А.Лихтенберг, М.Либерман

РЕГУЛЯРНАЯ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Монография известных американских физиков, профессоров Калифорнийского университета (Беркли) А.Лихтенберга и М.Либерман а посвящена новой быстро развивающейся и малоизвестной области, пограничной между нелинейной механикой и статистической физикой. Основное внимание уделено выяснению физической сущности и механизма, а также условиям возникновения динамического хаоса, т. е. случайного движения полностью детерминированных систем классической механики. Подробно рассмотрены характерные примеры таких явлений и некоторые приложения. Значительное место отведено описанию и иллюстрации различных методов теоретического анализа и практического расчета хаотических процессов.

Предназначена для широкого круга научных работников и инженеров в области механики, физики и в определенной степени химии и биологии, а также для преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ [1])

[1]) Звездочкой отмечены параграфы и пункты, содержащие основной материал.

Предисловие редактора перевода 5
Предисловие 11
Глава 1. Общий обзор и основные представления 13
§ 1.1. Вводные замечания 13
* § 1.2. Теория преобразований в механике 20
* 1.2а. Канонические преобразования 21
* 1.2б. Движение в фазовом пространстве 25
* 1.2в. Переменные действие — угол 34
§ 1.3. Интегрируемые системы 38
* 1.3а. Одна степень свободы 38
1.3б. Линейные дифференциальные уравнения 43
1.3в. Несколько степеней свободы 47
* § 1.4. Системы, близкие к интегрируемым 59
* 1.4а. Две степени свободы 59
* 1.4б. Более чем две степени свободы 71
§ 1.5. Диссипативные системы 73
1.5а. Странные аттракторы 74
1.5б. Модель Лоренца 76
Глава 2. Каноническая теория возмущений 81
§ 2.1. Введение 81
2.1а. Степенные ряды 84
2.1б. Асимптотические ряды и малые знаменатели 87

2.1в. Влияние резонансов 89
* § 2.2. Классическая теория возмущений 89
* 2.2а. Одна степень свободы 90
* 2.2б. Несколько степеней свободы 95
§ 2.3. Адиабатическая инвариантность 104
* 2.3а. Введение и основные понятия 104
* 2.3б. Каноническая адиабатическая теория 107
* 2.3в. Медленно изменяющийся гармонический осциллятор 111
2.3г. Неканонические методы 114
§ 2.4. Резонансная теория возмущений 121
* 2.4а. Устранение резонансных знаменателей 123
* 2.4б. Вторичные резонансы 130
* 2.4в. Резонансное взаимодействие волны и частицы 135
2.4г. Глобальное устранение резонансных знаменателей 142
§ 2.5. Метод преобразований Ли 146
2.5а. Общая теория 148
2.5б. Ряды Депри 149
2.5в. Адиабатические инварианты 154
§ 2.6. Сверхсходимость 162
2.6а. Метод Колмогорова 165
2.6б. Периодические траектории 167
Глава 3. Отображения и линейная устойчивость 175
* § 3.1. Гамильтоновы системы как канонические отображения 176
* 3.1 а. Интегрируемые системы 176
* 3.1б. Системы, близкие к интегрируемым 180
* 3.1в. Уравнения Гамильтона и отображения 182
* § 3.2. Типичное поведение канонических отображений 184
* 3.2а. Иррациональные числа вращения и теория КАМ 185
* 3.2б. Рациональные числа вращения и структура резонансов 195
* 3.2в. Полное описание нелинейного отображения 200
* 3.2г. Численный пример 204
§ 3.3. Линеаризованные уравнения 206
3.3а. Собственные значения и собственные векторы 207
* 3.3б. Двумерные отображения 212
* 3.3в. Линейная устойчивость и инвариантные кривые 215
* § 3.4. Ускорение Ферми 220
* 3.4а. Физические задачи и их модели 221
* 3.4б. Численное моделирование 224
* 3.4в. Периодические точки и их линейная устойчивость 228
* 3.4г. Бифуркации 232
* 3.4д. Уравнения Гамильтона 235
* § 3.5. Движение в окрестности сепаратрисы 236

* 3.5а. Вынужденные колебания маятника 238
* 3.5б. Сепаратрисное отображение 241
Глава 4. Переход к глобальной стохастичности 244
* § 4.1. Введение 244
*4.1а. Качественное описание критериев перехода 246
* 4.1б. Стандартное отображение 249
* § 4.2. Перекрытие резонансов 257
* 4.2а. Схема получения критериев 257
* 4.2б. Вычисление критериев перекрытия 257
§ 4.3. Вторичные резонансы 263
4.3а. Центр резонанса 263
4.3б. Сепаратриса 267
* § 4.4. Резонансы высоких гармоник 269
* 4.4а. Основы метода Грина 269
* 4.4б. Численные эксперименты 274
§ 4.5. Метод ренормализации для двух резонансов 279
§ 4.6. Вариационные методы 287
* § 4.7. Заключение 288
Глава 5. Стохастическое движение и диффузия 290
§ 5.1. Введение 290
§ 5.2. Основные понятия 291
* 5.2а. Эргодичность 291
* 5.2б. Характеристические показатели Ляпунова 294
5.2в. Основные свойства стохастичности 298
5.2г. Случайность и ее численное моделирование 306
§ 5.3. Определение показателей Ляпунова и КС-энтропии 310
5.3а. Аналитические оценки 311
5.3б. Численные методы 312
§ 5.4. Диффузия в пространстве действий 317
* 5.4а. Уравнение Фоккера—Планка 318
* 5.4б. Коэффициенты переноса 321
* 5.4в. Стационарные и нестационарные решения 324
5.4г. Корреляционные поправки к коэффициентам переноса 325
§ 5.5. Влияние внешнего шума 332
5.5а. Введение 332
5.5б. Диффузия в присутствии резонансов 335
Глава 6. Многомерные колебания 341
* § 6.1. Резонанс многомерных колебаний 341
* 6.1а. Геометрия резонансов 342
* 6.1б. Примеры диффузии Арнольда 347
§ 6.2. Скорость диффузии вдоль резонансов 353
* 6.2а. Расчет диффузии в модели стохастической накачки 353

6.2б. Диффузия по резонансу связи 359
6.2в. Много резонансов 364
6.2г. Модуляционная диффузия 366
§ 6.3. Внешняя диффузия 375
6.3а. Резонансное каналирование диффузии 375
6.3б. Диффузия резонанса 382
§ 6.4. Диффузия в тороидальных магнитных ловушках 386
6.4а. Динамика магнитных линий 386
6.4б. Дрейфовые поверхности и диффузия в статических полях 392
6.4в. Диффузия в нестационарных полях 395
6.4г. Самосогласованная задача 402
§ 6.5. Системы со многими степенями свободы 404
Глава 7. Диссипативные системы 410
§ 7.1. Простые и странные аттракторы 410
7.1 а. Основные свойства 411
7.1б. Примеры странных аттракторов 416
7.1 в. Геометрия странных аттракторов 422
§ 7.2. Одномерные необратимые отображения 426
7.2а. Основные свойства 426
7.2б. Периодическое движение 430
7.2в. Хаотическое движение 442
§ 7.3. Двумерные отображения и связанные с ними потоки 453
7.3а. Бифуркации удвоения периода 453
7.3б. Движение вблизи сепаратрисы 457
7.3в. Вычисление инвариантных распределений 466
§ 7.4. Проблема турбулентности 474
7.4а. Представление Фурье 474
7.4б. Переход к турбулентности 478
Дополнение А. Некоторые приложения 486
А.1. Небесная механика 486
А.2. Ускорители и встречные пучки 488
А.3. Магнитные ловушки 490
А.4. Нагрев плазмы 492
А.5. Химическая динамика 494
А.6. Квантовые системы 495
Дополнение Б. Теория бифуркаций в гамильтоновых системах 497
Список основных обозначений 504
Литература 506
Именной указатель 522
Предметный указатель 523

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абловиц (Ablowitz) 57
Авез (Avez) 199, 200, 290
Алексеев В. М. 307, 487
Альфвен (Alfven) 490
Аносов Д. В. 19, 302
Арнольд В. И. 15, 18, 186, 190, 199, 200, 290, 341, 364, 465, 491
Бардет (Bardet) 493
Баунтис (Bountis) 58, 171, 172. 174, 271
Белоусов Б. П. 494
Бенеттин (Benettin) 294, 295, 297, 308, 313, 315, 317
Берк (Berk) 494
Берман Г. П. 497
Бернштейн (Bernestein) 492
Берри (Berry) 162. 290, 299, 496
Берс (Bers) 98, 139
Бивинс (Bivins) 407
Билек (Biaiek) 253, 273
Биркгоф (Birkhoff) 14, 15, 104, 199, 487
Боголюбов Н. Н. 13, 104. 114, 115. 317, 319, 444, 490
Борн (Born) 92
Брамбилла (Brambilla) 394
Брахнч (Brahic) 220, 221, 228
Бриджес (Bridges) 467
Брудно А. А. 307
Брунс (Bums) 487
Будкер Г. И. 336, 395, 489
Бэкстер (Baxter) 492
Вайдал (Vidal) 495
Ватанабе (Watanabe) 494
Галеев А. А. 336, 381, 395
Гальгани (Galgani) 408
Гаррен (Garren) 491
Гарридо (Garrido) 147, 487
Гейзал (Geisal) 442
Гелл (Gell) 395)
Голдстейн (Goldstein) 20
Голуб (Gollub) 481
Грин (Green G.) 181, 247, 489
Грин (Greene J.) 194, 214, 220, 247, 252, 269, 273, 274, 279, 308, 500
Гроссман (Grossmann) 449
Густавсон (Gustavson) 65, 487
Депри (Deprit) 147. 487
Джакалья (Giacaglia) 92, 104, 147, 154
Довейл (Doveil) 248, 277, 503
Драгт (Dragt) 199, 200, 490, 491
Дуннет (Dunnett) 122, 142
Дьюар (Dewar) 147, 149
Erep (Jaeger) 247, 325, 492
Жаботинский А. М. 494
Жданова Т. А. 324
Жебехели (Szebchely) 488
Забуский (Zabusky) 407
Зальцман (Saltzman) 476
Заславский Г. М. 220, 221, 294, 425, 496, 497
Зигель (Siegel) 488
Зисок (ZIsook) 450, 451
Зубарев Д. Н. 114
Израйлев ф. М. 324, 467, 469
Казати (Casati) 497
Кари (Сагу) 147, 164. 165, 332
Карни (Karney) 98, 103, 139, 142, 332
Кауфман (Kaufman) 98, 139, 147
Клейн (Klein) 248
Колле (Collet) 448
Колмогоров А. Н. 15, 82, 162. 168 186, 300, 318, 406, 487
Коломенский А. А. 489
Контопулос (Contopoulos) 190, 317, 487, 488
Копель (Kopell) 495
Коэн (Cohen) 375, 381, 382, 386, 491
Кратчфилд (Crutchfield) 418, 484
Крилин (Krilin) 490
Крускал (Kruskal) 13, 88, 104, 114, 490

Крылов Н. М. 13, 114. 319, 444
Крылов Н. С. 294, 300
Кулсруд (Kulsrud) 88
Куммер (Kummer) 488
Курант (Courant) 46, 489
Лакина (Lacina) 490
Ландау Л. Д. 20, 319, 478, 479
Лансфорд (Lunsford) 142, 190, 273, 279
Ласлет (Laslett) 489
Лебедев А. Н. 489
Левис (Lewis) 46
Лейнг (Laing) 142
Ли (Li) 248
Либерман (Lieberman) 111, 220, 221, 231, 291, 324, 325, 335, 353, 359, 473, 492
Линдштедт (Lindstedt) 82, 85
Литлджон (Littlejohn) 115, 147
Лифшиц Е. М. 478
Лихтенберг (Lichtenberg) 111, 126, 220, 221, 222, 231, 235, 247, 252, 291, 324, 325, 335, 394, 489, 492, 494, 503
Лич (Leach) 46
Лози (Lozi) 422
Лоренц (Lorenz) 19, 20, 76, 77, 79, 448, 476, 480
Лэнфорд (Lanford) 414
Ляпунов А. М. 294
Мак-Кай (MacKay) 501
Мак-Лафлин (McLaughlin) 457
Мак-Намара (McNamara) 65, 104, 142, 147, 148, 154, 160, 164. 487
Манневиль (Manneville) 484
Маркус (Marcus) 497
Марсден (Marsden) 348
Мартнн-Лёф (Martin-Lot) 306
Мейс (Meiss) 332
Мельников В. К. 199, 240, 348, 457, 459
Метрополис (Metropolis) 442
Мисюревич (Misiurewicz) 422
Митропольский Ю. А. 13, 114
Мозер (Moser) 15, 162, 186, 190, 193, 199, 227, 488
Морозов А. Д. 457
Найфе (Neyfeh) 147
Невинс (Nevins) 395, 399
Некрасов А. К. 492
Нехорошев Н. Н. 73, 364, 365
Нирветберг (Nierwetberg) 442
Нойес (Noyes) 495
Нортроп (Northrop) 121, 154, 490
Оселедец В. И. 294, 297
Отт (Ott) 422, 478, 497
Паста (Pasta) 14, 56, 348, 406
Перейра (Pereira) 267, 268
Персиваль (Percival) 248, 287, 288
Песин Я. Б. 294, 301
Петухов В. А. 489
Погуце О. П. 395
Помо (Pomeau) 484
Пуанкаре (Poincare) 13, 15, 16, 28, 82, 87, 90, 104, 197, 200, 240, 294, 348, 487
Пустыльников Л. Д. 221
Рабинович М. С. 489
Рассел (Russel) 424
Раулэндс (Rowlands) 375, 381, 382, 385, 467
Ренно (Rannou) 308
Речестер (Rochester) 326, 331, 336, 338, 392
Рёслер (Rossler) 416
Родионов С. Н. 491
Розенблют (Rosenbluth) 247, 392, 491
Ронлии (Rognlien) 493
Рудник (Rudnick) 443
Рютов Д. Д. 385
Рюэль (Ruelle) 19, 478, 480, 495
Сагдеев Р. З. 336, 381, 395
Саймон (Syrnon) 46
Самек (Samec) 493

Сегур (Segur) 57
Сейдл (Seidi) 492
Сиамбис (Siambis) 491
Синай Я. Г. 17, 71, 300, 496
Ситников К. Н. 487
Смейл (Smale) 199, 487
Смит (Smith) 98, 139, 267, 268, 493
Снайдер (Snyder) 46
Спротт (Sprott) 492
Стикс (Stix) 392
Стоддард (Stoddard) 408
Ступаков Г. В. 385
Суинни (Swinney) 481
Табор (Tabor) 249
Тейлор (Taylor) 142
Теллер (Teller) 490
Теннисон (Tennyson) 73, 341, 342, 353, 368, 375, 379, 381
Тода (Toda) 51
Томае (Thomae) 449
Треве (Treve) 422, 478
Тэкенс (Takens) 19, 193, 478. 480
Уайес (Wyeth) 493
Уайт (White) 326, 331, 336
Уайтмен (Whiteman) 65, 104, 154, 487
Уинтнер (Wintrier) 488
Уиттекер (Whittaker) 20, 55, 154, 486, 487
Улам (Ulam) 14, 56, 68, 220, 348, 406
Уотерс (Waters) 407
Фармер (Farmer) 424, 425
Фейгенбаум (Feigenbaum) 20, 434, 438 452, 481
Ферми (Fermi) 14, 56, 68, 204, 220, 348, 406
Филд (Field) 495
Филоненко Н. Н. 392
Финн (Finn) 147, 199, 200, 392
Форд (Ford) 54, 190, 247, 273, 279, 294, 299, 407, 408
Фрёлинг (Froehling) 425
Фрёшле (Froeschle) 294, 348, 407
Фукуяма (Fukuyama) 98, 139, 269
Фурсов В. С. 489
Хагихара (Hagihara) 488
Хастье (Hastie) 491
Хатори (Hatori) 494
Хаулэнд (Howland) 147, 164
Хедлунд (Hedlund) 294
Хейлес (Heiles) 54, 64, 290, 294, 314
Хеллеман (Helleman) 165, 171, 270, 290, 433, 448, 453, 478, 486
Хенон (Henon) 16, 54, 64, 204, 290, 294, 314, 416, 419, 421
Хереворд (Hereward) 489
Хертвек (Hertweck) 490
Ховард (Howard) 405, 491, 493
Холл (Hall) 56, 58
Холмс (Holmes) 348, 437, 461, 463
Хольт (Holt) 57
Хопф (Hopf) 294, 478
Хори (Hori) 147, 487
Хьтоберман (Huberman) 443, 450, 451, 484
Цанг (Tsang) 473
Цейпель (Von Zeipel) 13, 87, 90
Чандрасекар (Chandrasekhar) 490
Чарчилл (Churchill) 488
Чириков Б. В. 17, 43, 68, 73, 111, 121, 122, 127, 164, 181, 193—195, 220. 221, 246, 247, 249, 252. 257, 262, 294, 311,332, 342, 353, 360, 365, 366, 375, 381, 382, 386, 469, 486, 488, 490, 491, 492, 497
Шарковский А. И. 440
Шейдекер (Scheidecker) 294, 407
Шепелянский Д. Л. 497
Шлютер (SchlQter) 490
Шмидт (Schmidt) 252, 253, 273
Штерн (Stern) 104, 154
Эдмондс (Edmonds) 492
Экман (Eckmann) 448, 478, 484
Эминицер (Eminhizer) 165
Эсканде (Escande) 248, 277, 503

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адиабатический инвариант 13, 17, 31, 37, 88, 104, 124, 134, 154
— процесс 87, 111, 1 12, 349
Адиабатическое возмущение 106, 107, 154, 367
Аносова системы 302—305, 308
Аттрактор, геометрия 74, 75, 78, 417—422
— *Лоренца* 78—80, t77
— область притяжения 414
— простой 19, 73, 74. 76—80, 413, 414, 440—442, 464
— странный (хаотический) 19, 20, 74—76, 78, 80, 416—425, 463, 464, 469
— — размерность 19, 74, 422—425
— *Хенона* 419—422
Бернулли свойство 304
— сдвиг 303, 304
— система 303—305
Бильярдная модель 348 353
Бифуркации 77, 78, 232, 415, 416, 430— 432, 440, 442, 453
— обратные 416, 448. 449
— теория 415, 416, 433—438, 45-i—457. 497
Вырождение 126, 129, 130, 137, 138, 189—191
Вычет 269
— средний 271
Газ твердых шариков 70, 305
Гальтона доска 305
Гамильтониан автономный 23, 24, 59, 100, 148, 292, 298
— канонические преобразования 90—98, 132—134, 147, 180, 189, 259—261
— неавтономный 97, 98, 110, 111, 154, 184, 235, 236, 255, 259, 354
— переход к отображению 182, 183
— стандартный 43, 127, 236
— фурье-разложение 92, 95, 97, 98, 123, 124, 132, 144 189, 235, 236, 281, 474—476
Гармонический осциллятор 36, 89, 129
— — медленно изменяющийся 87, 111, 119, 121, 156, 157
Гетероклинные точки 199—201
Гиперболические точки (траектории) 40, 196—201, 204, 206, 218, 219, 230, 232, 254, 458—460, 462
Гомоклинные точки 198—201, 306, 307. 458
Грина критическое значение 275—277
Грубость *см.* Устойчивость структурная
Депри ряды 149, 259
Диссипативные системы 73, 410
Диффузия *Арнольда* 18, 19, 59, 71—73, 249, 292, 317, 341, 346, 347, 350—352, 357—365, 367
— внешняя 332, 337, 338, 375
— в пространстве действий 317
— модуляционная 18, 19, 342, 366
— неоклассическая 336, 395
— по резонансам 335, 353
— резонанса 382
— резонансное каналирование 375, 385. 386
—скорость 331, 337, 340, 353, 372, 373, 377, 378, 399—402
— — квазилинейная 326, 383
— тензор 377—379
— уравнение 291, 319—321
— частиц в ловушке 386
Золотое сечение *см.* Число вращения
Иерархия инвариантов 110, 111
— резонансов 62, 203, 204

Инвариант *см.* Интеграл движения
Инвариантная кривая (поверхность) 17, 18, 33, 60—69, 72, 102, 103, 178, 185—200, 215, 231, 232, 247, 248, 272, 273, 279—281, 350
Инвариантное распределение (мера) 291, 444—448, 466
— — на аттракторе 444—448, 466
Интеграл действия 13, 20, 31
Интегралы движения 33, 34, 48, 55, 60, 98, 176, 203
— — адиабатические *см.* Адиабатический инвариант
— — глобальные 38, 47, 52, 60, 98. 143—146
— — изолирующие 348, 487
— — инволюция 38
— — локальные 124, 200
К-системы 300, 301, 303, 305
Канторово множество 76, 422—424
Касательный вектор 295, 296
Квазипериодические колебания 35, 49, 74, 178, 294, 305
Компонента движения 232, 292, 294, 301, 311, 312, 314
Корреляции 332
— связь с коэффициентами переноса 321, 325, 326
— убывание 244, 332
Коэффициенты переноса 291, 319, 321, 325
Крупноструктурное разбиение (“огрубление”) 97, 299, 300
Ляпунова показатели 244, 294, 301, 442— 444, 448
— — вычисление 310
— — обобщенные 297
Магнитные ловушки 110, 111, 386, 490
Малые знаменатели *см.* Резонансные знаменатели
Марковский процесс 318
Матрицы 207—209, 214—220. 296
— симплектические 209—212
Маятник 39, 42, 93, 95, 152—154 237 238, 263—269
— как модель резонанса 42, 127, 236, 255
— точное решение 39—42, 267
Мельникова—Арнольда интеграл 239—241, 465
Метод *Венцеля —Крамерса—Бриллюэна* (ВКБ) 13
— *Грина* 247, 248, 269
— *Дуннета—Лейнга— Тейлора* (ДЛТ) 142—146
— касательных *Ньютона* 163, 181, 213
— *Уиттекера* конструирования интегрируемых систем 55, 58
— усреднения *см.* Теория возмущений асимптотическая
— Фурье-траекторий 326—332
Методы вариационные 287
— — *в* теории возмущений 168—374
Модель *Контопулоса* 316, 317
— *Леннарда-Джонса* 408
— *Лоренца* 20, 57, 76, 77, 475—477. 484
— *Ферми— Паста,— Улама* 14, 405—407
— *Хенона—Хейлеса* 16, 54, 58, 59, 63— 67, 171-174, 313
Нелинейность колебаний 86,187—191
— — параметр 127, 189
— — умеренная 194, 195
Неподвижные (периодические) точки 125, 127, 130, 195, 214, 215, 228, 229, 232— 234, 242, 250—253, 276, 277, 430
Непрерывная дробь 271—273, 277
Округления ошибки 290, 308, 309, 335

Отображение *Арнольда* 302, 305
— *Вогелара* 500, 501
— в сечении *Пуанкаре* 79, 179, 180, 238, 241, 242, 411
— гамильтониан 183, 184, 235. 236,255,256
— диссипативное 464, 465, 468
— *Заславского* 425
— инволюции 181, 213, 214, 233, 242
— каноническое 179—182, 184. 228
— *Каплана— Йорке* 425
— квадратичное 204, 427—429
—линеаризованное 207, 214—220, 229, 296, 298. 321
— логистическое 428, 429, 447, 448
— необратимое 76, 426
— обратимое 411
—одномерное 76, 79, 80, 233, 234, 426,
— поворота 179—182. 195, 204, 293, 333, 382
— *Пуанкаре* 79, 179. 235, 238, 298, 348, 411, 453
— сепаратрнсное 241, 250
— стандартное 181, 331,338, 382
— Улама 222—224, 227, 242, 249, 250, 321, 325, 334, 468
Параметры подобия 433—438, 451, 456, 457, 497—503
Пенлеве свойство 47—59
Перекрытие резонансов 71, 257, 367—369, 405
— — критерии 17, 68, 246, 247, 289, 367
— — простое 257
— — улучшенное 258—262
Перемежаемость 484, 485
Переменные действие — угол (фаза) 31, 34, 36, 37, 41, 90, 95, 107, 342, 361, 389
— дрейфовые 99, 100
— канонические 107, 178, 222, 223, 300. 323, 324
— обобщенные 22, 148. 154
— разделение 38. 115
— смешанные 147
Перемешивание 17, 70, 298—300, 305, 448
Переход к стохастичностн 245
— — турбулентности 478
Периодическая δ-функция 184, 235
Периодические траектории 60, 74, 125, 167, 178, 179, 207
Правило двух третей 256, 288
Предельный цикл 74, 416, 464, 480—482
Преобразование каноническое 95, 107, 123, 148, 149, 162, 354, 362, 378, 389
—пекаря (отображение) 71, 299, 305
Производящая функция 90, 182, 362, 378
— — *Ли* 25, 148. 180, 259
— — смешанных переменных 9о, 123
— — Фурье-разложение 92, 95—98, 101, 109, 259, 369
Пространство действий 344—347
Пуанкаре сечение 15, 31—34. 53, 60, 61, 65—67, 69, 102, 103, 140, 141, 177, 411
Резонанс волна—частица 98—104, 135, 144—146, 161, 162, 280
— вторичный 61, 62, 130, 138, 139, 192, 202, 203, 205, 237, 263, 281
— высших гармоник 125, 269—274, 365
— — порядков 109
— дрейфовый 394—397
— многомерный 341
— первичный 61, 62, 126—130, 146, 186, 195, 200—205, 225, 228, 236, 237, 257— 260
— прохождение 112, 113, 367

— связи 359, 375, 379, 390
—центр 127—129, 132, 134, 263, 397
Резонанса два 279—281
Резонансные знаменатели 83, 87, 89, 96, 98, 109, 187
— — устранение 123, 160
— — — глобальное 142
— поверхности 343—346, 379
Резонансов взаимодействие 360, 364
— уровни 139, 168
Ренормализация 135, 248, 277—279, 433— 438, 455—457, 501—503
— в стохастическом слое 257, 269
— *Грина* 269—277
— для двух резонансов 248, 279—287
— точная теория 433—435, 440, 453, 497
Рэлея— Бенара конвекция 20, 67, 475, 476
Сверхадиабатичность 491
Секулярные члены 82, 85
Сепаратриса 39, 41, 42, 49, 61—64, 67, 73, 128, 191, 197—200, 206, 234, 237, 267
Символическая траектория 304
Системы, близкие к интегрируемым 24, 36, 42, 59, 62, 89, 90, 180, 305, 310
— интегрируемые 38, 51, 54, 55, 70, 125, 176—180, 310, 315
— — конструирование 55
— — примеры 39, 51, 177
— квантовые 307, 309, 495
Сложность алгоритмическая 306, 307
Случайность 290, 294. 299, 305, 307
— связь со сложностью 306, 307
Случайные последовательности 306, 307
— фазы (приближение) 70, 71, 291, 322
Собственные векторы 207, 215—220, 296, 297, 303
— значения 207, 215—220, 230, 297, 303
Спектр мощности 79, 438—440, 449—453
Стохастическая накачка 353
Стохастический слой 61—63, 65, 71—73 237, 238, 242, 243, 261—263, 347
— — модуляционный 366—371
— — толстый 349—352, 354
— — тонкий 350—352, 357
Стохастичность глобальная 70 71 194 245, 246, 248, 249, 254, 290
— граница 226, 231, 242, 246, 253—256
— критерии 200, 241, 246, 257, 291 310, 312, 315
— локальная 69, 245, 246, 254
—области 74, 201—206,245
— параметр 181, 249
— свойства 291, 298, 442, 449
Теорема *Алексеева— Брудно* 307
— *Лиувилля* 27, 412
— *Пуанкаре— Бендиксона* 413, 416
— *Пуанкаре— Биркеофа* 195
Теория возмущений асимптотическая 13, 87, 104, 105, 114—118, 203, 235, 236
— — вариационная *см.* Вариационные методы
— — каноническая 81, 107, 369
— — классическая 89
— — *Ли* 145
— — неканоническая 1!4
— — резонансная 17, 43, 121, 203 235 262, 263, 390
— — сверхсходящаяся 82, 162
— *Колмогорова— Арнольда— Мозера* (КАМ) 38, 60, 68, 165, 184, 185, 203, 224
Тоды цепочка 47, 51—54, 57
Тор *см.* Инвариантная поверхность

Турбулентность гидродинамическая 474
— химическая 494
Удвоение периода 76, 430—432, 453—457, 498
Уравнение *Дюффинга* 461—465
— *Фоккера—Планка—Колмогорова* (ФПК) 318, 468—472
У-системы *см. Аносова* системы
Ускорение *Ферми* 59, 68, 69, 220, 262, 263, 468
Устойчивость движения, граница 231, 245
— — линейная 127—130, 207, 215, 228, 242, 247, 252, 253
— — островки 224, 225, 232, 245, 251— 254, 469
— структурная 302, 308,
Фазовая траектория 128, 129, 131, 178, 254, 414, 462
Фазовое пространство 18, 19, 25—27, 32, 58, 254, 255, 299, 307, 458
— — разбиение 245, 246, 951, 300
— — расширенное 28—30, 95, 223
— — сокращенное 29, 33
Фазовые колебания 130, 134, 226, 236
— — частота 136, 130, 236, 384
Фокус 74, 414—416, 463, 464, 468
Фрактальная размерность *см.* Аттракторы
Фрактальные диаграммы 277—279
Хаос *см.* Стохастичность, Случайность
Число вращения 179, 180, 241, 256, 281
— — золотое сечение 194, 272, 275—277
— — иррациональное 185
— — рациональное 195, 272, 279
Эллиптические точки (траектории) 39, 42, 197, 201, 204, 216—218, 224 232, 254
Энергетическая поверхность 292, 297, 343—346, 375, 376, 379, 385
Энтропия (КС-энтропия) 244, 300, 301, 303—305, 307, 513
— вычисление 301, 311, 315
— связь с показателями *Ляпунова* 301
Эргодичность 14, 17, 70, 291, 299, 305 487

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга, перевод которой предлагается читателю, написана известными американскими физиками, профессорами Калифорнийского университета (Беркли) А. Лихтенбергом и М. Либерманом. Она посвящена весьма необычной области классической механики, которая получила название стохастической, или хаотической, динамики.

Фундаментальное значение исследований в этой области, бурно развивающихся особенно в последнее десятилетие, состоит в том, что они вскрывают динамическую природу случайности и статистических законов, преобразуя частную гипотезу «молекулярного хаоса», выдвинутую Больцманом более ста лет тому назад, в общую теорию динамического хаоса.

Многочисленные приложения хаотической динамики в самых разных областях физики и техники, а также других наук обязаны тому существенно новому и принципиально важному обстоятельству, что статистические законы, а вместе с ними простое статистическое описание более не ограничены (нашим незнанием!) только очень сложными системами с большим числом степеней свободы. Напротив, при определенных условиях, которые сводятся в основном к сильной (экспоненциальной) локальной неустойчивости движения в некоторой области фазового пространства, динамический хаос возможен, например, всего при двух степенях свободы консервативной гамильтоновой системы. Источник чрезвычайной сложности, характерной для индивидуальной реализации случайного процесса, оказался совсем не там, где его искали со времен Больцмана! Дело вовсе не в сложном устройстве конкретной динамической системы (и уж тем более не в числе ее степеней свободы) и даже не во внешнем «шуме» (что есть только иное выражение сложности другой системы — окружающей среды), а в *точно заданных* начальных условиях движения. В силу непрерывности фазового пространства в классической механике эти начальные условия содержат бесконечное количество информации, которое при наличии сильной неустойчивости и определяет предельно сложную, непредсказуемую и невоспроизводимую картину хаотического движения. Такая система не «забывает» свои начальные условия, а наоборот, следует им во всех мельчайших деталях и именно это и приводит к хаосу, который с самого начала заложен в этих деталях. Конечно, с точки зрения физики все это — весьма существенная идеализа-

ция, но в то же время это как раз тот самый предельный случай, который открывает новую перспективу реальной динамики и не только классической, но и квантовой.

Предлагаемая читателю книга является почти единственной [1]) физической (несмотря на обилие формул) монографией в рассматриваемой области; она представляет собой одну из первых попыток дать цельную картину по существу нового раздела физики. Ее авторы в течение многих лет успешно работают в этой области, им принадлежит здесь ряд интересных и важных результатов, они хорошо известны среди специалистов как за рубежом, так и в нашей стране. Один из авторов, проф. А. Лихтенберг, знаком также и более широкому кругу советских читателей по переводу его книги [3].

Новая книга рассчитана на широкий круг специалистов. Однако она не является популярной и при активном чтении требует значительной работы, переосмысления многих привычных понятий. Авторы ставят своей задачей не только рассказать о новой области или дать обзор новых результатов, но и научить читателя (желающего!) работать в этой области и помочь ему овладеть методами теоретического анализа и практических расчетов. Основной направляющей нитью изложения является детальное и всестороннее обсуждение перехода от простых и хорошо известных регулярных нелинейных колебаний к различным режимам хаотического движения (гл. 3—5), включая такие тонкие эффекты, как диффузия Арнольда (гл. 6). Авторы подобрали небольшое число достаточно простых и характерных примеров, к которым они многократно возвращаются при описании различных эффектов или методов анализа. Это существенно облегчает, на наш взгляд, понимание и освоение основного материала. Книга хорошо иллюстрирована; она включает разнообразные результаты численного моделирования, что значительно способствует наглядности изложения.

В книге рассматривается в основном гамильтонова динамика. Диссипативным системам посвящена только гл. 7. Изложение здесь более конспективно, особенно это касается наиболее интересного § 7.4 «Проблема турбулентности». Тем не менее материал этой главы служит хорошим введением в современную теорию диссипативных динамических систем.

В основу анализа гамильтоновой динамики положена резонансная теория возмущений (§ 2.4), опирающаяся на ясные физические представления и позволяющая количественно исследовать такие сложные задачи, как, например, стохастический слой вокруг сепаратрисы нелинейного резонанса. Основная идея здесь заключается в том, что переход с ростом возмущения от регулярного движения к хаосу происходит через изменение топологии инвариант-

[1]) Совсем недавно из печати вышла монография Заславского [1], посвященная той же проблеме с одним, однако, существенным добавлением: в нее включены вопросы квантовой теории динамического хаоса. Математические монографии также немногочисленны (см., например, [2]).

ных кривых в окрестности нелинейных резонансов. Система резонансов является, вообще говоря, всюду плотной в фазовом пространстве и имеет иерархическую структуру, которая характеризуется бесконечной последовательностью уровней: первичные резонансы между невозмущенными колебаниями, вторичные резонансы с колебаниями на первичных резонансах и т. д.

Наряду с этим описаны и другие новые методы в теории нелинейных колебаний, в том числе и малоизвестные нашему читателю. Это относится прежде всего к использованию преобразований Ли (§ 2.5), методу Дуннета—Лейнга—Тейлора (п. 2.4г) и ренормализации (§ 4.4 и 4.5).

Наряду с чисто динамическими задачами рассмотрено также совместное влияние резонансов и внешнего шума (§ 6.3). Принципиально важно, что динамический хаос возможен в отсутствие какого-либо внешнего случайного возмущения. Однако не менее существенно и то, что в условиях глобального хаоса всегда присутствующий реально слабый шум не изменяет статистические свойства системы. С другой стороны, при некоторых условиях, например вблизи границы перехода к динамическому хаосу, совместное действие шума и резонансов может быть совсем иным, нежели каждого из этих факторов в отдельности.

Один из недостатков книги — некоторая перегруженность различными, иногда очень специальными методами и задачами. Отчасти это сделано авторами сознательно в расчете на то, что книга может служить своего рода справочником для тех, кто уже освоил основы хаотической динамики. Чтобы помочь начинающим, основные разделы книги отмечены звездочкой.

Другой недостаток связан с неустановившейся терминологией и как следствие значительной долей специального «жаргона». В качестве примера можно указать на не разграниченные четко понятия «хаотический» и «стохастический» (см. примечание авторов на с. 74). Представляется, что первый термин является вообще более предпочтительным, поскольку второй имеет и совсем иной смысл. Так, существует обширная область исследований «стохастических процессов» под действием внешних случайных возмущений. При переводе мы старались внести в терминологию единообразие, в некоторых случаях это отмечено в примечаниях редактора или переводчиков.

В книге имеются повторения, часть которых с разрешения авторов была сокращена при переводе. Были исправлены также очевидные опечатки и неточности. Спорные положения, а также некоторые свежие или почему-либо не отраженные в книге интересные результаты отмечены в примечаниях редактора. Там же даны пояснения к основному тексту.

Рассматриваемые в книге приложения носят в основном иллюстративный, педагогический характер. Краткая сводка некоторых других приложений дана в дополнении А. Как отмечают авторы,

нет никакой возможности сколько-нибудь полно осветить все разнообразные приложения теории динамического хаоса. Все же хочется добавить к их списку два более фундаментальных приложения в нелинейной теории поля. Одно из них связано с открытыми в работе [4] (см. также [5, 6]) хаотическими колебаниями гравитационного поля в однородных анизотропных космологических моделях общей теории относительности вблизи особенности. Интересно отметить, что сложную исходную систему уравнений Эйнштейна удается свести в конечном счете к простому одномерному отображению $\bar{x} = 1\,x \pmod 1$, которое и определяет хаотическую динамику космологической модели. Это отображение дает также пример простейшей динамической системы с хаотическим движением. Еще один аналогичный пример — отображение $\bar{x} = kx \pmod 1$, где целое $k > 1$ (см. п. 5.2г).

Другое приложение относится к калибровочным полям Янга—Миллса, ответственным за взаимодействие элементарных частиц. Классические однородные модели такого поля описывают в отличие от предыдущего примера локальную (внутреннюю) динамику поля, которая также оказывается, вообще говоря, хаотической [7—9]. В простейшем случае такая однородная модель сводится к обычной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы и потенциальной энергией $U = (xy)^2$.

Отметим также красивое явление генерации магнитного поля за счет развития локальной неустойчивости движения замагниченной плазмы [10].

Естественно, что в такой обширной и быстро развивающейся области, как динамический хаос, даже самая «свежая» монография не успевает отразить некоторые новые результаты, с одной стороны, и не в состоянии вместить все аспекты этой многогранной проблемы, с другой стороны. Ниже мы коснемся трех таких вопросов, которые указывают также на границы применимости существующей теории динамического хаоса.

Первый вопрос относится к «аномальным» (аномально сложным) статистическим свойствам динамического хаоса. В отличие от статистических гипотез, в качестве которых естественно выбирать простейшие предположения, статистические свойства определяются здесь динамикой системы и могут оказаться весьма сложными. Такова, например, гидродинамическая турбулентность. Исследования последних лет показали, что статистические «аномалии» динамического хаоса — весьма распространенное явление, связанное, в частности, со сложной иерархической (масштабно-инвариантной) структурой границы хаоса в фазовом пространстве [11—14] (см. также конец § 5.4). Несмотря на экспоненциальную локальную неустойчивость движения, это приводит к степенному затуханию корреляций: $C(\tau) \propto \tau^{-p}$; $p < 1$. Диффузионное описание может оказаться в таких условиях совершенно неприменимым.

Другой интересный вопрос: к чему ведет динамический хаос? Как мы теперь знаем или, лучше сказать, наконец, поняли, конечным продуктом хаоса совсем не обязательно является унылое статистическое равновесие, которое может оказаться просто неустойчивым. Классический пример этого — джинсовская неустойчивость гравитирующего газа, которой в конечном счете все мы обязаны как своим существованием, так и неисчерпаемым разнообразием окружающего нас мира. Аналогичные коллективные (когерентные) процессы давно и широко изучаются в плазме. Сюда же относится и так называемая «химическая динамика» (см. дополнение А.5). Недавно все это получило привлекательное название «синергетика». С точки зрения физики такие процессы естественно называть *вторичной динамикой*. К ней относится по существу вся классическая механика макроскопических тел, в частности, и вся небесная механика (первичной является в этом случае молекулярная динамика). Одна из характерных особенностей вторичной динамики — ничтожное число ее степеней свободы по сравнению с первичной системой. Однако именно эти коллективные степени свободы и определяют наиболее существенную глобальную структуру системы и ее эволюцию, тогда как все остальное есть лишь некоторый общий термодинамический «фон». В этом же состоит, по-видимому, и ответ на вопрос о предельном поведении динамической системы с очень большим числом степеней свободы, который кратко обсуждается в конце § 6.5. Дело здесь не столько в размере сохраняющихся областей регулярного движения, сколько в возможности возникновения вторичной динамики.

Наконец, еще один очень важный вопрос: в какой мере такой своеобразный феномен, как динамический хаос, сохраняется в (более фундаментальной) квантовой механике? В отличие от классического хаоса, природа и механизм которого в основном выяснены, исследование квантовой динамики соответствующих систем только начинается (см. дополнение А.6). Тем не менее уже сейчас ясно, что квантовые эффекты кардинально изменяют характер этого явления и притом весьма неожиданным образом. Поскольку это касается временно́й эволюции системы, в квантовой механике возможна (и, по принципу соответствия, необходима) лишь *вре́менная имитация* тех или иных свойств классического хаоса [15] (см. также [1, 16, 17]). В действительности же квантовое движение является почти периодическим из-за дискретности спектра любой ограниченной в фазовом пространстве системы, а также дискретности самого фазового пространства в квантовой механике. Временно́й классический хаос уступает место пространственному хаосу квантовых стационарных состояний [18, 19].

Перевод книги выполнен канд. физ.-мат. наук В. В. Вечеславовым (предисловие, гл. 2, дополнения), В. Г. Давидовским (гл. 3, 6), канд. физ.-мат. наук Ф. М. Израйлевым (гл. 4, 7) и канд. физ.-мат. наук Д. Л. Шепелянским (гл. 1, 5).

Мы весьма признательны авторам книги, профессорам А. Лихтенбергу и М. Либерману, за помощь при подготовке русского издания.

