_Z = 0.3 \cdot \pi_S + 0.95 \cdot \pi_Z$$
$$\pi_S + \pi_Z = 1$$

Riešením uvedenej sústavy rovníc dostávame

$$\pi_S = \frac{1}{7} = 0.1429 \qquad \pi_S = \frac{6}{7} = 0.8571$$

Vidíme, že stabilizované rozdelenie môžeme dostať dvomi spôsobmi, buď popisujeme vývoj reťazca v čase a stabilizované rozdelenie dostaneme vtedy, keď sa pravdepodobnosti prestanú meniť. Druhá možnosť je, $\square$

Skutočnosť, že každé počiatočné **rozdelenie pravdepodobnosti konverguje** k invariantnému rozdeleniu, je zaručená u takého homogénneho Markovoho reťazca, ktorého prechodový graf má slučky.

Kapitola 9

Ako predpovedať smolu (štvrtý nepravdepodobný príbeh)

V predchádzajúcich rozprávaniach sme sa venovali slovenskému folklóru a spomienkam na chvíle strávené v škole a na dovolenkách. Je najvyšší čas, aby sme podstatne rozšírili naše obzory. Uprieme preto svoj pohľad do budúcnosti a do ozaj veľkých diaľok. Inými slovami, nastal čas na trochu vedeckej fantastiky. Aj keď vedy bude viac ako fantastiky, budeme vychádzať z optimistickej tézy, že ľudstvo čakajú svetlé zajtrajšky. Na ceste k nim ale môžu nastať rôzne nepríjemné, znechucujúce ba až zahanbujúce situácie. Ako sa do nich dostať a ako sa s nimi (aspoň) po pravdepodobnostnej stránke vyrovnať si povieme v nasledujúcom texte.

9.1. O púpavách a kolonizácii Marsu

Už o niekoľko desaťročí začne byť aktuálna otázka získania nových životných priestorov pre ľudstvo. Okolnosti jasne naznačujú, že ich čoskoro budeme hľadať vo vesmíre. Prvým a zároveň veľmi vhodným kandidátom je planéta Mars. Má takmer všetko, čo ľudia k životu potrebujú: vyhovujúcu gravitáciu a vzdialenosť od slnka, dĺžku solu (sol je názov pre marťanský deň, ktorý trvá približne 24h a 40m), pevný povrch, vhodné horniny (a v nich zdá sa aj vodu) atď. Chýba v podstate len jedno, vhodná atmosféra. Na jej výrobu máme na šťastie na zemi odborníkov, a to rastliny. Ústav vesmírnej botaniky preto dostal za úlohu vyšľachtiť niekoľko druhov rastlín schopných prežiť na Marse a produkovať kyslík. Z pochopiteľných dôvodov voľba padla na púpavy. Môžu zmeniť nielen atmosféru, ale aj nepríjemnú červenú farbu planéty. V prípade neúspechu sa z nich dajú uviť vence a chutia králikom, ktorí budú tvoriť prvú vlnu následnej živočíšnej kolonizácie.

Ústav vyšľachtil sedem druhov púpav so spoločnými základnými rysmi. Každá rastlina žije presne mesiac (ak treba aj kalendárny) a vygeneruje počas svojho života vždy rovnaký objem kyslíka. Posledný deň mesiaca daruje život niekoľkým potomkom a vzápätí vyschne a zahynie. Potomkovia začnú svoj život nasledujúci deň na začiatku nového mesiaca a každý z nich sa ďalej správa a rozmnožuje rovnako ako materská rastlina. (Vlastnosti púpav sú trochu neobvyklé, ale v sci-fi sa to môže.)

Počet potomkov je náhodný, ústavu sa ale pre sedem vypestovaných druhov podarilo vytvoriť tabuľku popisujúcu spôsob ich rozmnožovania. Sú v nej uvedené pravdepodobnosti, s akými má každá rastlina daného druhu príslušný počet potomkov. Tu sú zistené hodnoty:

Samozrejme po zjavení sa čísel botanici ustúpili do pozadia a výber najlepšieho druhu pre kolonizáciu Marsu nechali na matematikoch.

Úloha 9.1.1 *Zoznámte sa poriadne s tabuľkou. Aké čísla sú v nej obsiahnuté a aké musia mať vlastnosti? Aké sú zaujímavé súčasti a štruktúry tabuľky? Čo pre ne platí? Skrýva sa niečo dôležité v časti nahradenej „. . "?*

Ako býva zvykom, pred riešením prvej úlohy čitateľovi odporučíme, aby sa každú úlohu najskôr pokúsil vyriešiť sám. Svoje výsledky si potom môže overiť alebo doplniť nami uvedenými riešeniami.

Počet potomkov:	0	1	2	3	4	5	...
Druh A:	0.5	0.2	0.2	0.1	0	0	...
Druh B:	0.4	0.2	0.2	0.2	0	0	...
Druh C:	0.3	0.3	0.4	0	0	0	...
Druh D:	0.2	0.4	0.4	0	0	0	...
Druh E:	0.4	0.2	0.2	0	0.2	0	...
Druh F:	0.4	0.3	0.2	0.1	0	0	...
Druh G:	0.2	0.5	0.3	0	0	0	...

Tabuľka 9.1: Pravdepodobnosti, s akými má každá rastlina daného druhu príslušný počet potomkov

Riešenie: Zoznamovanie začneme pre istotu pripomenutím organizácie tabuľky. Jednotlivé riadky zodpovedajú jednotlivým druhom púpav, stĺpce zodpovedajú počtu ich potomkov. Uvažujeme aj nulový počet potomkov, teda to, že rastlina nemá žiadneho potomka a „vyhynie". Tabuľka je vyplnená údajmi po päť potomkov, zvyšok je naznačený pomocou „. . . " . Zo zápisu tabuľky vyplýva, že počet potomkov môže byť len nezáporné celé číslo, čo sme aj mlčky a logicky predpokladali. Teraz sa môžeme pozrieť na „obsah" tabuľky. Ten pozostáva z čísiel udávajúcich pravdepodobnosť, s akou má druh v príslušnom riadku počet potomkov zodpovedajúci príslušnému stĺpcu. Nebudeme zisťovať, akými pestovateľskými metódami botanici na tieto hodnoty prišli. Pokiaľ ale tvrdia, že ide o pravdepodobnosti, čísla musia mať určité vlastnosti. Tou základnou je, že to budú reálne čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Vidíme, že aspoň vo vyplnenej časti tabuľky je táto vlastnosť splnená a botanici zatiaľ majú našu dôveru.

Aký význam majú tieto čísla? Ako máme rozumieť napríklad údaju, že druh A má jedného potomka s pravdepodobnosťou 0,2 = 2/10? Nuž tak, ako rozumieme pravdepodobnosti všeobecne. Tento údaj hovorí, že pokiaľ by sme sledovali počet potomkov napr. 10 exemplárov druhu A, môžeme očakávať, že v dvoch prípadoch to bude jeden potomok. Toto očakávanie ale nemusí byť pri konkrétnych pozorovaniach presne naplnené. (Podobne aj keď pravdepodobnosť padnutia 6 pri hádzaní kockou je 1/6, nie vždy sa v každých šiestich hodoch vyskytne 6 presne raz.) Pokiaľ ale namiesto 10 exemplárov ich budeme sledovať 100 (a hodnota pravdepodobnosti 0,2 je správna), počet rastlín, ktoré priviedli na svet jedináčika by sa nemal príliš líšiť od 20 a pri 1000 rastlinách by (relatívna) odchýlka od 200 mala byť ešte menšia.

Výnimku z tohto postupného dosahovania očakávanej hodnoty tvoria (v diskrétnych pravdepodobnostných priestoroch) pravdepodobnosti 0 a 1. Pokiaľ má daný druh určitý počet potomkov s pravdepodobnosťou 0, **nikdy** tento počet potomkov mať nebude. A pokiaľ pravdepodobnosť bude 1, bude mať **vždy** tento počet potomkov.

Tieto dve špeciálne hodnoty sú aj navzájom prepojené. Pokiaľ niektorý druh púpavy má určitý počet potomkov s pravdepodobnosťou 1, teda vždy, ostatné počty potomkov nemá nikdy, teda s pravdepodobnosťou 0. Takýto prípad sa v našej tabuľke nenachádza, pripomína nám ale, že čísla v tabuľke sú aj navzájom previazané. Hlavnou štruktúrou tabuľky sú jej riadky. Každý zodpovedá jednému druhu púpavy a poskytuje úplnú charakteristiku jeho rozmnožovania. Nulové hodnoty v riadku hovoria, aký počet potomkov je pre daný druh „zakázaný", nenulové hodnoty znamenajú, že príslušný počet potomkov prichádza do úvahy. Čím je hodnota väčšia, tým častejšie sa „narodí" zodpovedajúci počet potomkov.

Musíme si uvedomiť ešte jednu dôležitú vlastnosť riadkov tabuľky. Ako sme povedali, každá púpava každého druhu po mesiaci vyschne a **musí** po sebe zanechať určitý (pripúšťame aj nulový) celočíselný počet potomkov. Tento jav je teda **istý** a musí preto nastať s pravdepodobnosťou 1. Tento jav (priviesť na svet celočíselný nezáporný počet potomkov) ale môžeme rozdeliť na jednotlivé, vzájomne sa vylučujúce elementárne javy: púpava bude mať 0 potomkov, 1 potomka, 2 potomkov, 3 potomkov atď. Pravdepodobnosti týchto javov sú čísla, ktorými je vyplnený riadok tabuľky príslušného druhu. Keďže tieto elementárne javy sa navzájom vylučujú a zároveň ich zjednotením získavame istý jav, súčet ich pravdepodobností a teda aj čísiel v jednom riadku tabuľky **musí** byť jedna. Táto vlastnosť je dôležitá z pravdepodobnostného hľadiska a v rôznych variantoch sme sa s ňou stretli aj v predchádzajúcich rozprávaniach.

Pokiaľ preskúmame z tohto hľadiska našu tabuľku zistíme, že vypísané čísla pre každý riadok už dávajú súčet 1. Tým sme získali odpoveď aj na poslednú otázku týkajúcu sa „. . . ". Nekonečný a nevypísaný zvyšok tabuľky obsahuje už len nuly a nie je preto zaujímavý. □

Skutočnosť, že súčet pravdepodobností v každom riadku je 1 nám pomôže aj pri riešení nasledujúcej úlohy.

Úloha 9.1.2 *Všimnime si ešte raz čísla v riadkoch jednotlivých druhov. Skúsme na ich základe odpovedať na nasledujúce tri otázky: aký je najmenší, najväčší a najčastejší počet potomkov každej púpavy daného druhu? Vieme vždy nájsť odpoveď a je vždy jednoznačná?*

Riešenie: Už sme povedali, že povoleným počtom potomkom zodpovedajú kladné hodnoty pravdepodobností a nepovoleným nulové. Najmenší možný počet potomkov preto zistíme nájdením prvého stĺpca s nenulovou hodnotou pravdepodobnosti v riadku príslušnej púpavy. Keďže súčet pravdepodobností v riadku je 1, nemôžu byť všetky nulové. Pokiaľ teda začneme zľava hľadať prvú nenulovú hodnotu pravdepodobnosti, určite na takú narazíme a tým aj získame odpoveď. V našej tabuľke všetky druhy majú nenulovú hodnotu už v prvom stĺpci a pripúšťajú teda možnosť 0 potomkov.

Najväčší počet potomkov naopak zodpovedá poslednému stĺpcu s nenulovou hodnotou v riadku daného druhu. Máme aj v tomto prípade istotu, že taký stĺpec vždy existuje? Pokiaľ neexistuje, musí to znamenať, že v riadku sa nachádza nekonečne veľa nenulových hodnôt pravdepodobnosti (a spolu s nimi prípadne aj ľubovoľné množstvo nulových hodnôt, ktoré z tohto hľadiska nie sú zaujímavé). Tieto nenulové hodnoty ale musia v súčte stále dať len 1. Dá sa to dodržať, aj keď ich je nekonečný počet?

Z teórie číselných radov vieme, že to možné je. Typickým príkladom nekonečnej postupnosti kladných čísel, ktorých súčet je 1, je postupnosť

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

So súčtom tejto postupnosti sme sa podrobnejšie zaoberali v rozprávaní o námorníkoch a hazardéroch, v kapitole 7. Pre naše potreby môžeme členy tejto postupnosti aj „premiešať" a ľubovoľným spôsobom doplniť nulami. Súčet 1 majú aj členy ďalších, iných postupností s hodnotami z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Keďže členy takýchto postupností (s nekonečným počtom nenulových členov) zodpovedajú pravdepodobnostiam, že púpava má postupne $0, 1, 2, 3, \dots$ potomkov, jedná sa v tomto prípade o druh, ktorého exempláre môžu mať ľubovoľne veľký počet potomkov. Pozor, toto tvrdenie si netreba mýliť s vlastnosťou, že môžu mať ľubovoľný počet potomkov (to platí len ak postupnosť neobsahuje žiadnu nulu) alebo že môžu mať nekonečný počet potomkov (to nenastane nikdy, lebo nekonečno nepatrí medzi nezáporné celé čísla ktorými popisujeme počet potomkov).

Druhy púpav z našej tabuľky ale nie sú natoľko zložité a každý z nich má najvyšší možný počet potomkov 2, 3 alebo 4.

Skúsme nakoniec na základe hodnôt pravdepodobností v riadku príslušného druhu určiť najčastejší počet potomkov. Vieme, že čím je hodnota väčšia, tým častejšie sa „narodí" zodpovedajúci počet potomkov. Maximálna hodnota v riadku preto zodpovedá najčastejšie sa vyskytujúcemu počtu potomkov. Aj v našej tabuľke pri druhu D ale vidíme, že takáto hodnota sa môže vyskytovať na viac miestach. Odpoveď preto nemusí byť jednoznačná. Pokiaľ sa v jednom riadku bude 100 krát nachádzať hodnota $1/100$ alebo 1000 krát hodnota $1/1000$ (alebo n krát hodnota 1/n) a zvyšok sú nuly, najčastejšie sa bude vyskytovať príslušných 100, 1000 (alebo všeobecne n) rôznych počtov potomkov. Môže sa ale najčastejšie vyskytovať aj nekonečne veľa počtov potomkov? Tu je už odpoveď záporná. Pokiaľ by to tak bolo, v riadku by sa určite vyskytovalo nekonečne veľa rovnakých kladných čísel (a možno ešte veľa ďalších menších hodnôt). Potom by ale súčet týchto čísel bol nekonečno, a nie 1, ako sa na pravdepodobnosti počtu potomkov patrí.

Druhá otázka je, či pre každý druh nájdeme aspoň jeden najčastejší počet potomkov. Teda či v riadku vždy nájdeme aspoň jednu maximálnu hodnotu pravdepodobnosti. To vôbec nie je samozrejmé. Pokiaľ postupnosť rastie, nemá najväčší prvok. Jej členy pritom môžu ostať zhora aj zdola ohraničené, napríklad (ako to pre pravdepodobnosti potrebujeme) hodnotami 1 a 0. Príkladom je postupnosť

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 389 of 410

Go Back

Full Screen

Close

Quit

alebo

$$\left\{\frac{9}{100}, \frac{99}{1000}, \frac{999}{10000}, \dots\right\} = \left\{\frac{10^n - 1}{10^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

ktorej všetky členy sú menšie ako $1/10$.