Б. В. Чириков

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1983.
2. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория — М.: Наука, 1980.
3. *Лихтенберг А.* Динамика частиц в фазовом пространстве.— М.: Атомиздат, 1972.
4. *Лифшиц Е. М., Лифшиц И. М., Халатников И. М.*— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 322.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М.: Наука, 1973, с. 498.
6. *Лифшиц Е. М., Халатников И. М., Синай Я. Г., Ханин К. М., Щур Л. Н.*— Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 38, с. 79.
7. *Матинян С. Г., Саввиди Г. К., Тер-Арутюнян Н. Г.* — Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 34, с. 613.
8. *Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.*— Ядерная физика, 1982, т. 36, с. 1563.
9. *Николаевский Е. С., Щур Л. Н.*— ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 3.
10. *Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.*— ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 2052.
11. *Channon S. R., Lebowitz J. L.*— Ann. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 108.
12. *Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.*— В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям. Киев: Наукова думка, 1983. т. II.
13. *Чириков Б. В.*— Lecture Notes in Physics, 1983, v. 179, p. 29.
14. *Karney C. F. F.*— Physica, 1983, v. 8D, p. 360.
15. *Израйлев Ф. М., Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.*— Soviet Scientific Reviews, 1981, v. 2C, p. 209.
16. *Чириков Б. В.*— УФН, 1983, т. 139, с. 360.
17. *Шепелянский Д. Л.*— Physica, 1983, v. 8D, p. 208.
18. *Шнирельман А. И.*— УМН, 1974, т. 29, № 6, с. 181.
19. *Berry M. V.*— J. Phys., 1977, v. 10A, p. 2083.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей монографии рассматривается стохастическое, или хаотическое, движение нелинейных колебательных систем. Это — быстроразвивающаяся область нелинейной механики с приложениями во многих областях науки и техники, включая астрономию, физику плазмы, статистическую механику и гидродинамику. Основное внимание уделяется динамической стохастичности в гамильтоновых системах, когда хаотическое движение обусловлено самой динамикой, а не внешним шумом. Вместе с тем рассматривается также и влияние шума на движение динамической системы. В последней главе подробно обсуждаются основные особенности хаотического движения диссипативных систем.

Исследования в этой области начались еще в прошлом веке, когда Пуанкаре и другие пытались построить теорию нелинейных возмущений планетных движений. Однако только новые математические результаты, полученные в 60-х гг., вместе с результатами численного моделирования на быстродействующих ЭВМ послужили основой современного подхода к этой проблеме. Так как новые методы частично обязаны математическим достижениям, появились уже две или три математические монографии, отражающие эти результаты. Однако их язык и изложение труднодоступны специалистам других наук и инженерам, не говоря уже о том, что в них не содержатся конкретные методы для проведения практических расчетов.

В нашей книге главное внимание уделяется выяснению физической сущности явлений, а не математической строгости. Мы приводим практические методы описания движения, определения перехода от регулярного к стохастическому поведению, а также нахождения основных характеристик стохастичности. При этом мы существенно опираемся на численное моделирование для иллюстрации и подтверждения этих методов.

Монография задумана как пособие для тех физиков и инженеров, которые захотят познакомиться с этой областью механики, и как справочник для исследователей, уже знакомых с такими методами. Книгу можно использовать также как учебное пособие по механике для аспирантов. Мы предполагаем, что читатель имеет обычную вузовскую подготовку по математике и физике, включая основы гамильтоновой механики. Знакомство с аналитической механикой желательно, но не обязательно. Подробный обзор необходимого материала дается в § 1.2 и 1.3.

Основные идеи динамической стохастичности в гамильтоновых системах вводятся в § 1.4. В гл. 2—6 мы последовательно переходим от регулярного к стохастическому движению. Чтобы помочь читателю, мы отмечаем звез-

дочкой (*) те параграфы и пункты (п.), в которых содержится основной материал. Они и составляют ядро нашего изложения. Особенно важным является п. 2.4а о резонансной теории возмущений. Материал книги был успешно использован в 30-часовом курсе лекций для аспирантов в Беркли.

В дополнение к основному материалу рассмотрены также и другие важные вопросы. Влияние внешнего шума на динамику системы с двумя степенями свободы представлено в § 5.5 (с использованием результатов п. 5.4г), для бо́льшего числа степеней свободы — в § 6.3, а некоторые приложения рассмотрены в § 6.4. Описание диссипативных систем в гл. 7 является более или менее независимым от обсуждения гамильтоновых систем. При изучении материала гл. 7 следует обращаться к введению в § 1.5, а также к описаниям метода сечения Пуанкаре в п. 1.2б и показателей Ляпунова в п. 5.2б и § 5.3. Бифуркации удвоения периода рассмотрены в п. 7.2б, 7.3а и в дополнении Б (см. также п. 3.4г). Другие специальные вопросы, такие, как теория возмущений Ли (§ 2.5), методы ускоренной сходимости (§ 2.6), некоторые аспекты теории ренормализации (§ 4.3 и 4.5), неканонические методы (п. 2.3г), глобальное устранение резонансных знаменателей (п. 2.4г и, частично, 2.5в), вариационные методы (п. 2.6б и § 4.6) и модуляционная диффузия (п. 6.2г), можно отложить до ознакомления с основным материалом.

Данная монография подготавливалась в течение трех с половиной лет. Многие друзья и коллеги поддерживали нас в этом. Мы хотим выразить здесь признательность всем тем, кто просмотрел основные разделы рукописи и чьи замечания существенно улучшили окончательный вариант текста. Мы благодарны Х. Абарбанелю, Дж. Кари, Б. В. Чирикову, Р. Коэну, Д. Эсканде, Дж. Форду, Дж. Грину, Р. Хеллеману, П. Холмсу, Дж. Ховарду, О. Лэнфорду, Д. Лихтенбергу, Р. Литлджону, Б. Мак-Намаре, Г. Мотцу, К. Спарроу, Дж. Л. Теннисону и А. Вайнстейну. Полезные замечания были сделаны также Дж. Казати, А. Кауфманом, Я. Персивалем и Г. Смитом. Нам также приятно отметить значительное влияние многих опубликованных работ Б. В. Чирикова в этой области. Некоторые изложенные в книге идеи были развиты авторами во время работы по контрактам с Национальным научным фондом, министерством энергетики и научно-исследовательским управлением военно-морских сил. Один из авторов (А. Л.) благодарит за гостеприимство колледж св. Екатерины в Оксфорде, а другой (М. Л.) столь же признателен Имперскому колледжу в Лондоне, где была подготовлена значительная часть рукописи.

А. Лихтенберг,
М. Либерман

Глава 1

ОБЩИЙ ОБЗОР И ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ 1.1. Вводные замечания

Эта книга появилась в результате исследований по нелинейной динамике. Целью исследований было выяснение поведения отдельного осциллятора при медленном изменении его параметров, с одной стороны, и поведения нескольких слабо взаимодействующих осцилляторов — с другой. Эти две проблемы, которые первоначально рассматривались независимо, оказались тесно связанными между собой в случае многомерных систем.

Существенный прогресс в понимании эффекта медленного изменения параметров был достигнут на Сольвеевской конференции 1911 г. благодаря Эйнштейну, который указал на значение интеграла действия в физике. Он отметил, что «адиабатическое» постоянство действия, продемонстрированное впервые Лиувиллем и Грином за три четверти века до этого, прямо связано с физическим представлением о том, что число квантов в медленно меняющейся системе должно оставаться постоянным. Появившийся в результате метод Венцеля—Крамерса—Бриллюэна (метод ВКБ [427, 235, 41]) стал основой волновой механики, а также теории распространения волн в неоднородных средах. Соответствующую математическую теорию развили Боголюбов и Митропольский [33] и Крускал [239]. Сейчас она широко известна как метод усреднения [1]).

Другое направление исследований, касающееся связанных нелинейных осцилляторов, началось с попыток решить задачу трех тел в небесной механике, которая служит упрощенной моделью Солнечной системы. Ранние работы по этой проблеме восходят к трудам Гамильтона и Лиувилля середины XIX в., которые стимулировали развитие гамильтоновой механики, лежащей в основе большинства современных исследований. К концу XIX в. многие идеи, касающиеся устойчивости нелинейных систем, были рассмотрены Пуанкаре [337] и применены им к проблемам небесной механики. Именно в этот период Пуанкаре, Цейпель [419] и другие разработали методы теории возмущений, которые оказались столь плодотворными при описании поведения нелинейных систем на

---

[1]) Асимптотические методы использовались уже Пуанкаре ([337], гл. 8) и были развиты для решения широкого круга задач нелинейной механики Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым и их школой (см., например, [242] и [447, т. 1]).— *Прим. ред.*

коротком интервале времени. Появление квантовой теории значительно стимулировало эти исследования. Так, резонансная теория возмущений, позволяющая учесть локальное резонансное взаимодействие между двумя степенями свободы, была сформулирована уже на заре квантовой механики [34]. Классическая теория возмущений, а также более современный формализм Ли (см., например, [102]) будут рассмотрены в гл. 2.

Важный вопрос, на который не смогла ответить ранняя теория возмущений, был вопрос о длительной устойчивости Солнечной системы. Преобладало мнение, что движение планет является «регулярным» (квазипериодическим) и в конечном счете может быть вычислено при помощи новых математических методов. Это мнение подкреплялось известными решениями задачи двух тел и других простых механических задач, а также интерпретацией палеонтологических данных, которые наводили на мысль о регулярности движения Земли вокруг Солнца в течение сотен миллионов лет.

Противоположный взгляд на механические системы со многими степенями свободы был выдвинут Больцманом при попытке понять поведение разреженных газов. Он считал, что движение молекул следует рассматривать как случайное, причем каждой молекуле доступна вся энергетически разрешенная область фазового пространства. Эта точка зрения известна как эргодическая гипотеза, ставшая основой классической статистической механики. Она была с успехом использована при объяснении многих наблюдаемых свойств вещества.

Первую попытку численной проверки эргодической гипотезы Больцмана для системы с умеренным числом степеней свободы предприняли Ферми, Паста и Улам [127], которые использовали модель в виде цепочки нелинейно взаимодействующих сосредоточенных масс. К их удивлению, численные эксперименты не подтвердили ожидаемое стохастическое движение модели.

Это глубокое противоречие между существованием интегрируемых систем, с одной стороны, и эргодических, с другой, было симптомом некоторой фундаментальной нерешенной проблемы классической механики. Определенный вклад в разрешение этого противоречия внес Пуанкаре: он продемонстрировал, что в окрестности неустойчивых неподвижных точек движение имеет чрезвычайно сложный характер. Это был первый намек на то, что регулярные силы могут порождать стохастическое движение в нелинейных колебательных системах. Впоследствии Биркгоф [29] показал, что при рациональном отношении частот для двух степеней свободы (резонанс) всегда существуют как устойчивые, так и неустойчивые неподвижные точки. Резонансы все более высокого порядка и более мелкого масштаба последовательно изменяют топологию фазовых траекторий и приводят к образованию «цепочки островов». Было установлено, что ряды теории возмущений не описывают такие резонансы.

Хотя работы Пуанкаре и Биркгофа продемонстрировали чрезвычайную сложность топологии фазового пространства, вопрос об эргодичности движения, т. е. о том, покрывает ли траектория всю энергетически доступную область фазового пространства или же она ограничена какими-то интегралами движения, оставался до недавнего времени без ответа. Теорема Колмогорова [229], доказанная при различных ограничениях Арнольдом [10] и Мозером [308] (теорема КАМ), утверждает, что при возмущении интегрируемых систем инвариантные поверхности сохраняются для большинства начальных условий. Хотя движение вблизи сепаратрисы каждого резонанса и является стохастическим, оно ограничено соседними инвариантными поверхностями и не является эргодическим. В гл. 3 мы рассмотрим теорию КАМ и связанные с ней топологические результаты, которые служат обоснованием многих методов, описанных в этой книге.

Наряду с достижениями теории возмущений и другими математическими результатами, одной из основных побудительных причин возрождения интереса к нелинейной механике было изобретение цифровой ЭВМ. Уже с самого начала использование ЭВМ для интегрирования уравнений движения было соединено с методом сечения Пуанкаре, при котором такое интегрирование N-мерных уравнений заменяется итерацией соответствующего $(N-1)$-мерного отображения. В результате оказалось возможным наблюдать за движением системы в фазовом пространстве в течение сотен тысяч колебаний. Обнаруженные уже в первых экспериментах удивительно тонкие пространственные структуры движения быстро привлекли внимание как теоретиков, так и экспериментаторов. Отсюда две основные особенности нашего изложения материала: мы существенно опираемся на результаты численного моделирования, с одной стороны, и на соответствие между непрерывным движением (N-мерным потоком) и его дискретным $(N-1)$-мерным отображением Пуанкаре — с другой (см. гл. 3). Центральным моментом нашего описания динамики является численный эксперимент, который считается, как правило, окончательной проверкой теоретического анализа. Примеры численного моделирования приводятся в каждой главе также для иллюстрации и пояснения физической сущности явлений.

Из детальных численных экспериментов и соответствующих теоретических исследований возникла весьма необычная картина фазового пространства слабо возмущенных систем. Вблизи резонансов топология невозмущенных инвариантных поверхностей изменяется и образуется характерная резонансная структура, похожая на «цепочку островов». Внутри островов топология также изменяется, приводя к еще более мелкой резонансной структуре и т. д. Однако вся эта структура — только часть полной картины движения, которая включает также плотную систему тонких слоев

со стохастическим движением. Анализу этой структуры посвящена большая часть гл. 3.

Для слабо возмущенных систем с двумя степенями свободы тонкие стохастические слои отделены друг от друга инвариантными поверхностями, а стохастические колебания переменных действия внутри слоя оказываются экспоненциально малыми (по возмущению). С увеличением возмущения возможен переход, при котором изолирующие инвариантные поверхности разрушаются и стохастические слои сливаются, приводя к глобальному стохастическому движению. Фазовое пространство можно разделить при этом на три области. Одна из них содержит в основном стохастические траектории. Она связана [1]) со второй областью, значительную часть которой составляет по-прежнему стохастическая компонента движения, но внутри ее уже имеются большие острова регулярного движения. Третья область содержит главным образом регулярные траектории и отделена от первых двух инвариантными поверхностями. Классический пример, иллюстрирующий переход от почти регулярного к существенно стохастическому движению, был предложен Хеноном и Хейлесом [188] для моделирования динамики в задаче трех тел[2]). Численные эксперименты и связанные с ними эвристические теории, развитые за последние двадцать лет, прояснили основные процессы и позволили определить величину возмущения, при которой происходит такой переход. Эти результаты иллюстрируются в гл. 3 на примере ускорения Ферми, первоначально предложенного для объяснения происхождения космических лучей. Рассматривается модель, в которой упругий шарик колеблется между неподвижной и вибрирующей стенками. Далее, в гл. 4, определяются условия перехода от локализованной стохастичности к глобальной. При этом используются различные подходы к задаче (см., например, [70, 165]).

Все упомянутые методы применялись при исследовании широкого круга задач как на начальном этапе развития теории, так и в последующих приложениях. Приложение к задаче трех тел и ее многочисленным вариантам ознаменовало по существу начало широких исследований в данной области[3]). Возникают и новые захватывающие приложения в астрономии, например структура колец Сатурна или пояса астероидов. Качественно это удается понять на основе представления о резонансах с большими возмущающими телами. Однако количественные данные о ширине колец Сатурна и люков в распределении астероидов, а также недавно наблюдавшуюся с космических кораблей сложную структуру колец Сатурна еще предстоит объяснить.

---

[1]) Траекториями движения.— *Прим. ред.*

[2]) Этот пример возник из задачи о движении звезды в поле галактики.— *Прим. ред.*

[3]) Это, пожалуй, преувеличение, вспомним хотя бы классические труды Пуанкаре по небесной механике.— *Прим. ред.*

Другим важным приложением является движение заряженной частицы в магнитном и электрическом полях. Прежде всего было установлено, что магнитный момент является адиабатическим инвариантом, связанным с ларморовским вращением заряженной частицы [7]. В дальнейшем были рассмотрены адиабатические инварианты и для других степеней свободы частицы. Эта задача стимулировала развитие асимптотических разложений и техники усреднения, а также исследования Чирикова [67], в которых он изучал переход между регулярным и стохастическим движением и установил первый критерий такого перехода (критерий перекрытия резонансов). В дальнейшем был проведен учет влияния высокочастотного поля вследствие его резонанса с ларморовским вращением. В результате был найден предел для высокочастотного нагрева, связанный с существованием инвариантных кривых. Родственная задача о движении частицы в намагниченной плазме под действием волны, иллюстрирующая многие из вышеупомянутых особенностей движения, используется в качестве примера для резонансной теории возмущений (гл. 2) и для определения перехода от адиабатического поведения к стохастическому (гл. 4). Другим интересным приложением теории является движение частиц в ускорителях. Именно в этой области были проведены некоторые ранние исследования поведения многомерных нелинейных систем. Уравнения Гамильтона могут быть использованы также и для описания других типов траекторий, таких, как магнитные линии или лучи в геометрической оптике. В случае аксиально симметричной тороидальной геометрии гамильтониан, описывающий магнитные линии, оказывается интегрируемым. К настоящему времени уже проведен ряд исследований по разрушению тороидальных магнитных поверхностей возмущениями, возникающими как от внешних токов, так и от самосогласованных токов удерживаемой плазмы. Подобные приложения используются ниже в качестве примеров, а также кратко обсуждаются в дополнении А.

Существование движений, которые проявляются при численном моделировании как случайные, надежно установлено. Однако математические попытки охарактеризовать стохастичность с помощью таких понятий, как эргодичность, перемешивание и тому подобное, далеко не всегда оказывались успешными [1]). Синай [377] доказал эти свойства для газа твердых шариков. Было показано также, что некоторые модельные гамильтоновы системы обладают даже более сильными стохастическими свойствами. Эти результаты, описанные в гл. 5, дают основание считать, что случайность движения имеет место и для типичной гамильтоновой системы в том случае, когда она обладает поведением, характерным для идеализированных моделей.

[1]) Здесь, по-видимому, имеются в виду трудности аналитического выявления указанных свойств в конкретных динамических системах. — *Прим. ред.*

Кажущаяся стохастичность [1]) движения в подобных сложных системах дает основание говорить о принципиально новом подходе к статистической механике и поэтому привлекает к себе все более широкий круг исследователей в этой области. Сложность движения вблизи неустойчивых периодических решений и тот факт, что эти неустойчивые траектории образуют в фазовом пространстве всюду плотное множество, служат серьезным доводом в пользу такой точки зрения. В последнее время значительные усилия были направлены на выяснение связи стохастического движения с показателями Ляпунова, которые определяют скорость экспоненциальной расходимости близких траекторий. Это важно также и с практической точки зрения для вычисления усредненной по фазам скорости диффузии по переменным действия. В прошлом такие вычисления проводились в предположении о случайности фаз. Ясно, что это предположение несправедливо при наличии инвариантных кривых, ограничивающих область изменения фаз. Даже в случае полной эргодичности, когда движение охватывает всю энергетическую поверхность, необходимо еще определить масштаб времени, на котором фазы становятся случайными. Проведенные численные и аналитические исследования позволили глубже понять проблему убывания фазовых корреляций вблизи инвариантных поверхностей. Эти вопросы будут рассмотрены в гл. 5.

Существует значительное различие между стохастичностью в системах с двумя и бо́льшим числом степеней свободы. Используя топологические соображения, Арнольд [12] показал[2]), что для систем с более чем двумя степенями свободы стохастические слои связаны между собой и образуют в фазовом пространстве плотную «паутину». Для начальных условий на этой паутине стохастическое движение идет вдоль слоев, приводя к глобальной диффузии, не ограниченной инвариантными поверхностями. Этот механизм принято называть диффузией Арнольда. Она может быть быстрой или медленной в зависимости от толщины стохастических слоев. Такая диффузия существует (в принципе) для сколь угодно малых возмущений интегрируемых систем. Еще один интересный эффект в многомерных системах связан с медленной модуляцией одного из периодических движений[3]). В этом случае стохастическое движение вдоль паутины может значительно усиливаться за счет так называемой модуляционной диффузии. Этот механизм противоречит интуитивному представлению о том, что медленная модуляция должна приводить к адиабатическому поведению[4]). В многомерных системах резонансы могут значительно влиять на диффузию также

---

[1]) Этот осторожный термин сейчас уже не оправдан (см., например, [448] и популярные статьи [61, 449—452]).— *Прим. ред.*

[2]) См. также [462].— *Прим. ред.*

[3]) Имеются в виду невозмущенные колебания по одной из независимых степеней свободы.— *Прим. ред.*

[4]) См. примечание редактора на с. 367.— *Прим. ред.*

и благодаря внешней стохастичности (шуму). Для систем с двумя степенями свободы действие шума эквивалентно, вообще говоря, наличию третьей степени свободы и приводит к диффузии вдоль резонансов. При этом резонансы могут значительно увеличивать скорость диффузии. Считается, что эти процессы могут ограничивать время жизни частиц и интенсивность пучков в накопительных кольцах. В гл. 6 мы рассмотрим диффузионные процессы в многомерных системах, включая диффузию Арнольда и модуляционную диффузию, а также совместное действие внешнего шума и резонансов.

Новая область явлений возникает в диссипативных системах, фазовый объем которых не остается постоянным, а сокращается со временем. Конечное состояние в этом случае представляет собой движение на некотором подпространстве, называемом аттрактором, размерность которого меньше размерности исходного фазового пространства. Изучение регулярного движения в таких системах восходит к Ньютону и в дальнейшем было связано с развитием теории обыкновенных дифференциальных уравнений. На этой ранней стадии было выяснено, что траектория может притягиваться к таким простым аттракторам, как неподвижные точки, замкнутые траектории и торы, на которых устанавливается, соответственно состояние равновесия, периодическое и квазипериодическое движение. И только сравнительно недавно, в пионерской работе Лоренца [283], было показано, что и в диссипативных системах встречается хаотическое движение. Лоренц обнаружил такой аттрактор в модели, описываемой системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Рюэль и Тэкенс [355] использовали для аттрактора с хаотическим движением термин «странный аттрактор»[1]). Топология странных аттракторов весьма примечательна. Она характеризуется масштабной инвариантностью[2]), при которой структура аттрактора повторяется на все более мелких пространственных масштабах. Такие структуры, называемые фракталами, обладают любопытным свойством дробной размерности, промежуточной между размерностью точки и линии, линии и плоскости и т. д.

Когда геометрическая структура странных аттракторов была выяснена, возникла качественная картина движения, важной особенностью которой является близкое соответствие между движе-

---

[1]) В литературе уже отмечалась странность этого термина [74]. Для современной эргодической теории подобный аттрактор является, напротив, естественным. Его существование вытекает, в частности, из теоремы Аносова [8] о структурной устойчивости хаоса для динамических систем определенного класса, которые получили позднее название систем Аносова. С другой стороны, упоминаемая ниже фрактальная структура хаотического аттрактора не является универсальной, это может быть, например, и просто тор.— *Прим. ред.*

[2]) В оригинале — geometric invariance (геометрическая инвариантность).— *Прим. перев.*

нием на странном аттракторе и движением, описываемым некоторым одномерным необратимым отображением. Такие отображения не возникают непосредственно из диссипативных потоков[1]), но являются важными примерами простых систем с хаотическим поведением и находят приложение в таких разных областях, как экономика и экология. При изменении параметра эти отображения испытывают последовательные бифуркации, такие, что период предельного цикла каждый раз удваивается. Бифуркации накапливаются при некотором критическом значении параметра, выше которого движение становится хаотическим. Фейгенбаум [122] показал, что этот процесс является в некотором смысле универсальным.

Однако фактически странные аттракторы появились впервые в трехмерных потоках и связанных с ними двумерных отображениях. В этом случае также имеет место последовательность бифуркаций с удвоением периода. Для понимания поведения таких систем важно знать движение вблизи сепаратрисных слоев и инвариантные распределения[2]). Несмотря на соответствие между одномерными и двумерными отображениями, наше знание последних недостаточно. Например, в настоящее время нет никакого метода для отыскания перехода к странному аттрактору в многомерных системах.

Появление странных аттракторов в трехмерных потоках, таких, как модель Лоренца, указывает на один из возможных механизмов возникновения гидродинамической турбулентности. Это стимулировало исключительно точные экспериментальные измерения вблизи перехода от ламинарного к турбулентному течению в реальных жидкостях. Модель Лоренца была получена фактически из задачи о конвекции Рэлея—Бенара в подогреваемом снизу слое жидкости с учетом только трех мод движения. Хаотическое движение в трехмерной модели Лоренца представляет возможную картину турбулентности и в некоторых реальных гидродинамических системах, которая оказывается проще, чем первоначальные представления Ландау [251]. Динамика диссипативных систем рассматривается в гл. 7, включая одномерные и двумерные отображения, а также гидродинамические приложения.

*§ 1.2. Теория преобразований в механике

В этом параграфе дается краткий обзор основных понятий гамильтоновой механики, необходимых для анализа динамики в фазовом пространстве. Изложение материала близко к книге Голдстейна [156] (гл. 8 и 9) и существенно опирается на курс Уиттекера [430]. Большинство длинных доказательств опущено.

---

[1]) Это не совсем так, первый пример такого отображения был построен еще Лоренцем [283] (см. также [210] и п. 1.5б).— *Прим. ред.*

[2]) То есть инвариантную меру на аттракторе.— *Прим. ред.*

* 1.2а. Канонические преобразования

Различные эквивалентные формы уравнений движения можно получить друг из друга путем преобразования переменных. Одна из таких форм получается в результате введения функции Лагранжа

$$L\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\right) = T\left(\dot{\boldsymbol{q}}\right) - U(\boldsymbol{q}, t), \tag{1.2.1}$$

где $\boldsymbol{q}$ и $\dot{\boldsymbol{q}}$ — векторы координат и скоростей по всем степеням свободы, T — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия и все связи предполагаются независящими от времени. Уравнения движения Лагранжа для каждой из координат q_i имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{1.2.2}$$

Эти уравнения можно получить либо из вариационного принципа ($\delta \int L dt = 0$), либо путем прямого сравнения с законами движения Ньютона. Определим гамильтониан посредством соотношения

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i - L\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\right), \tag{1.2.3}$$

где $\dot{\boldsymbol{q}}$ рассматривается как функция $\boldsymbol{q}$ и новой переменной $\boldsymbol{p}$. Вычисляя дифференциал H, получаем

$$\begin{aligned} dH = &\sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \\ &= \sum_i \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \\ &- \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

где мы подставили (1.2.2) в третью сумму справа. Уравнение (1.2.4) может быть удовлетворено только, если определить p_i как

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{1.2.5}$$

При этом первая сумма справа в (1.2.4) тождественно обращается в нуль. Приравнивая коэффициенты при дифференциалах, получаем уравнения движения, содержащие только первые производные,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{1.2.6а}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.2.6б}$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{1.2.7}$$

Переменные $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ называются *обобщенными импульсами и координатами*, а соотношения (1.2.6) и (1.2.7) есть уравнения Гамильтона. Исследование характера решений этих уравнений составляет основное содержание настоящей монографии. Любой набор переменных $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, временна̀я эволюция которых дается уравнениями вида (1.2.6), называется *каноническим*, а сами p_i и q_i — сопряженными переменными.

Производящие функции от смешанных переменных. Пусть мы хотим перейти от канонических переменных $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ к новым переменным $\bar{\boldsymbol{q}}$, $\bar{\boldsymbol{p}}$. Их можно связать при помощи некоторой функции от одной старой и одной новой переменных следующим образом. Так как лагранжиан получается из вариационного принципа, то, используя (1.2.3), находим

$$\delta\left[\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i p_i\dot{q}_i - H(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ t)\right)dt\right]=0. \tag{1.2.8}$$

Это уравнение справедливо как для старых, так и для новых канонических переменных. Поэтому интеграл в (1.2.8) для разных переменных может отличаться только на полный дифференциал:

$$\sum_i p_i\dot{q}_i - H(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ t) = \sum_i \bar{p}_i\dot{\bar{q}}_i - \bar{H}(\bar{\boldsymbol{p}},\ \bar{\boldsymbol{q}},\ t) + \frac{d}{dt}F_1(\boldsymbol{q},\ \bar{\boldsymbol{q}},\ t), \tag{1.2.9}$$

где мы выбрали функцию $F = F_1$, зависящей от $\boldsymbol{q}$ и $\bar{\boldsymbol{q}}$. Раскрывая полную производную от F_1, получаем

$$\frac{dF_1(\boldsymbol{q},\ \bar{\boldsymbol{q}},\ t)}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i}\dot{\bar{q}}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{1.2.10}$$

Считая переменные в (1.2.10) независимыми, из (1.2.9) (сравнивая соответствующие члены и требуя, чтобы члены с $\dot{q}_i$ и $\dot{\bar{q}}_i$ по отдельности равнялись нулю) находим

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \tag{1.2.11а}$$

$$\bar{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i}, \tag{1.2.11б}$$

$$\bar{H}(\bar{\boldsymbol{p}},\ \bar{\boldsymbol{q}},\ t) = H(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ t) + \frac{\partial}{\partial t}F_1(\boldsymbol{q},\ \bar{\boldsymbol{q}},\ t). \tag{1.2.11в}$$

Можно определить производящие функции и от других пар смешанных (старой и новой) канонических переменных:

$$F_2(\boldsymbol{q}, \bar{\boldsymbol{p}}, t), \quad F_3(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{q}}, t), \quad F_4(\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{p}}, t).$$

Если, например, ввести F_2 при помощи преобразования Лежандра

$$F_2(\boldsymbol{q}, \bar{\boldsymbol{p}}, t) = F_1(\boldsymbol{q}, \bar{\boldsymbol{q}}, t) + \sum_i \bar{q}_i \bar{p}_i, \tag{1.2.12}$$

где $\bar{\boldsymbol{q}}$ — функция $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{p}$, то получим *каноническое преобразование* в виде

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \tag{1.2.13а}$$

$$\bar{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_i}, \tag{1.2.13б}$$

$$\bar{H}(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, t) = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) + \frac{\partial}{\partial t} F_2(\boldsymbol{q}, \bar{\boldsymbol{p}}, t). \tag{1.2.13в}$$

Производящие функции F_3 и F_4 определяются соотношениями, аналогичными (1.2.12), и приводят к соответствующим каноническим преобразованиям.

Канонические преобразования позволяют, по крайней мере формально, решить уравнения движения динамической системы следующим образом. Рассмотрим отдельно случай гамильтониана, зависящего явно от времени, и случай *автономного* гамильтониана, не зависящего от времени. В первом случае положим $\bar{H} \equiv 0$. Тогда производные по времени от новых переменных равны нулю в силу уравнений Гамильтона. Поэтому новые переменные не зависят от времени и их можно интерпретировать как начальные значения исходных (непреобразованных) переменных. Таким образом, каноническое преобразование фактически оказывается решением, определяющим значения координат и импульсов в произвольный момент времени в зависимости от их начальных значений. Подставив (1.2.13а) в (1.2.13в) с $\bar{H} = 0$, получим уравнение в частных производных для производящей функции F_2:

$$H\left(\frac{\partial F_2}{\partial \bar{q}}, \bar{q}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0, \tag{1.2.14}$$

которое называется *уравнением Гамильтона—Якоби*. Во втором случае, когда H не зависит от времени явно, достаточно положить $\bar{H}$ равным константе. Тогда преобразование (1.2.13в) приводит к уравнению Гамильтона—Якоби в виде

$$H\left(\frac{\partial F_2}{\partial \bar{q}}, \bar{q}\right) = E. \tag{1.2.15}$$

Если переменные в уравнениях (1.2.14) и (1.2.15) *не разделяются*,

то решить их столь же трудно, как и исходные канонические уравнения. Однако метод Гамильтона—Якоби очень удобен для получения приближенных решений в виде рядов для систем, близких к системам с разделяющимися переменными, или, как их чаще называют, для *систем, близких к интегрируемым*.

Скобки Пуассона. Важной динамической величиной являются *скобки Пуассона*:

$$[u,\ v]=\sum_k\left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k}-\frac{\partial v}{\partial q_k}\frac{\partial u}{\partial p_k}\right), \tag{1.2.16}$$

где u и v — произвольные функции канонических переменных. Уравнения движения можно записать с помощью скобок Пуассона следующим образом. Выбрав в качестве u координату, а в качестве v гамильтониан системы, получим

$$[q_i,\ H]=\sum_k\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial q_i}{\partial p_k}\right)=\frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Сравнивая с уравнениями Гамильтона, имеем

$$\dot{q}_i=[q_i,\ H] \tag{1.2.17}$$

и аналогично

$$\dot{p}_i=[p_i,\ H]. \tag{1.2.18}$$

Скобки Пуассона удовлетворяют правилу антикоммутации

$$[u,\ v]=-[v,\ u] \tag{1.2.19}$$

и тождеству Якоби

$$[[u,\ v],\ w]+[[w,\ u],\ v]+[[v,\ w],\ u]=0. \tag{1.2.20}$$

Используя уравнения Гамильтона, можно записать полную производную по времени от произвольной функции $\chi=\chi(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p},\ t)$ в виде

$$\frac{d\chi}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial\chi}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial\chi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial\chi}{\partial t}=[\chi,\ H]+\frac{\partial\chi}{\partial t}. \tag{1.2.21}$$

При отсутствии явной зависимости от времени $\partial\chi/\partial t=0$. Если к тому же и скобки Пуассона равны нулю, то говорят, что функция χ коммутирует с гамильтонианом и является интегралом движения. Ясно, что если гамильтониан не зависит от времени явно, то и он является интегралом. Такие гамильтонианы называются *автономными*. Выберем в качестве функции χ один из импульсов p_i и пусть он не является явной функцией времени t. Если при этом гамильтониан не зависит от сопряженной координаты (т. е.

$\partial H/\partial q_i = 0$), то из (1.2.21) вытекает, что $dp_i/dt = 0$ и, следовательно, p_i является интегралом движения

$$p_i = \alpha_i = \text{const}, \tag{1.2.22}$$

а

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i = \text{const}. \tag{1.2.23}$$

Интегрируя (1.2.23), получаем решение в виде

$$q_i = \omega_i t + \beta_i. \tag{1.2.24}$$

Если можно найти такое каноническое преобразование, что все новые импульсы оказываются постоянными, то решение в новых канонических переменных описывается соотношениями (1.2.22) и (1.2.24). Обратное преобразование в этом случае дает полное решение в исходных переменных. Производящей функцией такого преобразования служит решение уравнения Гамильтона—Якоби (1.2.15).

Другой метод интегрирования уравнений движения связан с использованием производящей функции $w(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, s)$, задающей каноническое преобразование (от старых переменных $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ к новым переменным $\overline{\boldsymbol{p}}$, $\overline{\boldsymbol{q}}$) в виде уравнений Гамильтона:

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial w}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial w}{\partial p_i}, \tag{1.2.25}$$

где s — произвольный параметр. При этом связь новых и старых переменных дается соотношениями

$$\overline{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}(s), \quad \overline{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}(s). \tag{1.2.26}$$

Функция w называется *производящей функцией Ли* и зависит только от старых переменных. Использование такой функции упрощает вычисление высших порядков теории возмущений. Мы обсудим этот метод в § 2.5.

В заключение заметим, что успех метода канонических преобразований определяется разумным выбором преобразования. Сами по себе эти преобразования не приводят к новой физике, но могут помочь при анализе или физической интерпретации того или иного движения, свойства которого остаются, однако, неизменными как в старых, так и в новых переменных.

* 1.2б. Движение в фазовом пространстве

Рассмотрим уравнения Гамильтона (1.2.6) в общем случае N степеней свободы, когда индекс i пробегает значения от 1 до N.

Решение уравнений (1.2.6) содержит $2N$ постоянных, соответствующих начальным значениям координат и импульсов. Они однозначно определяют эволюцию системы, которую можно представ-

лять себе как движение точки в $2N$-мерном пространстве. Предположим, что мы решили уравнения (1.2.6) и нашли зависимость $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ от времени. Тогда мы можем проследить траекторию движения в $2N$-мерном пространстве с координатами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ от некоторого момента времени t_1, соответствующего начальным значениям $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{q}_1$, до более позднего момента t_2. Такое объединенное пространство $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ называется *фазовым пространством* системы. Примеры трех фазовых траекторий показаны на рис. 1.1, где фазовое пространство представлено в двух измерениях, так что абсцисса характеризует N координат $\boldsymbol{q}$, а ордината — N импульсов $\boldsymbol{p}$. Рассмотрим три важных свойства фазового пространства.

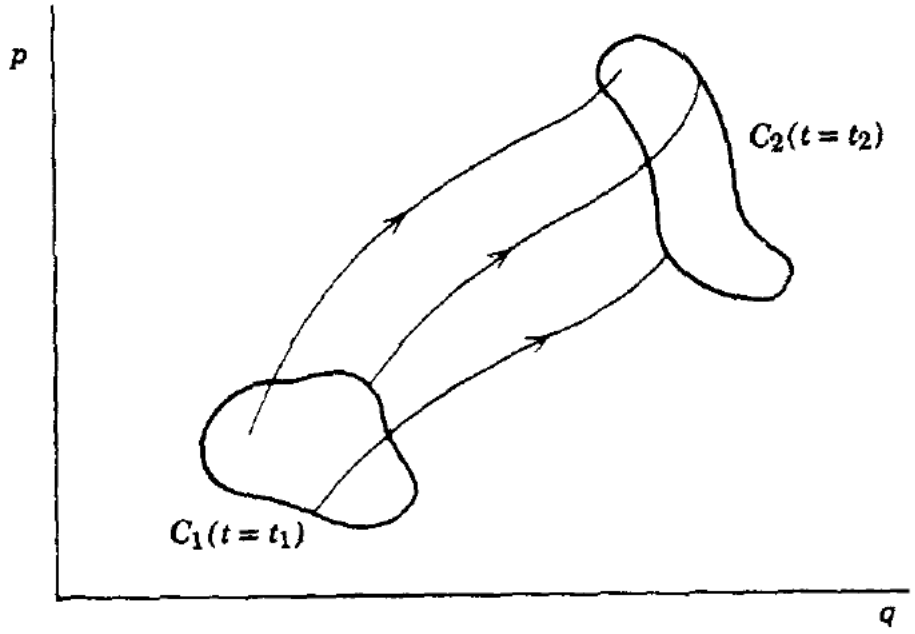


Рис. 1.1. Траектории в фазовом пространстве.

1. В любой заданный момент времени траектории в фазовом пространстве не пересекаются. Это очевидно из того факта, что начальные условия однозначно определяют последующее движение. Поэтому если бы две траектории совпали, т. е. в какой-то момент времени их значения $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ оказались бы одинаковыми, то и последующее их движение было бы одинаковым. Если гамильтониан не зависит от времени, то траектории в фазовом пространстве также не зависят от времени и, следовательно, вообще не могут пересекаться. Очевидно, что в расширенном фазовом пространстве с добавочной временно́й координатой траектории не будут пересекаться, даже если гамильтониан периодически зависит от времени[1]).
2. Любая граница C_1 в фазовом пространстве, охватывающая некоторое множество начальных условий в момент времени t_1, трансформируется к моменту времени t_2 в границу C_2, охватывающую траектории того же множества. Это свойство вы-

[1]) Периодическая зависимость здесь несущественна и упомянута, очевидно, только для того, чтобы расширенное фазовое пространство было компактным (ограниченным).— *Прим. ред.*

текает непосредственно из предыдущего, поскольку любая траектория в момент пересечения границы совпадает с одной из граничных траекторий, а значит, и движется вместе с ней. Отсюда можно получить ограничения на движение большой группы траекторий, определяя движение гораздо более узкого класса траекторий, принадлежащих границе.

3. Рассмотрим некоторый ансамбль начальных условий, каждое из которых представляет возможное состояние системы. Представим вероятность ансамбля, или его плотность распределения в фазовом пространстве, в виде

$$\tau = \tau(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t).$$

Если нормировать τ так, чтобы выполнялось условие

$$\int \tau \prod_i dp_i dq_i = 1, \tag{1.2.27}$$

где интегрирование распространяется на все фазовое пространство[1]), то из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\tau \dot{p}_i \right) + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\tau \dot{q}_i \right) \right) = 0 \tag{1.2.28}$$

находим

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_i \left(\dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \tau \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} + \tau \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right) = 0. \tag{1.2.29}$$

Согласно уравнениям Гамильтона (1.2.6), второй и четвертый члены суммы сокращаются, и мы получаем уравнение

$$\sum_i \left(\dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0, \tag{1.2.30}$$

выражающее *несжимаемость потока* в фазовом пространстве. Этот результат известен как теорема Лиувилля, которая оказывается мощным инструментом анализа гамильтоновой динамики (подробное обсуждение и примеры см. в работе [265]).

Интегральные инварианты. Благодаря вышеперечисленным свойствам анализ движения в фазовом пространстве приводит к значительным упрощениям при исследовании динамических задач. В частности, из (1.2.30) немедленно следует, что $2N$-мерный интеграл

$$\int \prod_i dp_i dq_i, \tag{1.2.31}$$

вычисленный в определенный момент времени t, является инвариантом движения. Иерархия таких инвариантов разной размер-

[1]) Такая нормировка обычно невыполнима из-за неограниченности фазового пространства и несущественна для дальнейшего.— *Прим. ред.*

ности впервые изучалась Пуанкаре [337]. Они были названы им интегральными инвариантами. Общий вывод таких инвариантов дается в работе [430][1]). Интегральные инварианты имеют фундаментальное значение для теории гамильтоновых систем и могут быть приняты в качестве ее основы [13]. Мы рассмотрим первый член этой иерархии [для которой (1.2.31) является N-м и последним членом]:

$$\int\int \sum_i dp_i dq_i = \text{const}, \tag{1.2.32}$$

где интеграл берется в определенный момент времени по некоторой двумерной поверхности в фазовом пространстве.

Применив теорему Стокса к (1.2.32), получим инвариант

$$\oint \sum_i p_i dq_i = \text{const}, \tag{1.2.33}$$

где интегрирование производится теперь по замкнутой в фазовом пространстве кривой при фиксированном значении t. Величина (1.2.33) называется относительным интегральным инвариантом системы. В общем случае применение теоремы Стокса понижает размерность области интегрирования на единицу и преобразует интегральный инвариант, взятый по произвольному гиперобъему, в относительный инвариант, взятый по замкнутой гиперповерхности. Относительные интегральные инварианты особенно важны для колебательных систем (см. ниже).

Расширенное фазовое пространство. Рассмотрим теперь гамильтониан H, явно зависящий от времени. Вариационный принцип (1.2.8), из которого получаются уравнения Гамильтона, справедлив при интегрировании по любому параметру, не зависящему от вариации. Обозначим такой параметр через ζ и перепишем (1.2.8) в виде

$$\delta \int \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{dq_i}{d\zeta} - H \frac{dt}{d\zeta} \right) d\zeta = 0. \tag{1.2.34}$$

Положив

$$\bar{p}_i = p_i \quad \bar{q}_i = q_i, \quad i = 1, N,$$
$$\bar{p}_{N+1} = -H, \quad \bar{q}_{N+1} = t, \tag{1.2.35}$$

получим новую форму вариационного уравнения

$$\delta \int \sum_{i=1}^{N+1} \bar{p}_i \frac{d\bar{q}_i}{d\zeta} d\zeta = 0,$$

где $-H$ и t можно рассматривать как дополнительные импульс

[1]) См. также [13].— *Прим. перев.*

и координату в некотором новом *расширенном фазовом пространстве* размерности $(2N+2)$. Поток параметризуется теперь новым «временем» ζ.