V takýchto postupnostiach nenájdeme najväčší prvok ani keď ich členy ľubovoľne premiešame, prípadne doplníme ďalšími, nie príliš veľkými nezápornými číslami. Otázka znie, či súčet členov takejto postupnosti môže byť jedna. A odpoveď je opäť záporná. Platí, že pokiaľ v postupnosti nevieme nájsť najväčší prvok, musí v nej byť obsiahnutá aj postupnosť kladných rastúcich čísel. Tie sú všetky aspoň tak veľké ako prvý kladný člen tejto podpostupnosti, a preto už ich súčet je nekonečno. Postupnosť pritom môže obsahovať aj mnoho ďalších členov nezáporných členov, ktoré súčet ešte zväčšujú. Každá z púpav preto musí mať najčastejšie sa vyskytujúce počty potomkov, môže ich ale byť ľubovoľne (ale konečne) veľa. □

Po vyjasnení si základných vlastností a informácií obsiahnutých v tabuľke rozmnožovania vyšľachtených druhov sa môžeme opäť sústrediť na náš hlavný problém, kolonizáciu Marsu. Z tejto perspektívy nás samozrejme zaujíma dlhodobejšie plánovanie a aj správanie našich púpav. Charakteristika počtu potomkov jednej púpavy po jednom mesiaci je preto dobrým podkladom, zaujímať by nás ale skôr mali otázky počtu potomkov viacerých púpav po viacerých mesiacoch. Začnime skúmať tento problém najskôr odhadom najhoršej a najlepšej situácie.

Úloha 9.1.3 *Ako by sa dal určiť najmenší možný a najväčší možný počet potomkov jednej púpavy po jednom roku? Dá sa podobne určiť najmenší a najväčší počet potomkov* 10 *púpav (jedného druhu) po* 2 *rokoch alebo sto rovnakých púpav po* 10 *rokoch?*

Než pristúpime k riešeniu, dohodnime sa, že za 1 mesiac života púpavy budeme považovať obdobie od prvého dňa jedného mesiaca po prvý deň nasledujúceho mesiaca včítane. (Pre detailistov od poludnia po poludnie.) Mesiac života jednej púpavy teda začína prvým dňom jej vegetačného obdobia a končí prvým dňom života jej potomstva. Zodpovedajúco rok života púpavy končí prvým dňom nasledujúceho roku, teda tesne po 12 rozmnožení (respektíve rozmnožení predposlednej generácie) vzniknutej „rodinky". Počet členov poslednej uvažovanej generácie budeme volať počet potomkov **po danom období** (po mesiaci, po roku). Ak by sme chceli spočítať všetkých potomkov od prvej po poslednú generáciu, budeme hovoriť o počte potomkov **za dané obdobie** (za rok, za 10 rokov).

Riešenie: Pre lepšiu predstavu začnime najskôr skúmať najväčší počet potomkov. Pre jednu púpavu druhu A sú to napríklad 3 potomkovia. Po prvom mesiaci je teda najväčší počet potomkov 3. Čo nás čaká po druhom mesiaci? Keďže aj potomkovia sa rozmnožujú podľa rovnakej tabuľky, každý z nich môže opäť mať najviac 3 potomkov a spolu teda $3.3 = 3^2 = 9$ potomkov. Po druhom mesiaci je teda najväčší počet potomkov $3^2 = 9$. Po treťom mesiaci môže mať zase každý z nich najviac 3 potomkov, takže celkovo ich bude $9.3 = 3^3 = 27$. Ďalší mesiac ich zase bude 3-krát viac a tak ďalej.

Keď si porovnáme počet mesiacov a príslušný exponent nad trojkou, vidíme, že sa presne zhodujú. Po n mesiacoch je teda počet potomkov 3^n. Po jednom roku bude mať jedna púpava druhu A maximálne $3^{12} = 531441$, teda viac ako pol milióna potomkov. Podobne na tom bude aj púpava druhu B a F. Druhy C, D a G sú na tom v maximálnom počte potomkov horšie. Keďže maximálny počet potomkov jednej púpavy je 2, po roku bude mať púpava najviac $2^{12} = 4096$ potomkov. Naopak púpava druhu E s najväčším počtom potomkov 4 sa môže v najpriaznivejšom prípade tešiť na $4^{12} = 16777216$ potomkov. Rozdiely v počte potomkov po roku sú prekvapujúce, ale také je správanie exponenciálnych funkcií a ich závislosť od základu.

Exponenciálna funkcia je aj všeobecným riešením úlohy. Pokiaľ označíme maximálny počet potomkov M a minimálny m, po n mesiacoch môže mať púpava najmenej m^n a najviac M^n potomkov. Princíp zostáva rovnaký s jedinou výnimkou. Pokiaľ je najmenší počet potomkov 0, je nula aj najmenší možný počet potomkov po roku (a aj po každom inom mesiaci). Môžeme sa k nej ale dopracovať viacerými rôznymi spôsobmi. Na jednej strane môže mať nula potomkov už prvá púpava a zvyšných 11 mesiacov hľadíme na spoľahlivo prázdnu záhradku. Opačný extrém je, keď sa materská púpava 11 mesiacov úspešne rozmnožovala (možno mala aj maximálny počet M^{11} potomkov) a až v poslednom, 12 mesiaci si každý z nich vybral najhorší, teda nulový počet potomkov. To, že nulový počet potomkov má súčasne väčší počet púpav je ale samozrejme menej pravdepodobné, ako že sa to prihodí len jednej.

Zostáva nám ešte vyjasniť, ako sa vyvíja počet potomkov nie jednej, ale viacerých púpav. Aj tu je ale odpoveď jednoduchá. Pokiaľ máme na začiatku viac púpav jedného druhu, každá jedna z nich má po n mesiacoch svoj, ale pre všetky rovnaký maximálny alebo minimálny počet potomkov M^n a m^n. Toto číslo preto stačí vynásobiť počtom púpav. Desať púpav druhu A má preto po 2 rokoch najviac $10 \cdot 3^{24}$ potomkov a sto po 10 rokoch najviac $100 \cdot 3^{120}$ potomkov. Všeobecne S púpav má po n mesiacoch najviac $S \cdot M^n$ a najmenej $S \cdot m^n$ potomkov. □

Otázku najväčšieho a najmenšieho počtu potomkov sme úspešne vyriešili. Otázne je, nakoľko je získaná odpoveď užitočná. Ide totiž o hraničné, extrémne hodnoty, ktoré sa v skutočnosti budú dosahovať len veľmi zriedkavo. A aj to rôznym spôsobom. Predstavme si napríklad púpavu, ktorá má najmenší počet potomkov 1 s pravdepodobnosťou 0.9 a najväčší 2 s pravdepodobnosťou 0,1. Druhá púpava má tiež najmenší počet potomkov 1, ale s pravdepodobnosťou 0,1 a najväčší 2 s pravdepodobnosťou 0.9. Obe púpavy budú mať po n mesiacoch zhodne najmenej 1 a najviac 2^n potomkov, medzi nim by ale mal byť zásadný rozdiel. Prvá púpava má určite väčšiu šancu priblížiť sa k dolnej a druhá púpava naopak k hornej hranici odhadu. Skutočný počet potomkov pre obe pritom bude skôr niekde medzi týmito extrémami.