Новый гамильтониан $\overline{H}$ для расширенного набора канонических переменных $(\boldsymbol{p}, -H, \boldsymbol{q}, t)$ можно получить с помощью производящей функции

$$F_2 = \sum_{i=1}^{N} \bar{p}_i q_i + \bar{p}_{N+1} t. \tag{1.2.36}$$

Используя (1.2.13в), находим $\overline{H}(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, t) = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) - H$, и канонические уравнения принимают вид

$$\frac{d\bar{p}_i}{d\zeta} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{q}_i}, \qquad \frac{d\bar{q}_i}{d\zeta} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{p}_i}. \tag{1.2.37}$$

Новый гамильтониан, определяющий поток в расширенном фазовом пространстве, не зависит явно от «времени» ζ. Кроме того уравнения (1.2.37) с $i = N+1$ дают: $t(\zeta) = \zeta$ и $\overline{H} = \text{const}$. Таким образом, движение системы с гамильтонианом, зависящим от времени, эквивалентно движению с дополнительной степенью свободы и гамильтонианом, не зависящим от времени[1]).

Справедливо и обратное. Рассмотрим независящий от времени гамильтониан $\overline{H}$ для системы с N степенями свободы в $2N$-мерном фазовом пространстве. Выберем любую из обобщенных координат в качестве нового «времени» ζ. Тогда канонически сопряженный ей импульс представляет новый гамильтониан H, зависящий от «времени» и описывающий движение системы с $(N-1)$ степенями свободы в *сокращенном фазовом пространстве* размерности $(2N-2)$. Пусть, например,

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = H_0. \tag{1.2.38}$$

Положим

$$\bar{p}_i = p_i, \quad \bar{q}_i = q_i, \quad i = 1, \quad N-1 \tag{1.2.39}$$

и разрешим (1.2.38) относительно $p_N = p_N(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, q_N)$. Выбирая $\overline{H} = -p_N$ и $\zeta = q_N$, мы получаем уравнения Гамильтона (1.2.37) в сокращенном фазовом пространстве $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}})$, где новый гамильтониан оказывается явной функцией «времени» ζ (подробности см. в работе [430], § 141).

Таким образом, теория, развитая для независящего от времени гамильтониана с N степенями свободы, применима также и к гамильтониану, зависящему от времени, но с $N-1$ степенями свободы. В частности, независящий от времени гамильтониан с двумя сте-

---

[1]) Эти рассуждения несколько формальны. Более существенно то, что движение по дополнительной координате задано, например, $t(\zeta) = \zeta$. В этом состоит также отличие от рассматриваемого далее движения в сокращенном фазовом пространстве.— *Прим. ред.*

пенями свободы динамически эквивалентен гамильтониану с одной степенью свободы, зависящему от времени.

Интеграл действия. Рассмотрим связь между относительным интегральным инвариантом (1.2.33), для которого интегрирование проводится в некоторый определенный момент времени t, и интегралом действия для одномерной колебательной системы с независящим от времени гамильтонианом. Интеграл действия определяется как

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq, \tag{1.2.40}$$

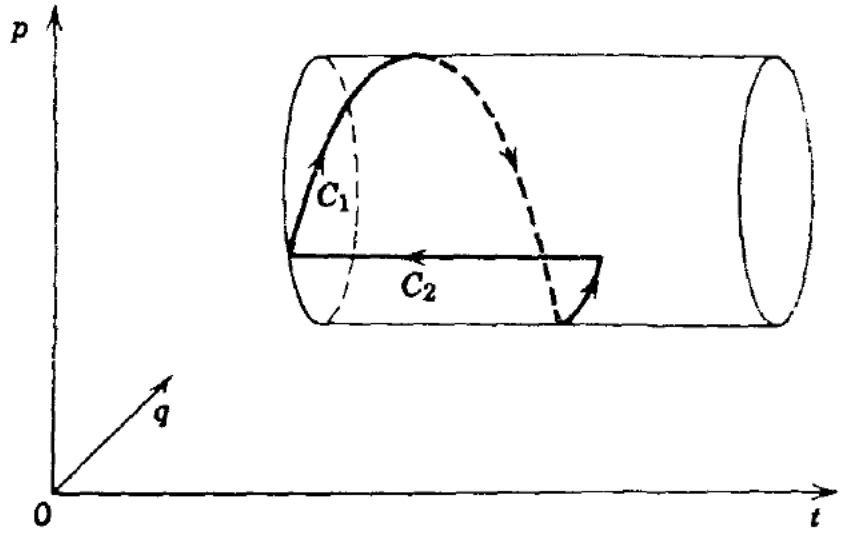


Рис. 1.2. Контур интегрирования для вычисления переменной действия.

где интегрирование производится по одному периоду колебаний.

В терминах расширенного фазового пространства выражение (1.2.33) для одномерного осциллятора можно переписать в виде

$$\oint (p\, dq - H\, dt) = \text{const},$$

причем интегрирование производится при $\zeta = \text{const}$. Поскольку выбор ζ произволен, то новый путь интегрирования, который включает и изменение времени, может быть выбран так, что часть его будет проходить вдоль действительной траектории системы в фазовом пространстве. Для специального случая $H = \text{const}$ второе слагаемое обращается в нуль при интегрировании по любому замкнутому контуру, и мы получаем

$$\oint p\, dq = \text{const}. \tag{1.2.41}$$

Если теперь выбрать пучок траекторий, вокруг которого производится интегрирование, как это показано на рис. 1.2, то полный путь интегрирования будет состоять из двух частей

$$\oint p\, dq = \int_{C_1} p\, dq + \int_{C_2} p\, dq, \tag{1.2.42}$$

где путь C_1 охватывает один период колебаний. При этом конечные

точки кривой C_1 имеют одинаковые значения q, и поэтому путь C_2 можно выбрать так, что $q = \text{const}$. Вследствие этого из (1.2.40) и (1.2.42) получаем

$$\int_{C_1} p\,dq = \text{const} = 2\pi J. \tag{1.2.43}$$

Отсюда вытекает эквивалентность интеграла действия и относительного интегрального инварианта в рассматриваемом случае[1]). Значение интеграла действия определяется прежде всего тем, что он является каноническим импульсом в переменных действие — угол (см. § 1.2в). Помимо этого, он оказывается *адиабатическим* инвариантом движения, т. е. остается приблизительно постоянным в случае медленного, по сравнению с периодом колебаний, изменения гамильтониана со временем. Адиабатическое постоянство действия подробно рассматривается в § 2.3 и имеет фундаментальное значение для понимания регулярного движения в системах с гамильтонианом, зависящим от времени, и в системах с несколькими степенями свободы.

Сечение Пуанкаре. Метод сечения Пуанкаре является одним из основных методов анализа гамильтоновой динамики. Для автономных систем с двумя степенями свободы фазовое пространство четырехмерно. Выберем в фазовом пространстве некоторую двумерную поверхность $\sum_R$ (см. рис. 1.3, *а*) и рассмотрим последовательные пересечения ее траекторией. Пересечение происходит каждый раз, когда траектория проходит сквозь поверхность в некотором определенном направлении (например, слева направо).

В частности, удобно выбрать поверхность сечения $\sum_R$ следующим образом. Заметим прежде всего, что траектория лежит на трехмерной энергетической поверхности $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = H_0$ в четырехмерном фазовом пространстве [см. рис. 1.3, *б* (*1*)]. Это уравнение определяет любую из четырех переменных, скажем p_2, как функцию трех остальных

$$p_2 = p_2(p_1, q_1, q_2). \tag{1.2.44}$$

Рассмотрим проекцию траектории на трехмерный объем (p_1, q_1, q_2) на рис. 1.3, *б* (*2*). Если движение ограничено, то траектория будет все время пересекать определенную плоскость $q_2 = \text{const}$ внутри этого объема. Эту плоскость, заданную координатой q_1 и сопряженным импульсом p_1, удобно выбрать в качестве поверхности сечения $\sum_R$. В общем случае последовательные пересечения траектории с поверхностью $\sum_R$ будут произвольно распределены в не-

---

[1]) Этот результат можно получить и проще, заметив, что при $H = \text{const}$ смещение вдоль фазовой траектории эквивалентно изменению начальных условий.— *Прим. ред.*

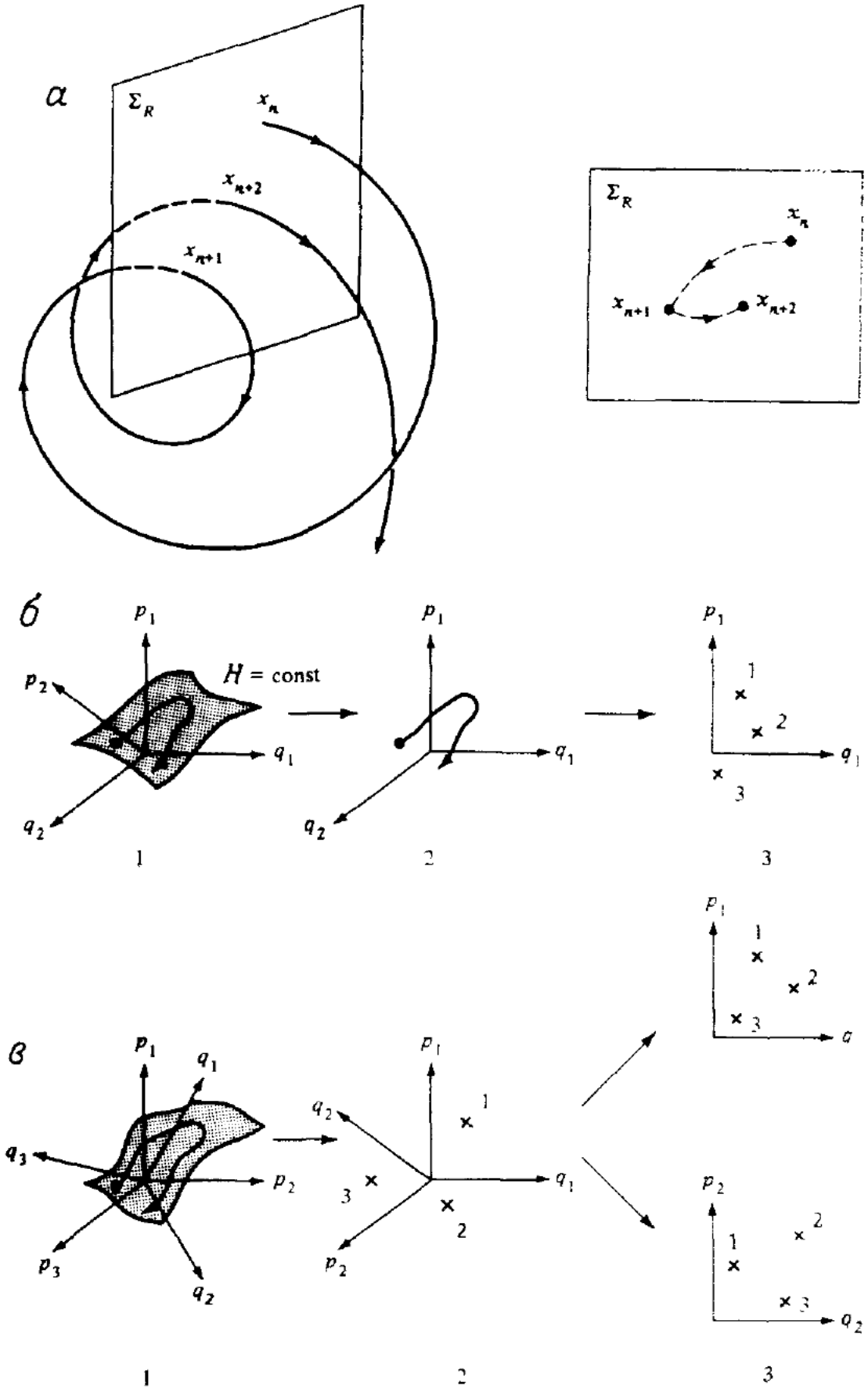


Рис. 1.3. Сечение Пуанкаре в фазовом пространстве.

а — пересечения траектории с поверхностью Σ_R; *б* — две степени свободы: *1* — траектория в четырехмерном фазовом пространстве, лежащая на трехмерной энергетической поверхности; *2* — ее проекция на поверхность (p_1, q_1, q_2); *3* — последовательные пересечения траектории с двумерной поверхностью q_2 = const (крестики); *в* — три степени свободы: *1* — траектория в шестимерном фазовом пространстве, лежащая на пятимерной энергетической поверхности; *2* — три последовательных пересечения траектории с четырехмерной поверхностью q_3 = const; *3* — проекция этих пересечений на плоскости (p_1, q_1) и (p_2, q_2).

которой ограниченной области $\sum_R$. В случае существования дополнительного (помимо H_0) интеграла движения

$$I(p_1, p_2, q_1, q_2) = \text{const} \tag{1.2.45}$$

из (1.2.44) и (1.2.45) следует

$$p_1 = p_1(q_1, q_2). \tag{1.2.46}$$

Поэтому последовательные пересечения должны лежать на некоторой инвариантной кривой, определяемой уравнением (1.2.46) с $q_2 = \text{const}$. Таким образом, существование интегралов движения можно определить из анализа пересечений траекторий с поверхностью $\sum_R$. После того как существование интеграла установлено, можно исследовать локальную устойчивость и другие интересные свойства инвариантных кривых.

Отметим, что рассматриваемая поверхность сечения (p_1, q_1) как раз и является *сокращенным фазовым пространством* исходной гамильтоновой системы, а последовательные пересечения получаются друг из друга путем канонического преобразования, определяемого уравнениями Гамильтона. Поэтому площадь, ограниченная замкнутой кривой, на поверхности сечения сохраняется. Это важное свойство можно получить и непосредственно следующим образом. Запишем общие дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} d\lambda &= \frac{\partial\lambda}{\partial q}\, dq + \frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\, d\mu, \\ dp &= \frac{\partial p}{\partial q}\, dq + \frac{\partial p}{\partial\mu}\, d\mu, \end{aligned} \tag{1.2.47}$$

где λ и μ можно рассматривать как начальные координату и импульс на поверхности сечения. Выразив частные производные через производящую функцию $F_2(\lambda, p)$ и разрешив (1.2.47) относительно dp и dq, получим

$$\begin{aligned} dq &= \left(F_{\lambda p} - \frac{F_{pp}F_{\lambda\lambda}}{F_{\lambda p}}\right) d\lambda + \frac{F_{pp}}{F_{\lambda p}}\, d\mu, \\ dp &= -\frac{F_{\lambda\lambda}}{F_{\lambda p}}\, d\lambda + \frac{1}{F_{\lambda p}}\, d\mu, \end{aligned} \tag{1.2.48}$$

где введены обозначения $\partial F_2/\partial\lambda = F_\lambda$ и т. д. Детерминант коэффициентов (1.2.48), эквивалентный якобиану преобразования от переменных (λ, μ) к (q, p), равен единице, что и доказывает сохранение площади при преобразовании[1]). Это свойство двумерной поверхности сечения в четырехмерном фазовом пространстве в дальнейшем

[1]) В общем случае исходные переменные p, q не являются каноническими на поверхности сечения и сохраняется некоторая их функция $\mathcal{M}(p, q)$ — «наведенная» мера.

будет играть важную роль как при численном поиске интегралов движения (§ 1.4), так и при выяснении устойчивости линеаризованного движения вблизи периодического решения (§ 3.3).

Метод сечения Пуанкаре можно обобщить и на системы с числом степеней свободы $N>2$. Для независящего от времени гамильтониана системы с N степенями свободы размерность энергетической поверхности в фазовом пространстве равна $2N-1$ [рис. 1.3, *в* (*1*)]. Исключим, как и раньше, одну из переменных, например p_N, и рассмотрим последовательные пересечения траектории с $(2N-2)$-мерной поверхностью $q_N = \text{const}$ с координатами $p_1, \ldots, p_{N-1}$, $q_1, \ldots, q_{N-1}$ [рис. 1.3, *в* (*2*)]. При этом поверхность сечения попрежнему представляет собой сокращенное фазовое пространство с сохраняющимся объемом. В случае существования одного или более интегралов движения все пересечения будут лежать на одной поверхности, размерность которой меньше $2N-2$. В противном случае они будут заполнять некоторый $(2N-2)$-мерный объем.

Если движение по разным степеням свободы многомерной системы почти независимо, то удобным способом наглядного представления движения служат проекции поверхности сечения на плоскости (p_i, q_i), как показано на рис. 1.3, *в* (*3*). Для регулярного движения с точно разделяющимися переменными (p_i, q_i) площадь сохраняется в каждой плоскости (p_i, q_i). При этом для каждой степени свободы существует свой интеграл движения и все проекции лежат на некоторой кривой в каждой из плоскостей (p_i, q_i). Однако в общем случае при $N>2$ даже для регулярной траектории пересечения, спроектированные на произвольную плоскость (p_i, q_i), не лежат на кривой, а заполняют некоторый конечный слой, размер которого зависит от выбора переменных (p_i, q_i). В рассматриваемом случае пересечения лежат фактически на $(N-1)$-мерной поверхности, проекция которой на любую из плоскостей (p_i, q_i) занимает область конечной площади. Примеры многомерного движения описаны кратко в п. 1.4в и подробно — в гл. 6.

* 1.2в. Переменные действие — угол

Для системы с одной степенью свободы и гамильтонианом, не зависящим от времени, всегда существует интеграл движения. В многомерном случае, если переменные в уравнении Гамильтона—Якоби полностью разделяются, можно найти N интегралов движения, которые «развязывают» все N степеней свободы. Обозначим производящую функцию F_2 через S и примем, что в случае полного разделения переменных решение имеет вид

$$S = \sum_i S_i(q_i, \alpha_1 \ \ldots \ \alpha_N), \tag{1.2.49}$$

где α_i — новые импульсы, связанные с N интегралами движения.

Если, кроме того, гамильтониан можно записать в виде суммы [1])

$$H=\sum_i H_i\left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i},\ q_i\right),$$

то из-за независимости переменных q_i уравнение Гамильтона—Якоби (1.2.15) распадается на N уравнений

$$H_i\left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i},\ q_i\right)=\alpha. \tag{1.2.50}$$

Решив их, найдем зависимость S_i от q_i. Новые импульсы α_i оказываются при этом постоянными разделения для уравнения Гамильтона—Якоби и удовлетворяют соотношению

$$\sum_i \alpha_i = H_0. \tag{1.2.51}$$

Связь между старыми и новыми каноническими переменными дается соотношением (1.2.13). Новый гамильтониан $\overline{H}$ зависит только от импульсов α_i, и уравнения Гамильтона решаются тривиально.

Выбор постоянных α_i в качестве новых импульсов является произвольным. Вместо этого можно выбрать любые N величин J_i, являющихся независимыми функциями α_i:

$$J_i = J_i(\boldsymbol{\alpha}). \tag{1.2.52}$$

Если эти N уравнений обратить,

$$\alpha_i = \alpha_i(\boldsymbol{J}), \tag{1.2.53}$$

и подставить в (1.2.49), то получим производящую функцию для преобразования к новым импульсам J_i:

$$\overline{S}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{J}) = S(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J})) \tag{1.2.54}$$

и новый гамильтониан

$$\overline{H}(\boldsymbol{J}) = \sum_i \alpha_i(\boldsymbol{J}). \tag{1.2.55}$$

Решение уравнений Гамильтона и в этом случае тривиально.

Для периодических систем с полностью разделяющимися переменными очень удобно выбрать функции $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha})$ специальным образом. При этом под периодическими мы подразумеваем такие системы, в которых по каждой степени свободы либо p_i и q_i являются периодическими функциями времени одного периода, либо p_i периодически зависит от q_i. В первом случае говорят о *колебаниях*, а во втором — о *вращении*. Периоды движения по каждой степени свободы не обязательно одинаковы. Если они не находятся в рациональном отношении, то движение называется *квазипериодическим*[2]). Для определения переменных действия J_i как функций $\boldsymbol{\alpha}$

---

[1]) Это условие, вообще говоря, излишне и приведено, видимо, только для упрощения изложения (см., например, [453]).— *Прим. перев.*

[2]) В оригинале — conditionally periodic (условно периодическое) — менее распространенный синоним квазипериодического.— *Прим. перев.*

запишем интеграл (1.2.40), используя для p_i выражение (1.2.13а),

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S_i(q_i, \alpha)}{\partial q_i} dq_i, \qquad (1.2.56)$$

где $J_1, \ldots, J_N$ — новые сохраняющиеся импульсы. Обращение этого выражения дает новую производящую функцию $\bar{S}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{J})$. Согласно (1.2.24), сопряженные координаты имеют вид

$$\theta_i = \omega_i t + \beta_i, \qquad (1.2.57)$$

где ω_i и β_i — постоянные. Интегрируя θ_i по полному периоду колебаний T, получаем

$$\theta_i = \int_t^{t+T} d\theta_i = \omega_i T. \qquad (1.2.58)$$

Но, с другой стороны, из (1.2.13б) следует

$$d\theta_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{S}}{\partial J_i} dq_i. \qquad (1.2.59)$$

Подставляя это выражение в (1.2.58), меняя порядок дифференцирования и интегрируя по периоду, находим

$$\Delta\theta_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_i dq_i = 2\pi. \qquad (1.2.60)^{1)}$$

Сравнение (1.2.58) с (1.2.60) дает

$$\omega_i T = 2\pi, \qquad (1.2.61)$$

т. е. постоянные ω_i есть просто *частоты* колебаний. Таким образом, использование переменных действие — угол представляет собой удобный способ получения частот колебаний, не требующий выяснения деталей движения. При исследовании движения систем, близких к интегрируемым, удобно предварительно перейти к переменным действие — угол в интегрируемой части системы, а уже затем использовать теорию возмущений или другие методы.

Гармонический осциллятор. Проиллюстрируем достоинства переменных действие — угол на примере гармонического (линейного) осциллятора, гамильтониан которого имеет вид

$$H = G\frac{p^2}{2} + F\frac{q^2}{2} = \alpha, \qquad (1.2.62)$$

где G, F и α — постоянные. Определив $p(q, \alpha)$ и вычислив интеграл

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^{q_{\text{макс}}} \left(\frac{2\alpha}{G} - \frac{F}{G} q^2\right)^{1/2} dq, \qquad (1.2.63)$$

---

[1]) Выражение (1.2.60) сразу получается из определения (1.2.56) для $\boldsymbol{J}$ при $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{q} = \theta$. — *Прим. ред.*

где $q_{\text{макс}} = (2\alpha/F)^{1/2}$, получим

$$J = \alpha (FG)^{-1/2}. \tag{1.2.64}$$

Отсюда и из (1.2.55) гамильтониан равен

$$\overline{H} = (FG)^{1/2} J \tag{1.2.65}$$

и не зависит от угловой переменной. Частота колебаний равна $\omega_0 = \partial \overline{H}/\partial J = (FG)^{1/2}$. Подставляя α из (1.2.64) в (1.2.62), получаем одно из уравнений канонического преобразования

$$p = p(q, J) = (2RJ - R^2 q^2)^{1/2}, \tag{1.2.66}$$

где $R = (F/G)^{1/2}$. Из (1.2.13а)

$$\overline{S} = \int_0^q (2RJ - R^2 q^2)^{1/2} dq$$

и из (1.2.13б) находим второе уравнение

$$\theta = R \int_0^q (2RJ - R^2 q^2)^{-1/2} dq, \tag{1.2.67}$$

которое после интегрирования дает

$$q = (2J/R)^{1/2} \sin\theta. \tag{1.2.68а}$$

С учетом (1.2.66) имеем

$$p = (2JR)^{1/2} \cos\theta. \tag{1.2.68б}$$

Уравнения (1.2.68) определяют преобразование от переменных действие — угол к исходным переменным p, q. Это преобразование обычно получается при помощи производящей функции типа $F_1(q, \overline{q})$, которая имеет вид

$$F_1 = \frac{1}{2} R q^2 \operatorname{ctg}\theta. \tag{1.2.69}$$

Отметим также, что эллипс, определяемый уравнением (1.2.62), можно канонически преобразовать в круг, изменяя масштаб: $p = \sqrt{R} p'$; $q = q'/\sqrt{R}$. Отсюда, ясно, что в переменных действие — угол (J, θ) движение представляет собой вращение некоторого вектора постоянной длины J. Это немедленно приводит к уравнениям преобразования (1.2.68), из которых видно также, что величина R равна отношению полуосей исходного эллипса.

Ниже мы увидим, что переход к переменным действие — угол особенно эффективен в случае медленного изменения величин F и G со временем или в зависимости от координаты по другой степени свободы. В этом случае J является *адиабатическим инвариантом* движения, т. е. мало изменяется даже при значительном изменении ω_0 и $\overline{H}$ (см. также [265], гл. 2). Для нелинейных колеба-

ний преобразование (1.2.68) не приводит к переменным действие—угол. Тем не менее, как мы увидим в гл. 2, его можно использовать при построении рядов теории возмущений. Общий же метод введения переменных действие — угол, развитый в этом параграфе, применим, как будет видно ниже, и к нелинейному осциллятору.

§ 1.3. Интегрируемые системы

Рассмотрим гамильтонову систему с N степенями свободы. Если уравнение Гамильтона—Якоби разделяется на N независимых уравнений, по одному на каждую степень свободы, то гамильтониан и движение системы называются *интегрируемыми* (иногда используются термины *полностью интегрируемый* или *полностью разделяющийся*). Постоянные разделения α_i называются *изолирующими* или *глобальными интегралами движения*[1]), поскольку каждый такой интеграл «отделяет» одну степень свободы. Система с N степенями свободы интегрируема тогда и только тогда, когда существует N независимых изолирующих интегралов.

Эти интегралы должны быть *в инволюции*, т. е. их скобки Пуассона друг с другом должны обращаться в нуль: $[\alpha_i, \alpha_j] = 0$. Это гарантирует, что переменные α_i образуют полный набор новых импульсов. Любая полная система N функций от α, например переменные действия J_i, также определяет набор изолирующих интегралов, скобки Пуассона которых автоматически обращаются в нуль (подробности см. в работе [430], § 147).

* 1.3а. Одна степень свободы

Согласно соотношению (1.2.21), для системы с одной степенью свободы и независящим от времени гамильтонианом H величина

$$H(p, q) = E \tag{1.3.1}$$

является интегралом движения. Поэтому все такие системы интегрируемы. При этом импульс p зависит только от координаты q (но не от времени). Разрешив (1.3.1), получим

$$p = p(q, E). \tag{1.3.2}$$

---

[1]) В отечественной литературе используется также не совсем удачный термин — однозначный (конечнозначный) интеграл. Заметим, что понятия изолирующий и глобальный характеризуют, вообще говоря, разные свойства интеграла движения, поскольку «изоляция» может быть и локальной как, например, в теории КАМ (см. п. 3.2а ниже). Исключение с помощью каждого интеграла одной степени свободы, т. е. двух динамических переменных, возможно только при условии обсуждаемой ниже инволюции, или коммутирования, интегралов, что означает совместимость соответствующих им циклических координат. В противном случае интеграл позволяет исключить лишь одну динамическую переменную (см., например, [337], п. 14). — *Прим. ред.*

Зависимость переменных p и q от времени можно определить из второго уравнения Гамильтона (1.2.6б), которое дает

$$dt = \frac{dq}{\partial H/\partial p}, \tag{1.3.3}$$

или, после интегрирования,

$$t = \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\partial H/\partial p}. \tag{1.3.4}$$

Так как $\partial H/\partial p$ зависит только от переменных p и q, которые связаны соотношением (1.3.2), то интегрирование уравнений движения сводится к квадратуре. Однако интеграл можно найти, вообще говоря, только численно.

Модель маятника. Проиллюстрируем описанную выше процедуру на простом примере маятника. Подобный гамильтониан возникает по существу во всех задачах с нелинейными резонансами, и эта модель лежит в основе нашего подхода к нелинейной динамике, рассматриваемой в последующих главах. Уравнения движения маятника имеют вид

$$\dot{p} = -F \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = Gp, \tag{1.3.5}$$

где $F = mgh$; $G = 1/(mh^2)$; mg — сила тяжести, действующая на массу m; h — длина маятника. Угол отклонения от вертикали φ и момент импульса p, сопряженный φ, удовлетворяют уравнениям Гамильтона. Гамильтониан есть сумма кинетической энергии $\frac{1}{2}Gp^2$ и потенциальной энергии $U = -F\cos\varphi$:

$$H = \frac{1}{2}Gp^2 - F\cos\varphi = E. \tag{1.3.6}$$

Соотношение (1.3.4) сводит задачу к квадратуре и позволяет выразить решение через эллиптические интегралы. Однако многое можно узнать и прямо из анализа соотношения (1.3.6) при различных значениях энергии E, как это показано на рис. 1.4. Значение гамильтониана E соответствует полной энергии системы. Если E больше максимального значения потенциальной энергии F, то импульс p всегда отличен от нуля. Это приводит к неограниченному изменению φ, т. е. к вращению. При этом для $p>0$ движение происходит слева направо с энергией E_u. Для $E<F$ движение ограничено (внутри потенциальной ямы) и соответствует колебаниям маятника. Если же $E = F \equiv E_s$, то движение происходит по сепаратрисе, а период колебаний становится бесконечным. Движение имеет две особые точки при $p = 0$: одна находится в начале координат при $\varphi = 0$ и является устойчивой, или *эллиптической*, осо-

бой точкой, другая (в месте соединения двух ветвей сепаратрисы при $\varphi = \pm\pi$) является неустойчивой, или *гиперболической*, особой точкой. Фазовая траектория вблизи эллиптической точки все время остается в ее окрестности, тогда как траектория вблизи гиперболической точки удаляется от нее.

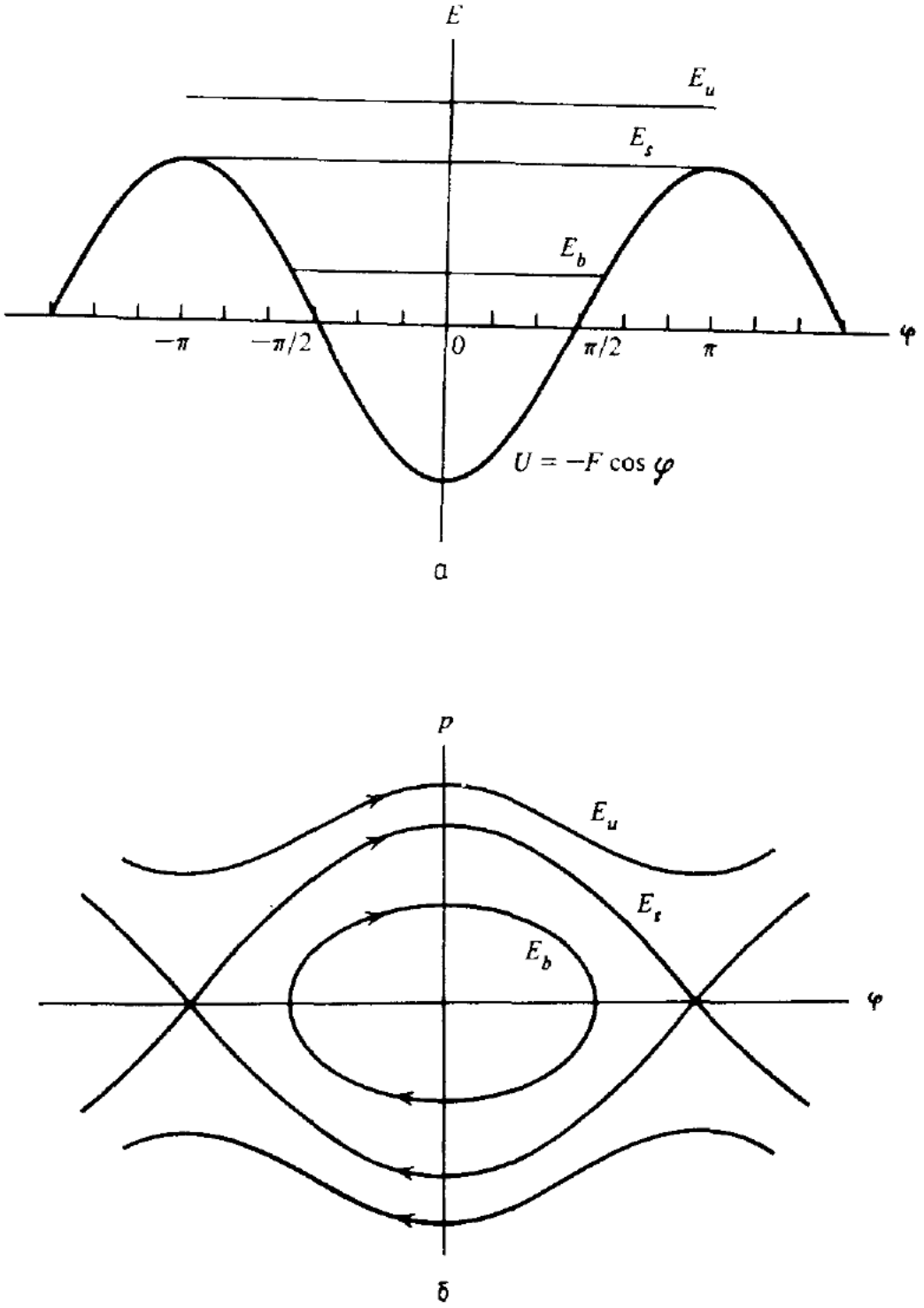


Рис. 1.4. Динамика маятника.
а — график потенциальной энергии; *б* — фазовые траектории.

Из (1.3.4) следует, что в общем случае период колебаний зависит от энергии осциллятора. Подставляя значение H из (1.3.6) в (1.3.4), для периода колебаний получаем соотношение

$$T = \frac{1}{(2G)^{1/2}} \oint \frac{d\varphi}{(E + F\cos\varphi)^{1/2}}, \qquad (1.3.7)$$

которое можно выразить через эллиптические интегралы. В частности, из (1.3.5) видно, что на сепаратрисе как возвращающая сила, так и скорость обращаются в нуль при $\varphi = \pi$, и поэтому период T становится бесконечным.

Чтобы записать гамильтониан маятника в переменных действие—угол (J, θ), вычислим действие аналогично (1.2.63). В результате получим

$$J(E) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_{\text{макс}}} \left[\frac{2}{G}(E + F\cos\varphi_1)\right]^{1/2} d\varphi_1, \tag{1.3.8}$$

$$\theta(\varphi, E) = \left(G\frac{dJ}{dE}\right)^{-1} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi_1}{[(2/G)(E + F\cos\varphi_1)]^{1/2}}, \tag{1.3.9}$$

где $\varphi_{\text{макс}} = \pi/2$ для вращения $(E > F)$ и $\cos\varphi_{\text{макс}} = -H/F$ для колебаний $(E < F)$. Новый гамильтониан получается путем подстановки $\overline{H} = E$ в (1.3.8) и обращения функции $J(\overline{H})$. Выражения (1.3.8) и (1.3.9) приводятся к эллиптическим интегралам и их можно представить в виде [383, 344]:

$$J = R\frac{8}{\pi}\begin{cases} \mathscr{E}(\varkappa) - (1-\varkappa^2)\mathscr{K}(\varkappa), & \varkappa < 1, \\ \frac{1}{2}\varkappa\mathscr{E}(\varkappa^{-1}), & \varkappa > 1, \end{cases} \tag{1.3.10}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}\begin{cases} [\mathscr{K}(\varkappa)]^{-1}\mathscr{F}(\eta, \varkappa), & \varkappa < 1, \\ 2[\mathscr{K}(\varkappa^{-1})]^{-1}\mathscr{F}\left(\frac{1}{2}\varphi, \varkappa^{-1}\right), & \varkappa > 1. \end{cases} \tag{1.3.11}$$

Здесь $R = (F/G)^{1/2}$, а $K(\varkappa)$ и $\mathscr{E}(\varkappa)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$\mathscr{K}(\varkappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{(1-\varkappa^2\sin^2\xi)^{1/2}},$$
$$\mathscr{E}(\varkappa) = \int_0^{\pi/2} (1-\varkappa^2\sin^2\xi)^{1/2} d\xi, \tag{1.3.12}$$

где $\varkappa\sin\eta = \sin\frac{1}{2}\varphi$, $2\varkappa^2 = 1 + E/F$, а $\mathscr{F}$ — эллиптический интеграл первого рода. Величина $\varkappa$ характеризует относительную энергию маятника, так что на сепаратрисе $\varkappa = 1$; для колебаний $\varkappa < 1$, а для вращения $\varkappa > 1$.

Соотношения $dJ/dE = 1/\omega$ и (1.3.10) определяют частоту

$$\frac{\omega(\varkappa)}{\omega_0} = \frac{\pi}{2}\begin{cases} [\mathscr{K}(\varkappa)]^{-1}, & \varkappa < 1, \\ 2\varkappa/\mathscr{K}(\varkappa^{-1}), & \varkappa > 1, \end{cases} \tag{1.3.13}$$

где
$$\omega_0 = (FG)^{1/2} \tag{1.3.14}$$
— частота малых колебаний вблизи эллиптической точки. Асимптотическое выражение для $\mathscr{K}$ при $\varkappa \to 1$ дает частоту вблизи сепаратрисы

$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \Big/ \ln\left[\dfrac{4}{(1-\varkappa^2)^{1/2}}\right], & \varkappa < 1, \\ \pi \Big/ \ln\left[\dfrac{4}{(\varkappa^2-1)^{1/2}}\right], & \varkappa > 1. \end{cases} \tag{1.3.15}$$

При $\varkappa \to 1$ частота логарифмически обращается в нуль. Уравнение сепаратрисы можно получить из (1.3.6) и условия $E = F$:

$$p_s = \frac{2^{1/2}\omega_0}{G}(1+\cos\varphi_s)^{1/2}, \tag{1.3.16}$$

где индекс s отвечает значениям переменных на сепаратрисе. Отсюда

$$p_s = \pm\frac{2\omega_0}{G}\cos\frac{\varphi_s}{2}, \tag{1.3.17}$$

где плюс и минус соответствуют верхней и нижней ветвям сепаратрисы. Уравнение Гамильтона

$$\dot{\varphi}_s = Gp_s \tag{1.3.18}$$

с учетом (1.3.17) дает

$$\frac{d\varphi_s}{dt} = \pm 2\omega_0\cos\frac{\varphi_s}{2}. \tag{1.3.19}$$

Разрешая это уравнение относительно dt и интегрируя с начальным условием $\varphi = 0$ при $t = 0$, получаем

$$\omega_0 t = \int_0^{\varphi_s}\frac{d\varphi/2}{\cos(\varphi/2)} = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_s}{4}+\frac{\pi}{4}\right), \tag{1.3.20}$$

или, после обращения,

$$\varphi_s = 4\operatorname{arctg}[\exp(\omega_0 t)] - \pi. \tag{1.3.21}$$

Траектории вблизи сепаратрисы очень похожи на саму сепаратрису, за исключением того, что период движения стремится к бесконечности при приближении к сепаратрисе (1.3.13).

Гамильтониан (1.3.6) был получен для модели маятника. Однако оказывается, что такого вида гамильтониан получается почти во всех близких к интегрируемым системах, в которых имеет место резонанс между степенями свободы. В окрестности значений переменных действия, соответствующих точному резонансу, разложение неинтегрируемой части гамильтониана в ряд Фурье дает члены,

которые вызывают медленные изменения, описываемые гамильтонианом вида (1.3.6). Предположим, что угловые переменные φ и ψ, соответствующие разным степеням свободы, находятся в резонансе, так что отношение их частот $\omega_\varphi/\omega_\psi$ для каких-то значений переменных действия близко к рациональному числу r/l. Тогда можно произвести каноническое преобразование к новой медленной переменной

$$\theta = l\varphi - r\psi \tag{1.3.22}$$

и исключить одну из быстрых угловых переменных, например φ. Канонически сопряженный θ импульс связан с отклонением действия, например J_φ, от точного резонансного значения J_0. Если теперь произвести усреднение по быстрой угловой переменной ψ, то получится гамильтониан с одной степенью свободы, совпадающий по форме с гамильтонианом маятника (1.3.6). Поскольку такой гамильтониан всегда возникает при фурье-преобразовании возмущения с последующим применением резонансной теории возмущений и усреднения, он был назван Чириковым [70] «универсальное описание нелинейного резонанса». Мы будем называть его *стандартным гамильтонианом*. Он играет фундаментальную роль во всем нашем изложении материала. Соответствующая теория возмущений рассматривается в § 2.4 и широко используется в последующих главах.

1.3б. Линейные дифференциальные уравнения

Прежде чем перейти к анализу нелинейной системы с двумя степенями свободы, рассмотрим хорошо изученное математически линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Как известно, решение такого уравнения существует и соответствует регулярному движению[1]). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + f(t)\dot{x} + g(t)x = 0, \tag{1.3.23}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ считаются пока произвольными функциями времени. Так как это уравнение является линейным уравнением второго порядка, его общее решение можно построить при помощи двух линейно независимых решений x_1 и x_2. Важное свойство этого уравнения получается из анализа вронскиана

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}. \tag{1.3.24}$$

[1]) Это зависит от вида функций $f(t)$ и $g(t)$ в (1.3.23).— *Прим. ред.*

Дифференцируя обе части равенства по t, находим

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}, \tag{1.3.25}$$

где второй определитель обращается в нуль, так как он имеет одинаковые строки. Подставляя выражение для $\ddot{x}_1$ и $\ddot{x}_2$ из (1.3.23) и раскрывая определитель, находим

$$\dot{W} = -x_1(f\dot{x}_2 + gx_2) + x_2(f\dot{x}_1 + gx_1).$$

После сокращения членов gx_1x_2 имеем

$$\dot{W} = -fW.$$

Интегрирование этого выражения дает

$$W(t) = W_0 \exp\left[-\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt\right]. \tag{1.3.26}$$

Если $f(t) = 0$, то диссипация в системе отсутствует [1]) и получающееся уравнение

$$\ddot{x} + g(t)\,x = 0 \tag{1.3.27}$$

соответствует гамильтониану

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + g(t)\,q^2) \tag{1.3.28}$$

с $q = x$ и $p = \dot{x}$. В этом случае (1.3.26) сводится к

$$W = \text{const}. \tag{1.3.29}$$

Это соотношение справедливо независимо от того, является ли $g(t)$ периодической функцией или нет.

Решение любого дифференциального уравнения второго порядка однозначно определяется начальными значениями функции и ее производной. Поэтому для каждого из независимых решений можно написать преобразование от начального момента времени $t = 0$ к любому другому моменту времени в виде

$$x_1(t) = m_{11}x_1(0) + m_{12}\dot{x}_1(0),$$

$$\dot{x}_1(t) = m_{21}x_1(0) + m_{22}\dot{x}_1(0),$$

где коэффициенты m_{ik} зависят от времени, но не от начальных условий. Из (1.3.29) вытекает, что детерминант матрицы

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = 1. \tag{1.3.30}$$

---

[1]) Функция $f(t)$ может характеризовать также изменение параметров системы, например массы.— *Прим. ред.*

Этот результат получается, если записать матрицу преобразования двух решений в виде

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) & \dot{x}_2(0) \end{pmatrix}.$$

Вычисляя детерминант в обеих частях равенства и используя тот факт, что детерминант произведения матриц равен произведению их детерминантов, получим преобразование для вронскиана

$$W(t) = W(0) \det \mathbf{M}.$$

Поскольку $W(t) = W(0)$, то $\det \mathbf{M} = 1$, что эквивалентно условию сохранения площади. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие консервативные [1]) системы.

Периодические коэффициенты. Если $g(t)$ имеет период τ, то (1.3.27) имеет два независимых решения вида

$$x(t) = w(t) \exp[i\psi(t)], \tag{1.3.31}$$

где $w(t)$ — периодическая функция времени

$$w(t) = w(t+\tau).$$

При этом

$$\exp\{i[\psi(t+\tau) - \psi(t)]\} = \exp(i\sigma),$$

где σ не зависит от времени. Поэтому $\dot{\psi}$ тоже периодическая функция времени. Уравнение (1.3.31) представляет собой общее решение Флоке для линейного уравнения с периодическими коэффициентами. Дифференцируя (1.3.31) два раза, подставляя результат в (1.3.27) и сокращая $e^{i\psi}$, получаем для действительной и мнимой частей:

$$\ddot{w} - w\dot{\psi}^2 + g(t)\, w = 0, \tag{1.3.32а}$$

$$2\dot{w}\dot{\psi} + w\ddot{\psi} = 0. \tag{1.3.32б}$$

Перепишем второе уравнение в виде

$$\frac{2\dot{w}}{w} + \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} = 0,$$

---

[1]) Имеется в виду сохранение не энергии, а площади на фазовой плоскости системы $(x, \dot{x})$. Заметим, что последнее сразу следует из того, что при $f = 0$ рассматриваемая система является гамильтоновой (1.3.28) в переменных x, $\dot{x}$. — *Прим. ред.*

или, после интегрирования,

$$\dot{\psi} = \frac{1}{w^2}. \qquad (1.3.33)^{1)}$$

Подставляя это соотношение в (1.3.31) и переходя к действительным функциям, находим

$$x(t) = w(t)\cos\psi(t), \qquad (1.3.34)$$

где $\psi = \int\limits_{t_0}^{t} dt\, w^2$. Используя соотношение

$$\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1 \qquad (1.3.35)$$

и выражая $\sin\psi$ и $\cos\psi$ с помощью (1.3.34), получаем инвариант [2])

$$I(x, \dot{x}, t) = [w^{-2}x^2 + (w\dot{x} - \dot{w}x)^2]. \qquad (1.3.36)$$

Хотя явный вид функции $w(t)$ в общем случае неизвестен, но из существования решения следует, что для гамильтониана (1.3.28) всегда существует инвариант I. Подставляя (1.3.33) в (1.3.32а), получаем уравнение для w:

$$\ddot{w} + g(t)\,w - \frac{1}{w^3} = 0. \qquad (1.3.37)$$

Решение этого уравнения не проще, чем исходного (1.3.27). Однако Левис [259] заметил, что *любое* решение (1.3.37) определяет через соотношение (1.3.36) решение (1.3.27) для всех начальных условий. Инвариант (1.3.36) полезен при изучении движения частиц в ускорителях с жесткой фокусировкой [94], когда функция $g(t)$ кусочно постоянна и можно явно найти $w(t)$. Точное решение известно также и в случае $g(t) = a + b\cos t$, который приводит к уравнению Матье. Левис [259] показал, что для произвольной функции инвариант (1.3.36) можно построить при помощи теории возмущений.

Отметим, что проведенный выше анализ применим к линейным неавтономным системам с одной степенью свободы, которые соответствуют некоторому специальному классу гамильтонианов с двумя степенями свободы. Так как неавтономные линейные системы второго порядка интегрируемы, то неудивительно, что всегда можно найти соответствующий инвариант. Попытки Саймона [397] и Левиса и Лича [260] обобщить эти методы на нелинейные системы не привели пока к новым полезным результатам.

---

[1]) В общем случае (1.3.33) содержит произвольную постоянную: $\dot{\psi} = C/w^2$; соответственно изменяются и (1.3.36), (1.3.37).— *Прим. ред.*

[2]) Этот инвариант, полученный впервые Курантом и Снайдером [94], имеет простой физический смысл сохранения «энергии» в переменных: $x \to x/w$; $t \to \psi$ (подробности см., например, в работе [232]).— *Прим. ред.*

1.3в. Несколько степеней свободы

Для систем с несколькими степенями свободы соотношение (1.3.3) принимает вид

$$dt = \frac{dq_1}{\partial H/\partial p_1} = \frac{dq_2}{\partial H/\partial p_2} = \ldots = \frac{dq_N}{\partial H/\partial p_N}. \qquad (1.3.38)$$

Только в том случае, когда производная $\partial H/\partial p_1 = f(q_1)$ зависит лишь от q_1, первое уравнение решается в квадратурах. Аналогичное утверждение имеет место и для последующих уравнений. В общем случае необходимо решать всю систему дифференциальных уравнений совместно. Однако, если в дополнение к гамильтониану имеются другие интегралы движения, тогда число совместно решаемых уравнений может быть уменьшено на единицу для каждого дополнительного *изолирующего интеграла движения*. Изолирующим является такой интеграл, который в некоторых канонических переменных приводится к уравнению: $\partial H/\partial p_i = f(q_i)$. Преобразование к переменным действие — угол удовлетворяет даже более жесткому условию $\partial H/\partial p_i = \mathrm{const}$. Однако само преобразование зависит от существования изолирующего интеграла. Последний же может быть достаточно глубоко скрыт в динамике системы, так что обнаружить его не так-то легко. Изолирующие интегралы связаны с симметриями динамической системы. Эти симметрии могут оказаться очевидными, и тогда необходимое преобразование переменных, обеспечивающее решение в квадратурах, определяется непосредственно. Это справедливо, например, для частицы в поле центральных сил (см. ниже). Когда присутствие симметрии в системе не очевидно, как, например, в случае рассматриваемой ниже цепочки Тоды, найти изолирующий интеграл не просто. В настоящее время не существует какого-либо метода, позволяющего определить все изолирующие интегралы произвольной гамильтоновой системы или хотя бы установить их полное число. Поэтому не существует и никакого общего способа проверки на интегрируемость (N изолирующих интегралов) для системы с N степенями свободы. Если в системе нет очевидной симметрии, то догадаться о существовании скрытого изолирующего интеграла и обнаружить его часто удается лишь при помощи численных экспериментов.

Центральные силы. Проиллюстрируем нахождение изолирующего интеграла (помимо полной энергии) и сведение решения к квадратурам на простом примере движения частицы в поле центральных сил. Хорошо известно, что эта задача интегрируема. Без потери общности задача сводится к двумерному движению в плоскости, определяемой начальной скоростью частицы и положением силового центра. Третья степень свободы тривиально отделяется при помощи изолирующего интеграла $p_z = 0$. В полярных координатах

(r, θ) гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + U(r), \tag{1.3.39}$$

где $p_r = m\dot{r}$, $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$, m — масса частицы, U — потенциал центральной силы ($F = -\partial U/\partial r$). Поскольку система консервативна, то ее гамильтониан $H = E$ сохраняется. Уравнения движения в форме (1.3.38) имеют вид

$$dt = \frac{d\theta}{\partial H/\partial p_\theta} = \frac{dr}{\partial H/\partial p_r}.$$

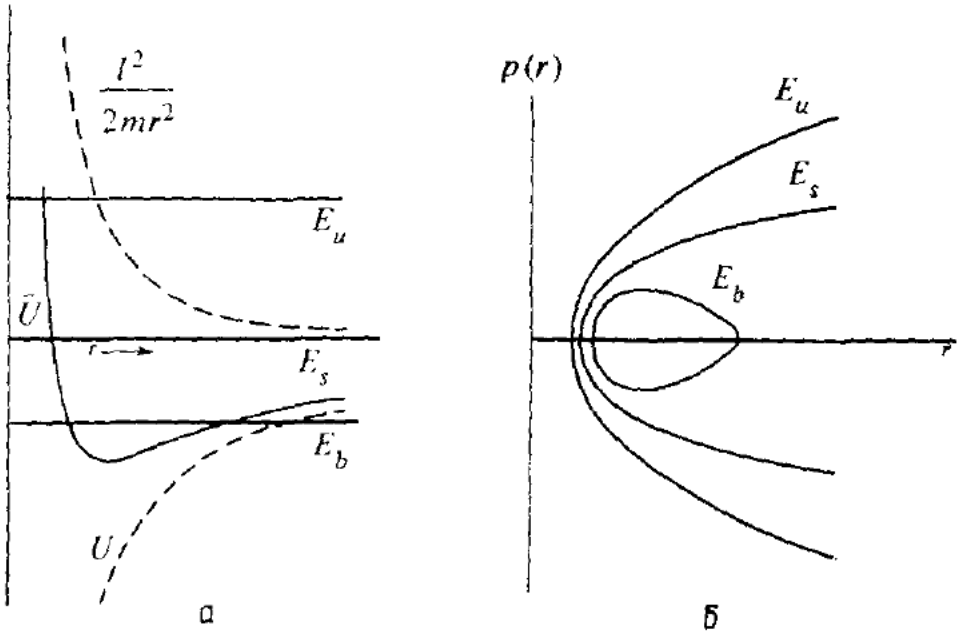


Рис. 1.5. Движение в центральном поле.
а — эффективный одномерный потенциал; *б* — фазовые траектории.

Вычисляя частные производные и исключая p_r при помощи гамильтониана, получаем

$$dt = \frac{d\theta}{p_\theta/mr^2} = \frac{dr}{[2m(E - U(r)) - p_\theta^2/r^2]/m}. \tag{1.3.40}$$

Эти уравнения нельзя решить, пока неизвестна зависимость p_θ от θ и r. Именно отсюда видно существенное значение второго интеграла движения. В данном случае таким интегралом движения является p_θ. Это следует из того, что сила dp_θ/dt отсутствует и гамильтониан не зависит от θ. Отсюда

$$p_\theta = l = \text{const}. \tag{1.3.41}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (1.3.40), сводим к квадратурам сначала решение для $r(t)$, а затем и для $\theta(t)$. Это можно увидеть и прямо из (1.3.39), вводя эффективный потенциал $\bar{U}(r) = l^2/2mr^2 - U(r)$. Оба слагаемых потенциала и их сумма,

или эффективный потенциал, показаны на рис. 1.5, *а* $U(r) = -k/r^{\beta}$ при $2<\beta<0$; задача Кеплера соответствует $\beta = 1$. Указаны также три значения полной энергии системы E_b, E_s и E_u, соответствующие финитному, сепаратрисному и инфинитному движениям. Фазовые кривые представлены на рис. 1.5, *б*. Движение здесь аналогично случаю одной степени свободы (рис. 1.4), за исключением того, что сепаратриса теперь замыкается на бесконечности.

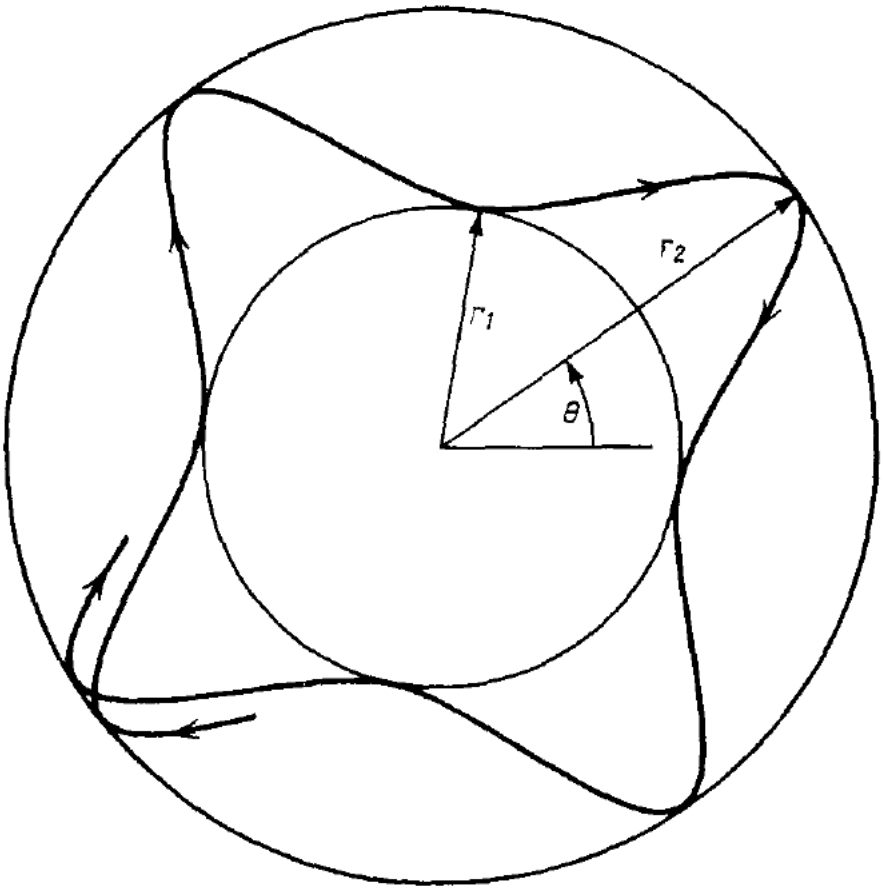


Рис. 1.6. Пример ограниченной траектории для $\beta \neq 1$ (некулоновское взаимодействие).

Финитное движение на плоскости (r, θ), ограниченное окружностями радиуса r_1 и r_2, показано на рис. 1.6 для $\beta \neq 1$. Пространственная траектория не замкнута, так как отношение периодов по r и θ не равно целому числу[1]). Это — пример квазипериодического движения. Тем не менее пересечения траекторий с плоскостью $\theta = \text{const}$ образуют в этом случае замкнутую кривую в координатах r, p_r вследствие существования двух изолирующих интегралов $p_\theta = l$ и $H = E$. Для $\beta = 1$ (задача Кеплера) частоты движения по r и θ одинаковы и траектория образует замкнутую кривую (эллипс) в плоскости (r, θ).

---

[1]) Точнее, рациональному числу.— *Прим. ред.*

Рассмотрим теперь преобразование к переменным действие — угол. Подставляя производящую функцию в (1.3.39), получаем уравнение Гамильтона—Якоби (1.2.15) в виде

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2\right]+U(r)=E, \qquad (1.3.42)$$

где мы использовали преобразование $p_i = \partial S/\partial q_i$ и учли, что переменные разделяются. После умножения на $2mr^2$ гамильтониан принимает вид (1.2.50):

$$\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2=2mr^2\left[E-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2-U(r)\right]=l^2, \qquad (1.3.43)$$

и мы снова приходим к сохранению момента импульса. Это, конечно, прямо следует из того, что θ является циклической переменной, т. е. гамильтониан от нее не зависит. Второе уравнение в (1.3.43) дает

$$\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2=2m(E-U(r))-\frac{l^2}{r^2}. \qquad (1.3.44)$$

Запишем переменные действия в виде

$$2\pi J_\theta=\oint p_\theta d\theta=\oint\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}d\theta, \qquad (1.3.45)$$

$$2\pi J_r=\oint p_r dr=\oint\frac{\partial S_r}{\partial r}dr. \qquad (1.3.46)$$

Подставляя (1.3.43) и (1.3.44) в (1.3.45) и (1.3.46), соответственно получаем

$$J_\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l\,d\theta=l, \qquad (1.3.47)$$

$$J_r=\frac{1}{2\pi}\int\left[2m(E-U(r))-\frac{l^2}{r^2}\right]^{1/2}dr. \qquad (1.3.48)$$

Пусть, например, $U(r) = -k/r$. Простое интегрирование ([156], § 9.7) дает

$$J_r=-l+\frac{k}{2}\left(\frac{2m}{-E}\right)^{1/2}=\text{const}. \qquad (1.3.49)$$

Отсюда новый гамильтониан

$$\overline{H}=E=-\frac{mk^2}{2(J_r+J_\theta)^2}, \qquad (1.3.50)$$

где мы заменили l на J_θ. Заметим, что переменные действия входят только в виде суммы. Следовательно, в системе имеется вырожде-

ние[1]). Это значит, что движения как по r, так и по θ имеют одну и ту же частоту [2])

$$\omega = \frac{\partial \overline{H}}{\partial J_r} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial J_\theta} = \frac{mk^2}{(J_r + J_\theta)^3}, \tag{1.3.51}$$

что приводит к замкнутой траектории. Если центральная сила зависит от r по-другому, то траектория уже не будет замкнутой, как показано на рис. 1.6.

Цепочка Тоды. В качестве второго примера интегрируемого гамильтониана рассмотрим трехчастичную цепочку Тоды [408] [3]), гамиль-

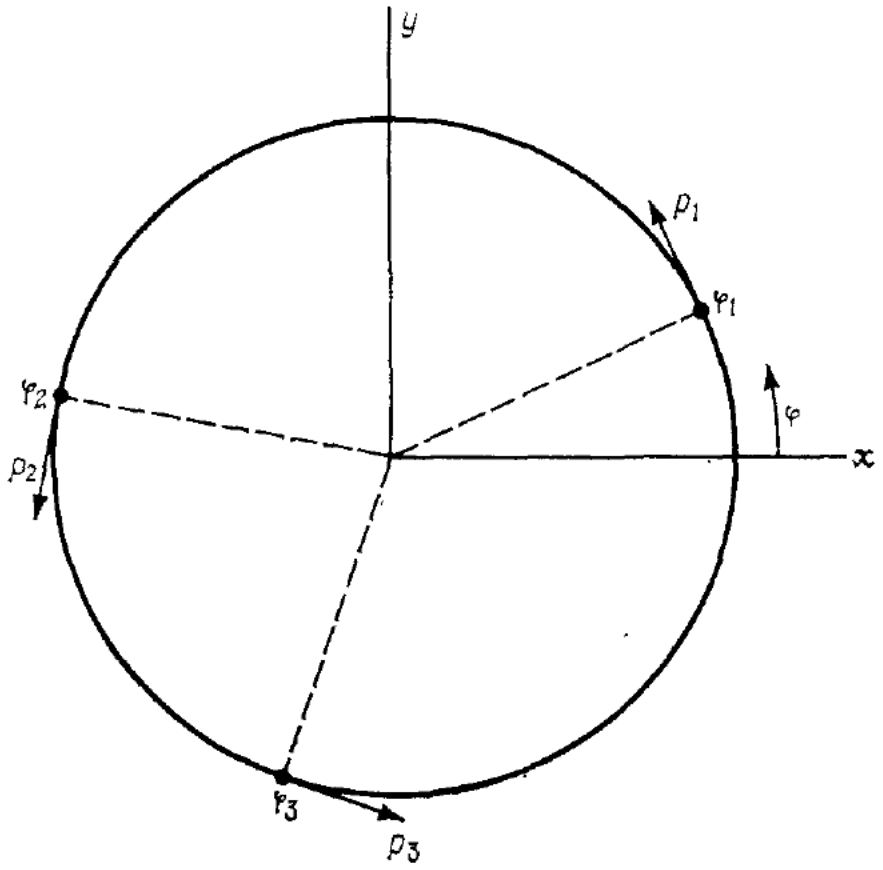


Рис. 1.7. Трехчастичная цепочка Тоды.

тониан которой имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \exp[-(\varphi_1 - \varphi_3)] + \exp[-(\varphi_2 - \varphi_1)] + \\ + \exp[-(\varphi_3 - \varphi_2)] - 3. \tag{1.3.52}$$

Система состоит из трех частиц, движущихся по кольцу (рис. 1.7); между ними действуют отталкивающие силы, уменьшающиеся по

[1]) В оригинале — intrinsic degeneracy (внутреннее вырождение).— *Прим. перев.*

[2]) В других канонических переменных (например, $p_1 = J_r + J_\theta$, p_2) вырождение означает, что одна из основных частот системы ($\omega_2 = \partial H/\partial p_2$) равна нулю.— *Прим. ред.*

[3]) См. также [454].— *Прим. ред.*

экспоненциальному закону. Помимо энергии, имеется, очевидно, другой изолирующий интеграл — полный момент

$$P_3 = p_1 + p_2 + p_3 = \text{const}. \tag{1.3.53}$$

Это следует из инвариантности гамильтониана при вращении системы как целого ($\varphi_i \to \varphi_i + \varphi_0$), а также непосредственно из уравнений Гамильтона. Чтобы учесть это явно, перейдем к новым мо-

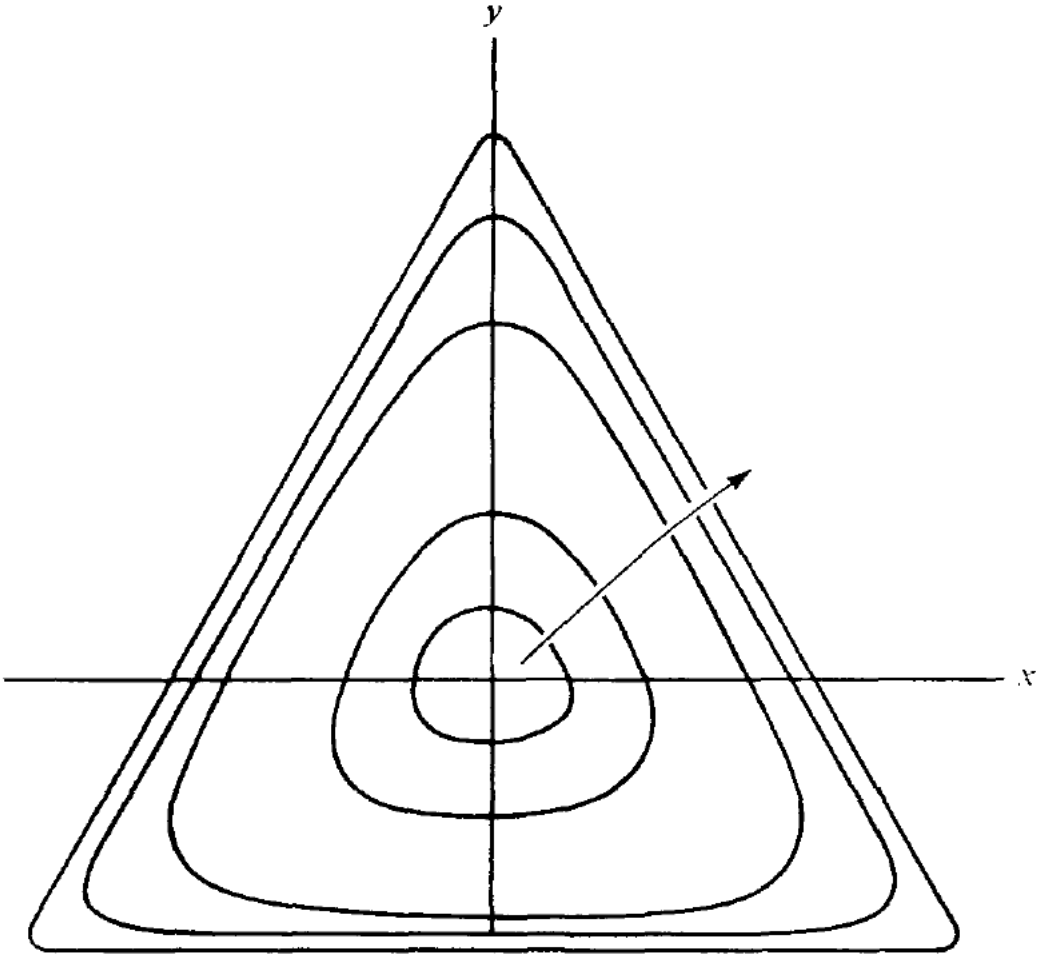


Рис. 1.8. Эквипотенциальные кривые для гамильтониана Тоды.
Стрелка показывает направление роста потенциала.

ментам $P_1 = p_1$, $P_2 = p_2$ и P_3, определяемому формулой (1.3.53). Используя производящую функцию

$$F_2 = P_1\varphi_1 + P_2\varphi_2 + (P_3 - P_1 - P_2)\,\varphi_3, \tag{1.3.54}$$

получим

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\left[P_1^2 + P_2^2 + (P_3 - P_1 - P_2)^2\right] + \exp(-\Phi_1) + \\ + \exp[-(\Phi_2 - \Phi_1)] + \exp(\Phi_2) - 3, \tag{1.3.55}$$

где координаты Φ_i канонически сопряжены с P_i. Так как гамильтониан не зависит от Φ_3, то, как непосредственно видно, $P_3 = \text{const}$. Без потери общности можно положить $P_3 = 0$, что соответствует выбору такой вращающейся системы отсчета, в кото-

рой полный момент равен нулю. Других изолирующих интегралов как будто не видно.

Рассматриваемую систему можно представить как частицу в двумерной потенциальной яме. Для этого воспользуемся производящей функцией

$$F_2' = (4\sqrt{3})^{-1}\left[(p_x' - \sqrt{3}\,p_y')\,\Phi_1 + (p_x' + \sqrt{3}\,p_y')\,\Phi_2\right] \quad (1.3.56)$$

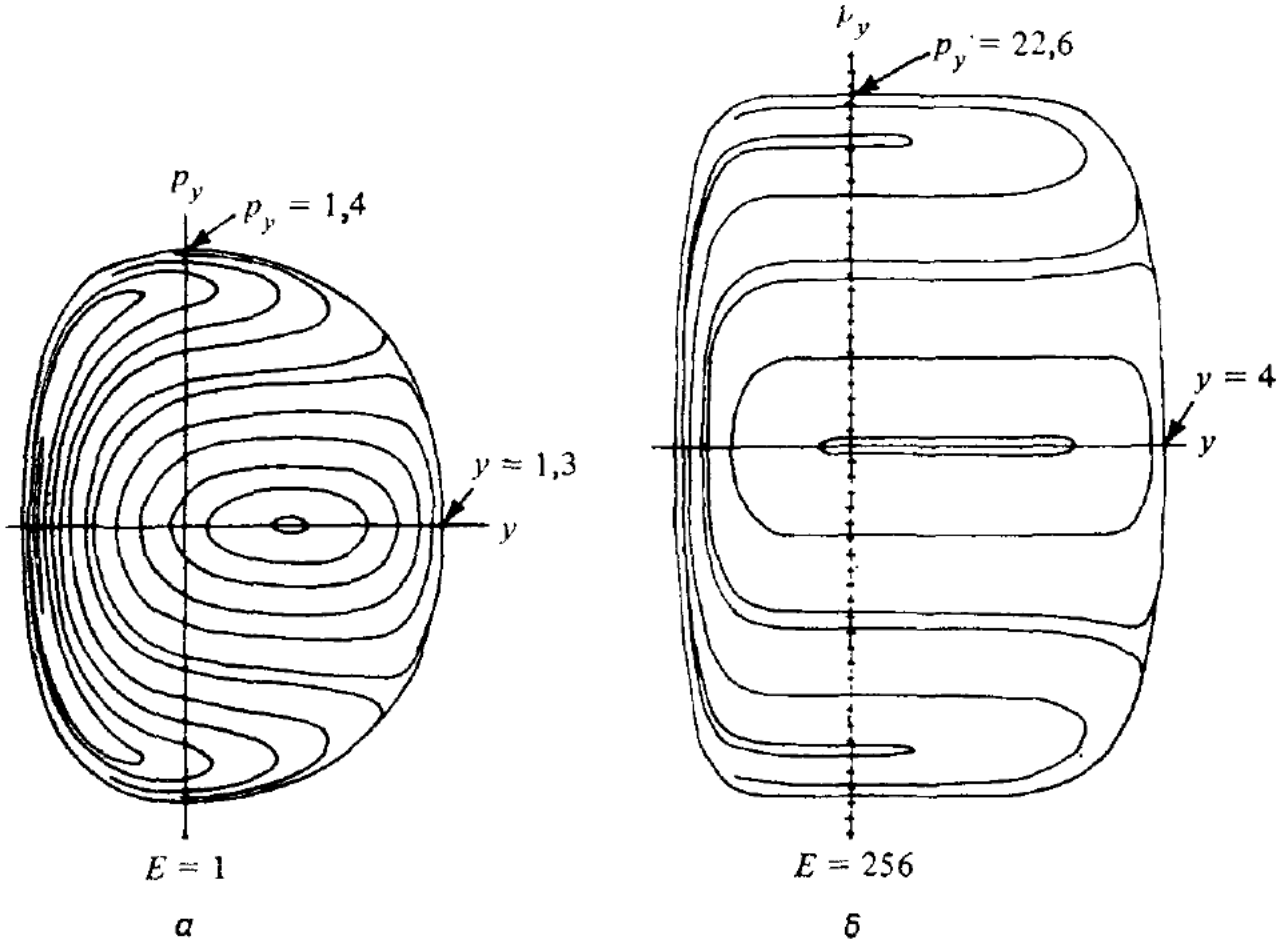


Рис. 1.9. Поверхность сечения Пуанкаре для гамильтониана Тоды при разных энергиях E (по данным работы [136]).
а) $E = 1$; б) $E = 256$.

и после неканонического, но тривиального преобразования

$$p_x' = 8\sqrt{3}\,p_x, \quad x' = x, \quad p_y' = 8\sqrt{3}\,p_y, \quad y' = y, \quad \overline{H} = H'/\sqrt{3}$$

будем иметь гамильтониан Тоды

$$\overline{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{24}\Big[\exp(2y + 2\sqrt{3}\,x) + \\ + \exp(2y - 2\sqrt{3}x) + \exp(-4y)\Big] - \frac{1}{8}. \quad (1.3.57)$$

Эквипотенциальные кривые этой системы, схематически изображенные на рис. 1.8, плавно изменяются при удалении от центра и обладают симметрией по отношению к повороту на угол $2\pi/3$.

Если разложить гамильтониан $\overline{H}$ по x и y до кубических членов, получим гамильтониан Хенона—Хейлеса

$$\overline{H}' = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3. \qquad (1.3.58)$$

Движение, описываемое этим гамильтонианом, рассматривается в следующем параграфе. Известно, что эта система неинтегрируема: Хенон и Хейлес [188] обнаружили в численных экспериментах, что при увеличении энергии $\overline{H}' = E$ происходит переход от регулярного движения к стохастическому. При этом оказалось, что стохастичность присутствует в какой-то мере при любой энергии. Все это указывает на отсутствие в системе изолирующего интеграла. Форд и др. [136] исследовали численно гамильтониан Тоды $\overline{H}$, ожидая получить такой же результат. Каково же было их удивление, когда они обнаружили, что траектории остаются регулярными для произвольной энергии $\overline{H} = E$, т. е. все пересечения траектории с поверхностью $x = 0$ ложатся на гладкие инвариантные кривые. На рис. 1.9 кривые показаны для значений $E = 1$ и $E = 256$. Эти результаты резко расходятся с данными следующего параграфа, согласно которым в модели Хенона—Хейлеса траектории, заполняющие значительную часть площади, явно видны вплоть до такой низкой энергии, как $E = 1/8$. Это различие связано, конечно, с тем, что у цепочки Тоды есть скрытая симметрия и соответствующий ей изолирующий интеграл. Воодушевленный численными результатами Форда, Хенон [186] нашел явное аналитическое выражение для этого интеграла

$$I = 8p_x\left(p_x^2 - 3p_y^2\right) + \left(p_x + \sqrt{3}\, p_y\right)\exp\left[\left(2y - 2\sqrt{3}\, x\right)\right] - \\ - 2p_x \exp(-4y) + \left(p_x - \sqrt{3}\, p_y\right)\exp\left[\left(2y + 2\sqrt{3}\, x\right)\right] = \text{const}. \qquad (1.3.59)$$

Инвариантные кривые на рис. 1.9 можно непосредственно вычислить, если положить $x = 0$ и исключить p_x из (1.3.57) с помощью (1.3.59). Существование трех изолирующих интегралов H, P_3 и I обеспечивает интегрируемость гамильтониана Тоды [1]) (1.3.52). Однако даже в исходных переменных интеграл I не соответствует какому-либо очевидному закону сохранения или симметрии.

Нахождение интегрируемых гамильтонианов. Существуют ли какие-либо общие методы проверки на интегрируемость конкретного гамильтониана? На сегодняшний день ответ на этот вопрос отрицательный. Можно, однако, поставить вопрос по-другому: существуют

---

[1]) Вообще говоря, необходимо еще проверить коммутируемость интегралов, что было сделано для произвольного числа степеней свободы в работе [455].— *Прим. ред.*

ли методы конструирования потенциалов, приводящих к интегрируемым гамильтонианам? Такой метод действительно существует по крайней мере для ограниченного круга задач. Впервые этот метод был применен Уиттекером ([430], § 152) к исследованию движения частицы, которое описывается гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}p_2^2+V(q_1,\ q_2). \tag{1.3.60}$$

Уиттекер поставил вопрос: существуют ли такие функции V, для которых система имеет интеграл не выше второй степени по p:

$$I(p,\ q)=ap_1^2+bp_2^2+cp_1p_2+ep_1+fp_2+g, \tag{1.3.61}$$

где коэффициенты зависят от q? Чтобы такая функция была интегралом движения, необходимо выполнение условия

$$[I,\ H]=0. \tag{1.3.62}$$

Подставляя (1.3.60) и (1.3.61) в (1.3.62) и приравнивая коэффициенты при $p_1^m p_2^n$, получаем систему уравнений в частных производных для этих коэффициентов, выраженных через потенциал V и его первые производные. Линейные по p члены приводят к независимым уравнениям

$$\frac{\partial e}{\partial q_1}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial q_2}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial q_1}+\frac{\partial e}{\partial q_2}=0, \tag{1.3.63}$$

$$e\frac{\partial V}{\partial q_1}+f\frac{\partial V}{\partial q_2}=0. \tag{1.3.64}$$

Для остальных членов:

$$\begin{gathered}\frac{\partial a}{\partial q_1}=0,\qquad \frac{\partial b}{\partial q_2}=0,\qquad \frac{\partial b}{\partial q_1}+\frac{\partial c}{\partial q_2}=0,\\ \frac{\partial c}{\partial q_1}+\frac{\partial a}{\partial q_2}=0,\end{gathered} \tag{1.3.65}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial g}{\partial q_1}-2a\frac{\partial V}{\partial q_1}-c\frac{\partial V}{\partial q_2}=0,\\ \frac{\partial g}{\partial q_2}-2b\frac{\partial V}{\partial q_2}-c\frac{\partial V}{\partial q_1}=0.\end{gathered} \tag{1.3.66}$$

Так как уравнения (1.3.63) и (1.3.64) независимы от (1.3.65) и (1.3.66), то первые можно решить отдельно, что приводит к линейному по p инварианту:

$$I=q_1p_2-q_2p_1,$$

который существует для аксиально симметричного потенциала

$$V=V\left(q_1^2+q_2^2\right). \tag{1.3.67}$$

Это не что иное, как сохраняющийся момент импульса, с которым мы познакомились в задаче о центральных силах. Поищем решения, не связанные с этой симметрией. Положив $e = f = 0$, получим из (1.3.65) и (1.3.66):

$$c\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right) + 2(b-a)\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} + \\ + \left(\frac{\partial c}{\partial q_1} - 2\frac{\partial a}{\partial q_2}\right)\frac{\partial V}{\partial q_1} + \left(2\frac{\partial b}{\partial q_1} - \frac{\partial c}{\partial q_2}\right)\frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \tag{1.3.68}$$

где a, b и c определяются из дифференциальных уравнений (1.3.65). Уиттекер показал, что уравнение (1.3.68) имеет характеристики вида

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1,$$

где x и y связаны с q_1 и q_2 простым преобразованием координат, а α и γ — постоянные интегрирования. Если выбрать за новые переменные параметры этих конфокальных эллипсов и гипербол

$$x = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \quad y = \frac{1}{\gamma}\left[(\alpha^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \beta^2)\right]^{1/2},$$

то дифференциальное уравнение для V, (1.3.68), будет иметь решение

$$V = \frac{\psi(\alpha) - \varphi(\beta)}{\alpha^2 - \beta^2}, \tag{1.3.69}$$

где ψ и φ — произвольные функции.

Этот интересный результат, однако, не привел пока к новым решениям физических задач. Тем не менее в последнее время происходит возрождение интереса к конструированию интегрируемых гамильтонианов [1]). Холл [174] применил такой метод к движению частицы в статических электрическом и магнитном полях, явно введя в задачу векторный потенциал. При этом он обнаружил, что решение Уиттекера не является полным, так как в нем не учитываются ограничения, связанные с сохранением энергии [2]). Им были рассмотрены также и другие классы инвариантов, не квадратичных

---

[1]) Наибольшее влияние на это оказала работа [456] (стимулированная в свою очередь знаменитой проблемой Ферми—Паста—Улама [127]), в которой был предложен мощный метод обратной задачи рассеяния, позволяющий конструировать целые семейства интегрируемых гамильтонианов. Современное состояние вопроса см., например, в книге [457].— *Прим. ред.*

[2]) Речь идет о том, что из-за сохранения энергии изменения p_1 и p_2 в (1.3.61) не являются независимыми. Поэтому условия интегрируемости Уиттекера (1.3.63) — (1.3.66) достаточны, но не необходимы (см. также [458]).— *Прим. ред.*

по импульсам. Целью этих исследований было найти самосогласованное решение для токов в плазме, обеспечивающих ее удержание. Однако вследствие чувствительности интегрируемости к небольшим изменениям потенциала, о чем свидетельствует сравнение потенциала Тоды с его приближением в форме потенциала Хенона и Хейлеса, кажется маловероятным, что для реальных потенциалов таким путем удастся достичь полной интегрируемости движения. В связи с этим представляет интерес вопрос: насколько сильным может быть возмущение интегрируемой системы, чтобы бóльшая часть траекторий осталась регулярной? Этот вопрос подробно рассмотрен в гл. 2 и 4.

Другой подход развивается Хольтом [198]. Он рассмотрел гамильтониан

$$H = H_0 + \varepsilon V \tag{1.3.70}$$

и потребовал, чтобы потенциал V был выбран так, чтобы все члены ряда теории возмущений со степенью ε, выше заданной, были бы тождественно равны нулю. При помощи такой процедуры ему удалось построить инвариант (1.3.59) для гамильтониана Тоды. Он показал также, что этот инвариант можно получить и методом Уиттекера, если включить кубические по p члены. Процедура остается при этом прежней, как описывалось для квадратичных по p инвариантов, но становится гораздо более сложной. В общем случае такой метод не способен определить, существует ли инвариант для гамильтониана вида (1.3.70), поскольку невозможно рассмотреть все типы инвариантов. С другой стороны, если существует инвариант невысокой степени по p (как, например, p^3 для цепочки Тоды), то его можно найти и, таким образом, доказать интегрируемость исходного гамильтониана. Однако для систем с более чем двумя степенями свободы подобная техника не проходит даже для ограниченного класса инвариантов.

Недавно был предложен еще один метод проверки динамической системы на интегрируемость, использующий так называемое свойство Пенлеве. Последнее означает, что все подвижные особенности решения в плоскости комплексного времени являются только простыми полюсами. Подвижными называются особенности, зависящие от начальных условий. Абловиц и др. [4] показали, что существует тесная связь между уравнениями в частных производных, имеющими солитонные (интегрируемые [1]) решения, и соответствующими им обыкновенными дифференциальными уравнениями, обладающими свойством Пенлеве. Сегур [366] продолжил эти исследования и показал, что модель Лоренца для диссипативной системы (см. § 1.5), обладающая в общем случае хаотическим по-

[1]) Существования солитонов, вообще говоря, недостаточно для интегрируемости (см., например, [459]).— *Прим. ред.*

ведением, оказывается интегрируемой[1]) как раз для тех значений параметров, при которых уравнения обладают свойством Пенлеве. Ряд хорошо известных примеров гамильтоновых систем был рассмотрен Баунтисом и др. [37]. Полученные результаты опять-таки подтверждают точное соответствие между интегрируемостью и свойством Пенлеве. Хотя это и не доказано строго, однако, по крайней мере для систем рассмотренного класса (две степени свободы и квадратичный по импульсам гамильтониан), накопилось уже достаточно много данных в пользу такого соответствия[2]). В принципе этот метод применим и к системам более высокой размерности, хотя для них это соответствие еще не проверено.

Один из методов нахождения специальных интегрируемых гамильтонианов состоит в выборе гамильтониана определенного вида, зависящего от некоторых произвольных параметров, и подборе таких значений этих параметров, при которых имеет место свойство Пенлеве. Например, для обобщенного гамильтониана Хенона—Хейлеса (1.3.58)

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + Ax^2 + By^2) + x^2y + \frac{\mu}{3}y^3;$$

из этого условия удается определить параметры μ, A и B [37]. Такая же задача была решена Холлом [174] с помощью метода Уиттекера (с инвариантами до 4-го порядка) в применении к обобщенному гамильтониану Хенона—Хейлеса. Оба подхода дают следующие условия интегрируемости:

а) $\mu = 1, \quad A = B,$

б) $\mu = 6$, A и B любые,

в) $\mu = 16, \ B = 16A,$

которые были проверены прямым вычислением. Неизвестно, однако, существует ли какая-либо фундаментальная связь между методами Пенлеве и Уиттекера.

Как известно, системы с одной степенью свободы всегда интегрируемы, а системы с двумя степенями свободы — как исключение. Что же произойдет при дальнейшем увеличении числа степеней свободы? Как уже отмечалось выше, даже нахождение отдельных интегрируемых потенциалов становится в этом случае очень трудным, чтобы не сказать невозможным. Однако, как показано в § 6.5, область фазового пространства, занятого регулярными тра-

---

[1]) Под интегрируемостью диссипативной системы здесь понимается, по-видимому, существование простого аттрактора — устойчивого фокуса или предельного цикла.— *Прим. ред.*

[2]) См., однако, работу [460], где показано, что для сохранения соответствия с интегрируемостью свойство Пенлеве необходимо модифицировать. Дальнейшие исследования этого вопроса см. также в работе [461].— *Прим. ред.*

екториями, может как возрастать[1]), так и уменьшаться при увеличении числа степеней свободы. Примечательно, что при переходе к системам, описываемым дифференциальными уравнениями в частных производных, которые имеют в некотором смысле бесконечное число степеней свободы, снова обнаруживаются большие классы интегрируемых систем. При этом, как обсуждалось выше, уравнения в частных производных, имеющие солитонные (интегрируемые) решения, можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям, обладающим свойством Пенлеве. Для дальнейшего обсуждения методов решения и соотношения между дифференциальными уравнениями в частных и обыкновенных производных мы отсылаем читателя к специальной литературе [249, 366].