Tým sme naznačili, čo nás v skutočnosti zaujíma. Horné a dolné ohraničenie počtu potomkov môže byť zaujímavé len pre určenie niektorých hraničných parametrov navrhovaných technických (a sci-fi) riešení. Pre priebeh zmeny atmosféry Marsu bude dôležitejšie určenie typického, najčastejšieho, najpravdepodobnejšieho počtu potomkov. (Tieto slová nemajú úplne rovnaký význam, tu ale nimi chceme vyjadriť ten istý výsledok.) Mohlo by sa zdať, že k cieľu nás povedie tretí výsledok získaný v úlohe 9.1.2, teda najčastejší počet potomkov.

Úloha 9.1.4 *Dá sa pomocou najčastejšieho počtu potomkov daného druhu púpavy určovať typický počet jej potomkov po dlhšom časovom období?*

Riešenie: Výsledky získané pomocou tohto údaja budú určite lepšie ako najmenší alebo najväčší počet potomkov podľa úlohy 9.1.3. Na presný výpočet ale ešte stále nebude vhodný.

Jednak sa môžeme dostať do technických problémov. Čo spravíme, ak sa najčastejšie vyskytujú 2, 3 alebo 4 rôzne hodnoty počtu potomkov? Ak pre tisíc rôznych počtov máme rovnakú (a teda aj najväčšiu) pravdepodobnosť 1/1000, nevieme ani, ako rozumne začať počítať.

Na druhej strane tento údaj ešte stále nie je dostatočný. Predstavme si tri púpavy, ktoré môžu mať len 1, 2 alebo 3 potomkov. Prvá ich dosahuje s pravdepodobnosťami 1/100, 50/100 a 49/100, druhá s pravdepodobnosťami 49/100, 50/100 a 1/100 a tretia s pravdepodobnosťami 32/100, 34/100 a 32/100. Aj keď najmenší, najväčší aj najčastejší počet potomkov je pre všetky tri rovnaký, skutočné počty ich potomkov po dlhšom období sa skoro určite budú líšiť. Podobných príkladov sa určite dá vymyslieť viac. □

Záver riešenia predchádzajúcej úlohy naznačuje, kadiaľ vedie cesta k presnej odpovedi na otázku typického počtu potomkov. Musíme zobrať do úvahy číselné hodnoty všetkých nenulových pravdepodobností, nie len niektoré význačné hodnoty. Ako to spraviť? Napríklad riešením nasledujúcej úlohy.

Úloha 9.1.5 *Koľko potomkov bude mať po jednom mesiaci kolónia 100 púpav jedného druhu? Aký by bol výsledok pre 1000 alebo pre 10 púpav? Majú získané výsledky interpretáciu aj pre počet potomkov jedinej púpavy?*

Riešenie: Skúsme najskôr vyriešiť úlohu pre 100 púpav druhu A. Na základe pravdepodobností z prvého riadku tabuľky by polovica z nich, teda 50, malo mať nula potomkov. Dve desatiny, teda 20, by malo mať 1 potomka. Tak isto 2/10, teda ďalších 20, by malo mať 2 potomkov. A napokon 1/10, teda 10, bude mať 3 potomkov. Môžeme skontrolovať, že sme zobrali do úvahy všetkých 100 púpav. Spolu majú $50\cdot0+20\cdot1+20\cdot2+10\cdot3 = 90$ potomkov. Pre 100 púpav druhu B by sme rovnakým postupom prišli k výsledku $40\cdot0+20\cdot1+20\cdot2+20\cdot3 = 120$ potomkov.

Ako by to bolo v prípade 10 alebo 1000 púpav? Opäť môžeme zvážiť, koľko z nich by vzhľadom na uvedené pravdepodobnosti malo 0, 1, 2, … potomkov a zopakovať výpočet. Pre 10 púpav druhu A by nám týmto spôsobom vyšlo $5\cdot0+2\cdot1+2\cdot2+1\cdot3 = 9$ potomkov, pre 1000 púpav druhu B by sme dostali $400\cdot0+200\cdot1+200\cdot2+200\cdot3 = 1200$ potomkov.

K týmto výsledkom sa ale dalo dostať jednoduchšie. Desať je 10 krát menej ako 100, preto aj potomkov bude 10 krát menej, teda 90/10=9. A naopak 1000 je 10 krát viac ako 100, potomkov teda bude $120 \cdot 10 = 1200$.

Toto je zároveň cesta k určeniu „typického" počtu potomkov jedinej púpavy. Jedna púpava je 100 krát menej ako 100. Pre púpavu A by teda mal byť $90/100 = 0.9$ potomka a pre púpavu B $120/100 = 1.2$ potomka. Ako ale máme tomuto číslu rozumieť? Má vôbec zmysel? Žiadna z púpav predsa nikdy nebude mať 0.9 alebo 1.2 potomka, vždy to bude celé číslo!

Napriek tomu tieto čísla svoj veľký význam majú. Pozrime sa na počítanie potomkov 100 púpav ešte raz. Teraz ale nie ako na jeden experiment s veľa púpavami, ale ako na 100 experimentov s jednou púpavou. Tá mala niekedy 0 potomkov, niekedy 1, 2, 3 atď. Pokiaľ nás zaujíma typický počet potomkov jednej púpavy, dostali sme na našu otázku zatiaľ sto (celočíselných) odpovedí. Ako tieto výsledky zhrnúť do jediného čísla? Klasickou a v tomto prípade aj správnou odpoveďou je ich aritmetický priemer. Nuž a ten má pre púpavu A hodnotu

$$\frac{50 \cdot 0 + 20 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3}{100} = \frac{90}{100} = 0.9$$

a pre púpavu B

$$\frac{40 \cdot 0 + 20 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 3}{100} = \frac{120}{100} = 1.2$$

Zhoda výsledkov, ako vidieť z porovnania výpočtov, určite nie je náhodná. Táto hodnota nám teda určuje **priemerný počet potomkov** jednej púpavy.

Spôsob, akým sme získali výsledok, by nám mal byť povedomý. Problému, ako z výsledkov pokusov so známymi pravdepodobnosťami získať jednu číselnú charakteristiku, sme sa už venovali v rozprávaní o Aničke a jej džbáne. Tu získaný výsledok je len zopakovaním v ňom rozpracovaného postupu. Priemerný počet potomkov sme nazývali vážený priemer a môžeme si pripomenúť aj tretí spôsob, ako ho vypočítať:

$$0,5 \cdot 0 + 0.2 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.1 \cdot 3 = 0.9$$

alebo

$$0.4 \cdot 0 + 0.2 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 = 1.2$$

Získané výsledky vyzerajú veľmi nádejne. Navyše ich môžeme využiť pri riešení ďalších úloh. Kľúčovú rolu pritom zohráva posledný, na prvý pohľad najmenej praktický údaj o priemernom počte potomkov jednej púpavy.

Pre istotu si ešte pripomeňme, že výsledky sú založené na hodnotách pravdepodobnosti určitých javov. Nie sú preto presné, ale skôr predpokladané alebo očakávané. Sto púpav druhu A nemá **vždy** 90 potomkov (podobne ako pri 60 hodoch kockou nepadne šestka vždy 10 krát). Môže ich mať viac aj menej. Skutočné hodnoty by sa ale mali pohybovať okolo čísla 90. A pokiaľ by sme ich sledovali a evidovali dlhodobo, k číslu 90 by sa opäť blížil (a teraz už presne) ich priemer. V tomto zmysle je treba počtu potomkov rozumieť aj v pokračovaní príbehu.