*§ 1.4. Системы, близкие к интегрируемым

Обратимся теперь к качественному описанию типичного случая таких гамильтоновых систем, которые можно рассматривать как возмущения интегрируемых систем. Мы будем называть такие системы *близкими к интегрируемым*. Рассмотрим сначала простой случай автономного гамильтониана с двумя степенями свободы, или, что эквивалентно, неавтономного (зависящего от времени) гамильтониана с одной степенью свободы. Как мы видели в п. 1.2б, неавтономные системы можно свести к автономным путем увеличения числа степеней свободы на единицу. Отличительной чертой систем, близких к интегрируемым, является присутствие причудливо перемешанных друг с другом областей как регулярного, так и стохастического движения. При этом стохастические области отделены друг от друга областями с регулярными траекториями. Стохастические траектории естественно возникают в результате движения, задаваемого детерминированными уравнениями Гамильтона, которые не содержат никаких специальных «стохастических» сил. Мы проиллюстрируем это на двух примерах, широко обсуждавшихся в литературе: модель Хенона—Хейлеса и ускорение Ферми. Для автономных систем с более чем двумя степенями свободы области стохастичности уже не разделяются регулярными траекториями, а образуют стохастическую «паутину», что приводит к так называемой диффузии Арнольда, которая качественно описана в конце этого параграфа.

*1.4а. Две степени свободы

Рассмотрим автономную систему с двумя степенями свободы, близкую к интегрируемой, т. е. систему с гамильтонианом вида

$$H(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \varepsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2), \quad (1.4.1)$$

где $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{\theta}$ — переменные действие — угол невозмущенного движе-

[1]) Это утверждение спорно, см. примечание на с. 409.— *Прим. ред.*

ния, а ε — малый параметр возмущения. Функция H_0 зависит только от переменных действия, а зависимость H_1 от углов $\boldsymbol{\theta}$ является периодической.

Типичный характер движения в таких системах сейчас вполне понятен. Траектории лежат на трехмерной поверхности $H = \text{const}$ в четырехмерном фазовом пространстве. При этом, согласно теории КАМ (гл. 3), регулярные траектории заполняют конечную долю фазового пространства. Остальные траектории характеризуются стохастическим, или хаотическим, поведением. Стохастические и регулярные траектории очень сложно переплетены друг с другом, причем стохастическая траектория подходит сколь угодно близко к каждой точке фазового пространства[1]), подобно тому как любое иррациональное число может быть сколь угодно точно аппроксимировано рациональными числами.

Регулярные траектории. Из-за того что зависимость регулярных траекторий от начальных условий оказывается разрывной, их присутствие еще не означает наличия в системе изолирующего (глобального) интеграла или определенной симметрии. Однако там, где такие траектории существуют, им соответствуют точные интегралы движения. Для регулярных траекторий угловые переменные зависят от времени либо квазипериодически (типичный случай), либо периодически. В первом случае частоты движения несоизмеримы, и траектория плотно покрывает поверхность инвариантного тора, заданного сохраняющимися значениями переменных действия. В последнем случае траектория замыкается через целое число оборотов вокруг тора (более полное представление об инвариантных торах дано в гл. 3). Наиболее удобными методами исследования регулярных траекторий являются теория возмущений и метод сечения Пуанкаре, рассмотренный в § 1.2.

Различные типы регулярных траекторий и их пересечения с поверхностью $\sum_R$ ($\theta_1 = \text{const}$) для системы с двумя степенями свободы представлены на рис. 1.10. Случай *а* соответствует типичной траектории, покрывающей поверхность тора. Движение вокруг главной оси тора периодично по θ_1 с периодом 2π. При этом последовательные пересечения поверхности $\sum_R$ при $\theta_2 = \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23} \ldots$ ложатся на замкнутую *инвариантную кривую* и плотно покрывают ее за большой промежуток времени. Случай *б* соответствует резонансу

$$k\omega_1(J) + l\omega_2(J) = 0, \tag{1.4.2}$$

где $\omega_1 = \dot{\theta}_1$, $\omega_2 = \dot{\theta}_2$, k и l — целые числа. Резонансная траектория замкнута. При $k = 5$, $l = 2$ она пересекает поверхность $\sum_R$ в пяти точках, которые называются *неподвижными*, или *периоди-*

[1]) В общем случае это справедливо лишь в пределах одной хаотической компоненты движения, которая для системы вида (1.4.1) может охватывать максимум всю энергетическую поверхность.— *Прим. ред.*

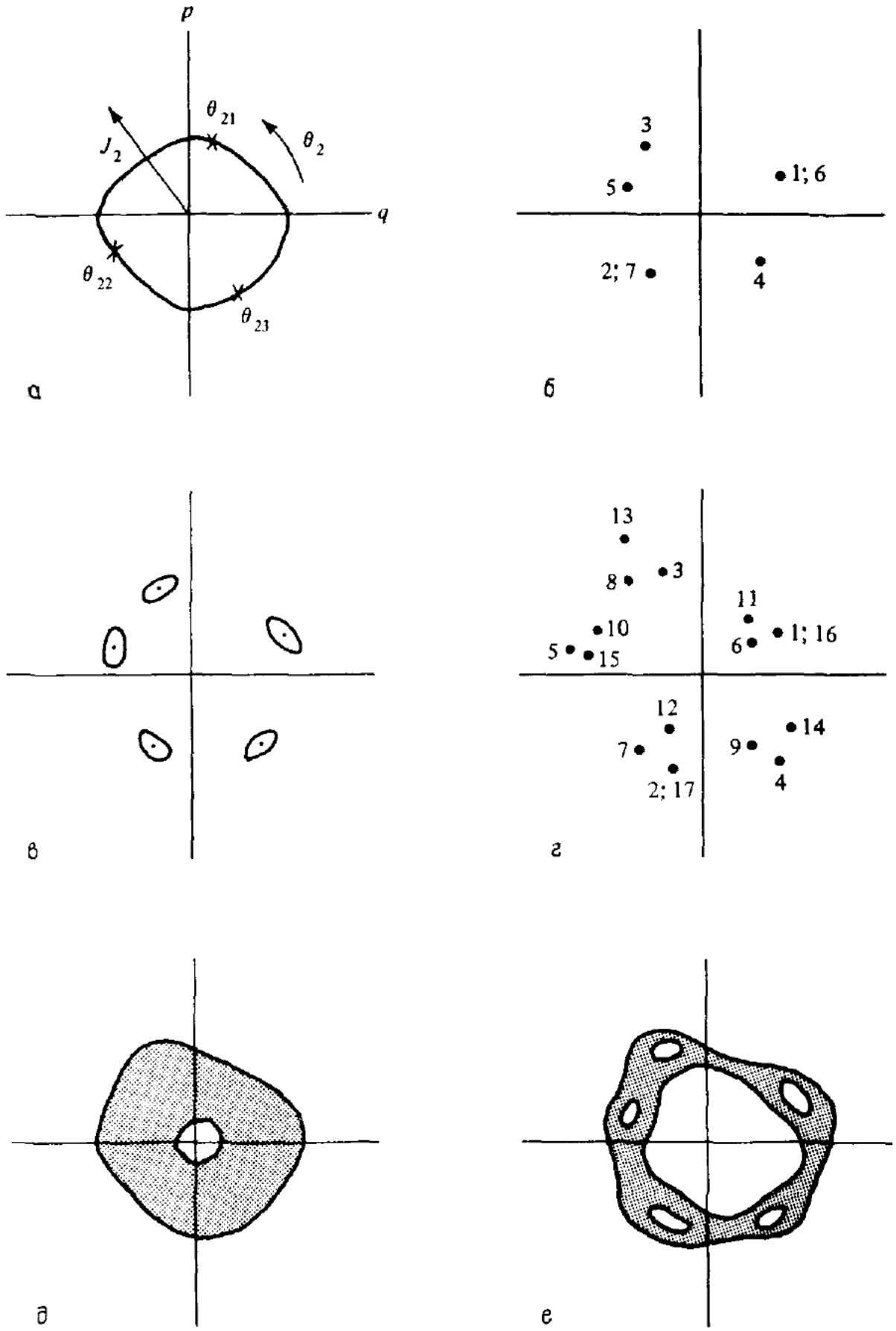


Рис. 1.10. Поверхность сечения Σ_R (θ_1 = const) для автономной системы с двумя степенями свободы.

а — инвариантная кривая (крестики — последовательные пересечения траектории с поверхностью Σ_R); *б* — периодическая траектория в центре первичного резонанса $k = 5$, $l = 2$ (показаны первые семь пересечений); *в* — инвариантные кривые вокруг периодических точек ($k = 5$, $l = 2$); *г* — периодическая траектория вторичного резонанса (период 3) внутри первичного резонанса (*б*) (показаны первые 17 пересечений); *д* — стохастическая область, ограниченная инвариантными кривыми и охватывающая несколько первичных резонансов; *е* — стохастический слой в окрестности сепаратрисы первичного резонанса $k = 5$, $l = 2$.

ческими, точками движения. Поскольку при таком движении траектория невозмущенного гамильтониана замкнута и периодична, то мы называем такой резонанс *первичным*. Резонанс *б* — специальный случай инвариантной кривой, когда число вращения k/l рационально. Резонансы и их взаимодействие играют важную роль в возникновении стохастического движения в системах, близких к интегрируемым.

Случай *в* соответствует типичной траектории в окрестности первичного резонанса (рис. 1.10, *б*). Пересечения траектории с поверхностью $\sum_R$ образуют пять гладких замкнутых кривых (*первичных островов*), окружающих неподвижные точки (случай *б*). Наконец, случай *г* иллюстрирует еще более сложное движение: замкнутую периодическую траекторию, которая за 15 оборотов по θ_1 три раза обходит первичный резонанс $k = 5$; $l = 2$; Этот случай представляет пример *вторичного резонанса* между колебаниями на первичном резонансе и невозмущенным движением. Вторичные резонансы возникают под действием возмущения H_1 и в свою очередь окружены резонансами еще более высокого порядка.

Теперь ясно, насколько сложна структура регулярных траекторий. Первичные резонансы приводят к возникновению вторичных резонансов и так *до бесконечности*. Расчет регулярных траекторий (инвариантных кривых и резонансов) рассматривается в гл. 2 и 3.

Области стохастичности. Известно, что стохастические траектории занимают конечную область энергетической поверхности в фазовом пространстве, а их последовательные пересечения заполняют конечную площадь поверхности сечения. Пример двух стохастических траекторий приведен на рис. 1.10. В случае *д* траектория заполняет кольцеобразный стохастический слой, заключенный между двумя инвариантными кривыми, подобными тем, что изображены в случае *а*. В этой области существуют также и регулярные траектории, но соответствующие им островки устойчивости, окружающие неподвижные точки (см. § 3.3), либо обходятся стохастической траекторией, либо их размер слишком мал и их просто не удается разглядеть. В случае *е* показан стохастический слой вблизи островков случая *в*, заполненный одной стохастической траекторией.

Стохастическое движение всегда возникает возле сепаратрис, которые разделяют инвариантные кривые различной топологии. Действительно, вблизи сепаратрисы частота колебаний ω стремится к нулю, см. (1.3.15). Поэтому условие резонанса с частотой невозмущенных колебаний ω_0:

$$k\omega - \omega_0 = 0 \tag{1.4.3}$$

приводит к тому, что при приближении к сепаратрисе расстояние по переменной действия между соседними резонансами (k и $k+1$) также стремится к нулю. Область стохастичности вблизи сепарат-

рисы будем называть *стохастическим слоем* [1]). В системах с двумя степенями свободы при малом возмущении ε эти слои оказываются очень тонкими и отделены друг от друга инвариантными кривыми, ввиду чего переход траектории из одного слоя в другой невозможен. С увеличением ε инвариантные кривые, разделяющие соседние резонансы и их стохастические слои, сильно искажаются и в конце концов разрушаются. В результате происходит слияние стохастических слоев и возникает *глобальная*, или *сильная*, *стохастичность*. Условие такого перехода рассмотрено в гл. 4, а характер хаотического движения — в гл. 5.

Некоторое указание на причину возникновения стохастичности вблизи сепаратрисы можно получить из картины перекрытия резонансов, которое приводит к чрезвычайно запутанному движению, в особенности с учетом резонансов высоких порядков. К такому же заключению можно прийти и с другой точки зрения, рассмотрев траекторию самой сепаратрисы. Как из теоретического анализа, так и из численных экспериментов следует, что с учетом возмущения сепаратриса не является уже такой гладкой кривой, как в интегрируемой системе (рис. 1.4), а напротив, также оказывается чрезвычайно сложной. Движение вблизи сепаратрисы подробно обсуждается в п. 3.2б. При достаточно малом возмущении инвариантные поверхности ограничивают область стохастического движения (см. 3.2а), однако с увеличением возмущения резонансы более высоких порядков отодвигают инвариантные поверхности от сепаратрисы и тем самым расширяют область сложного движения.

Мы видели, что вблизи резонанса фазовые траектории сильно возмущены. Тем не менее внутри резонанса существуют замкнутые периодические траектории (неподвижные точки на рис. 1.10, *б* и *г*). *Устойчивость линеаризованного вблизи них движения* также связана со стохастичностью. Линейная устойчивость решений в окрестности периодической траектории приводит к регулярному движению, которое может быть разрушено слабым нелинейным возмущением только за большой промежуток времени. Неустойчивые решения приводят к экспоненциальной расходимости траекторий, скорость которой можно принять за меру стохастичности (см. гл. 5). Можно ожидать, что в той области фазового пространства, где все или почти все периодические решения линейно неустойчивы, движение будет хаотическим.

Модель Хенона—Хейлеса. Рассмотрим в качестве иллюстрации хорошо известный пример движения в двумерном потенциале

$$U(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3\right), \qquad (1.4.4)$$

[1]) В оригинале — resonance layer (резонансный слой). В переводе используется более распространенный в отечественной и зарубежной литературе термин стохастический слой. — *Прим. перев.*

показанном на рис. 1.11. Впервые эта модель исследовалась численно Хеноном и Хейлесом [188] в качестве простого примера нелинейной системы с несколькими (двумя) степенями свободы. В дальнейшем эта система детально изучалась многими авторами. К сожалению, в этом примере встречаются некоторые трудности,

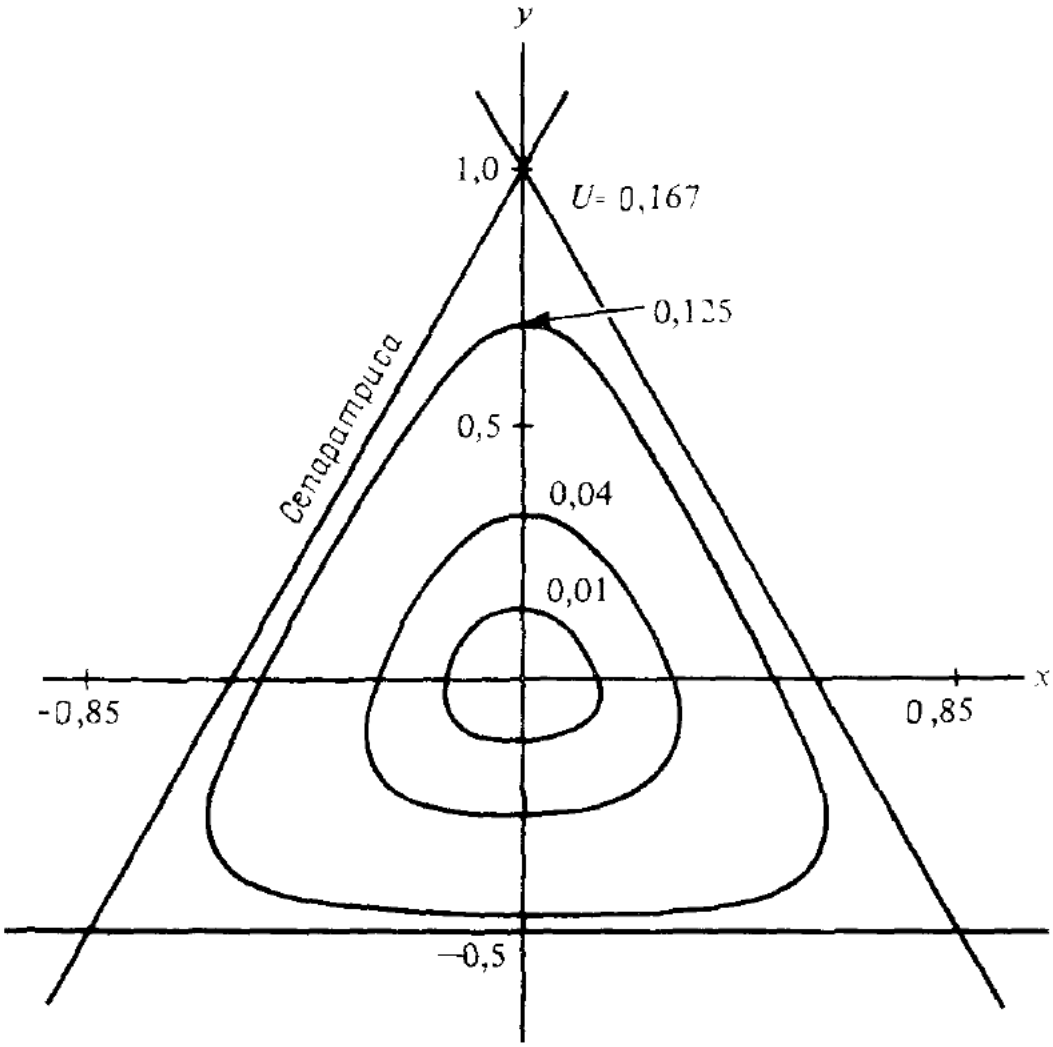


Рис. 1.11. Замкнутые эквипотенциальные кривые ($U = \mathrm{const} < 1/6$) для модели Хенона—Хейлеса (1.4.4) (по данным работы [291]).

которые не являются типичными для нелинейных систем и требуют особого подхода. Тем не менее этот численный пример хорошо иллюстрирует интересующие нас вопросы. Ход потенциала в декартовых координатах x, y показан на рис. 1.11. Гамильтониан частицы в таком потенциале можно записать в виде $H = H_0 + \varepsilon H_1 = E$, где

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right), \tag{1.4.5а}$$

$$\varepsilon H_1 = x^2 y - \frac{1}{3} y^3. \tag{1.4.5б}$$

Для удобства масса частицы принята равной единице, а малый

параметр ε определяется выбором энергии: $\varepsilon \sim E^{1/2}$. Если E меньше граничной потенциальной энергии $U = 1/6$, то частица будет удерживаться внутри потенциальной ямы. Существование инвариантных кривых в этом случае можно определить по картине на поверхности сечения (y, p_y). В пределе малых колебаний гамильтониан можно записать в переменных действие — угол в виде (см. п. 1.2в):

$$H_0 = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2. \tag{1.4.6}$$

В данном случае частоты колебаний ω_1 и ω_2 равны единице. Если учесть теперь слабое возмущение (1.4.5б), то полный гамильтониан примет вид

$$H = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \varepsilon H_1 (J_1, J_2, \theta_1, \theta_2). \tag{1.4.7}$$

При достаточно малой энергии траектории на поверхности сечения оказываются замкнутыми кривыми почти для всех начальных условий, за исключением очень близких к резонансным. Эти кривые можно найти либо численно, решая уравнения движения, либо путем вычисления интеграла движения по теории возмущений с учетом членов достаточно высокого порядка по ε (см. гл. 2). Если в разложении взять мало членов, то замкнутые кривые еще будут получены, но они не будут похожи на численные. С другой стороны, если в разложении взять слишком много членов, то ответ будет отличаться от правильного решения, так как ряд асимптотический. Мак-Намара и Уайтмен [291] вычислили J_2 с точностью до второго и третьего порядков по ε для начальной энергии $E = 0{,}01$ и различных начальных условий. Их результаты показаны на рис. 1.12, *а* и *б*. Видно, что в данном примере члены высокого порядка оказываются очень существенными и даже изменяют характер движения. Так, наблюдаемые в численном эксперименте (рис. 1.12, *в*) траектории, замкнутые вокруг точек A и B, появляются лишь в четвертом порядке теории возмущений. Необходимость использовать высокие порядки теории возмущений возникает далеко не во всех системах, близких к интегрируемым. В данном случае это является следствием двух особенностей модели Хенона—Хейлеса: 1) невозмущенные колебания линейны и 2) частоты этих колебаний совпадают. Сравним численные результаты Хенона и Хейлеса с теорией возмущений Густавсона [171] восьмого порядка (рис. 1.13). Для энергий $E = 0{,}042$ (1/24) и $E = 0{,}083$ (1/12) возникает впечатление, что инвариантные кривые существуют везде, а ряд теории возмущений сходится к правильному пределу. Однако ни то ни другое, строго говоря, не является верным, поскольку наряду с инвариантными кривыми имеются очень тонкие стохастические слои, распределенные по всей поверхности сечения и связанные с резонансами между двумя степенями свободы. Толщина этих слоев экспоненциально мала по параметру E^{-1}. Поэтому для ма-

лых значений E слои занимают ничтожную часть полной площади поверхности сечения и неразличимы на картинках, получаемых в численных экспериментах.

Для более высокой начальной энергии $E = 0{,}125$ наблюдается три типа траекторий: простая инвариантная кривая как и при низкой энергии; многопетлевая траектория, например представляющая цепочку из пяти маленьких островов, подобная изображенной на рис. 1.10, *в*, для которой пересечения «перескакивают» от одной петли к другой, и, по-видимому, эргодическая траектория (аналогичная изображенной на рис. 1.10, *е*) с пересечениями в случайных точках. Для последней траектории переменные действия не только не являются интегралами движения, но и не могут быть получены из разложений теории возмущения. С другой стороны, даже для граничной энергии ($E = 1/6$) интегралы сохраняются в малых изолированных областях фазовой плоскости. Присутствие таких островов устойчивости означает существование интеграла движения вблизи первичного резонанса, связанного с частотами невозмущенных колебаний по x и y. Методы вычисления таких интегралов, а также разме-

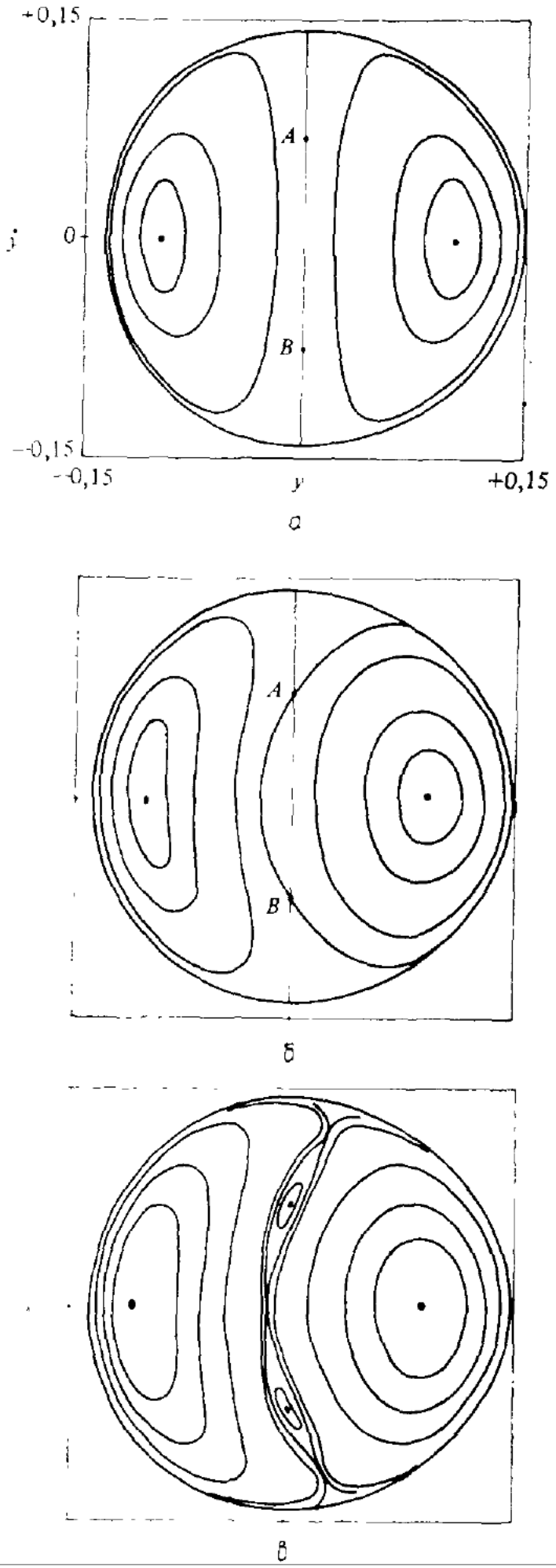


Рис. 1.12. Инвариантные кривые на поверхности сечения модели Хенона—Хейлеса; $E = 0{,}01$ (по данным работы [291]).

а — во втором порядке (по ε); *б* — в третьем порядке; *в* — численное моделирование.

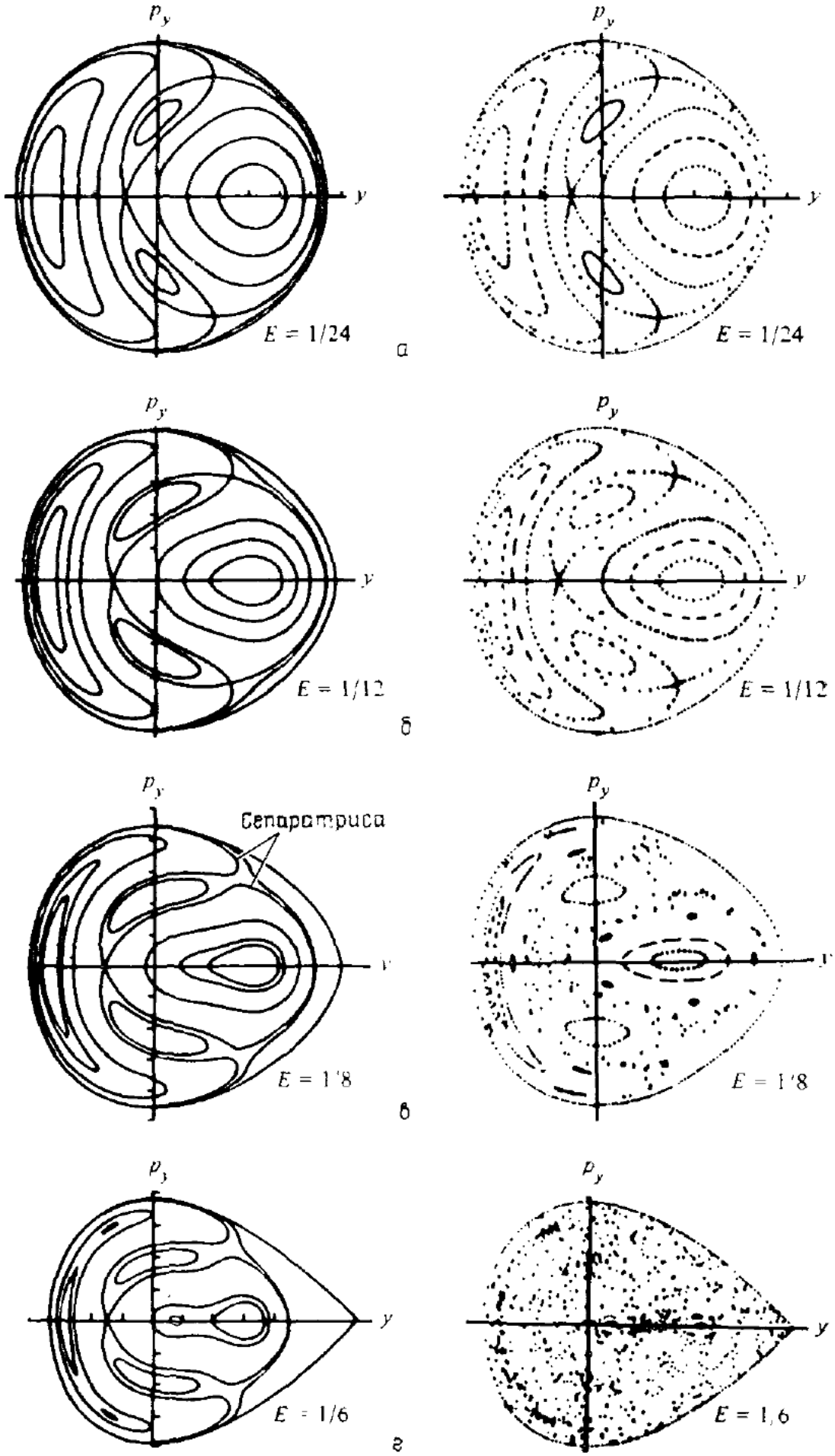


Рис. 1.13. Сравнение аналитической (слева) и найденной численно (справа) структуры поверхности сечения модели Хенона—Хейлеса (по данным работы [171]).

ров островков устойчивости приведены в § 2.4 вместе с подробными примерами.

Хотя существует несомненное соответствие между расчетами устойчивых областей по теории возмущений и результатами численного моделирования, это еще не означает, что устойчивость сохраняется в любой момент времени, как это предсказывает теория возмущений, поскольку слабые резонансы высокого порядка могут разрушить эту устойчивость. Однако на помощь приходит теория КАМ, которая гарантирует, что, во всяком случае, для достаточно малого возмущения инвариантные кривые существуют и близки к невозмущенным. Это дает основание предположить, что те кривые, которые выглядят гладкими и устойчивыми, наверное, близки к хорошим инвариантным кривым, хотя, возможно, и имеют какую-то невидимую структуру. Опираясь на это предположение, мы развиваем эвристический критерий разрушения интегралов движения, связанный с критерием *перекрытия соседних резонансов*, который был предложен Чириковым [67]. Сравнивая эти критерии с численными экспериментами, можно получить достаточно надежные количественные оценки разрушения интегралов движения. Эти вычисления — основная тема гл. 4.

Ускорение Ферми. Как уже было отмечено в § 1.2, существует тесная связь между гамильтоновыми системами с двумя степенями свободы и сохраняющими площадь отображениями двумерной поверхности на себя. Преобразование, задающее последовательные пересечения траектории с некоторой поверхностью, является именно таким отображением. И обратно, динамическую систему, заданную отображением, можно описать и гамильтонианом, который получается разложением отображения в ряд Фурье [1]).

Рассмотрим пример динамической системы, которую можно описать сохраняющим площадь отображением; он иллюстрирует характер стохастических траекторий в системах с двумя степенями свободы. Отображение описывает движение шарика между неподвижной и колеблющейся стенками. Этот пример Улама [415] моделирует механизм ускорения космических лучей, предложенный Ферми [126].Обозначим через u_n скорость шарика (в единицах удвоенной амплитуды скорости стенки), перед его n-м столкновением с колеблющейся стенкой, а через ψ_n — фазу колебаний стенки в момент столкновения. Тогда отображение имеет вид

$$u_{n+1} = |u_n + \sin\psi_n|, \tag{1.4.8а}$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \frac{2\pi M}{u_{n+1}}, \tag{1.4.8б}$$

[1]) Имеется в виду фурье-разложение по времени, см. п. 3.1в.— *Прим. ред.*

где M — некоторое приведенное расстояние между стенками, а скорость шарика u_n берется по абсолютной величине.

Динамика такого отображения может быть прослежена на многие тысячи итераций, что позволяет получить детальное представ-

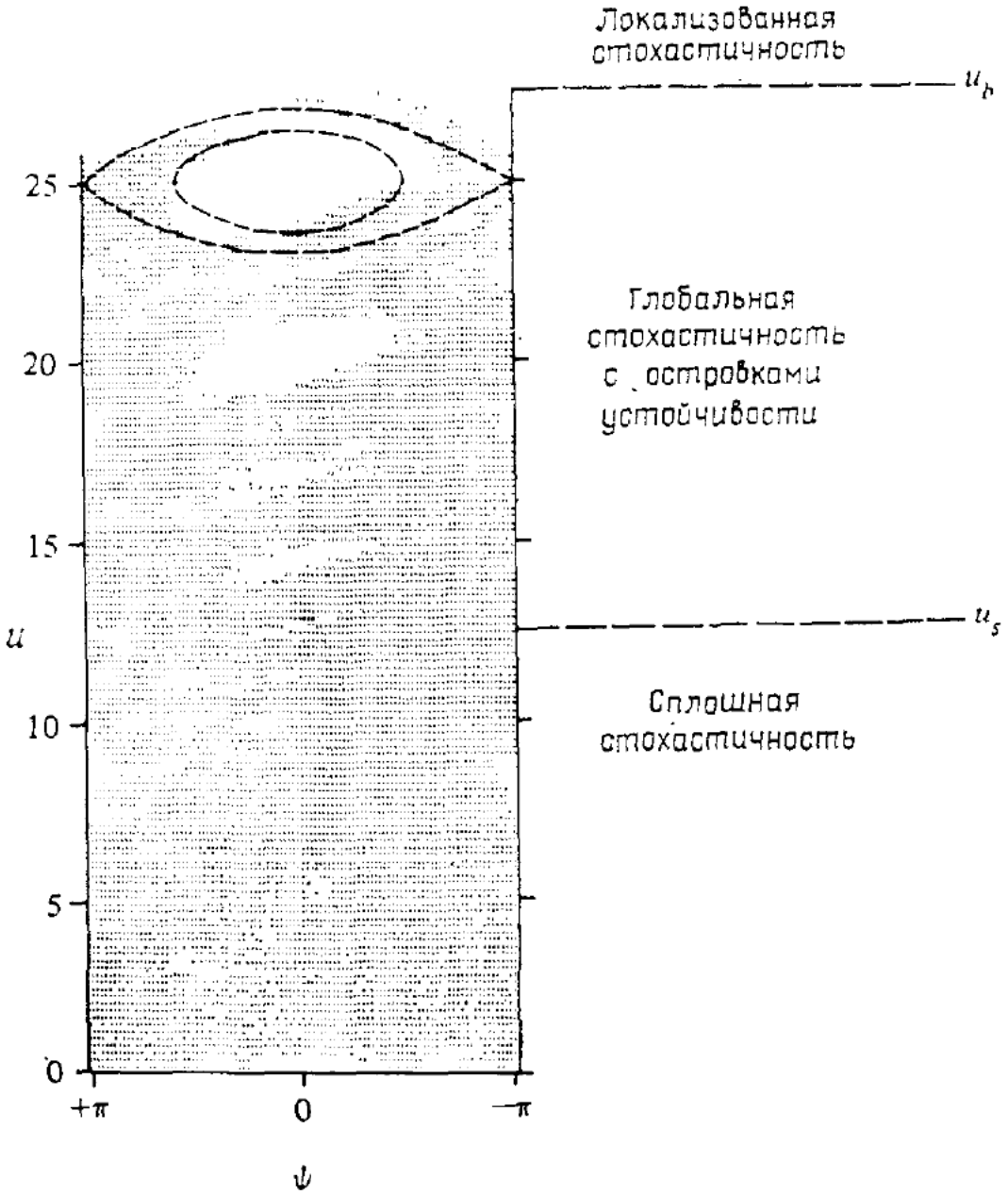
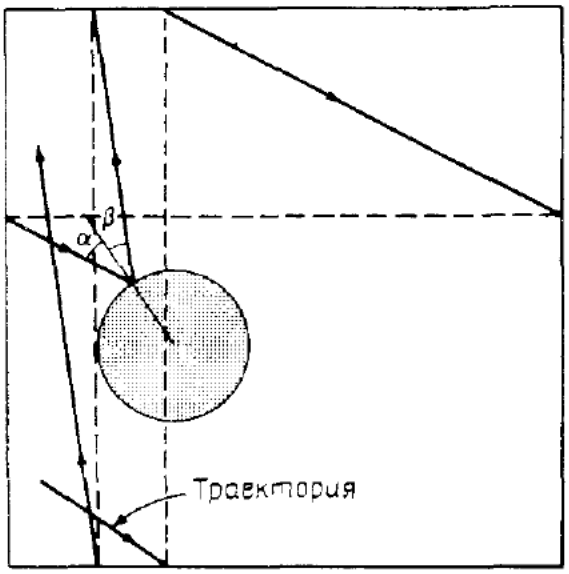


Рис. 1.14. Поверхность сечения для задачи Ферми (по данным работы [274]). Показано заполнение фазовой плоскости одной траекторией за 623 000 итераций. Пунктирные кривые рассчитаны по резонансной теории возмущений.

ление о поведении системы и, в частности, исследовать ее статистические свойства. На рис. 1.14 изображена плоскость (u, ψ) после 623 000 итераций для $M = 100$ и начальной скорости $u_0 \approx 1$. Плоскость разделена на 200×100 ячеек [1]), причем в неотмеченные ячейки траектория не попадала. Видно, что на фазовой плоскости имеются три области: 1) область больших значений u, в которой преобладают инвариантные кривые, а узкие и ограниченные стохастические слои расположены только вблизи резонансных се-

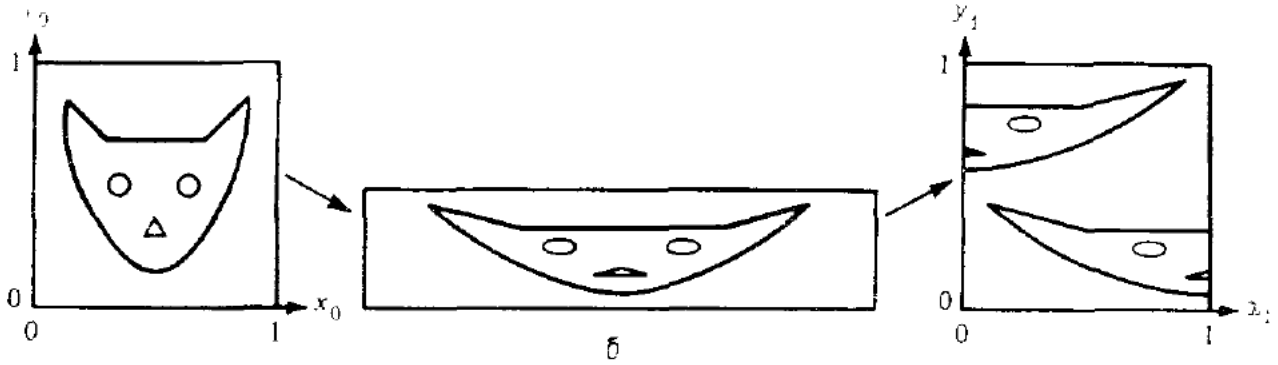
[1]) Для $u \lesssim 25$, см. п. 3.4б.— *Прим. ред.*

паратрис; 2) единая стохастическая область при промежуточных значениях u, в которой еще остаются островки устойчивости вокруг периодических траекторий, и 3) область стохастичности для малых u, в которой все первичные периодические траектории, по-видимому, неустойчивы. В областях 2 и 3 имеет место *сильная*, или *глобальная*, *стохастичность* движения. В последней из них, несмотря на существование некоторых корреляций между последовательными значениями фазы ψ, можно использовать *приближение хаотических фаз* и диффузионное уравнение для скорости u. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в гл. 5.



а

Эргодические системы. Подобно полностью интегрируемым системам, эргодические системы, в которых отсутствуют регулярные траектории, оказываются в некоторых отношениях более простыми,



б

Рис. 1.15. Два примера систем, обладающих эргодичностью и перемешиванием (по данным работы [14]).

а — развертка тора, по которому движутся твердые диски, $\alpha = \beta$; *б* — преобразование пекаря; перемешивание происходит в результате раскатывания, разрезания и складывания.

чем системы, близкие к интегрируемым. Хотя в эргодических системах и нельзя пользоваться понятием отдельных траекторий, но зато можно установить ряд общих статистических свойств. Примером такой системы может служить движение бильярдного шара, сталкивающегося с неподвижным диском (рис. 1.15, *а*). Траектория шара изображена сплошной линией со стрелками, указывающими направление движения. Отражения от диска происходят по обычному закону: угол падения α равен углу отражения β. Движение считается пространственно периодическим по обоим направлениям. При этом можно считать, что траектория, проходящая через одну сторону ячейки периодичности, возвращается с противо-

положной стороны под тем же углом. Синай [377] показал, что эта система обладает и эргодичностью и перемешиванием. Она представляет интерес и для статистической механики [133].

Другим хрошо известным примером эргодической системы является «*преобразование пекаря*», которое отображает единичный квадрат на себя:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x_0 \\ y_0/2 \end{pmatrix}, & 0 \leqslant x_0 < \frac{1}{2}, \\ \begin{pmatrix} 2x_0 - 1 \\ (y_0 + 1)/2 \end{pmatrix}, & \frac{1}{2} \leqslant x_0 < 1. \end{cases} \tag{1.4.9}$$

Для наглядности используя знаменитого арнольдовского кота [14] находим, что это преобразование похоже, см. рис. 1.15, *б*, на дейст, вие пекаря, раскатывающего, разрезающего и складывающего свое тесто. Движение этой системы является неустойчивым и обладает свойством перемешивания.

Таким образом, имеются явные свидетельства в пользу статистических свойств отображений в областях неустойчивого движения. Что же касается более сильного предположения о возможности использовать приближение хаотических фаз, когда движение системы напоминает случайное блуждание в импульсном пространстве, то это зависит также от наличия существенно различных временны́х масштабов для перемешивания по фазе и по импульсу. Для многих динамических систем перемешивание по фазе происходит гораздо быстрее, чем по импульсу, что и позволяет ввести разные масштабы времени.

*1.4б. Более чем две степени свободы

Все вышеописанные эффекты для автономных систем с двумя степенями свободы имеют место и для систем с более чем двумя степенями свободы. В типичном случае стохастические и регулярные траектории тесно сосуществуют в $2N$-мерном фазовом пространстве и на $(2N-2)$-мерной поверхности сечения, а стохастические слои расположены вблизи резонансов. Толщина слоев растет с увеличением возмущения, что приводит в конце концов к перекрытию первичных резонансов, движению поперек слоев и *сильной стохастичности*. Однако при достаточно малом возмущении первичные резонансы не перекрываются. В этом случае возникает новое физическое явление — движение вдоль слоев, или так называемая *диффузия Арнольда*.