Úloha 9.1.6 *Aký bude počet potomkov kolónie 100 púpav po 2, 3, 6, 12 mesiacoch? Ako tento údaj vypočítať pre všeobecný počet členov kolónie a ľubovoľné časové obdobie? Akú úlohu vo výpočtoch hrá priemerný počet potomkov jednej púpavy?*

Riešenie: Skúsme čo najlepšie využiť výsledky predchádzajúcej úlohy. Začnime opäť s púpavou druhu A a s obdobím dvoch mesiacov. Vieme, že 100 púpav tohto druhu má po prvom mesiaci 90 potomkov. Tých čaká ešte ďalší mesiac, po ktorom privedú na svet hľadaný počet potomkov po dvoch mesiacoch. Platí teda, že počet potomkov 100 púpav po 2 mesiacoch je rovnaký, ako počet potomkov 90 púpav po mesiaci. Z úlohy 9.1.5 tiež vieme, že každých 10 púpav bude mať po mesiaci (priemerne) 9 potomkov. 90 púpav preto bude mať $9 \cdot 9 = 81$ potomkov. Toľko potomkov má teda 100 púpav po 2 mesiacoch.

Aký bude počet potomkov pôvodných 100 púpav po troch mesiacoch?
Opäť presne taký, aký bude počet 81 púpav po mesiaci. Osemdesiat z nich bude mať $8 \cdot 9 = 72$ potomkov. Koľko ich bude mať posledná, osemdesiata prvá púpava? Z predchádzajúcich úvah by malo byť jasné, že správnou, presnou (a jedinou rozumnou) odpoveďou je priemerná hodnota, teda 0.9. Po 3 mesiacoch teda bude počet potomkov $72 + 0.9 = 72.9$. Aj keď desatinná hodnota výsledku vyzerá nezvyklo, je správna. Ako sme spomenuli, pomocou pravdepodobností určené počty potomkov treba chápať nie ako vždy dosiahnutú presnú hodnotu,

ale ako priemer, okolo ktorého sa skutočné hodnoty pohybujú. A čo bude po 4 mesiacoch? 70 púpav prinesie $7 \cdot 9 = 63$ potomkov a dve ďalšie (priemerne) $2 \cdot 0.9 = 1.8$ potomkov. Koľko ich ale bude mať 0.9 púpavy? Miesto nepresných predstáv urobme presnejšiu úvahu: ak 90 púpav malo 81 potomkov, potom 9 by ich malo mať 8.1 a 0.9 znovu desať krát menej, teda 0.81. Spolu by malo mať 72.9 púpav $63 + 1.8 + 0.81 = 65.61$ potomkov. Opäť ide o priemernú hodnotu, takže desatinné miesta nie sú prekážkou.

Podobným spôsobom by sme mohli pokračovať. Pozrime sa ale ešte raz na postupnosť počtu potomkov v jednotlivých generáciách: 100, 90, 81, 72.9, 65.61. Nie je medzi týmito číslami nejaký jednoduchý vzťah? A nehrá v ňom úlohu niektoré zo známych čísiel? Odpoveď je kladná. Úlohu, a to dokonca hlavnú, hrá priemerný počet potomkov 0.9. Tento vzťah je jednoduchý, každý ďalší člen postupnosti vznikne vynásobením predchádzajúceho člena hodnotou 0.9.
Počty generácií teda môžeme zapísať aj ako

$$100,\ 100 \cdot 0.9,\ 100 \cdot 0.9^2,\ 100 \cdot 0.9^3,\ 100 \cdot 0.9^4,\ 100 \cdot 0.9^5,\ \ldots$$

Tento vzťah vieme aj vysvetliť. Už na prvých 100 púpav sme sa mohli pozrieť ako na sto jedincov, z ktorých každý má priemerne 0.9 potomkov. Celkovo ich teda musia mať $100 \cdot 0.9$. To je zároveň nový počet púpav, z ktorých opäť má každá priemerne 0.9 potomkov. Spolu ich teda bude $100 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 100 \cdot 0.9^2$. Takto môžeme počítať ďalej.

Všeobecne preto platí, že „štartovacia" populácia S púpav s priemerným počtom potomkov p pre každú z nich má po n mesiacoch $S \cdot p^n$ potomkov. □

V tomto okamžiku už máme za sebou veľký kus teoretickej práce. Skúsme s jej pomocou získať aj praktické výsledky.

Úloha 9.1.7 *Vytvorme pre našich 7 druhov púpav ďalšiu tabuľku. Pre každý z druhov vypočítajme na základe tabuľky pravdepodobností najskôr jeho priemerný počet potomkov, teda vážený priemer. Potom, aby sme videli, ako toto číslo pracuje „v praxi", pre populáciu* 10 *jedincov každého druhu vypočítajme, koľko potomkov bude z nich vzniknutá rodina mať postupne po* 1, 2, 3, 6, 12 *a* 24 *mesiacoch. Ešte predtým len na základe váženého priemeru môžete pre* *zaujímavosť skúsiť odhadnúť, aké budú rozdiely v počte potomkov po 2 rokoch. Po vyplnení celej tabuľky porovnajte svoj odhad so skutočným výsledkom. Viete popísať niektoré závislosti priemeru a počtu potomkov?*

Riešenie: Riešenie spočíva hlavne vo výpočte. Vážený priemer spočítame pomocou vyššie popísaných spôsobov. Pre určenie počtu potomkov po n mesiacoch stačí štartovací počet 10 púpav násobiť n-tou mocninou získaných priemerov. Pokiaľ ste počítali správne, mali by sme sa zjednotiť na tabuľke 9.2. Hodnoty v nej sme (až po výpočte s maximálnou presnosťou) zaokrúhlili na jedno desatinné miesto.

	Vážený priemer z 10 púpav	Po 1. mes.	Po 2. mes.	Po 3. mes.	Po 6. mes.	Po 12. mes.	Po 24. mes.
Druh A:	0.9	9	8.1	7.29	5.31	2.82	0.79
Druh B:	1.2	12	14.4	17.3	29.9	89.2	795
Druh C:	1.1	11	12.1	13.3	17.7	31.4	98.5
Druh D:	1.2	12	...	...	...	...	ako B
Druh E:	1.4	14	19.6	27.4	75.3	567	32142
Druh F:	1.0	10	10	10	10	10	10
Druh G:	1.1	11	...	...	...	...	ako C

Tabuľka 9.2: Počet potomkov po 1, 2, 3, 6, 12 a 24 mesiacoch

Ako dopadli vaše odhady? Obrovský náskok druhu E asi prekvapil každého. Vidíme aj základné závislosti medzi priemerom a počtom potomkov. Čím vyšší priemer, tým vyšší počet potomkov. Pokiaľ je priemer 1, počet členov populácie je nemenný. Ak je priemer menší ako jedna, počet potomkov sa zmenšuje. Ak je väčší ako 1, počet potomkov rastie. Pokiaľ sa zamyslíme hlbšie, uvedomíme si, že počet potomkov zodpovedá hodnotám funkcie tvaru $f(x) = S \cdot p^x$ pre prirodzené hodnoty x, kde S je počet púpav štartovacej generácie a

p je priemerný počet potomkov. Spôsob ako sa mení počet potomkov v čase zodpovedá teda známemu priebehu exponenciálnej funkcie a jej vlastnostiam. □

Zdá sa, že teraz prišla správna chvíľa pre triumfálnu chvíľu matematiky a teórie pravdepodobnosti zvlášť. Pokiaľ si ju chcete vychutnať, vyriešte nasledujúcu úlohu:

Úloha 9.1.8 *Ktorý z vypestovaných druhov púpav je najlepšie použiť pre kolonizáciu Marsu a zmenu zloženia jej atmosféry?*

Riešenie: Predchádzajúca tabuľka dáva jasnú odpoveď. Jednoznačne najvýhodnejším sa javí druh E. □

Keď sme ako matematici splnili svoju historickú úlohu, nastal čas posunúť sa v našom sci-fi príbehu. A to smerom, ktorý je naznačený v nadpise.