Диффузия Арнольда. Для двух степеней свободы двумерные инвариантные поверхности (торы) разделяют трехмерный энергетический «объем» в фазовом пространстве на изолированные слои, подобно тому как линии на плоскости выделяют изолированные об-

ласти (рис. 1.16, *а*). Но уже для трех степеней свободы трехмерные торы не разделяют пятимерный энергетический «объем», как линии не могут изолировать трехмерную область (рис. 1.16, *б*). Таким образом, при $N>2$ инвариантные N-мерные торы не разделяют $(2N-1)$-мерную энергетическую поверхность на отдельные области. Поэтому при $N>2$ в типичном случае все стохастические слои на энергетической поверхности связаны в единую сложную сеть — паутину Арнольда. Эта паутина пронизывает все фазовое пространство, подходя сколь угодно близко к любой его точке. Для началь-

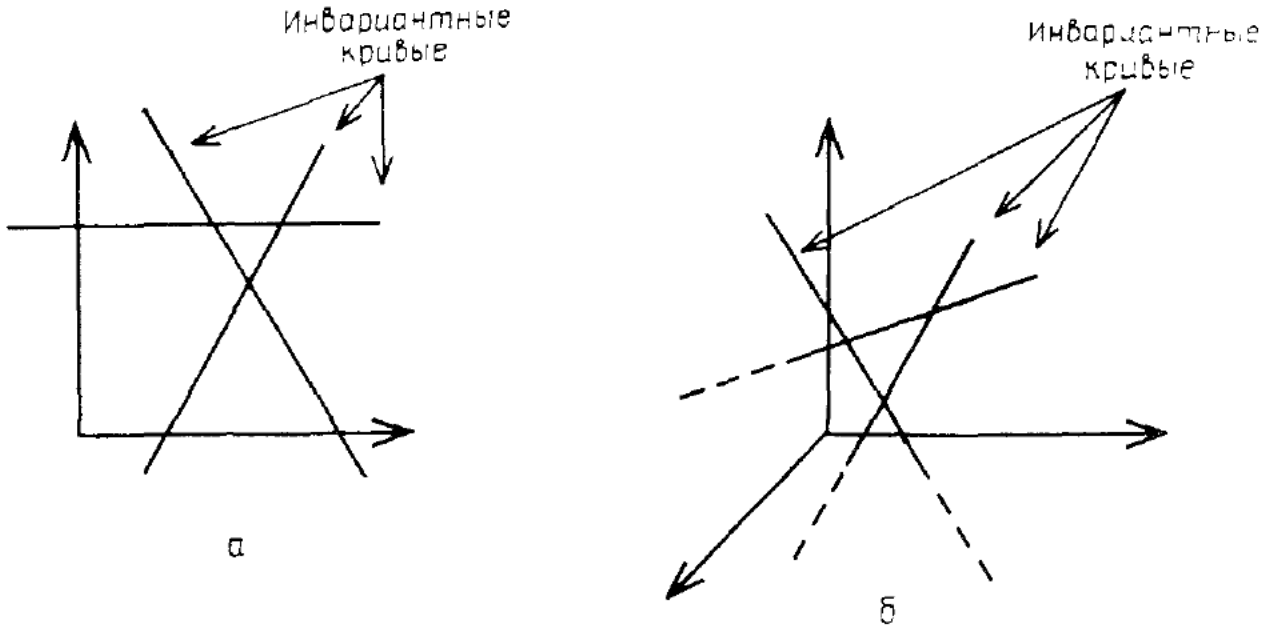


Рис. 1.16. Топология энергетической поверхности (по данным работы [273]). *а* — двумерная энергетическая поверхность (плоскость) разделяется инвариантными кривыми на изолированные области; *б* — трехмерная энергетическая «поверхность» (объем) не разделяется одномерными кривыми.

ных условий на паутине стохастическая траектория пересекает в конце концов любую область энергетической поверхности, даже когда возмущение $\varepsilon \to 0$. Это и есть диффузия Арнольда.

Слияние стохастических траекторий в единую сеть было доказано [12] для специальной нелинейной системы. В общем случае такого доказательства до сих пор нет, но известно несколько численных примеров диффузии Арнольда. С практической точки зрения возникают два основных вопроса: 1) какова относительная мера стохастической компоненты в интересующей нас области фазового пространства и 2) какова скорость диффузии Арнольда для тех или иных начальных условий. Оценку размеров стохастической компоненты можно получить из критерия перекрытия резонансов (см. гл. 6).

Так же как и в системах с двумя степенями свободы, перекрытие резонансов приводит к образованию стохастического слоя конечной ширины и вызывает движение *поперек* слоя. Новой особенностью диффузии Арнольда является движение *вдоль* стохастического слоя, которое возникает при взаимодействии по крайней

мере *трех* резонансов. Схема такого движения изображена на рис. 1.17. В плоскости (J_1, θ_1) показана проекция резонанса и его стохастического слоя. Ось переменной действия J_2 перпендикулярна этой плоскости. Для консервативной системы с двумя степенями свободы сохранение энергии и изменение J_1 только в пределах стохастического слоя ограничивают изменение J_2. Однако при наличии еще одной степени свободы или в случае зависимости гамильтониана от времени последнее ограничение отпадает, и становится возможным движение вдоль стохастического слоя по J_2.

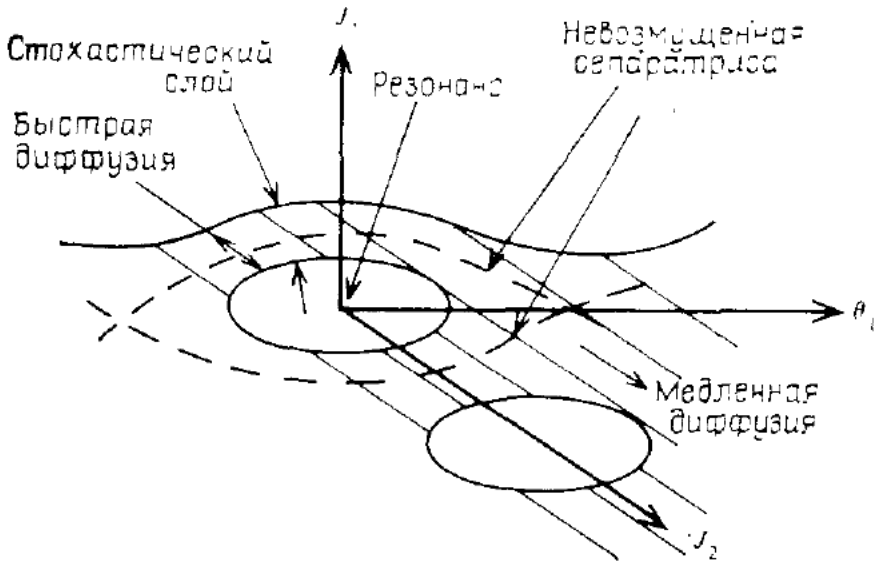


Рис. 1.17. Быстрая диффузия идет поперек стохастического слоя, а медленная диффузия Арнольда—вдоль слоя.

При взаимодействии трех резонансов скорость диффузии Арнольда была найдена Чириковым [70] и Теннисоном и др. [406][1]). Это рассматривается в гл. 6. В общем случае взаимодействия многих резонансов строгая оценка сверху была получена Нехорошевым [314]. Однако, вообще говоря, она значительно завышает скорость диффузии. Обзор численных экспериментов по диффузии Арнольда в области взаимодействия многих резонансов [72] дан в гл. 6.

§ 1.5. Диссипативные системы

В отличие от гамильтоновых систем с их фундаментальным законом сохранения фазового объема для диссипативных систем характерно его постоянное уменьшение со временем. Это приводит к тому, что все траектории движения притягиваются к некоторой поверхности (аттрактору), размерность которой меньше, чем у исходного фазового пространства. При этом уравнения движения уже не являются каноническими, но их можно записать, вообще

[1]) Первые оценки для скорости диффузии Арнольда приведены в [146]. — *Прим. ред.*

говоря, в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = V(x), \tag{1.5.1}$$

где для N-мерного фазового пространства векторы x и V имеют N компонент. Траектория $x(t)$ называется в этом случае N-мерным потоком. В случае регулярного потока движение на аттракторе является простым. Это может быть, например, неподвижная точка (фокус) или периодическая траектория (предельный цикл). Для двумерных потоков существуют фактически только эти две возможности.

Для трехмерных потоков, помимо фокусов и предельных циклов, возможны и квазипериодические траектории с двумя основными частотами. По аналогии можно было бы ожидать, что это и есть единственно возможные аттракторы. Однако это не так. Было показано, что в трехмерных (и большей размерности) диссипативных системах существуют аттракторы с очень сложной геометрической структурой. В частности, они имеют дробную размерность (см. п. 7.1в) и называются обычно *странными аттракторами*. Движение на странных аттракторах является хаотическим [1]).

1.5а. Странные аттракторы

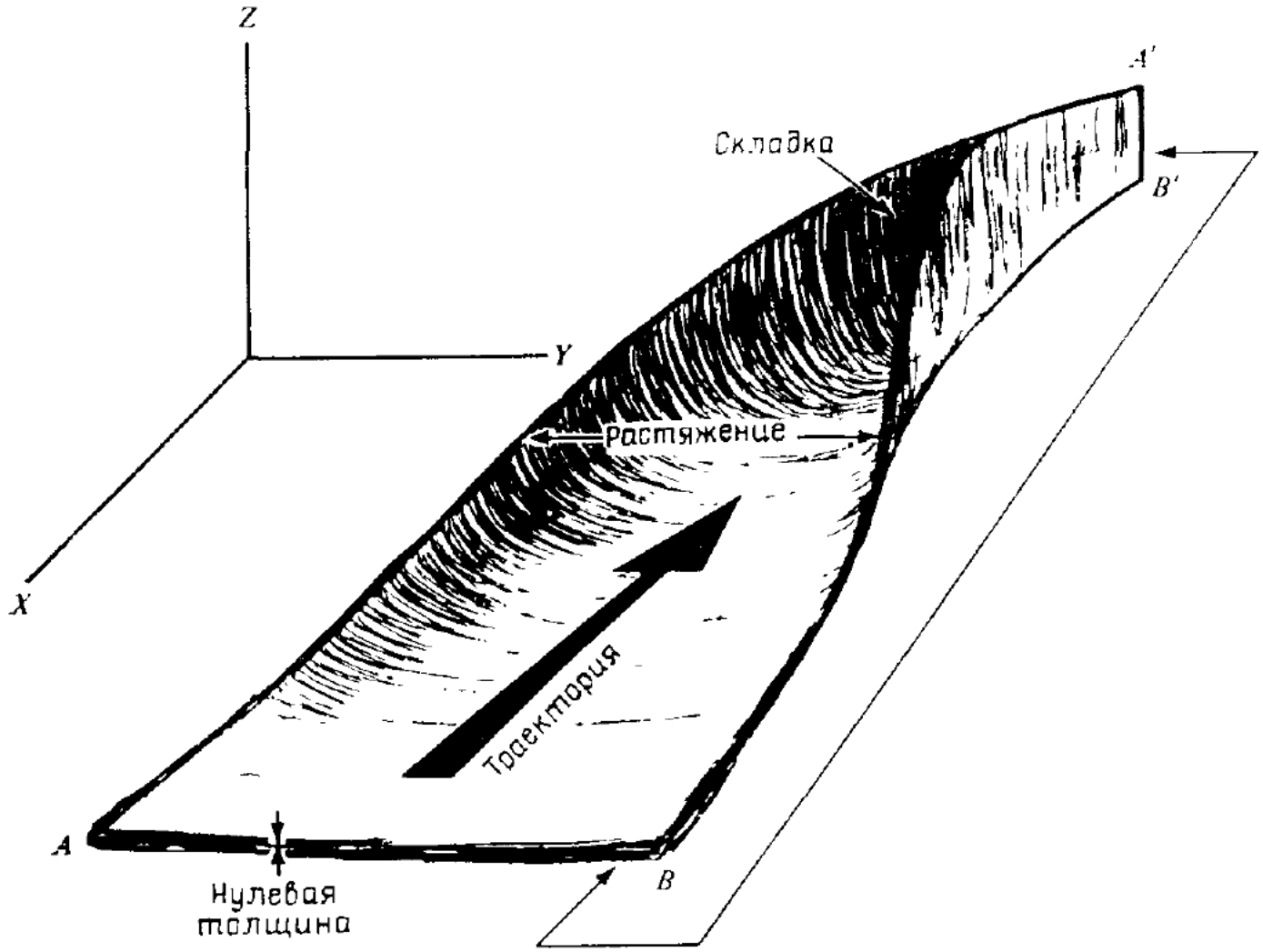
Грубо говоря, странный аттрактор — это такой аттрактор, на котором близкие траектории расходятся экспоненциально. В качестве примера представим себе трехмерный поток в виде слоя из бесконечного числа двумерных листов. Слой растягивается вдоль одного из направлений и складывается, как показано на рис. 1.18, *а*. При этом края слоя (AB и $A'B'$) гладко соединены между собой. Так как на краю $A'B'$ имеются два отдельных листа, а на краю AB только один, то для гладкости их соединения необходимо бесконечное число листов. В противном случае возникли бы разрывы, ведущие к необратимости потока. Эскиз окончательной структуры такого аттрактора представлен на рис. 1.18, *б*.

Из схемы аттрактора видно, что, несмотря на экспоненциальную расходимость, траектории ограничены [2]). Далее, оказывается, что

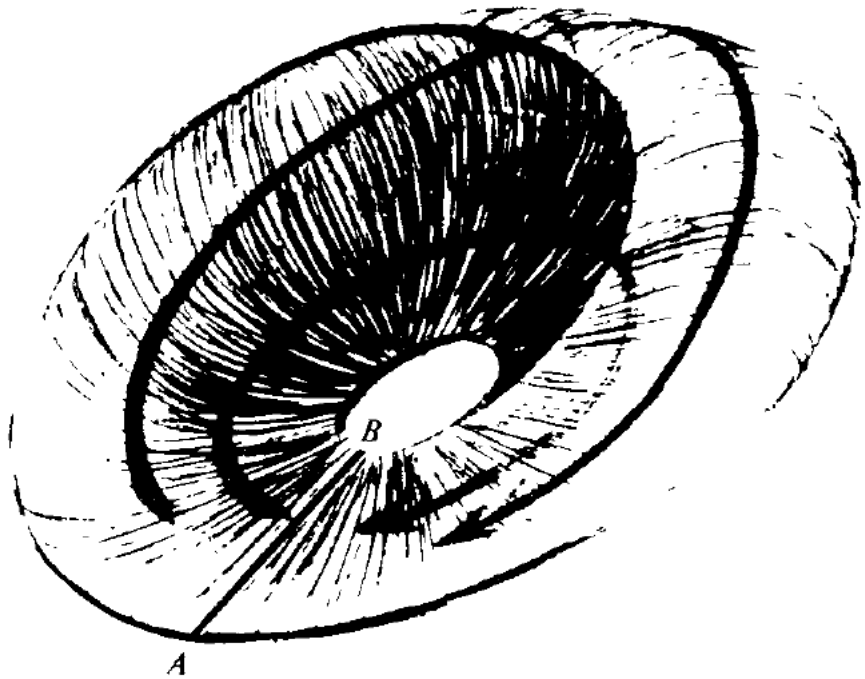
---

[1]) Термин «хаотический» обычно используется для описания случайного движения в диссипативных системах, тогда как термин «стохастический» чаще относится к гамильтоновым системам. Хотя мы и пытались придерживаться такого соглашения, не следует думать, что эти два термина соответствуют различной «степени случайности»; по существу мы рассматриваем их как синонимы.

[2]) Проблема согласования расходимости близких траекторий на аттракторе с его ограниченностью возникает только при минимальной размерности аттрактора, равной двум (имеется в виду обычная, целая размерность, ср. п. 7.1в). При бо́льшей размерности расходимость в линейном приближении сменяется перемешиванием траекторий; хаотический аттрактор может иметь при этом простую форму, например, тора.— *Прим. ред.*



а



б

Рис. 1.18. Схематическое изображение странного аттрактора (по данным работы [368]).

а — слой из бесконечного числа листов растягивается и складывается; *б* — вид аттрактора после соединения каждого листа по линии AB с соседним по линии $A'B'$.

структура аттрактора повторяется на все более и более мелких пространственных масштабах. Такая масштабная инвариантность, характерная также и для структуры резонансов в гамильтоновых системах, служит основой анализа динамики как гамильтоновых, так и диссипативных систем. Подобная многослойная структура, которую можно описать математически как некоторое *канторово множество*, рассматривается в § 7.1.

Уравнения (1.5.1), приводящие к возникновению странного аттрактора, зависят обычно от некоторого параметра (аналогичного величине возмущения в гамильтоновых системах), изменение которого меняет характер движения. На примерах модели Хенона—Хейлеса и ускорения Ферми мы видели, что в гамильтоновых системах при увеличении возмущения траектории из регулярных становятся стохастическими. Подобно этому, и в диссипативных системах при изменении параметра возможен переход от периодического движения к хаотическому на странном аттракторе. Во многих случаях такой переход происходит путем последовательного удвоения периода движения вплоть до некоторого критического значения параметра, за которым структура аттрактора изменяется и движение становится хаотическим. Дальнейшее увеличение параметра может привести к обратному процессу или к появлению простого аттрактора другой симметрии. Еще одна интересная особенность таких систем заключается в том, что обычно можно найти поверхность сечения, на которой движение сводится приближенно к необратимому одномерному отображению. Необратимость означает здесь многозначность обратного отображения. Такие отображения возникают во многих физических задачах и будут подробно рассмотрены в § 7.2.

Не все из перечисленных свойств легко увидеть из одного примера. Сейчас мы рассмотрим первый пример странного аттрактора—модель Лоренца [283]. В § 7.4 мы снова вернемся к этому примеру для того, чтобы изучить физическую систему, из которой он возникает. В § 7.1 рассмотрены другие примеры, позволяющие шире взглянуть на различные явления, связанные с хаотическим движением в диссипативных системах.

1.5б. Модель Лоренца

Этот поучительный пример хаотического потока возник из гидродинамических уравнений, описывающих конвекцию Рэлея—Бенара. Слой жидкости конечной толщины подогревается снизу таким образом, что между верхней холодной и нижней горячей поверхностями поддерживается постоянная разность температур. Движение жидкости описывается уравнением Навье—Стокса. Предполагая поток двумерным, его можно охарактеризовать двумя переменными: функцией тока ψ и отклонением Θ распределения температуры от стационарного (линейного по вертикали).

Уравнения в частных производных для возмущенного потока можно преобразовать к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого следует разложить функции ψ и Θ в двойной ряд Фурье по x и z с амплитудами, зависящими только от времени t. Оставив ограниченное число членов, получим движение в конечномерном фазовом пространстве. Вывод этих уравнений движения из уравнения Навье—Стокса приведен в § 7.4.

Лоренц [283] исследовал упрощенную модель, в которой было оставлено только три «наиболее важных» фурье-амплитуды. В этом приближении уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= -XZ - rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ, \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

где X — амплитуда конвективного движения; Y — разность температур для течений вверх и вниз; Z — отклонение вертикального температурного профиля от линейного, а σ, r, b — безразмерные параметры, физический смысл которых обсуждается в § 7.4.

Модель Лоренца интенсивно исследовалась во многих работах (см. литературу в работе [180]). Значения параметров σ и b обычно фиксированы ($\sigma = 10$, $b = 8/3$), и поведение системы исследуется в зависимости от r. Перечислим некоторые элементарные свойства модели Лоренца [252, 283, 411].

1. Уравнения инвариантны относительно преобразования: $X \to -X$, $Y \to -Y$, $Z \to Z$.
2. Фазовый объем сокращается с постоянной скоростью (см. п. 7.1а)

$$\Lambda = \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(\sigma + b + 1),$$

которая весьма велика для обычно используемых значений параметров: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\Lambda \approx -13{,}7$. За единицу времени объем сокращается в $e^{-\Lambda} \approx 10^6$ раз.

3. При $r = 0$ и $t > 0$ решение ограничено и X, Y, $Z \to 0$ для $t \to \infty$.

С ростом r характер решений меняется следующим образом.

1. Для $0 < r < 1$ единственным аттрактором является неподвижная точка в начале координат. Это соответствует стационарной теплопроводности в задаче Рэлея—Бенара.
2. Для $r > 1$ аттрактор теряет устойчивость и возникают две новые неподвижные точки

$$\boldsymbol{X}_{1,2} = \left(\pm [b(r-1)]^{1/2}, \quad \pm [b(r-1)]^{1/2}, \quad r-1\right),$$

которые являются аттракторами для $1<r<r_2$, где

$$r_2=\sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1)=470/19\approx 24{,}74.$$

Это соответствует стационарной конвекции в задаче Рэлея—Бенара.

3. Для $r>r_2$ не существует аттракторов типа неподвижных точек.
4. Для $r>r_1=24{,}06$ возникает странный аттрактор с хаотическим движением. Заметим, что в узкой области

$$24{,}06<r<24{,}74$$

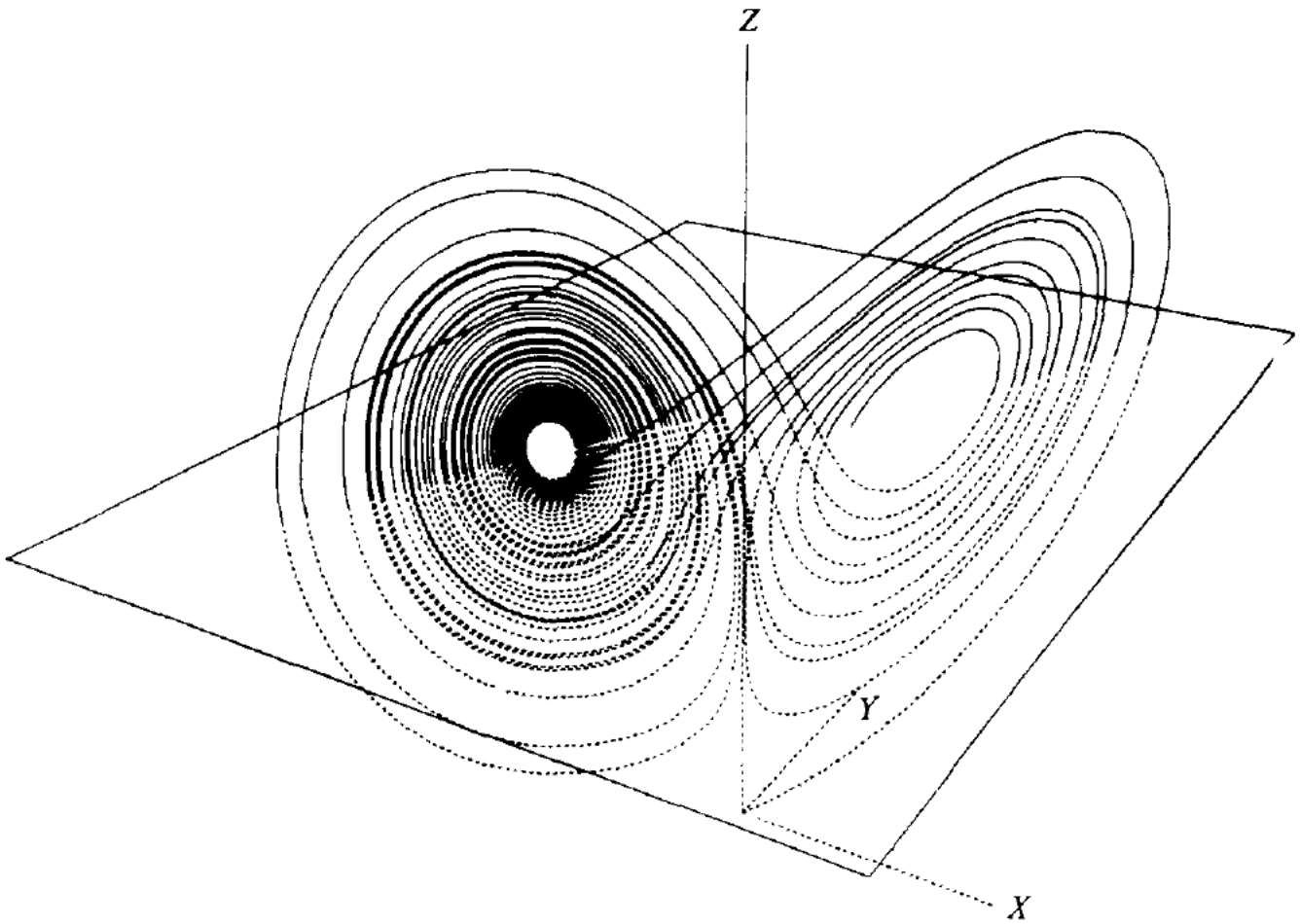


Рис. 1.19. Хаотическая траектория на аттракторе Лоренца при $r=28$ (по данным работы [253]).
Плоскость (X, Y) соответствует $Z=27$.

существуют три аттрактора. Два из них соответствуют стационарной конвекции, а третий — хаотическому потоку. При этом в системе имеет место гистерезис: если r растет, то регулярная конвекция переходит в турбулентность при $r=24{,}74$; если же r уменьшается, турбулентное движение переходит в регулярную конвекцию при $r=24{,}06$.

Лоренц исследовал численно случай $r=28$. На рис. 1.19 [253] приведен пример хаотической траектории, выходящей из начала координат и пересекающей плоскость $Z=27$. Вначале траектория подходит к $\boldsymbol{X}_1$, а затем раскручивается и притягивается к $\boldsymbol{X}_2$;

после этого она уходит по спирали от X_2 и снова притягивается к X_1 и т. д. Период обращения около $X_{1,2}$ равен 0,62, а радиус спирали изменяется приблизительно на 6 % за оборот. Число оборо-

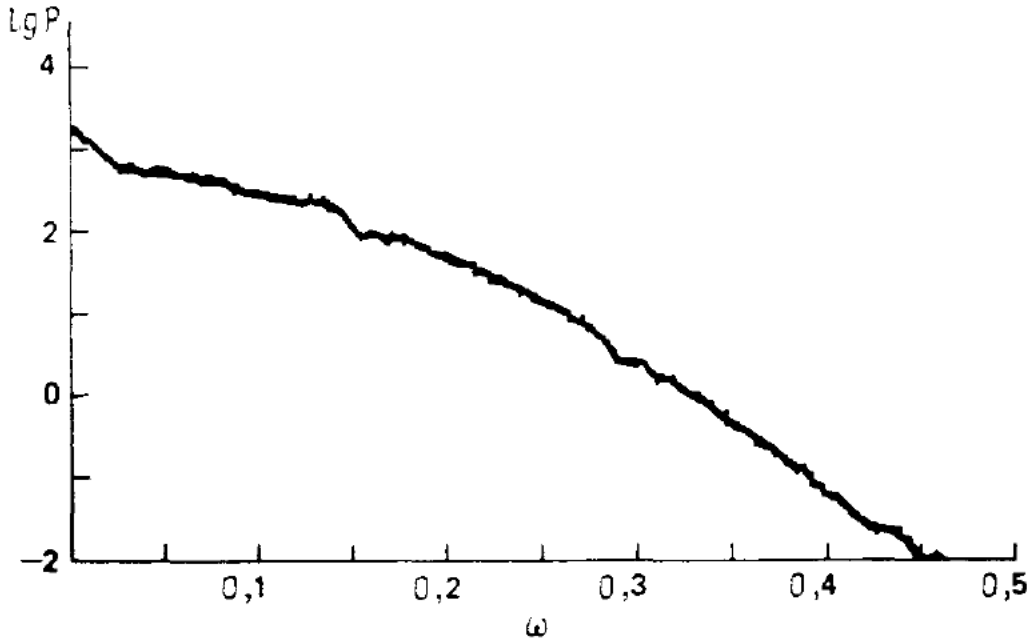


Рис. 1.20. Спектр мощности $P(\omega)$ для $X(t)$ на аттракторе Лоренца при $r = 28$ (по данным работы [121]).
Непрерывность спектра отражает хаотичность движения.

тов в каждой серии меняется в широких пределах практически непредсказуемо, так как оно сильно зависит от начальных условий.

Хаотическое движение на аттракторе можно изучать при помощи отображения Пуанкаре плоскости $Z = 27$. В работе [46] доказано, что это отображение является перемешивающим и эргодическим. Спектр мощности $X(t)$ приведен на рис. 1.20. Его непрерывность отражает непериодическое, хаотическое движение на аттракторе.

Заметив, что зависимость Z от t выглядит хаотической, Лоренц [283] придумал следующий эффективный метод анализа движения. Он зафиксировал последовательные максимумы Z_1, Z_2, . . . и построил зависимость Z_{n+1} от Z_n, которая приведена на рис. 1.21. Слева от пика отображение соответствует последовательным оборотам вокруг X_1 или X_2. Область справа от пика описывает переходы между X_1 и X_2. Это одномерное отображение соответствует

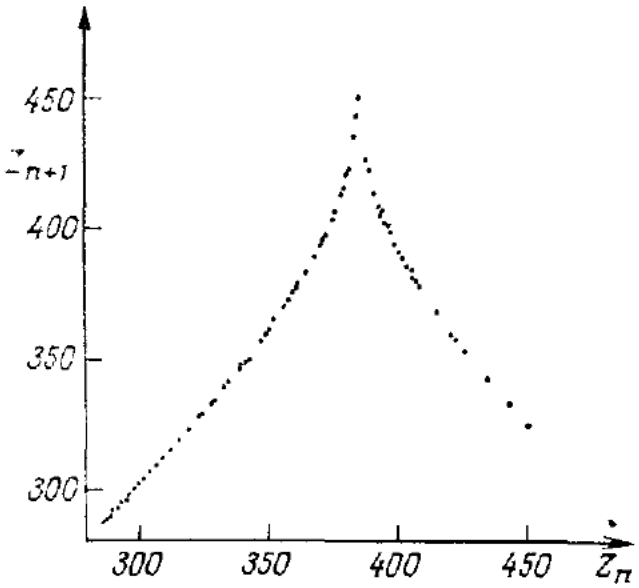


Рис. 1.21. Одномерное отображение на аттракторе Лоренца при $r = 28$ (по данным работы [283]).
Z_n — последовательные максимумы $Z(t)$.

приближению, при котором бесконечно много листов аттрактора соединяются в один. Оно оказывается весьма хорошим из-за большой скорости сокращения фазового объема.

Это одномерное отображение позволяет непосредственно понять хаотический характер движения на аттракторе Лоренца. Действительно, производная зависимости $Z_{n+1}(Z_n)$ везде больше единицы, а это, как легко показать (см. п. 7.2в), сразу приводит к экспоненциальной расходимости близких траекторий. Соответствие между странными аттракторами и одномерными отображениями будет использовано в гл. 7.

Глава 2

КАНОНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 2.1. Введение

При анализе нелинейных задач широко используются методы теории возмущений: вместо исходной динамической системы изучается близкая к ней интегрируемая система, на которую действует «возмущение». Характеризуя различие между этими системами малым параметром ε и располагая невозмущенным решением, мы ищем возмущенное решение в виде разложения по степеням ε. Например, в случае слабой нелинейности линейная система интегрируется непосредственно, а возмущенное решение можно получить в виде ряда.

В этой схеме неявно предполагается, что исследуемая система является интегрируемой. Как мы видели в гл. 1, обычно это не так, и большинство многомерных динамических систем не интегрируемы. В таких системах хаотические траектории, связанные с резонансами между различными степенями свободы, занимают конечный фазовый объем, а их распределение среди регулярных траекторий оказывается всюду плотным. Теория возмущений не в состоянии описать всю сложность такого хаотического движения, что формально выражается в расходимости соответствующих рядов.

Даже в случае начальных условий, при которых траектории являются регулярными, имеются трудности при применении теории возмущений. Под действием возмущения регулярные траектории в некоторой окрестности резонансов изменяют свою топологию. Возникает характерная резонансная структура, напоминающая «острова», описанные в § 1.4, причем их фазовый объем также конечен. Эти острова являются «микромирами» исходной возмущенной системы, содержащими собственные хаотические и регулярные траектории. Обычная теория возмущений не отражает изменения топологии фазового пространства и для описания регулярного движения вблизи определенного резонанса или ограниченной системы резонансов была разработана специальная *резонансная теория возмущений*. В настоящее время не существует методов, которые позволяли бы находить регулярные траектории с учетом всей иерархии резонансов [1]).

---

[1]) Это не совсем так. Во-первых, существует техника построения сходящихся рядов, например, в теории КАМ [11, 310, 463]. Кроме того, в последнее время развиваются методы масштабно-инвариантного описания резонансной структуры (см., например, [117, 165, 369] и § 4.4, 4.5).— *Прим. ред.*

Изменение топологии фазового пространства вблизи резонансов, хаотические области и характер движения в них составляют основное содержание последующих глав этой книги. В данной главе мы рассмотрим методы теории возмущений, которые используются для получения решений, «аппроксимирующих» в некотором смысле реальное движение в многомерных нелинейных системах. Решение в форме ряда может приближенно правильно отражать грубые черты истинного движения даже тогда, когда реальная траектория является хаотической или изменяет существенно свою топологию, но при этом целиком содержится в узком слое вблизи сепаратрисы и окружена регулярными траекториями. С другой стороны, теория возмущений не в состоянии дать хотя бы качественное описание хаотического движения в тех областях фазового пространства, где перекрываются основные резонансы.

Если действительная траектория регулярна, то, казалось бы, можно надеяться получить решение в виде равномерно сходящегося ряда. Однако описываемые в этой главе *классические* ряды, будучи весьма полезными при некоторых теоретических вычислениях, оказываются *расходящимися*. В классических методах амплитуда и частота колебаний представляются рядами по степеням ε при фиксированных начальных условиях. Поскольку резонансы распределены в пространстве частот всюду плотно, то по мере изменения частоты в высших порядках теории возмущений в дело вступают все новые и новые резонансы. Это обстоятельство приводит к расходимости рядов, которые в лучшем случае оказываются асимптотическими.

Поиск сходящихся решений привел Колмогорова к разработке методов *сверхсходящихся* разложений [229]. Им же была предложена техника, при которой частота удерживается постоянной, а начальные условия в процессе выполнения разложения изменяются. Это позволило построить сходящиеся ряды для «достаточно малых» возмущений и «достаточно далеко» от резонансов (*теория КАМ*).

Рассмотрение теории возмущений мы начнем с краткого описания некоторых ее методов, используя простые примеры динамических систем и исследуя движение непосредственно по определяющим его дифференциальным уравнениям. Даже для нелинейного осциллятора с одной степенью свободы (интегрируемая система) разложение только амплитуды колебаний в степенной ряд приводит к появлению неограниченно растущих во времени *секулярных членов* и расходимости. Решая совместные уравнения для амплитуды и частоты колебаний, Линдштедт [278] и Пуанкаре [337] преодолели секулярность и получили сходящиеся ряды. Их техника описана в п. 2.1а и представлена в общей канонической форме в п. 2.2а. Этот материал составляет основу дальнейшего изложения теории возмущений.

В случае двух и более степеней свободы резонансы между основными частотами и их гармониками вызывают дополнительные

сингулярности, связанные с так называемыми *малыми знаменателями*, что приводит к расходимости классических рядов даже для регулярных решений. Для формального подавления этой расходимости [1]) были предложены некоторые методы, в частности *метод усреднения*. Этот метод дает возможность непосредственно вычислять *адиабатические инварианты*, которые являются приближенными интегралами движения и получаются путем усреднения по быстрой угловой переменной системы. Адиабатические инварианты определяются формально с помощью асимптотических рядов по параметру возмущения ε. Относящиеся сюда приемы описаны в п. 2.1б, а их представление в канонической форме дано в § 2.3.

Следует, однако, иметь в виду, что метод усреднения приводит к неверному выводу о том, что возмущенная система всюду интегрируема. Истинное движение, которому отвечает структура фазового пространства с перемежающимися областями хаотичности и островами устойчивости, подменяется всюду интегрируемым движением, вытекающим из существования адиабатических инвариантов [2]). Будет такое описание «справедливо» или нет, определяется величиной возмущения и той степенью детальности, с которой сравниваются между собой реальное движение и предсказания адиабатической теории. Это обстоятельство подчеркивалось в п. 1.4а, где для задачи Хенона и Хейлеса (см. рис. 1.13 и последующее обсуждение) сопоставлены истинные траектории и результаты вычислений с помощью адиабатических инвариантов. Формальная расходимость [3]) (для любого конечного ε) асимптотического ряда, представляющего адиабатический инвариант, является еще одним свидетельством того, что метод усреднения искажает действительную структуру фазового пространства. Тем не менее этот метод весьма полезен при изучении движения в нелинейных системах.

Вблизи резонансов регулярные решения сильно возмущены и претерпевают топологические изменения. В такой ситуации классическая теория возмущений приводит к появлению малых знаменателей и расходимости рядов, как это показано в п. 2.1в. Некоторой специальной заменой переменных эта резонансная сингулярность устраняется, что делает возможным использование обычного метода усреднения. Именно такая *резонансная теория возмущений*, описанная в § 2.4, составляет основу нашего метода изу-

---

[1]) Правильнее было бы сказать — для построения формальных рядов, которые, вообще говоря, расходятся.— *Прим. ред.*

[2]) В общем случае более естественно было бы говорить о переменных действия, которые являются приближенными интегралами движения не только для адиабатического (медленного) возмущения, но и просто для малого возмущения. Используемые в тексте термины «адиабатическая теория», «адиабатическое приближение» и т. п. следует понимать именно в таком расширенном смысле.— *Прим. ред.*

[3]) Имеется в виду, что асимптотические ряды могут с успехом применяться для анализа движения, хотя они и являются расходящимися. — *Прим. ред.*

чения хаотического движения. Ее детальному рассмотрению посвящены п. 2.4а и б. В качестве примера подробно исследуется движение в магнитном поле заряженной частицы, взаимодействующей с электростатической волной (см. п. 2.4в). Предложенное в работе [111] обобщение этого метода, позволяющее одновременно избавляться от малых знаменателей целой группы резонансов, описано в п. 2.4г.

Для простоты изложения все методы рассматриваются лишь в первом порядке по ε, а канонические преобразования выполняются с помощью зависящей от смешанного набора переменных производящей функции. Эти методы можно перенести и на более высокие порядки [34], но последовательное распутывание старых и новых переменных становится алгебраически сложным, а соответствующие ряды оказываются громоздкими. Однако высшие приближения часто необходимы, как, например, в задаче Хенона и Хейлеса, где первый порядок теории возмущений дает неверный результат даже в предельном случае очень низкой энергии. В § 2.5 мы знакомим читателя с теорией преобразований Ли, которая пришла на смену старым способам получения классических рядов в высоких порядках по ε. Методы Ли иллюстрируются на примерах задач с одной степенью свободы и вычисления адиабатических инвариантов высших порядков.

В § 2.6 рассматриваются сверхсходящиеся ряды и проводится сопоставление их с классическими рядами (п. 2.6а). Специальное применение этих методов к вычислению периодических траекторий в нелинейных системах описано в п. 2.6б.

2.1а. Степенные ряды

Проиллюстрируем использование степенных рядов на примере интегрируемого слабо нелинейного осциллятора с одной степенью свободы. Это может быть показанный на рис. 2.1, *а* маятник, колеблющийся с небольшой амплитудой и описываемый гамильтонианом (1.3.6). Разлагая первое из уравнений (1.3.5) до третьего порядка по φ, запишем дифференциальное уравнение движения в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{6}\varepsilon\omega_0^2 x^3, \tag{2.1.1}$$

где $x = \varphi$ — угол отклонения от вертикали, $\omega_0 = (FG)^{1/2}$ — частота малых колебаний, ε — малый безразмерный параметр, введенный в кубический член, чтобы явно выделить его как возмущение; в конце вычислений мы положим $\varepsilon = 1$ [1]).

Если представить x в виде ряда

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \tag{2.1.2}$$

[1]) Это справедливо, конечно, только при условии, что в системе остается другой (неявный) малый параметр, например амплитуда колебаний в рассматриваемом случае.— *Прим. ред.*

и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε, то в нулевом порядке получим уравнение гармонического осциллятора

$$x_0 = A \cos \omega_0 t. \tag{2.1.3}$$

Уравнение движения в первом порядке по ε имеет вид

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{6} \omega_0^2 A^3 \cos^3 \omega_0 t. \tag{2.1.4}$$

Представляя $\cos^3 \omega_0 t$ в этом уравнении в виде суммы двух членов

$$\cos^3 \omega_0 t = \frac{1}{4} (\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t),$$

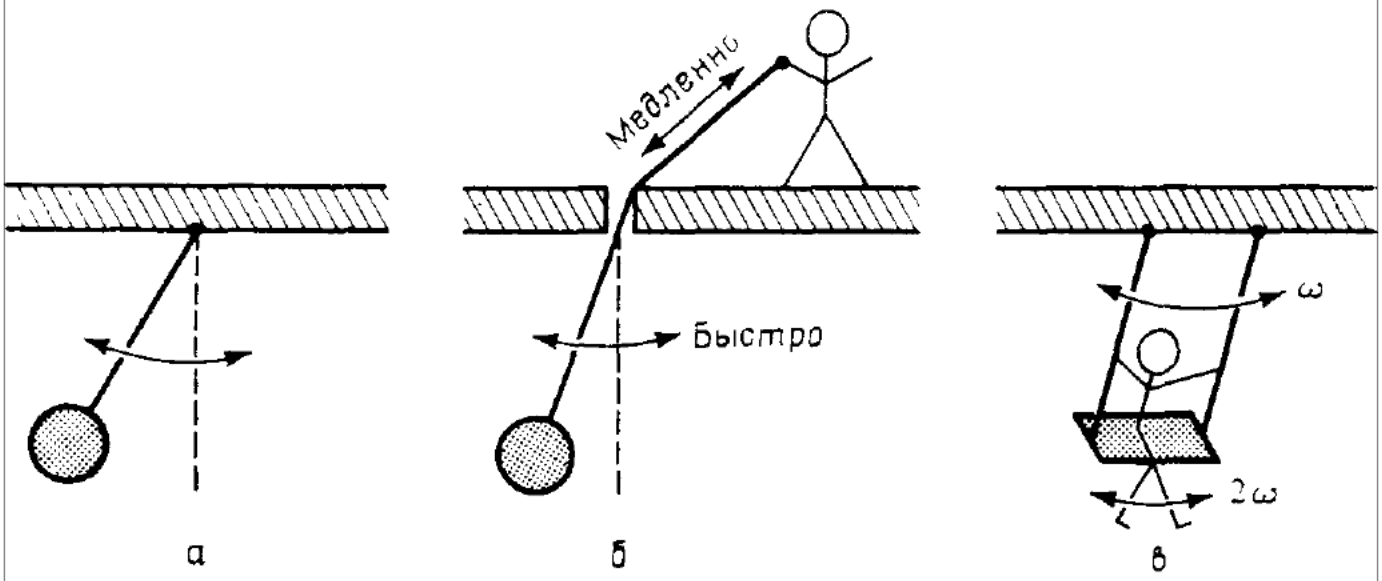


Рис. 2.1. Нелинейные колебания.
а — маятник; *б* — адиабатическое возмущение; *в* — пример резонанса.