Na základe nášho riešenia úlohy 9.1.8 na Mars vyslali sondu, ktorá pokusne vysadila 10 kusov púpavy druhu E. Všetci sa už tešili, ako následne vyslaná expedícia záhradníkov, ktorá pristane presne po roku, nájde na Marse kvitnúť ich približne 567 potomkov, ktorých bude ďalej zveľaďovať. Pokus sa ale skončil veľmi nešťastne úplným fiaskom. Na konci prvého mesiaca totiž každá z 10 púpav nemala potomka a celá populácia zahynula. Matematikov okamžite volali k zodpovednosti a tiež k tomu, aby vysvetlili, čo sa to vlastne stalo. Vedci neskôr zistili pravdepodobnosť tohto fatálneho zlyhania. Pravdepodobnosť, že púpava druhu E má 0 potomkov, je 0.4. Pravdepodobnosť, že sa to stane 10 púpavám tohto druhu súčasne, je potom asi jedna desaťtisícina:

$$0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 = (0.4)^{10} = 0.0001048576$$

To je síce malá, ale rozhodne nie zanedbateľná pravdepodobnosť. Pokiaľ by to bola pravdepodobnosť, že sa bezúhonný človek zmení na nebezpečného zločinca, v stotisícovom meste by už po zotmení málokto vychádzal von. Stávajú sa aj omnoho menej pravdepodobné udalosti. Napríklad pravdepodobnosť havárie raketoplánu bola pôvodne odhadovaná na jednu milióntinu až desaťmilióntinu.

Ešte väčší rozruch vo vedeckých kruhoch spôsobilo zistenie, že pre jeden zo „slabo potentných" druhov G (po roku by jeho 10 púpav malo mať len asi 31 a pol potomka, teda približne 18-krát menej ako pri druhu E) je pravdepodobnosť vyhynutia celého desaťčlenného „výsadku" po prvom mesiaci len

$$(0.2)^{10} = 0.0000001024$$

V tomto parametri je teda púpava G približne tisíckrát kvalitnejšia! Čo je teda lepšie? Trvať na čo najväčšom počte potomkov? Alebo namiesto 18-krát väčšieho počtu púpav uprednostniť 1000 násobné zníženie rizika totálneho zlyhania hneď po prvom mesiaci?

Skúsme zmeniť spôsob nášho uvažovania a namiesto kvantity sa teraz sústredíme na kvalitu. Nebude nás teda až tak zaujímať počet potomkov, ale skôr životaschopnosť jednotlivých druhov púpav resp. ich populácií. Treba si uvedomiť, že pri vesmírnych projektoch je cennejšia spoľahlivosť. Kvantita sa dá zabezpečiť vyslaním ďalších alebo väčších družíc. Poslať opravára, údržbára alebo záhradníka na rýchle odstránenie akútnych problémov je pri medziplanetárnych vzdialenostiach omnoho ťažšie až nemožné. Odborníci na matematiku a pravdepodobnosť teda dostali inovovanú úlohu. Púpava druhu E bola po predchádzajúcom neúspechu historicky znemožnená a vyradená zo súťaže. Z hľadiska počtu potomkov sa ako nasledujúce v poradí umiestnili druhy B a D. Vhodnejší z nich budeme vyberať podľa jeho spoľahlivosti. Chceme sa hlavne vyhnúť tomu, aby populácia púpav (po určitom čase) vyhynula. Pokiaľ sa tomu úplne vyhnúť nedá, chceme pravdepodobnosť tejto katastrofy minimalizovať.

Budeme preto skúmať životnosť populácií, tvorených jedným prarodičom a jeho potomkami. Tabuľka pravdepodobností počtu potomkov nám priamo dáva pre každý druh odpoveď na pravdepodobnosť V_1 vyhynutia jedinej púpavy hneď po prvom mesiaci. (Pokiaľ by bolo púpav viac, povedzme S, pravdepodobnosť vyhynutia ich populácie hneď po prvom mesiaci je potom $(V_1)^S$.)

Pre ďalší postup je kľúčovým krokom posunutie týchto úvah o ďalší mesiac. Skúsme preto zvládnuť nasledujúcu úlohu.

Úloha 9.1.9 *Aká je pravdepodobnosť, že populácia vzniknutá z jednej púpavy vyhynie po druhom mesiaci a aká, že vyhynie za dva mesiace? Určite tieto hodnoty pre druhy B a D a potom aj pre všetky ďalšie.*

Riešenie: To, že populácia vyhynie za dva mesiace znamená (v zmysle dohody z úlohy 9.1.3, že vyhynie presne po prvom alebo presne po druhom mesiaci. Prvú hodnotu V_1 poznáme z tabuľky (púpava má nula potomkov) a druhú sa musíme naučiť vypočítať. Tieto dve čísla potom už stačí sčítať.

Kľúčom je teda nájdenie pravdepodobnosti vyhynutia populácie po druhom mesiaci. Použijeme k tomu metódu nazývanú niekedy aj „first step analysis". Preberieme všetky možnosti vývoja v prvom mesiaci a ďalší vývoj sa pokúsime previesť na už známe situácie.

Je zrejmé, že po prvom mesiaci púpava nemala nulový počet potomkov, inak by vyhynula už po ňom. Púpava druhu B teda mala 1, 2 alebo 3 potomkov, každá situácia mohla nastať s pravdepodobnosťou 0.2. Po nasledujúcom mesiaci ale títo potomkovia museli všetci vyhynúť. Pokiaľ bol len jeden, stalo sa to s pravdepodobnosťou 0.4. Pri dvoch potomkoch to nastalo s pravdepodobnosťou 0.4^2 a pri troch s pravdepodobnosťou 0.4^3. Ešte raz povedané, púpava druhu B vyhynie presne po dvoch mesiacoch, ak má po mesiaci jedného potomka a ten vyhynie po (svojom) prvom mesiaci alebo má dvoch potomkov a obaja vyhynú po (ich) prvom mesiaci alebo má troch potomkov a všetci vyhynú po (ich) prvom mesiaci. Tieto tri situácie sa navzájom vylučujú, preto pravdepodobnosť, že nastala prvá alebo druhá alebo tretia je súčtom ich pravdepodobností Dostaneme teda hodnotu

$$0.2 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.42 + 0.2 \cdot 0.43 = 0.1248$$

Pravdepodobnosť, že púpava druhu B vyhynie za 2 mesiace, je preto $0.4 + 0.1248 = 0.5248$. Pre púpavu druhu D by nám podobným výpočtom vyšla hodnota

$$0.2 + 0.4 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.22 = 0.296$$

Z tohto hľadiska sa teda púpava D javí ako výrazne lepšia. Necháme na čitateľa, aby si podobným spôsobom vypočítal pravdepodobnosti aj pre ďalšie druhy púpav, my ich uvedieme až neskôr v rozsiahlejšej tabuľke. Odporúčame tiež čitateľovi, aby si skúsil tento výpočet naprogramovať alebo pripraviť v tabuľkovom procesore. Táto investícia sa mu o chvíľu vráti. $\square$

Predchádzajúca úloha nás naučila, ako vypočítať pravdepodobnosť vyhynutia populácie jednej materskej púpavy za 2 mesiace. Pomocou tejto hodnoty a metódou prvého kroku môžeme teraz zistiť pravdepodobnosť vyhynutia púpavy za 3 mesiace. Materská púpava má buď hneď po prvom mesiaci nula potomkov a vyhynula. V opačnom prípade mala púpava so známymi pravdepodobnosťami určitý počet potomkov. Každý z nich ale potom musí vyhynúť za dva mesiace. Pravdepodobnosť tohto javu už ale poznáme z predchádzajúcej úlohy. Pre púpavu B sa k výsledku dostaneme nasledujúcim výpočtom:

$$0.4 + 0.2 \cdot 0.5248 + 0.2 \cdot 0.52482 + 0.2 \cdot 0.52483 = 0.588951$$

Vedeli by sme tento postup zovšeobecniť? K tomu sa nám zídu písmenká. Označme p_0, p_1, p_2, p_3, $\ldots$ zadané pravdepodobnosti, že púpava daného druhu má 0, 1, 2, 3, $\ldots$ potomkov. Ďalej označme V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, $\ldots$ hľadané pravdepodobnosti, že populácia jednej materskej púpavy vyhynie za 1, 2, 3, 4, 5, $\ldots$ mesiacov.