находим, что первый из них дает «хорошее» частное решение

$$x_{1a} = -\frac{A^3}{192} \cos 3\omega_0 t, \tag{2.1.5}$$

в то время как второй оказывается резонансным и ему отвечает частное решение

$$x_{1b} = \frac{A^3}{16} (\omega_0 t \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t). \tag{2.1.6}$$

Видно, что первое слагаемое растет линейно со временем — это и есть *секулярный* член. В рассматриваемом случае секулярность возникает вследствие выбора неподходящего разложения, при котором не принимается во внимание зависимость частоты колебаний от их амплитуды.

Корректный подход, разработанный Линдштедтом [278], состоит в одновременном разложении по степеням ε как амплитуды, так и частоты колебаний. Предположим, что $x = x(\omega t)$ является

периодической функцией ωt с периодом 2π, и разложим x и ω по степеням ε, так что наряду с (2.1.2) имеем

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots \tag{2.1.7}$$

Подстановка этих разложений в уравнение (2.1.1) дает

$$(\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \ldots)(x_0'' + \varepsilon x_1'' + \ldots) + \\ + \omega_0^2(x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots) - \frac{1}{6}\varepsilon\omega_0^2(x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots)^3 = 0, \tag{2.1.8}$$

где штрихи означают производные по аргументу ωt. В нулевом порядке имеем

$$x_0'' + x_0 = 0, \tag{2.1.9}$$

и решение $x_0 = A\cos\omega t$. Уравнение первого порядка

$$x_1'' + 2\frac{\omega_1}{\omega_0}x_0'' + x_1 - \frac{1}{6}x_0^3 = 0 \tag{2.1.10}$$

после подстановки в него выражения для x_0 приобретает вид

$$x_1'' + x_1 = 2\frac{\omega_1}{\omega_0}A\cos\omega t + \frac{1}{8}A^3\cos\omega t + \frac{1}{24}A^3\cos 3\omega t. \tag{2.1.11}$$

Условие периодичности $x(\omega t)$ требует, чтобы коэффициент при $\cos\omega t$ равнялся нулю, так как в противном случае возникают секулярные члены. Следовательно, мы выбираем величину ω_1 так, чтобы исключить секулярность

$$\omega_1 = -\frac{1}{16}A^2\omega_0, \tag{2.1.12}$$

и получаем характерное для маятника уменьшение частоты колебаний с возрастанием амплитуды. При таком выборе ω_1 решение уравнения (2.1.11) есть

$$x_1 = A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t - \frac{A^3}{192}\cos 3\omega t. \tag{2.1.13}$$

В частности, для начальных условий

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0 \tag{2.1.14}$$

получаем выражение

$$x_1 = \frac{A^3}{192}(\cos\omega t - \cos 3\omega t), \tag{2.1.15}$$

которое описывает изменение $x(\omega t)$, вызванное нелинейностью. Рассмотренную процедуру можно выполнить и в более высоких порядках по ε. Основу метода составляет предположение о периодичности x с частотой ω, отличной от частоты малых колебаний ω_0.

Дополнительная свобода, возникающая вследствие разложения ω, позволяет исключать секулярность в каждом порядке по ε, чем и достигается равномерная сходимость решения. Каноническая форма метода Линдштедта, представленная в п. 2.2а, была разработана Пуанкаре [337] и Цейпелем [419].

2.1б. Асимптотические ряды и малые знаменатели

Рассмотрим колебания гармонического осциллятора с медленно изменяющейся возвращающей силой (или частотой). Эта задача существенно отличается от предыдущей наличием явной зависимости от времени, так что фактически мы имеем дело с двумя степенями свободы. Запишем уравнение движения такого осциллятора (рис. 2.1, *б*) в виде

$$\ddot{x} + \omega^2(\varepsilon t)\, x = 0, \tag{2.1.16}$$

где малый безразмерный параметр ε введен опять-таки для явного выделения возмущения и по окончании вычислений полагается равным единице. Истинным малым параметром разложения в рассматриваемом случае является отношение периода колебаний к характерному временно́му масштабу изменения возвращающей силы

$$\left[\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right]. \tag{2.1.17}$$

Ниже используется разложение не непосредственно для x, а для некоторой вспомогательной переменной y, скорость изменения членов разложения которой тем меньше, чем выше их порядок. Прежде всего, переходя к новой независимой переменной $\tau = \varepsilon t$, запишем уравнение (2.1.16) в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \omega^2(\tau)\, x = 0. \tag{2.1.18}$$

Введем теперь новую переменную y посредством равенства

$$x = \exp\left[\int y\, d\tau\right]. \tag{2.1.19}$$

Обозначая $dx/d\tau$ как x', находим

$$x' = yx, \qquad x'' = y^2x + y'x.$$

Подстановка последних соотношений в уравнение (2.1.18) приводит к уравнению Риккати

$$\varepsilon^2(y^2 + y') + \omega^2 = 0. \tag{2.1.20}$$

Представим y в виде степенного ряда

$$y = \varepsilon^{-1}y_0 + y_1 + \varepsilon y_2 + \ldots \tag{2.1.21}$$

и подставим это разложение в (2.1.20). В низшем порядке по ε находим

$$y_0 = \pm i\omega,$$

а в следующем порядке

$$2y_0y_1 + y_0' = 0. \tag{2.1.22}$$

Использование (2.1.21) и (2.1.22) совместно с (2.1.19) дает

$$x = \exp\left[\int\left(\varepsilon^{-1}y_0 - \frac{1}{2}\frac{y_0'}{y_0}\right)d\tau\right].$$

Интегрируя второе слагаемое и учитывая равенство $y_0 = \pm i\omega$, получаем

$$x = \frac{A}{\omega^{1/2}}\exp\left[\pm i\int\omega\,dt\right]. \tag{2.1.23}$$

Рассмотрим медленное изменение частоты от значения ω_1 при $t < t_1$ до значения ω_2 при $t > t_2$ и вычислим интеграл действия

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dx \tag{2.1.24}$$

в каждой из этих двух областей ($t < t_1$ и $t > t_2$), где ω по предположению не изменяется.

Полагая $p = m\dot{x}$ и переходя в (2.1.23) к действительному решению

$$x = A\omega^{-1/2}\cos(\omega t + \delta),$$

находим, что $J = (1/2)\,mA^2$ в обеих областях, несмотря на то что как частота ω, так и энергия $E = (1/2)\,m\dot{x}^2_{\text{макс}} = \omega J$ могли измениться сколь угодно сильно. Действие J является, таким образом, адиабатическим инвариантом движения, т. е. сохраняется в пределах точности используемых разложений, полученных в предположении медленности изменения параметров. Существование инварианта позволяет легко получить решение, хотя гамильтониан и не сохраняется.

Вычисление действия в области $t_1 < t < t_2$, где происходит медленное изменение параметров, приводит к тому же результату. Более того, описанное разложение можно выполнить во всех порядках по малому параметру. Это было сделано Кулсрудом [244] для линейного осциллятора и затем обобщено Крускалом [239] и другими (см. [265] и § 2.3) на более сложные системы. Подчеркнем еще раз существенное отличие этого разложения от разложения, описанного в п. 2.1а. Наличие явной зависимости от времени эквивалентно движению с двумя степенями свободы. При этом решения в виде рядов, как правило, не сходятся к точным решениям, а оказываются асимптотическими. Это понятие будет подробно рассмотрено в начале § 2.3.

2.1в. Влияние резонансов

Если рассмотренный в п. 2.1а осциллятор подвергается периодическому во времени внешнему возмущению или если медленные изменения параметров осциллятора, описанные в п. 2.1б, являются периодическими, то резонансы между колебаниями осциллятора и внешним возмущением разрушают сходимость разложений и изменяют или разрушают интегралы движения. Проиллюстрируем возникающие при этом трудности на простом примере.

Рассмотрим вынужденные колебания линейного осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g(t), \tag{2.1.25}$$

где внешняя сила $g(t)$ является периодической функцией времени с периодом $2\pi/\Omega$. Решение однородного уравнения (2.1.25) есть

$$x_h = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t. \tag{2.1.26}$$

Представим внешнюю силу $g(t)$ в виде ряда Фурье

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t + b_n\sin n\Omega t) \tag{2.1.27}$$

и подставим это выражение в уравнение (2.1.25). Разлагая частное решение $x_p(t)$ в ряд Фурье, для n-го члена получаем

$$x_{pn} = \frac{a_n\cos n\Omega t + b_n\sin n\Omega t}{\omega_0^2 - n^2\Omega^2}. \tag{2.1.28}$$

Видно, что при $\omega_0^2 \approx n^2\Omega^2$ имеет место резонанс, приводящий к раскачке колебаний. Наш пример иллюстрируется на рис. 2.1, *в*, на котором показан ребенок, раскачивающий качели.

Если осциллятор нелинейный, как, например, рассмотренный в п. 2.1а, то в однородном решении присутствуют все гармоники с частотами, кратными основной частоте ω_0. В этом случае резонансы возникают всякий раз, когда отношение частот ω_0/Ω является рациональным числом, т. е. имеет место всюду плотная система резонансов. Но, как мы уже знаем, частота колебаний является функцией их амплитуды. Резонансы же изменяют амплитуду, а значит, и частоту колебаний, нарушая тем самым точное выполнение резонансных условий. Таким образом, малые знаменатели, препятствующие сходимости классических рядов в окрестности резонансов, отражают определенное физическое явление, которое приводит к локальному изменению характера фазовых траекторий.

*§ 2.2. Классическая теория возмущений

Большинство многомерных или подверженных внешним воздействиям динамических систем являются неинтегрируемыми (см. § 1.3). Однако для тех систем, которые близки к интегрируемым, можно

попытаться получить решение с желаемой точностью, если представить производящую функцию в виде ряда по степеням малого параметра и затем решать уравнение Гамильтона—Якоби последовательно в каждом порядке. Как уже отмечалось, малые знаменатели препятствуют сходимости этих рядов. Тем не менее полученные таким путем результаты можно использовать для вполне удовлетворительного описания поведения системы в некоторых областях фазового пространства. Более того, этот метод оказывается весьма полезным при построении приближенных решений и для систем с одной степенью свободы, когда явное интегрирование уравнений движения затруднительно, а также для предварительного перехода к переменным действие — угол в невозмущенных системах с несколькими степенями свободы.

* 2.2а. Одна степень свободы

Рассмотрим гамильтониан следующего вида:

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta) + \varepsilon^2 H_2(J, \theta) + \ldots \tag{2.2.1}$$

Здесь использованы переменные действие — угол для первого слагаемого H_0, поэтому ему отвечает решение

$$J = J_0, \tag{2.2.2а}$$

$$\theta = \omega t + \beta, \tag{2.2.2б}$$

$$\omega = \partial H_0 / \partial J, \tag{2.2.2в}$$

где J_0, ω, β — постоянные, не зависящие от t. Следуя Пуанкаре [337] и Цейпелю [419], мы ищем преобразование к таким новым переменным $\bar{J}$, $\bar{\theta}$, для которых новый гамильтониан $\bar{H}$ есть функция только переменной действия $\bar{J}$. Используя производящую функцию $S(\bar{J}, \theta)$, представим S и $\bar{H}$ в виде степенных рядов по ε

$$S = \bar{J}\theta + \varepsilon S_1 + \ldots, \tag{2.2.3}$$

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \varepsilon \bar{H}_1 + \ldots, \tag{2.2.4}$$

причем член низшего порядка в S выбран так, чтобы порождать тождественное преобразование $\bar{J} = J$ и $\bar{\theta} = \theta$. Старая переменная действия и новая угловая переменная определяются из выражений (1.2.13а) и (1.2.13б) соответственно

$$J = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial S_1(\bar{J}, \theta)}{\partial \theta} + \ldots, \tag{2.2.5а}$$

$$\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \frac{\partial S_1(\bar{J}, \theta)}{\partial \bar{J}} + \ldots \tag{2.2.5б}$$

Для получения нового гамильтониана необходимо выразить старые переменные через новые с помощью соотношений (2.2.5) и за

тем использовать формулу (1.2.13в). В первом порядке по ε это сделать нетрудно

$$J=\overline{J}+\varepsilon\frac{\partial S_1(\overline{J},\ \overline{\theta})}{\partial\overline{\theta}}+\ .\ .\ .\ ,\tag{2.2.6а}$$

$$\theta=\overline{\theta}-\varepsilon\frac{\partial S_1(\overline{J},\ \overline{\theta})}{\partial\overline{J}}+\ .\ .\ .\ .\tag{2.2.6б}$$

Тогда из (1.2.13в) имеем

$$\overline{H}(\overline{J},\ \overline{\theta})=H\big(J(\overline{J},\ \overline{\theta}),\ \theta(\overline{J},\ \overline{\theta})\big).\tag{2.2.7}$$

Разлагая правую часть последнего равенства в степенной ряд по ε и используя (2.2.6), получаем

$$H_0\big(J(\overline{J},\overline{\theta})\big)=H_0(\overline{J})+\varepsilon\frac{\partial H_0}{\partial\overline{J}}\frac{\partial S_1}{\partial\overline{\theta}}+\ .\ .\ .\ ,\tag{2.2.8а}$$

$$\varepsilon H_1\big(J(\overline{J},\ \overline{\theta}),\ \theta(\overline{J},\ \overline{\theta})\big)=\varepsilon H_1(\overline{J},\ \overline{\theta})+\ .\ .\ .\ .\tag{2.2.8б}$$

Подстановка этих выражений в (2.2.7) позволяет найти члены нового гамильтониана нулевого ($\overline{H}_0$) и первого ($\overline{H}_1$) порядков

$$\overline{H}_0=H_0(\overline{J}),\tag{2.2.9}$$

$$\overline{H}_1=\omega(\overline{J})\frac{\partial S_1(\overline{J},\ \overline{\theta})}{\partial\overline{\theta}}+H_1(\overline{J},\ \overline{\theta}).\tag{2.2.10}$$

Так как мы ищем новый гамильтониан, который зависит только от переменной действия $\overline{J}$, то необходимо путем выбора функции S_1 в (2.2.10) компенсировать зависящую от $\overline{\theta}$ часть H_1. Определим среднюю $\langle H_1\rangle$ и переменную $\{H_1\}$ части H_1 посредством выражений

$$\langle H_1\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_1(\overline{J},\ \overline{\theta})\,d\overline{\theta},\tag{2.2.11}$$

$$\{H_1\}=H_1-\langle H_1\rangle.\tag{2.2.12}$$

Из равенства (2.2.10) находим два соотношения

$$\overline{H}_1=\langle H_1\rangle,\tag{2.2.13}$$

$$\omega\frac{\partial S_1}{\partial\overline{\theta}}=-\{H_1\}.\tag{2.2.14}$$

Объединяя (2.2.9) и (2.2.13), получаем преобразованный гамильтониан с точностью до членов первого порядка

$$\overline{H}=H_0(\overline{J})+\varepsilon\langle H_1(J,\ \overline{\theta})\rangle\tag{2.2.15}$$

с новой частотой $\bar{\omega} = \partial\bar{H}/\partial\bar{J}$. При этом предполагается, что уравнение (2.2.14) можно разрешить относительно функции S_1, с помощью которой исключается $\{H_1\}$. Видно, что новый гамильтониан в первом порядке получается путем усреднения старого гамильтониана по фазе.

Чтобы найти функцию S_1, представим $\{H_1\}$ и S_1 в виде рядов Фурье

$$\{H_1\} = \sum_{n \neq 0} H_{1n}(\bar{J})\, e^{in\bar{\theta}}, \tag{2.2.16а}$$

$$S_1 = \sum_{n} S_{1n}(\bar{J})\, e^{in\bar{\theta}}. \tag{2.2.16б}$$

Из (2.2.14) немедленно следует, что $S_{10} = \text{const}$ [1]), а

$$S_{1n} = -\frac{H_{1n}}{in\omega}, \qquad n \neq 0. \tag{2.2.17}$$

Если $\omega(\bar{J}) \neq 0$, то ряд Фурье для S_1 сходится и позволяет выполнить преобразование переменных (2.2.6).

Разложения высших порядков. Иногда необходимо провести разложения до более высокого порядка по ε либо из-за того, что поправки первого порядка равны нулю, либо из-за желания повысить точность вычислений. Процедуру Пуанкаре—Цейпеля можно выполнить в любом порядке по ε, но распутывание старых и новых переменных, ведущее от (2.2.5) к (2.2.8), требует утомительных алгебраических выкладок. Если полного обращения переменных не требуется, то вычисление нового гамильтониана, а следовательно, и возмущенной частоты колебаний становится относительно простым.

Подробное рассмотрение вычислений в высших порядках содержится в § 2.5, где представлены современные методы с использованием преобразований Ли. Здесь мы ограничимся тем, что выпишем в явном виде соотношения, необходимые для определения нового гамильтониана с точностью до второго порядка по ε. Более детальное обсуждение рядов Пуанкаре—Цейпеля можно найти в работах Борна [34] и Джакалья [153].

Предположим, что в соотношении (2.2.1) только H_0 и H_1 отличны от нуля. Пусть S и $\bar{H}$ представлены степенными рядами по ε вида (2.2.3) и (2.2.4), тогда выражения (2.2.8а) и (2.2.8б) можно выписать явно

---

[1]) Функцию S_{10} нельзя найти из (2.2.14), но можно просто положить $S_{10} = 0$, не нарушая этого условия.— *Прим. ред.*

$$H_0(J(\bar{J},\ \theta)) = H_0(\bar{J}) + \sum_{m,\ n} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m H_0}{\partial \bar{J}^m} \left(\varepsilon^n \frac{\partial S_n}{\partial \theta}\right)^m, \tag{2.2.18а}$$

$$H_1(J(\bar{J},\ \theta),\ \theta) = H_1(\bar{J},\ \theta) + \sum_{m,\ n} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m H_1}{\partial \bar{J}^m} \left(\varepsilon^n \frac{\partial S_n}{\partial \theta}\right)^m. \tag{2.2.18б}$$

Полагая $\bar{H}$ функцией только переменной действия $\bar{J}$ и приравнивая $\bar{H} = H$ с помощью выражения (2.2.18), получаем в нулевом и первом порядке по ε соотношения (2.2.9) и (2.2.10) соответственно. Во втором порядке по ε находим (без обращения θ):

$$\bar{H}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial \bar{J}} \frac{\partial S_2}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{J}^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial \bar{J}} \frac{\partial S_1}{\partial \theta}. \tag{2.2.19а}$$

Поскольку $\bar{H}_2$ является функцией только $\bar{J}$, то имеем

$$\bar{H}_2 = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{J}^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial \bar{J}} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right\rangle_\theta, \tag{2.2.19б}$$

а периодическая по θ функция S_2 определяется из условия

$$\frac{\partial H_0}{\partial \bar{J}} \frac{\partial S_2}{\partial \theta} = -\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{J}^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial \bar{J}} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right\}_\theta; \tag{2.2.19в}$$

скобки $\langle\ \rangle$ и $\{\ \}$, как и раньше, соответствуют усредненной и осциллирующей частям выражения. Частота колебаний вычисляется обычным образом как $\bar{\omega} = \partial \bar{H}/\partial \bar{J}$.

Маятник. Для иллюстрации описанного выше метода разложения рассмотрим нелинейные колебания маятника, гамильтониан которого имеет вид [см. (1.3.6)]:

$$H_p = \frac{1}{2} Gp^2 - F\cos\varphi = E. \tag{2.2.20}$$

В качестве невозмущенной системы H_{0p} выберем квадратичную часть гамильтониана, которая соответствует линейным колебаниям, а оставшиеся члены будем считать возмущением. Раскладывая H_p в ряд Тейлора и опуская постоянную, получаем

$$H_p = \frac{1}{2} Gp^2 + \frac{1}{2} F\varphi^2 - \frac{\varepsilon}{4!} F\varphi^4 + \frac{\varepsilon^2}{6!} F\varphi^6 - \ldots,$$

где первые два слагаемых представляют H_{0p}. Малый параметр ε отмечает, как и раньше, порядок членов возмущения. Истинным параметром разложения является отношение энергии колебаний к энергии на сепаратрисе. Для применения методов теории возмущений удобно перейти предварительно с помощью (1.2.69) к переменным действие — угол невозмущенной системы H_{0p}. Новый гамильтониан $H = E + F$ принимает вид

$$H = \omega_0 J - \frac{\varepsilon}{6} G J^2 \sin^4\theta + \frac{\varepsilon^2}{90}\frac{G^2 J^3}{\omega_0}\sin^6\theta - \ldots, \tag{2.2.21}$$

где $\omega_0 = (FG)^{1/2}$ — частота невозмущенных колебаний. Преобразуя степени $\sin\theta$, находим

$$H_0 = \omega_0 J, \tag{2.2.22а}$$

$$H_1 = -\frac{GJ^2}{48}(3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta), \tag{2.2.22б}$$

$$H_2 = \frac{G^2 J^3}{2880\omega_0}(10 - 15\cos 2\theta + 6\cos 4\theta - \cos 6\theta). \tag{2.2.22в}$$

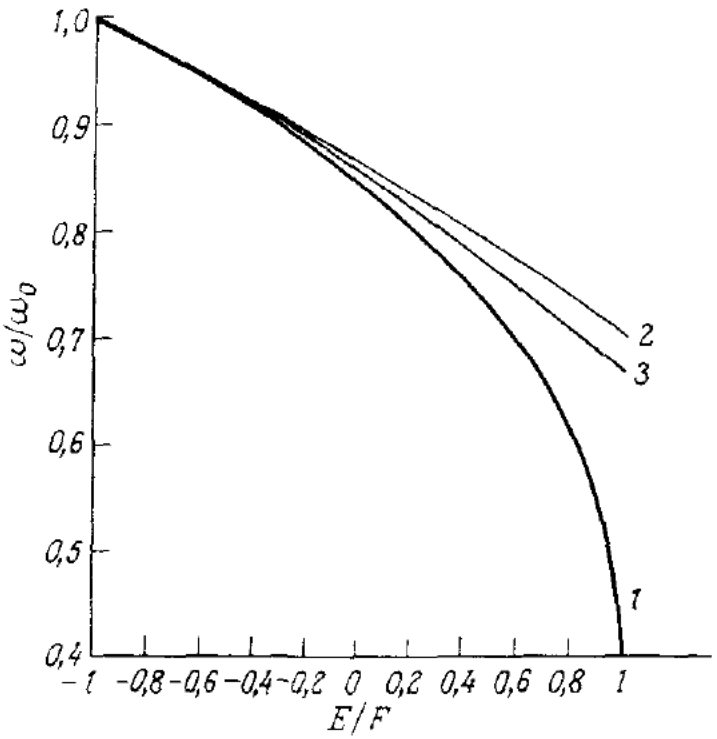


Рис. 2.2. Зависимость частоты колебаний маятника (2.2.20) от энергии.
1 — точная формула (1.3.13); 2 — теория возмущений в первом порядке; 3 — теория возмущений во втором порядке (п. 2.5б).

Применяя полученные выше результаты и усредняя (2.2.22б) по θ, получаем, согласно (2.2.15), новый гамильтониан до первого порядка по ε

$$\overline{H} = \omega_0 \overline{J} - \frac{\varepsilon}{16} G \overline{J}^2 \tag{2.2.23}$$

и новую частоту колебаний

$$\overline{\omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \overline{J}} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{8} G \overline{J}. \tag{2.2.24}$$

Последнее соотношение показывает, что частота колебаний уменьшается с ростом их амплитуды; это согласуется с разложением (1.3.13) с точностью до первого порядка по $\varkappa$. Исключая $\overline{J}$ из (2.2.23) и (2.2.24), получаем зависимость $\overline{\omega}(\overline{H})$, которая изображена на

рис. 2.2 кривой *2*; ее можно сопоставить с точным результатом (1.3.13), представленным на рис. 2.2 кривой *1*.

Производящую функцию S_1 можно найти путем интегрирования уравнения (2.2.14):

$$S_1 = -\frac{GJ^2}{192\omega_0}(8\sin 2\theta - \sin 4\theta). \tag{2.2.25}$$

Используя это выражение, нетрудно получить преобразование (2.2.6) от старых переменных к новым.

* 2.2б. Несколько степеней свободы

Если возмущенный гамильтониан описывает автономную систему с несколькими степенями свободы или явно зависит от времени даже для одной степени свободы, то рассмотренные выше разложения оказываются расходящимися. Чтобы убедиться в этом, обобщим метод Пуанкаре—Цейпеля на случай автономного гамильтониана с N степенями свободы. Явную зависимость от времени можно учесть с помощью дополнительной степени свободы в расширенном фазовом пространстве. Запишем

$$H(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\boldsymbol{J}) + \varepsilon H_1(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}), \tag{2.2.26}$$

где $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{\theta}$ — N-мерные векторы переменных действия и углов невозмущенной системы H_0, а H_1 — периодическая функция всех угловых переменных

$$H_1 = \sum_{\boldsymbol{m}} H_{1\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{J})\, e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\theta}}. \tag{2.2.27}$$

В последнем выражении использовано обозначение

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\theta} = m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + \ . \ . \ . \ + m_N\theta_N, \tag{2.2.28}$$

где m_i — целые числа, по которым производится N-кратное суммирование в (2.2.27). Будем снова искать преобразование к таким переменным $\overline{\boldsymbol{J}}$, $\overline{\boldsymbol{\theta}}$, для которых новый гамильтониан $\overline{H}$ зависит только от $\overline{\boldsymbol{J}}$. Введем производящую функцию

$$S = \overline{\boldsymbol{J}}\cdot\boldsymbol{\theta} + \varepsilon \sum_{\boldsymbol{m}} S_{1\boldsymbol{m}}(\overline{\boldsymbol{J}})\, e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\theta}}, \tag{2.2.29}$$

которая в нулевом порядке по ε отвечает тождественному преобразованию, а в первом содержит N-кратную сумму, периодическую по $\boldsymbol{\theta}$. Как и в одномерном случае, выразим старые переменные через новые с помощью этой производящей функции и подставим их в (1.2.13в). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, находим в нулевом порядке

$$\overline{H}_0(\overline{\boldsymbol{J}}) = H_0(\overline{\boldsymbol{J}}), \tag{2.2.30}$$

и в первом порядке

$$\overline{H}_1 = \boldsymbol{\omega}(\overline{J}) \cdot \frac{\partial S_1(\overline{J}, \overline{\theta})}{\partial \overline{\theta}} + H_1(\overline{J}, \overline{\theta}). \tag{2.2.31}$$

Здесь вектор частот $\boldsymbol{\omega}$ невозмущенного движения определяется формулой

$$\boldsymbol{\omega}(\overline{J}) = \frac{\partial H_0(\overline{J})}{\partial \overline{J}}. \tag{2.2.32}$$

Усредняя по *всем* угловым переменным, имеем

$$\overline{H} = H_0(\overline{J}) + \varepsilon \langle H_1(\overline{J}, \overline{\theta}) \rangle \tag{2.2.33}$$

и

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \overline{\theta}} = -\{H_1\}. \tag{2.2.34}$$

Решение S_1 последнего уравнения можно получить путем интегрирования вдоль траекторий возмущенного движения. Действительно, так как в выражении

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial \overline{\theta}} \cdot \frac{d\overline{\theta}}{dt} + \frac{\partial S_1}{\partial \overline{J}} \cdot \frac{d\overline{J}}{dt} \tag{2.2.35}$$

в нулевом порядке первый и третий члены правой части равны нулю, то производная dS_1/dt равна левой части (2.2.34) и можно написать

$$S_1 = -\int \{H_1(\overline{J}, \overline{\theta}(t))\}\, dt. \tag{2.2.36}$$

Интегрируя ряд Фурье для H_1, окончательно получаем

$$S(\overline{J}, \overline{\theta}) = \overline{J} \cdot \overline{\theta} + \varepsilon i \sum_{m \neq 0} \frac{H_{1m}(\overline{J})}{m \cdot \boldsymbol{\omega}(\overline{J})} e^{im \cdot \overline{\theta}} + \ldots. \tag{2.2.37}$$

Мы сразу же сталкиваемся с проблемой малых знаменателей, так как для любого $\overline{J}$ всегда найдется такое $\boldsymbol{m}$, что $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\omega}(\overline{J})$ окажется сколь угодно близко к нулю, и сходимость рядов явно нарушается. Подчеркнем еще раз, что это обстоятельство отражает в равной мере трудности как математического, так и физического характера. Оно возникает из-за фактического действия резонансов, которое, как будет показано в § 2.4, изменяет топологию фазовых траекторий. Несмотря на это, значительные усилия были потрачены на попытки по крайней мере «отодвинуть» секулярность в более высокие порядки разложения. В защиту этих, казалось бы бесперспективных, методов заметим, что они дают решения, сходящиеся к истинным решениям в определенных областях фазового пространства для конечных, но больших интервалов времени. Более того, в некоторых случаях такие решения хорошо аппроксимируют движе-

ние в течение любого времени, если используется *крупноструктурное* разбиение фазового пространства [1]). Последний результат связан с фактической сходимостью (согласно теории КАМ) определенных решений для *некоторых* значений $\bar{J}$. Как мы увидим ниже, в случае двух степеней свободы эти решения жестко ограничивают резонансные траектории, которые вынуждены, таким образом, оставаться вблизи нерезонансных траекторий.

Явная зависимость от времени. Для системы с одной степенью свободы и явной зависимостью гамильтониана от времени мы получим в первом порядке по ε некоторые соотношения, которые понадобятся нам в дальнейшем. Начнем с гамильтониана

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta, t), \tag{2.2.38}$$

в котором возмущение периодично по θ с периодом 2π и по времени с периодом $2\pi/\Omega$, а

$$H_1 = \sum_{l, m} H_{1lm}(J)\, e^{i(l\theta + m\Omega t)}. \tag{2.2.39}$$

Как и в п. 2.2а, выбираем производящую функцию S в виде

$$S = \bar{J}\theta + \varepsilon S_1(\bar{J}, \theta, t). \tag{2.2.40}$$

При этом переход от старых переменных к новым выполняется с помощью (2.2.6). Из-за явной зависимости H_1 от времени соотношение (2.2.7) изменяется:

$$\bar{H}(\bar{J}, \bar{\theta}, t) = H(J, \theta, t) + \varepsilon \frac{\partial S_1(\bar{J}, \theta, t)}{\partial t}. \tag{2.2.41}$$

Разложение по ε дает

$$\bar{H}_0 = H_0(\bar{J}), \tag{2.2.42}$$

$$\bar{H}_1 = \frac{\partial S_1}{\partial t} + \omega \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}} + H_1. \tag{2.2.43}$$

Подбирая, как и прежде, S_1 таким образом, чтобы уничтожить переменную часть H_1, находим в первом порядке по ε

$$\bar{H} = H_0 + \varepsilon \langle H_1 \rangle, \tag{2.2.44}$$

где усреднение производится как по θ, так и по t, а

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \omega \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}} = -\{H_1\}. \tag{2.2.45}$$

Для нахождения S_1 произведем фурье-разложение

$$S_1 = i \sum_{l, m \neq 0} \frac{H_{1lm}(\bar{J})}{l\omega(\bar{J}) + m\Omega} e^{i(l\bar{\theta} + m\Omega t)}. \tag{2.2.46}$$

---

[1]) То есть при конечной точности описания.— *Прим. ред.*

Мы вновь сталкиваемся с малыми знаменателями, препятствующими сходимости рядов.

Классическая каноническая теория возмущений может быть весьма полезна при определении интегралов движения, если система находится достаточно далеко от первичных (т. е. проявляющихся в низшем порядке теории возмущений) резонансов. Для иллюстрации выберем функцию H_1, содержащую только одну гармонику по θ:

$$H_1 = U(J, t) + V(J, t)\cos\theta. \tag{2.2.47}$$

Чтобы найти S_1 явно, представим H_1 и S_1 рядами Фурье

$$H_1(\bar{J}, \bar{\theta}, t) = \sum b_{lm}(\bar{J})\cos(l\bar{\theta} - m\Omega t), \tag{2.2.48}$$

$$S_1(\bar{J}, \bar{\theta}, t) = \sum a_{lm}(\bar{J})\sin(l\bar{\theta} - m\Omega t), \tag{2.2.49}$$

где суммирование производится по всем m для $l = 0$ и $l = 1$. Подставляя (2.2.49) в (2.2.45), определяем коэффициенты a_{lm} при l, $m \neq 0$:

$$a_{lm} = \frac{b_{lm}}{m\Omega - l\omega(\bar{J})}. \tag{2.2.50}$$

В области таких значений $\bar{J}$, при которых знаменатели не малы, функции a_{lm} не имеют особенностей. В первом порядке по ε новый гамильтониан, как и в одномерном случае, имеет, согласно (2.2.44), вид

$$\bar{H} = H_0(\bar{J}) + \varepsilon b_{00}(\bar{J}). \tag{2.2.51}$$

Новая переменная действия равна

$$\bar{J}(J, \theta, t) = J - \varepsilon\frac{\partial S_1(J, \theta, t)}{\partial\theta}. \tag{2.2.52}$$

Любая функция вида $I(\bar{J})$, так же как и $\bar{J}$, является интегралом движения. Ниже (п. 2.4г) мы используем этот факт для построения глобальных интегралов движения.

Взаимодействие частицы с волной. Проиллюстрируем методы и ограничения канонической теории возмущений в случае нескольких степеней свободы на практически интересном примере взаимодействия заряженной частицы с электростатической волной в однородном магнитном поле (рис. 2.3). Такая задача была рассмотрена Смитом и Кауфманом [385, 386] для случая волны, распространяющейся наклонно к магнитному полю, а для случая перпендикулярного распространения это сделали Карни и Берс [222], а также Фукуяма и др. [145].

Введем прежде всего переменные действие — угол для невозмущенной системы, гамильтониан которой имеет вид

$$H_{0p} = \frac{1}{2M}\left[\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right]^2. \tag{2.2.53}$$

Здесь M — масса частицы, e — ее заряд, c — скорость света. Обозначая через $\check{\boldsymbol{x}}$, $\check{\boldsymbol{y}}$, $\check{\boldsymbol{z}}$ орты координатных осей, запишем векторный потенциал однородного магнитного поля $\boldsymbol{B}_0$ в виде

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -B_0 y \check{\boldsymbol{x}}. \tag{2.2.54}$$

Импульс

$$\boldsymbol{p} = M\boldsymbol{v} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} \tag{2.2.55}$$

канонически сопряжен радиусу-вектору частицы $\boldsymbol{x} = x\check{\boldsymbol{x}} + y\check{\boldsymbol{y}} + z\check{\boldsymbol{z}}$.

С помощью производящей функции

$$F_1 = M\Omega\left[\frac{1}{2}(y-Y)^2 \operatorname{ctg}\varphi - xY\right] \tag{2.2.56}$$

и соотношений (1.2.11) переходим к новым *дрейфовым переменным*:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_x}{v_y}, \tag{2.2.57а}$$

$$P_\varphi = \frac{Mc}{e}\mu = \frac{1}{2}\frac{Mv_\perp^2}{\Omega} = \frac{1}{2}M\Omega\rho^2, \tag{2.2.57б}$$

$$Y = y + \rho\sin\varphi, \tag{2.2.57в}$$

$$X = x - \rho\cos\varphi, \tag{2.2.57г}$$

где

$$\Omega = \frac{eB_0}{Mc} \tag{2.2.58}$$

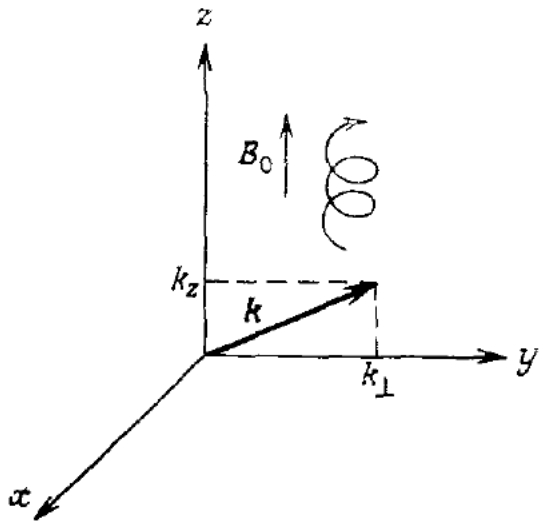


Рис. 2.3. Траектория частицы в однородном магнитном поле $\boldsymbol{B}_0$.

$\boldsymbol{k}$ — волновой вектор электростатической волны.

— ларморовская частота, μ — магнитный момент, $v_\perp^2 = v_x^2 + v_y^2$, $\rho = v_\perp/\Omega$ — ларморовский радиус, X и Y — дрейфовые координаты ларморовского центра, P_φ и φ — момент импульса и угловая координата. Новыми импульсами являются величины P_φ, $M\Omega X$ и P_z; им отвечают координаты φ, Y и z соответственно. Преобразованный гамильтониан имеет вид

$$H_0' = \frac{P_z^2}{2M} + P_\varphi\Omega. \tag{2.2.59}$$

Предположим, что возмущением является электростатическая волна с электрическим полем $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, где

$$\Phi = \Phi_0 \sin(k_z z + k_\perp y - \omega t). \tag{2.2.60}$$

В дрейфовых переменных имеем

$$H_1' = e\Phi_0 \sin\left(k_z z + k_\perp Y - k_\perp \rho \sin\varphi - \omega t\right), \tag{2.2.61}$$

где

$$\rho(P_\varphi) = \left(\frac{2P_\varphi}{M\Omega}\right)^{1/2}. \tag{2.2.62}$$

Так как возмущенный гамильтониан

$$H' = H_0' + \varepsilon H_1' \tag{2.2.63}$$

не зависит от импульса $M\Omega X$, то $Y = \text{const}$ и, сдвинув z или t на постоянную величину, можно исключить постоянную фазу $k_\perp Y$ из (2.2.61). Нелинейность колебаний возникает благодаря зависимости фазы $k_z z - k_\perp \rho \sin\varphi - \omega t$ от $\sin\varphi$ и ρ. Поскольку гамильтониан зависит только от линейной комбинации $k_z z - \omega t$, то можно исключить зависимость от времени, перейдя в систему отсчета волны. Это осуществляется с помощью производящей функции

$$F_2 = (k_z z - \omega t) P_\psi + P_\varphi \varphi. \tag{2.2.64}$$

Используя соотношения (1.2.13), получим новые переменные P_ψ, ψ и новый гамильтониан H:

$$P_z = \frac{\partial F_2}{\partial z} = k_z P_\psi, \tag{2.2.65а}$$

$$\psi = \frac{\partial F_2}{\partial P_\psi} = k_z z - \omega t, \tag{2.2.65б}$$

$$H = \frac{k_z^2 P_\psi^2}{2M} - P_\psi \omega + P_\varphi \Omega + \varepsilon e \Phi_0 \sin(\psi - k_\perp \rho \sin\varphi) = E = \text{const}. \tag{2.2.66}$$

Здесь, как и прежде, ε — малое возмущение (в конце вычислений полагают, что $\varepsilon = 1$). Резонансные гармоники возмущения можно выявить с помощью разложения в ряд по функциям Бесселя

$$H = \frac{k_z^2 P_\psi^2}{2M} - P_\psi \omega + P_\varphi \Omega + \varepsilon e \Phi_0 \sum_m \mathcal{J}_m(k_\perp \rho) \sin(\psi - m\varphi). \tag{2.2.67}$$

Мы уже видели, что необходимо оставаться достаточно далеко от первичных резонансов для того, чтобы амплитуды Фурье убывали быстрее резонансных знаменателей. В нашем случае убывание амплитуд Фурье определяется функциями Бесселя $\mathcal{J}_m(k_\perp \rho)$. Невозмущенные частоты колебаний находятся из (2.2.67):

$$\omega_\varphi = \frac{\partial H_0}{\partial P_\varphi} = \Omega, \tag{2.2.68а}$$

$$\omega_\psi = \frac{\partial H_0}{\partial P_\psi} = \frac{k_z^2}{M} P_\psi - \omega = k_z v_z - \omega. \tag{2.2.68б}$$

Возмущение возбуждает только резонансы между основной частотой ω_ψ и гармониками частоты ω_φ, поэтому условие резонанса имеет вид

$$\omega_\psi - m\Omega = 0. \tag{2.2.69}$$

Для $k_z = 0$ из (2.2.68б) получаем

$$\omega + m\Omega = 0. \tag{2.2.70}$$

Для $k_z \neq 0$, разрешая (2.2.69), находим резонансные значения P_ψ:

$$P_\psi = \frac{M}{k_z^2}(\omega + m\Omega). \tag{2.2.71}$$

Мы исследуем эти резонансы с помощью резонансной теории возмущений в п. 2.4в.