Z definície je jasné, že $p_0 = V_1$ (púpava vyhynie po mesiaci práve vtedy, keď má nula potomkov). Pred chvíľou sme pre dva druhy púpavy pomocou číselných údajov vypočítali V_2 a V_3. Ako to bude pomocou premenných?

Úloha 9.1.10 *Skúste zapísať vzorec pre výpočet V_2 a V_3 pomocou zavedeného označenia. Viete napísať všeobecný vzorec pre V_n? Akým spôsobom je možné počítať konkrétne hodnoty?*

Riešenie: Pre výpočet V_2 sme použili v úlohe 9.1.9 opakovane nasledujúci vzorec:

$$V_2 = p_0 + p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot (V_1)^2 + p_3 \cdot (V_1)^3 + p_4 \cdot (V_1)^4 + p_5 \cdot (V_1)^5 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot (V_1)^i$$

Pripomíname, že ak V_1 a nekonečne veľa p_i je nenulových (a teda kladných), súčet na pravej strane môže byť aj nekonečný. Príklady sme spomenuli v riešení úlohy 9.1.2. Vzhľadom na to, že V_1 a pravdepodobnosti p_i sú z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, súčet tohto nekonečného radu bude menší ako súčet geometrického radu s kvocientom V_1 a teda existuje. Vypočítať jeho presnú hodnotu ale môže byť problém.

Pokiaľ ale, tak ako pre naše púpavy, je počet nenulových p_i konečný, súčet na pravej strane je tiež konečný a s jeho výpočtom zásadný problém nemáme.

Keď sa ďalej pozrieme na vyššie uvedený výpočet V_3 pre púpavu B, vidíme v podstate zhodný postup a vzorec, včítane diskusie o nekonečnosti súčtu. Platí

$$V_3 = p_0 + p_1 \cdot V_2 + p_2 \cdot (V_2)^2 + p_3 \cdot (V_2)^3 + p_4 \cdot (V_2)^4 + p_5 \cdot (V_2)^5 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot (V_2)^i$$

Pri pozornejšom skúmaní oboch vzorcov v nich ľahko objavíme pravidelnosť a pomocou analógie vieme vytvoriť logicky nasledujúci vzorec

$$V_4 = p_0 + p_1 \cdot V_3 + p_2 \cdot (V_3)^2 + p_3 \cdot (V_3)^3 + p_4 \cdot (V_3)^4 + p_5 \cdot (V_3)^5 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot (V_3)^i$$

Takto by sa asi dalo pokračovať pre V_5 , V_6 atď. Z toho nám vychádza aj všeobecný tvar

$$V_{n+1} = p_0 + p_1 \cdot V_n + p_2 \cdot (V_n)^2 + p_3 \cdot (V_n)^3 + p_4 \cdot (V_n)^4 + p_5 \cdot (V_n)^5 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot (V_n)^i$$

Okrem analógie ho vieme opäť vysvetliť aj metódou analýzy prvého kroku. Púpava môže vyhynúť za $n+1$ mesiacov buď tak, že má hneď po prvom mesiaci nula potomkov (s pravdepodobnosťou p_0). V opačnom prípade má po prvom mesiaci i potomkov s pravdepodobnosťou p_i. Všetkých i potom musí vyhynúť za n mesiacov, čo nastane s pravdepodobnosťou $(V_n)^i$. Tomu zodpovedá zvyšná časť pravej strany vzorca.

Pre výpočet skutočných hodnôt V_n pre konkrétnu púpavu je dôležité, či na pravej strane budeme rátať nekonečné alebo konečné súčty. V prvom prípade je situácia zložitá (k slovu prichádza numerická matematika, otázka presnosti atď.) a nebudeme sa jej podrobne venovať.

Pokiaľ je súčet konečný, všetko je v poriadku. Vzorce potom dávajú návod, ako postupne rátať hodnoty V_n. Z V_1 vieme vypočítať V_2, z V_2 vieme vypočítať V_3, z V_3 potom V_4 a tak ďalej. □

Túto rekurenciu (pre matematikov), respektíve rekurziu (pre informatikov), môžeme využiť pri programovaní funkcie na výpočet hodnôt V_n alebo pri vytvorení jednoduchej pomôcky na ich výpočet v niektorom tabuľkovom procesore. Pokiaľ máte nablízku počítač, takmer určite v ňom nájdete Excel, ktorý to zvládne tiež. Vyskúšajte!

Úloha 9.1.11 *Vypočítajte pre naše druhy púpav pravdepodobnosť ich vyhynutia za* 1, 2, 3, 6, 12 *a* 24 *mesiacov a zapíšte ich do tabuľky. Vyberte na jej základe lepšiu (životaschopnejšiu) z púpav* B *a* D*.*

Riešenie: Napísať správne vzorčeky by nemal byť problém, hodnoty ale treba počítať postupne pre všetky mesiace od 1 po 24. Do tabuľky potom zapíšeme tie, ktoré bolo treba. Za druhom je uvedený aj priemerný počet potomkov.

Po skončení	1.m.	2.m	3.m	6.m	12.m	24.m
Druh A(0.9):	0.5	0.6625	0.749359	0.870068	0.948842	0.988022
Druh B(1.2):	0.4	0.5248	0.588951	0.672306	0.717313	0.730865
Druh C(1.1):	0.3	0.426	0.50039	0.613314	0.694033	0.73662
Druh D(1.2):	0.2	0.296	0.353446	0.436943	0.485226	0.499019
Druh E(1.4):	0.4	0.51712	0.571209	0.629415	0.648645	0.65061
Druh F(1.0):	0.4	0.5584	0.647294	0.776637	0.869122	0.927644
Druh G(1.1):	0.2	0.312	0.385203	0.505878	0.598931	0.650237

Tabuľka 9.3: Pravdepodobnosti vyhynutia jednotlivých druhov

Z tabuľky 9.3 vidíme, že druh D je z hľadiska (ne)vyhynutia nielen lepší ako druh B, ale aj ako všetky ostatné. Zároveň vidíme, že na hodnoty V_n majú vplyv všetky hodnoty p_i. Aj pre druhy so zhodným priemerným počtom potomkov alebo zhodnou pravdepodobnosťou 0 potomkov vychádzajú V_n rozdielne. □

Tabuľka nás inšpiruje ešte k jednému zamysleniu. Vidíme, že hodnoty v nej sa postupne zväčšujú. To je samozrejme logické. Pokiaľ populácia zatiaľ nevyhynula a pozorujeme ju ďalší mesiac, vždy je možné, že v ňom (aj veľká) populácia náhle skolabuje. Preto pravdepodobnosť zániku s časom rastie. Dôležitá otázka je, po akú hodnotu. Keďže ide o pravdepodobnosť, určite by nemala presiahnuť hodnotu 1. Ak sme neurobili logickú chybu v našich úvahách, náš rekurentný spôsob výpočtu by mal zachovávať túto vlastnosť.

Pri púpave druhu A sa zdá, že pravdepodobnosti dokonca k tomuto číslu smerujú. To sme ale mohli očakávať. Keďže priemerný počet potomkov pre tento druh je menší ako 1, odhad počtu púpav v ďalších generáciách sa blíži k nule. Mohli sme preto naozaj predpokladať, že populácia takejto púpavy časom vždy vyhynie. Preto čím viac mesiacov sledujeme, tým viac sa pravdepodobnosť, že za toto obdobie populácie vyhynie, blíži k 1.

Týmto sme si zároveň vyjasnili, aký má význam číselná hodnota, ku ktorej pravdepodobnosti vyhynutia V_n mieria. Označíme ju V a určuje nám pravdepodobnosť, že populácia **niekedy**, po neznámom, ale konečnom počte mesiacov vyhynie. Inými slovami ide o **pravdepodobnosť, že populácia nebude žiť večne**. Pokiaľ nás naopak zaujíma pravdepodobnosť opačného javu, teda že populácia nikdy nevyhynie, stačí uvažovať hodnotu $1 - V$. Práve táto hodnota by mohla byť určujúca pri finálnom výbere optimálneho druhu púpavy pre kolonizáciu Marsu. Veď plánovať dlhodobejšie ako donekonečna sa už nedá.

Hodnota V je preto pre nás veľmi dôležitá. Existuje vždy pre každú púpavu? A ak áno, vieme ako ju vypočítať? Odpoveď na prvú otázku je ľahšia. Presne povedané je hodnota V limitou postupnosti hodnôt V_n. Keďže o tejto postupnosti vieme, že stále rastie a zároveň jej členy nepresiahnu 1, musí mať táto postupnosť limitu. (Ide o dôležitú a všeobecnú vlastnosť postupností, ktorú ste sa učili v nižších ročníkoch). Ako túto hodnotu vypočítať (a nie len hádať z tabuľky), je zložitejšia úloha. Ale s našimi skúsenosťami by sme ju už mali zvládnuť.

Úloha 9.1.12 *Skúste podobne ako v úlohe 9.1.10 pomocou analýzy prvého kroku zostaviť rovnicu pre výpočet hodnoty V.*

Riešenie: Úvaha je v podstate rovnaká, ako pri určovaní hodnôt V_n. Treba si len uvedomiť, že V je pravdepodobnosť, že populácia jednej materskej púpavy niekedy vyhynie. Ako sa to môže stať? Púpava buď s pravdepodobnosťou p_0 nemá žiadneho potomka a vyhynie hneď. V opačnom prípade má s pravdepodobnosťami p_i potomkov i, z ktorých každý musí niekedy vyhynúť. To sa stane s pravdepodobnosťou V^i. Túto úvahu môžeme vyjadriť rovnicou

$$V = p_0 + p_1 \cdot V + p_2 \cdot V^2 + p_3 \cdot V^3 + p_4 \cdot V^4 + p_5 \cdot V^5 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot V^i$$

Inou možnosťou bolo vyjsť zo vzťahu $V_{n+1} = \sum p_i \cdot (V_n)^i$, ktorý keď platí pre všetky V_n, musí platiť aj pre ich existujúcu limitu. □

Opäť platí, že ak suma na pravej strane je nekonečná nie len formálne, ale aj skutočne, riešenie rovnice bude problém. V opačnom prípade (a to sa týka aj našich púpav), na výpočet V treba vyriešiť polynomickú rovnicu. Pokiaľ je druhého (prípadne ešte tretieho alebo štvrtého) stupňa, pomôžu nám známe vzorčeky. V týchto aj zložitejších prípadoch ale môžeme rovnicu riešiť s ľubovoľnou presnosťou aj numericky, na čo nie je problém nájsť vhodný softvér. Treba si len uvedomiť, že zo všeobecne viacerých koreňov týchto rovníc nás zaujíma ten „pravdepodobnostný", teda z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Ste zvedaví, ako to dopadne?

Úloha 9.1.13 *Vypočítajte hodnotu pravdepodobnosti vyhynutia V pre každú z našich púpav.*

Riešenie: Riešenie rovníc sme hľadali pomocou programu MATLAB a dostali sme nasledujúce výsledky:

Výsledky sme získali numericky a po výpočte ich zaokrúhlili na dve desatinné miesta. Preto nie presne súhlasia s tabuľkou z úlohy 9.1.11, kde niektoré hodnoty po dvoch rokoch sú vyššie ako limitné hodnoty. Ide len o chyby, respektíve nepresnosti numerických výpočtov a zaokrúhlenia. V skutočnosti sú limitné hodnoty V väčšie ako hodnoty V_n.

Aj napriek tejto nepresnosti vidíme, že limitné hodnoty V sa miestami veľmi presne zhodujú s hodnotami V_n už po 24 mesiacoch. To je aj odpoveď na (na prvý pohľad) rozumnú otázku, na čo je nám dobré poznať pravdepodobnosť „večného" prežitia populácie púpav.

	Vyhynie	Prežije
Druh A(0.9)	1	0
Druh B(1.2)	0.73	0.27
Druh C(1.1)	0.75	0.25
Druh D(1.2)	0.5	0.5
Druh E(1.4)	0.65	0.35
Druh F(1.0)	1	0
Druh G(1.1)	0.66	0.34

Tabuľka 9.4: Pravdepodobnosti vyhynutia a prežitia pre jednotlivé druhy

Tak dlho predsa nebude trvať ani význam Marsu, ani vesmír samotný Pre nás by mali byť zaujímavé len hodnoty V_n v horizonte desiatok, maximálne stoviek rokov.

Hodnota V nám ale dáva informáciu, k akému číslu sa hodnoty V_n blížia a nikdy ju nepresiahnu. Z numerického hľadiska je pritom hodnota V dobrým a presným odhadom hodnôt V_n. Už pre relatívne malé hodnoty n, teda po niekoľkých rokoch, sa v podstate zhodujú. $\square$

V tomto okamžiku sme na konci nášho sci-fi príbehu. Zakončíme ho zopakovaním už známej úlohy, ktorá ale asi bude mať iné riešenie. To už ale necháme na vás . . .

Úloha 9.1.14 *Ktorý z vypestovaných druhov púpav je najlepšie použiť pre kolonizáciu Marsu a zmenu zloženia jeho atmosféry? Poznáme jednoznačnú odpoveď?*

Literatúra

[1] Anděl, J.:*Matematika náhody*,Matfyzpress, Praha, 2000,ISBN 80-85863-52-9

[2] University of Alabama in Huntsville: *The Galton Board Experiment*, http://www.math.uah.edu/stat/applets/GaltonBoardExperiment.xhtml

[3] Harman R., Hönschová E., Somorčík J.: *Zbierka úloh zo základov teórie pravdepodobnosti*, PACI 2009, ISBN: 978-80-89186-53-2

[4] ucebnica

[5] strom

[6] miera

[7] particie

[8] L.E.Sadovskij, A.L.Sladovskij:*Matematika i sport*, biblioteka Kvanta 44, Nauka, Moskva 1985

[9] Swoboda Helmut: *Moderní statistika*, nakladatelství Svoboda, Praha, 1977

[10] Whitaker, Craig F.: *„Ask Marilyn" column*, Parade Magazine p. 16 (9 September 1990)

Home Page
Title Page
Contents
Page 408 of 410
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Index

Home Page

Title Page

Contents

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Home Page
Title Page
Contents
Page 410 of 410
Go Back
Full Screen
Close
Quit