Поскольку P_ψ является переменной действия, то для косой волны резонансы (2.2.71) неизбежны. Рассмотрим поэтому перпендикулярную волну ($k_z \equiv 0$) в предположении, что условие резонанса (2.2.70) не выполнено. В этом случае, как будет показано ниже, при достаточно малом возмущении первичные резонансы отсутствуют. Из (2.2.34) и (2.2.67) находим

$$-\omega \frac{\partial S_1}{\partial \psi} + \Omega \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = -e\Phi_0 \sum_m \mathcal{J}_m(k_\perp \bar{\rho}) \sin(\psi - m\varphi), \tag{2.2.72}$$

где $\bar{\rho} = \rho(\bar{P}_\varphi)$. Решение этого уравнения имеет вид

$$S_1 = -e\Phi_0 \sum_m \mathcal{J}_m(k_\perp \bar{\rho}) \frac{\cos(\psi - m\varphi)}{\omega + m\Omega}. \tag{2.2.73}$$

С помощью последнего выражения можно связать старые переменные действия P_ψ, P_φ с новыми:

$$P_\psi = \bar{P}_\psi + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \psi} =$$

$$= \bar{P}_\psi + \varepsilon e\Phi_0 \sum_m \mathcal{J}_m(k_\perp \bar{\rho}) \frac{\sin(\psi - m\varphi)}{\omega + m\Omega}. \tag{2.2.74}$$

Обращая, в первом порядке получаем

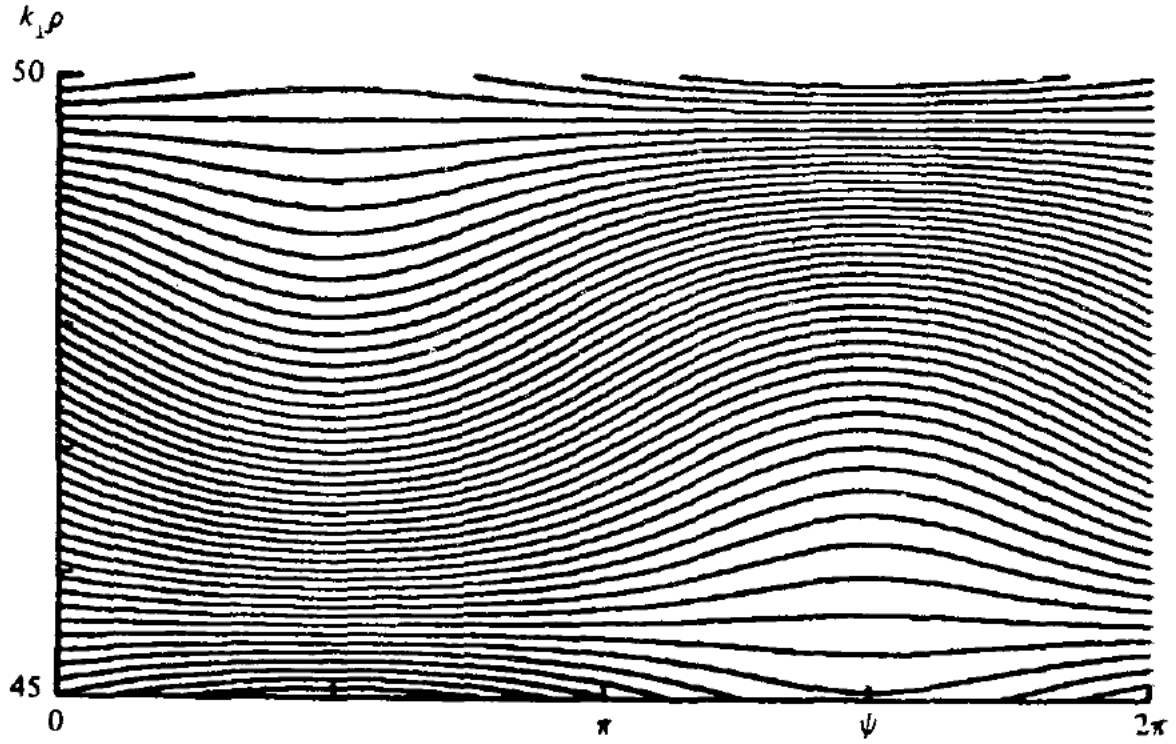
$$\bar{P}_\psi = P_\psi - \varepsilon e\Phi_0 \sum_m \mathcal{J}_m(k_\perp \rho) \frac{\sin(\psi - m\varphi)}{\omega + m\Omega} = \text{const}. \tag{2.2.75}$$

Подобным же образом находим

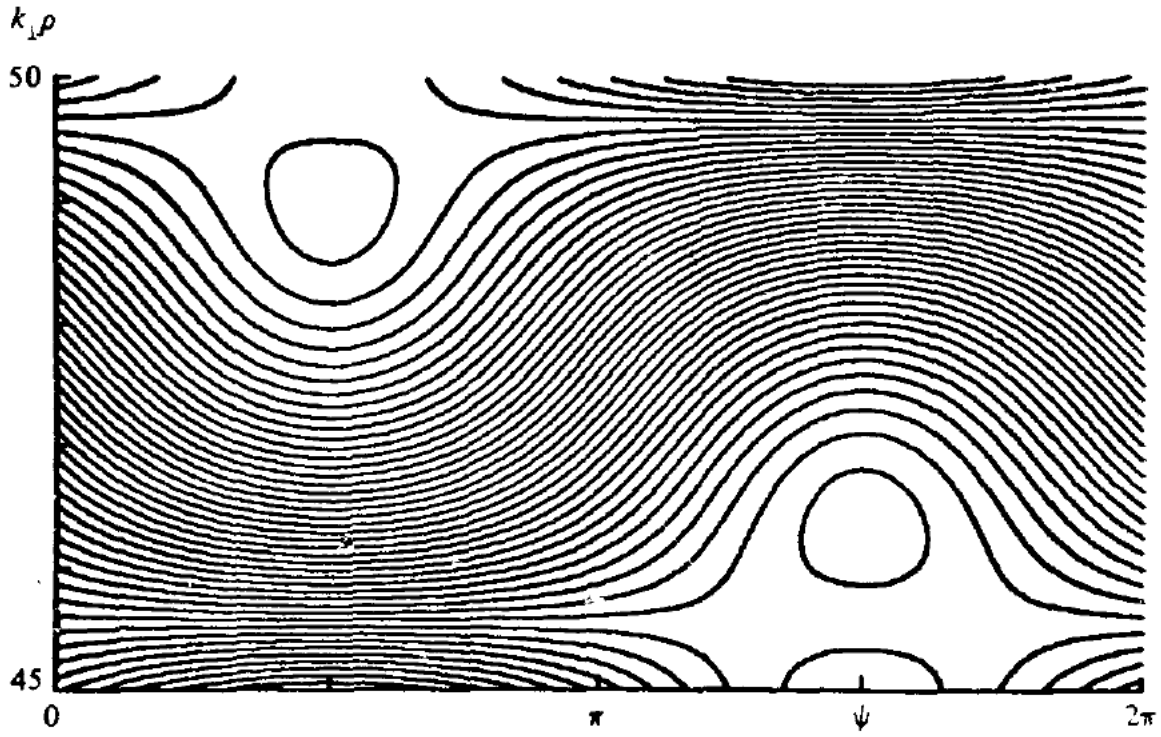
$$\bar{P}_\varphi = P_\varphi + \varepsilon e\Phi_0 \sum_m m\mathcal{J}_m(k_\perp \rho) \frac{\sin(\psi - m\varphi)}{\omega + m\Omega} = \text{const}, \tag{2.2.76}$$

причем $\rho(P_\varphi)$ определяется выражением (2.2.62).

Используя соотношение (2.2.76) и фиксируя одну из фазовых переменных, можно получить графики зависимости P_φ от другой фазовой переменной для различных значений инварианта $\overline{P}_\varphi$. Такие инвариантные кривые эквивалентны картине на поверхности



а



б

Рис. 2.4. Инвариантные кривые на поверхности сечения $\varphi = \pi$ для случая нерезонансного взаимодействия частицы с волной при $k_z = 0$ и $\omega/\Omega = -30{,}11$ (теория) (по данным работы [219]).

а — малая амплитуда волны, резонансы отсутствуют; *б* — большая амплитуда волны, видны резонансы.

сечения Пуанкаре. На рис. 2.4, *а* и *б* показаны кривые зависимости $k_\perp\rho\ (P_\varphi)$ от ψ при $\varphi = \pi$, полученные Карни [219]. Хотя ψ и $k_\perp\rho$ не являются канонически сопряженными переменными, тем не менее основные черты фазового пространства системы представлены правильно. Для сравнения на рис. 2.5, *а* и *б* показаны фазовые тра-

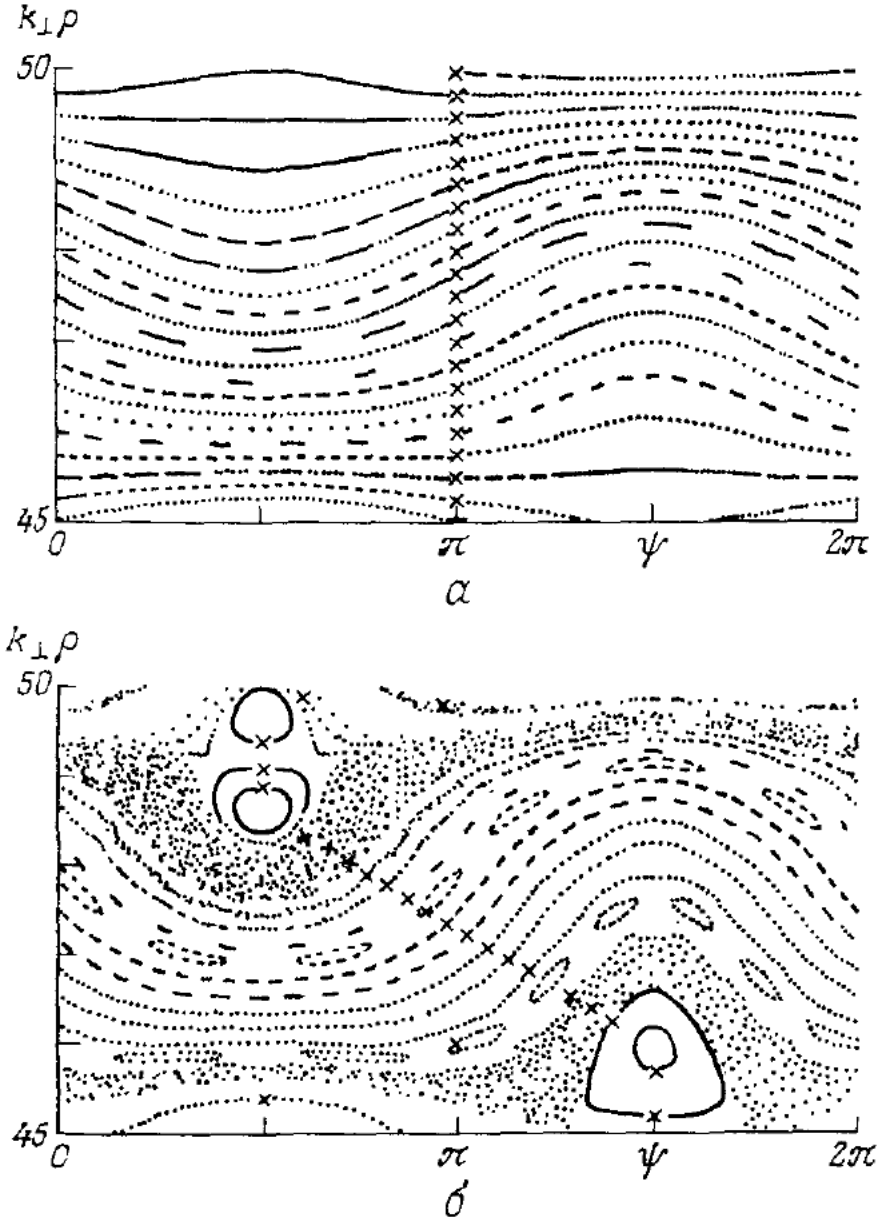


Рис. 2.5. То же, что и на рис. 2.4 (численное моделирование) (по данным работы [219]).
Крестиками отмечены начальные условия.

ектории, полученные Карни численно. Так как для невозмущенной системы $\omega = -30{,}11\ \Omega$ и при малой амплитуде возмущения все инвариантные кривые лежат достаточно далеко от первичного резонанса, то аналитические и численные результаты хорошо согласуются. С ростом возмущения частота колебаний изменяется и система может попасть в резонанс. Однако производящая функция первого порядка, имеющая полюсы на невозмущенных резонансах, остается при этом конечной и воспроизводит грубые черты поведения системы вблизи резонанса. Резонансы высших порядков таким методом найти нельзя; для этого требуется провести вычисле-

ния во втором порядке резонансной теории возмущений (§ 2.4). Области хаотического движения вообще не описываются рассматриваемой теорией возмущений, однако их размер можно оценить, как это будет показано в гл. 4.

§ 2.3. Адиабатическая инвариантность

* 2.3а. Введение и основные понятия

В п. 2.1б мы видели, что для осциллятора с медленно и апериодически изменяющимся параметром можно построить разложение, которое дает *адиабатический* инвариант движения. Параметром разложения являлось отношение периода быстрых колебаний осциллятора к характерному времени медленного изменения параметра. Такую же процедуру можно использовать и в многомерных системах для построения рядов, не содержащих явно малых знаменателей. Этот метод, впервые предложенный Пуанкаре [337], был затем более строго обоснован Биркгофом [29].

Систематическая техника таких разложений, разработанная Боголюбовым и сотр. [242, 33, 32], получила название *метода усреднения* [1]). Несколько иная форма этого метода, более подходящая для канонического представления, была предложена Крускалом [239] (см. п. 2.3г). Крускал показал, что адиабатические инварианты можно построить в любом порядке по параметру разложения и что получающиеся при этом ряды оказываются асимптотическими. В работах Боголюбова и Крускала рассматривается широкий класс систем дифференциальных уравнений, не обязательно гамильтоновых. Полезные канонические формы методов вычислений были введены Мак-Намарой и Уайтменом [292] и Штерном [391, 392]. Однако в более высоких порядках разложения на смену им пришла техника преобразований Ли [290] (см. § 2.5). Связь между различными методами рассматривается в обзорах Мак-Намары и Уайтмена [292] и Джакальи [153].

Асимптотические ряды. Биркгоф [29] впервые показал, что осциллятор с медленно изменяющейся частотой

$$\ddot{x} + \omega^2(\varepsilon t)\, x = 0$$

---

[1]) В оригинале — multiple scale method of averaging [метод усреднения с несколькими масштабами (времени)] — термин, который в отечественной литературе не употребляется. Заметим, что понятие усреднения (как приближенного метода) уже подразумевает наличие в задаче по крайней мере двух различных масштабов времени. По поводу специальных методов теории возмущений, в которых эти масштабы вводятся явно, см., например, работу [313].— *Прим. ред.*

допускает решение в виде *асимптотического* ряда. Это значит, что последовательные приближения

$$X_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k x_k(t) \tag{2.3.1}$$

точного решения $x(t, \varepsilon)$ можно построить таким образом, что для любых фиксированных n и t

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-n} [x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)] = 0. \tag{2.3.2}$$

Напомним некоторые важные свойства асимптотических рядов. Во-первых, две различные функции могут соответствовать одному и тому же асимптотическому ряду. Поэтому построение асимптотического ряда еще не определяет однозначно представляемую им функцию. Предположим, что две функции x_1 и x_2 отличаются на экспоненциально малую величину при $\varepsilon \to 0$:

$$\Delta x = a(t) \exp[-b(t)/\varepsilon]. \tag{2.3.3}$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-n} \exp(-b/\varepsilon) = 0, \tag{2.3.4}$$

то асимптотическое разложение функции Δx есть $X_n = 0$ для всех n (см. рис. 2.6, *а*). Следовательно, функции x_1 и x_2 представляются одним и тем же асимптотическим рядом. Фактически прямые вычисления обнаружили такие экспоненциально малые изменения адиабатических инвариантов в колебательных системах с медленно

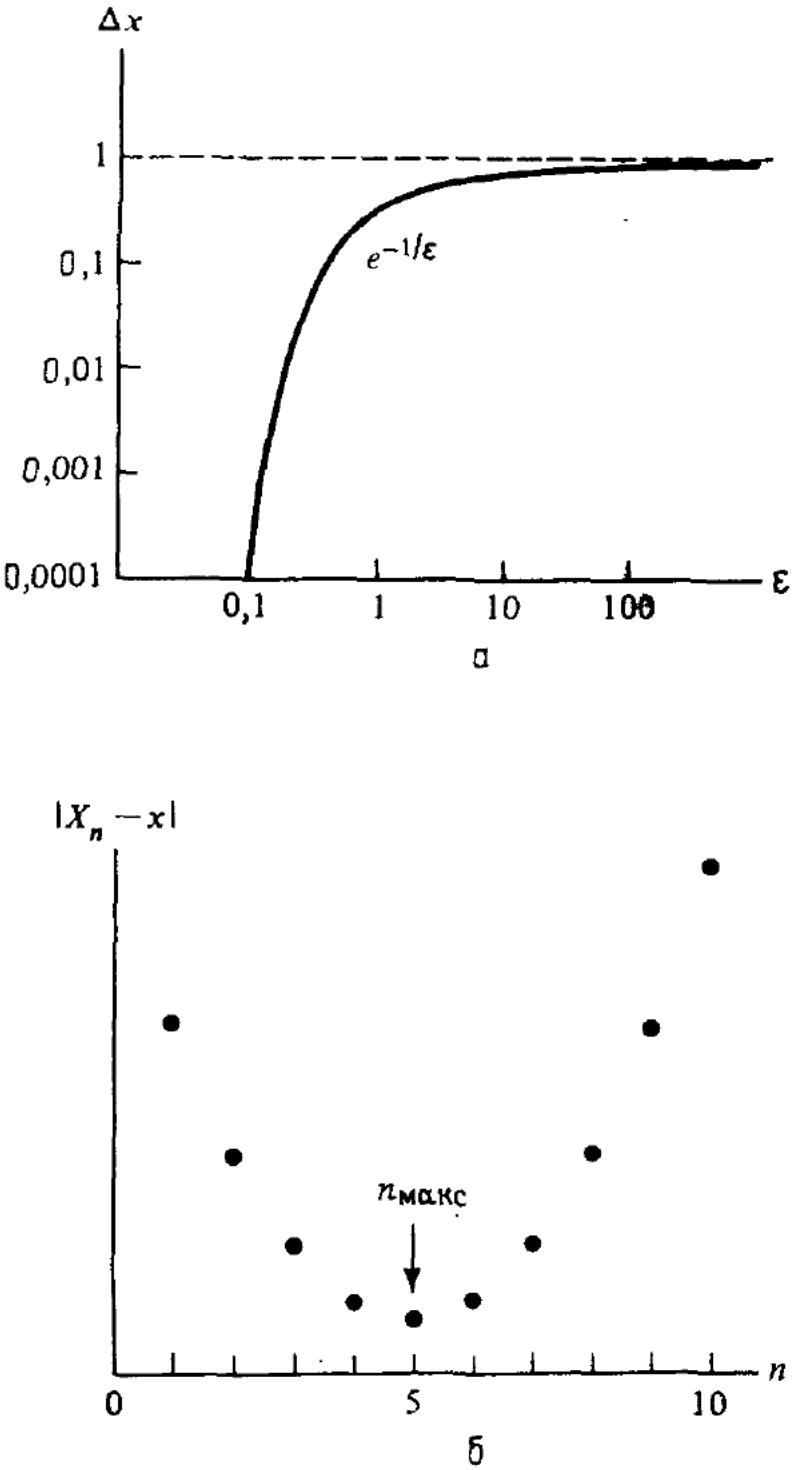


Рис. 2.6. Свойства асимптотического ряда. *а* — функция $\Delta x = \exp(-1/\varepsilon)$, для которой асимптотическое разложение есть тождественный нуль; *б* — расходимость асимптотического ряда при фиксированном ε. Последовательные аппроксимации X_n вначале приближаются к истинному значению x, а затем удаляются от него. «Наилучшая» аппроксимация отвечает номеру $n = n_{макс}$.

изменяющимися параметрами [1]) (см., например, [81, 191, 200]). Для многомерных систем [2]) эти экспоненциально малые изменения инвариантов являются следствием резонансов, вызывающих топологическую перестройку фазового пространства, а при достаточно сильном возмущении и разрушение инвариантов. Таким образом, «адиабатический» инвариант, представляемый асимптотическим рядом, является в пределе $\varepsilon \to 0$ приближением порядка $\exp(-b/\varepsilon)$ точного решения, траектория которого может лежать: а) на гладкой инвариантной поверхности, б) на инвариантной поверхности резонанса, в) в тонком стохастическом слое.

Второе свойство асимптотических рядов заключается в их формальной расходимости: для любых фиксированных ε и t имеем [3])

$$|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)| \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{2.3.5}$$

Общее поведение X_n с ростом n при фиксированном ε иллюстрируется на рис. 2.6, *б*. Вначале увеличение n улучшает аппроксимацию, но для n, больших некоторого $n_{\text{макс}}(\varepsilon)$, последующие приближения становятся все хуже и хуже и расходятся при $n \to \infty$. Поэтому следует вычислять лишь $n_{\text{макс}}$ первых членов разложения, сумма которых будет отличаться от точного решения, грубо говоря, на величину последнего (с номером $n_{\text{макс}}$) члена.

Наконец, отметим, что асимптотическое разложение для адиабатических инвариантов несправедливо на интервалах времени, значительно превышающих время «медленных» изменений в системе; иными словами, адиабатический инвариант не может даже приближенно сохраняться при $t \to \infty$. Такое несохранение адиабатических инвариантов, известное как *диффузия Арнольда*, возникает в системах с *тремя* и более степенями свободы и является основным содержанием гл. 6.

Медленное возмущение. Рассмотрим отличие в порядках членов разложения для случая, когда возмущение мало и когда оно медленное, или «адиабатическое». Для *малого* возмущения гамильтониан имеет вид

$$H = H_0(\boldsymbol{J}, t) + \varepsilon H_1(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}, t) + \ldots,$$

где H_0 описывает полностью интегрируемое движение, а ε — малый параметр, характеризующий величину неинтегрируемой части H. Для малого возмущения производные от H_0 и H_1 полагаются величинами того же порядка, что и сами H_0 и H_1, т. е.

$$\left|\frac{\partial H_0}{\partial t}\right| \sim |H_0|, \quad \left|\frac{\partial H_1}{\partial J}\right| \sim |H_1|, \ \ldots$$

[1]) Для экспоненциальной малости существенна аналитическая зависимость параметров от времени (см., например, [11, 244, 464]).— *Прим. ред.*

[2]) А также в случае явной периодической зависимости параметров от времени.— *Прим. ред.*

[3]) Это не всегда так, как показывает только что рассмотренный пример функции $\Delta x(t)$, определяемой формулой (2.3.3) (см. также [465], § 1.3).— *Прим. ред.*

Для медленного возмущения производные по времени принимаются по порядку величины в ε раз меньше тех членов, из которых они получены, т. е.

$$\left|\frac{\partial H_0}{\partial t}\right| \sim \varepsilon |H_0|, \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Чтобы явно выделить эти порядки величин, запишем

$$H_0 = H_0(\varepsilon t),$$

так что

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} = \varepsilon H_0',$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу $\tau = \varepsilon t$.

В этом параграфе нас будут интересовать такие системы, для которых изменения во времени и движение по всем степеням свободы, кроме одной, являются медленными. С учетом этого запишем гамильтониан в виде

$$H = H_0(J, \varepsilon \boldsymbol{y}, \varepsilon t) + \varepsilon H_1(J, \theta, \varepsilon \boldsymbol{y}, \varepsilon t) + \ . \ . \ . \ , \qquad (2.3.6)$$

где J, θ — переменные действие — угол для невозмущенного ($\varepsilon \equiv 0$) движения по единственной «быстрой» степени свободы, а $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ — «медленные» канонические переменные (не обязательно действие—угол) по остальным степеням свободы. Так как при $\varepsilon = 0$ система имеет фактически одну степень свободы, она всегда является интегрируемой и можно ввести переменные J, θ. При этом малый параметр ε в (2.3.6) будет «автоматически» давать правильные порядки величин при дифференцировании H в рядах теории возмущений.

* 2.3б. Каноническая адиабатическая теория

Построим классический адиабатический инвариант с точностью до первого порядка для гамильтониана (2.3.6). В нулевом порядке таким инвариантом является действие J, связанное с быстрой степенью свободы. Чтобы учесть эффект возмущения εH_1, произведем, как и в п. 2.2б, преобразование от J, θ, $\boldsymbol{y}$ к $\overline{J}$, $\overline{\theta}$, $\overline{\boldsymbol{y}}$, такое, что новый гамильтониан

$$\overline{H} = \overline{H}_0 + \varepsilon \overline{H}_1 + \ . \ . \ . \qquad (2.3.7)$$

не будет зависеть от «быстрой» фазы $\overline{\theta}$. Вводя производящую функцию

$$S = \overline{J}\theta + \overline{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{q} + \varepsilon S_1(\overline{J}, \theta, \overline{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{q}, t) + \ . \ . \ . \ , \qquad (2.3.8)$$

получаем в первом порядке по ε:

$$J=\bar{J}+\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}}, \tag{2.3.9а}$$

$$\theta=\bar{\theta}-\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{J}}, \tag{2.3.9б}$$

$$\boldsymbol{p}=\bar{\boldsymbol{p}}+\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\boldsymbol{q}}}, \tag{2.3.9в}$$

$$\boldsymbol{q}=\bar{\boldsymbol{q}}-\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\boldsymbol{p}}}. \tag{2.3.9г}$$

Подставляя эти выражения в H_0 и удерживая члены порядка ε, находим

$$H_0(J,\ \varepsilon\boldsymbol{y},\ \varepsilon t)=H_0\left(\bar{J},\ \varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\ \varepsilon t\right)+\varepsilon\omega\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}}, \tag{2.3.10}$$

где $\omega=\partial H_0/\partial\bar{J}$ — быстрая частота. Заметим, что члены

$$-\frac{\partial H_0}{\partial\bar{\boldsymbol{q}}}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\boldsymbol{p}}},\qquad \frac{\partial H_0}{\partial\bar{\boldsymbol{p}}}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\boldsymbol{q}}} \tag{2.3.11}$$

имеют второй порядок малости по ε и потому опущены. С помощью выражения (1.2.13в) получаем

$$\bar{H}\left(\bar{J},\ \bar{\theta},\ \varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\ \varepsilon t\right)=H\left(J,\ \theta,\ \varepsilon\boldsymbol{y},\ \varepsilon t\right)+\varepsilon\frac{\partial S\left(\bar{J},\ \theta,\ \varepsilon\bar{\boldsymbol{p}},\ \varepsilon\boldsymbol{q},\ \varepsilon t\right)}{\partial(\varepsilon t)}. \tag{2.3.12}$$

Разлагая $\bar{H}$, H и S, используя (2.3.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, находим в нулевом порядке

$$\bar{H}_0\left(\bar{J},\ \varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\ \varepsilon t\right)=H_0\left(\bar{J},\ \varepsilon\boldsymbol{y},\ \varepsilon t\right) \tag{2.3.13}$$

и в первом порядке

$$\bar{H}_1\left(\bar{J},\ \bar{\theta},\ \varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\ \varepsilon t\right)=\omega\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}}+H_1\left(\bar{J},\bar{\theta},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\ \varepsilon t\right), \tag{2.3.14}$$

где $S_1=S_1\left(\bar{J},\ \bar{\theta},\ \varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\ \varepsilon t\right)$, а член $\partial S_1/\partial t$ в (2.3.12) имеет второй порядок малости и поэтому не вошел в (2.3.14).

Выберем теперь S_1 таким образом, чтобы исключить переменную по $\bar{\theta}$ часть H_1. Считая медленные фазы постоянными, введем среднее только по $\bar{\theta}$

$$\langle H_1\rangle_{\bar{\theta}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_1d\bar{\theta} \tag{2.3.15}$$

и переменную часть

$$\{H_1\}_{\bar{\theta}}=H_1-\langle H_1\rangle_{\bar{\theta}}. \tag{2.3.16}$$

Разделение (2.3.14) на среднюю и переменную части дает для $\overline{H}$ в первом порядке

$$\overline{H}(\overline{J},\ \varepsilon\overline{\boldsymbol{y}},\ \varepsilon t)=H_0+\varepsilon\langle H_1\rangle_{\overline{\theta}}, \tag{2.3.17}$$

причем S_1 легко находится из уравнения

$$\omega\frac{\partial S_1}{\partial\overline{\theta}}=-\{H_1\}_{\overline{\theta}}. \tag{2.3.18}$$

Адиабатическим инвариантом нулевого порядка является невозмущенное действие J. В первом порядке новым инвариантом будет $\overline{J}$, для которого в старых переменных из (2.3.9а) имеем [1])

$$\overline{J}(J,\ \theta,\ \varepsilon\boldsymbol{y},\ \varepsilon t)=J-\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\theta}, \tag{2.3.19}$$

или с учетом (2.3.18)

$$\overline{J}=J+\frac{\varepsilon}{\omega}\{H_1\}_{\overline{\theta}}. \tag{2.3.20}$$

Фактически любую функцию от $\overline{J}$ можно взять в качестве адиабатического инварианта.

Малые знаменатели. Где же сингулярности, с которыми мы столкнулись в п. 2.2б и которые препятствовали сходимости рядов? Их проще всего обнаружить, если принять, что в первом порядке по ε величины $\boldsymbol{y}$ являются переменными действие — угол: $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{J}_y,\ \boldsymbol{\theta}_y)$. В этом случае, не опуская членов (2.3.11) и $\partial S_1/\partial t$, вместо выражения (2.3.18) получаем

$$\omega\frac{\partial S_1}{\partial\overline{\theta}}+\varepsilon\boldsymbol{\omega}_y\cdot\frac{\partial S_1}{\partial(\varepsilon\overline{\boldsymbol{\theta}}_y)}+\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial(\varepsilon t)}=-\{H_1\}_{\overline{\theta}}. \tag{2.3.21}$$

Так как функции S_1 и $\{H_1\}_{\overline{\theta}}$ периодичны по всем угловым переменным и по Ωt, их можно разложить в ряд Фурье

$$S_1=i\sum_{\substack{n=(k,\,l,\,m)\\ k\neq 0}}\frac{H_{1n}(\overline{J},\ \overline{\boldsymbol{J}}_y)}{k\omega+\varepsilon\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}_y+\varepsilon l\Omega}e^{i(k\overline{\theta}+\boldsymbol{m}\cdot\varepsilon\overline{\boldsymbol{\theta}}_y+l\Omega\varepsilon t)}. \tag{2.3.22}$$

Отсюда видно, что малые знаменатели возникают вследствие резонансов высокого порядка ($\boldsymbol{m}$, l — большие числа) между медленными и быстрыми колебаниями. Вблизи этих резонансов нельзя пренебрегать членами порядка ε в (2.3.21). Поэтому нет ничего

[1]) Нижеследующие соотношения справедливы, вообще говоря, только в том (редком) случае, когда невозмущенная система $H_0(\varepsilon)$ интегрируема как при $\varepsilon=0$, так и при $\varepsilon\neq 0$, несмотря на явную зависимость от времени и многомерность. Иначе поправки к адиабатическому инварианту будут зависеть и от функции $H_0(\varepsilon)$.— *Прим. ред.*

удивительного в том, что адиабатические ряды, в которых резонансные эффекты не учитываются, оказываются асимптотическими, т. е. формально расходящимися и справедливыми лишь для интервалов времени, меньших или порядка характерного времени медленных изменений [1]).

Описанное выше адиабатическое разложение можно выполнить и в более высоких порядках. В каждом порядке необходимо решать уравнение для S_n, подобное уравнению (2.3.18) для S_1. При этом резонансные знаменатели никогда не появляются, а их действие все время отодвигается во все более высокие порядки. Выражения для адиабатических инвариантов высших порядков приведены в § 2.5.

Иерархия инвариантов. Построение адиабатического инварианта, если он действительно существует, фактически снижает число степеней свободы с N до $N-1$ (в пределах точности адиабатического приближения). Это происходит потому, что задаваемый асимптотическим рядом по степеням ε преобразованный гамильтониан

$$\overline{H} = \overline{H}(\overline{J},\ \varepsilon\overline{y},\ \varepsilon t,\ \varepsilon)$$

не зависит от $\overline{\theta}$, а $\overline{J}$ — константа. Если среди оставшихся степеней свободы найдется еще одна, колебания по которой являются быстрыми по сравнению с другими, то можно ввести второй малый параметр ε_2, перейти к переменным действие — угол по этому быстрому движению для невозмущенной ($\varepsilon_2 \equiv 0$) системы и найти второй адиабатический инвариант. Этот процесс можно продолжить, что приведет к возникновению иерархии инвариантов и эффективному снижению числа степеней свободы вплоть до единицы. Такая ситуация хорошо известна в физике плазмы для движения заряженной частицы в магнитной ловушке. Вначале определяется инвариант, связанный с быстрым ларморовским вращением, — магнитный момент μ, затем — продольный инвариант $J_\parallel$, отвечающий более медленным колебаниям между магнитными пробками, и, наконец,— потоковый инвариант Φ, связанный с дрейфовым движением. Эти три степени свободы показаны на рис. 2.7 (более подробное обсуждение данной задачи можно найти в работе [175]). В рассматриваемом случае тремя малыми параметрами являются: 1) ε — отношение частоты продольных колебаний к ларморовской частоте; 2) ε_2 — отношение частоты дрейфового движения к частоте продольных колебаний и 3) ε_3 — отношение частоты изменения во времени магнитного поля к дрейфовой частоте.

Вся иерархия инвариантов ограничена условиями справедливости адиабатической теории, и резонансы могут привести к изме-

[1]) Поскольку резонансные эффекты, вообще говоря, экспоненциально малы, их влияние, например в виде диффузии Арнольда, проявляется на значительно большем масштабе времени (см. § 6.2).— *Прим. ред.*

нению или разрушению этих инвариантов. Для частицы, движущейся в статической магнитной ловушке, такие процессы были исследованы Чириковым [67, 70]. Аналогичные исследования для частицы, находящейся в ловушке и взаимодействующей с переменным электрическим полем, были проведены Егером и др. [212], а также Либерманом и Лихтенбергом [274]. В случае более чем двух степеней свободы частицы подвержены диффузии Арнольда даже при отсутствии перекрытия первичных резонансов. Однако, как показано в гл. 6, при $\varepsilon \to 0$ как скорость диффузии Арнольда,

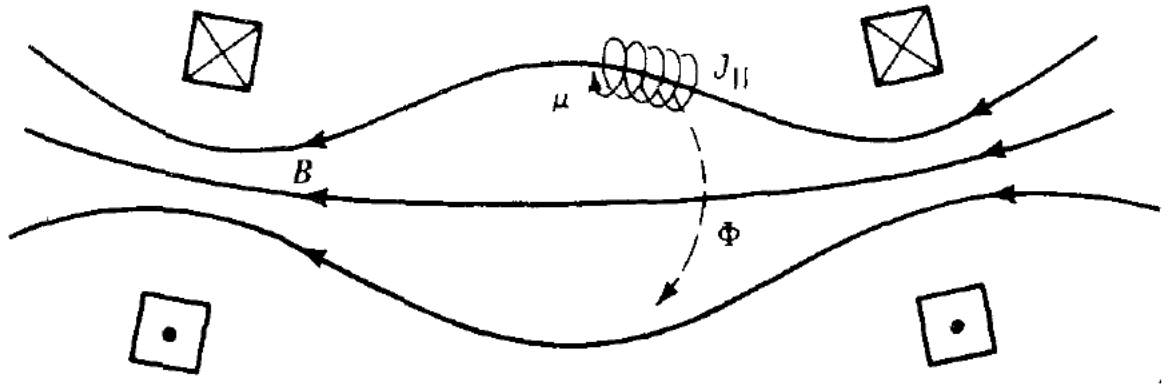


Рис. 2.7. Иерархия адиабатических инвариантов для заряженной частицы в магнитной ловушке: магнитный момент μ, продольный инвариант $J_{\parallel}$, потоковый инвариант Φ.

так и общий фазовый объем стохастических слоев, по которым идет диффузия, стремятся к нулю. Поэтому в практических приложениях иерархия адиабатических инвариантов соответствует истинному движению с очень хорошей точностью. Адиабатическая теория является и останется впредь одним из плодотворных подходов к пониманию движения в динамических системах.

* 2.3в. Медленно изменяющийся гармонический осциллятор

С целью иллюстрации общего метода и резонансных эффектов вычислим адиабатический инвариант первого порядка для медленно изменяющегося линейного осциллятора

$$H_l = \frac{1}{2} G(\tau) p^2 + \frac{1}{2} F(\tau) q^2, \tag{2.3.23}$$

где малый параметр введен посредством переменной $\tau = \varepsilon t$. Вначале перейдем к переменным действие — угол J, θ для невозмущенного гамильтониана $H_{l0} = H_l(\varepsilon = 0)$ с помощью производящей функции

$$F_1(q, \theta, \tau) = \frac{1}{2} Rq^2 \operatorname{ctg}\theta, \tag{2.3.24}$$

где $R(\tau) = (F/G)^{1/2}$. Из (1.2.11) получаем уравнения преобразований (1.2.68) и новый гамильтониан

$$H = \omega_0 J + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{R'}{R} J \sin 2\theta. \tag{2.3.25}$$

Здесь $\omega_0(\tau) = (FG)^{1/2}$, а штрих означает дифференцирование по τ. Наша система приведена теперь к виду (2.3.6) и допускает применение метода Пуанкаре—Цейпеля. В нулевом порядке адиабатическим инвариантом является

$$J = \frac{H_0}{\omega_0} = \text{const}, \tag{2.3.26}$$

т. е. число квантов $\hbar\omega_0$ сохраняется при медленном изменении частоты осциллятора [114]. Для определения инварианта первого порядка применим выражение (2.3.20) к гамильтониану (2.3.25), что сразу даст

$$\bar{J} = J(1 + \varepsilon P \sin 2\theta) = \text{const}, \tag{2.3.27}$$

где $P(\varepsilon t) = R'/2\omega_0 R$. Видно, что в первом порядке величина J испытывает небольшие колебания с частотой, в 2 раза превышающей частоту осциллятора. Постоянство $\bar{J}$ можно проверить, взяв производную по времени (обозначена точкой) от (2.3.27),

$$\dot{\bar{J}} = \dot{J} + \varepsilon \dot{P} J \sin 2\theta + 2\varepsilon\omega_0 J P \cos 2\theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{2.3.28}$$

В силу канонических уравнений для гамильтониана (2.3.25) первый и третий члены сокращаются и в первом порядке по ε остается

$$\dot{\bar{J}} = \varepsilon \dot{P} J \sin 2\theta. \tag{2.3.29}$$

Если медленное возмущение имеет обычный порядок малости, т. е. $\dot{P} \sim \varepsilon P$, то $\dot{\bar{J}} \sim \varepsilon^2$ и, следовательно, $\bar{J}$ является инвариантом первого порядка.

Прохождение через резонанс. Рассмотрим теперь изменение адиабатического инварианта, обусловленное резонансами между колебаниями осциллятора и медленными периодическими изменениями его параметров. Разложим $\dot{P}$ в ряд Фурье

$$\dot{P} = \varepsilon \sum_{n \neq 0} a_n e^{in\omega_1 \varepsilon t}, \tag{2.3.30}$$

здесь $\varepsilon\omega_1$ — частота медленных изменений, причем отношение

ω_1/ω_0 порядка единицы. Подставляя выражение для $\dot{P}$ в формулу 2.3.29), получаем

$$\dot{\bar{J}} = \frac{\varepsilon^2}{2i}\,\bar{J}\sum_{n\neq 0} a_n\left[e^{i(n\omega_1\varepsilon t+2\theta)} - e^{i(n\omega_1\varepsilon t-2\theta)}\right], \qquad (2.3.31)^{1)}$$

где мы заменили J на $\bar{J}$ с точностью до величин первого порядка по ε. Интегрирование (2.3.31) по периоду медленных колебаний дает $\Delta\bar{J}/\bar{J} \sim \varepsilon^2$, если частоты $\varepsilon\omega_1$ и ω_0 несоизмеримы. В противном случае, т. е. при

$$\frac{\omega_0}{\varepsilon\omega_1} = \frac{s}{2}, \qquad (2.3.32)$$

где s — целое число порядка ε^{-1}, члены суммы с $n = \pm s$ не зависят от времени и интеграл по периоду медленных колебаний дает

$$\frac{\overline{\Delta J}}{\bar{J}} \sim \varepsilon^2 |a_s| \cdot \frac{2\pi\varepsilon^{-1}}{\omega_1} \sim \varepsilon. \qquad (2.3.33)$$

Таким образом, если резонанс поддерживается в течение времени $t_p \sim 2\pi\varepsilon^{-1}/\omega_1$, то инвариант первого порядка разрушается, что свидетельствует о сильном нарушении адиабатичности [2]). Это не означает, однако, что интеграл движения вообще не существует, просто он имеет другой вид. Действительно, в п. 1.3б мы видели, что линейный осциллятор (2.3.23) с периодически изменяющимися во времени коэффициентами является интегрируемой системой, откуда и следует существование некоторого интеграла движения. С другой стороны, для нелинейного осциллятора возможно как сохранение невозмущенного интеграла движения, так и его топологическое изменение или полное разрушение. Хотя нелинейный

---

[1]) Соотношение (2.3.31) справедливо только по порядку величины, так как уравнение (2.3.29) содержит еще одно слагаемое $\varepsilon P\,\dot{J}\sin 2\theta = \varepsilon^2 P^2 J\,\omega_0 \sin 4\theta$ [см. (2.3.27)]. Для нижеследующих оценок это, однако, несущественно.— *Прим. ред.*

[2]) Связь рассмотренной задачи с прохождением резонанса требует пояснения. Пусть, например, $P(\tau) = P_0\cos\left(\Omega_0 t + \frac{\lambda}{\omega_1}\sin(\tau\omega_1)\right)$ — частотно-модулированное возмущение с частотой $\Omega(\tau) = \Omega_0 + \lambda\cos(\tau\omega_1)$. Резонанс проходится, если при некотором $\tau = \tau_p$ частота $\Omega(\tau_p) = \omega_0$. В этом случае амплитуда $|a_s| \sim \varepsilon^{-1/2}$ и $\Delta J/J \sim \sqrt{\varepsilon}$, что уточняет оценку (2.3.33). Вряд ли можно говорить о сильном нарушении адиабатичности [на интервале времени $\sim (\varepsilon\omega_1)^{-1}$], так как $\Delta J \ll J$. Однако даже первая поправка к J (2.3.27) уже теряет смысл. Если же резонанс не проходится, т. е. $\Omega(\tau) \neq \omega_0$ для любого τ, то амплитуда a_s экспоненциально мала и адиабатичность имеет место в полной мере. Различные режимы прохождения резонанса, в том числе и для нелинейного осциллятора, исследованы, например, в работах [466, 68, 467].— *Прим. ред.*

осциллятор представляет бо́льший интерес, мы ограничились здесь линейной системой в целях иллюстрации методов построения разложений.

2.3г. Неканонические методы

Для некоторых типов задач изложенные выше классические методы неприменимы. В первую очередь речь идет об уже упоминавшейся задаче о дрейфовом движении заряженной частицы в магнитном поле (см. рис. 2.7). Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(q,\ t)\right]^2, \tag{2.3.34}$$

где

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(q,\ t) \tag{2.3.35}$$

— канонический импульс, а векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ связан с магнитным полем соотношением $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле $\boldsymbol{B}_0$ хорошо известно и сводится к ларморовскому вращению и равномерному перемещению вдоль поля. Небольшие неоднородности поля могут заметно изменить характер движения, приводя как к колебаниям вдоль поля, так и к поперечному дрейфу (см. рис. 2.7). Очевидно, что при малой неоднородности поля частота ларморовского вращения велика по сравнению с частотами колебаний и дрейфа. В качестве малого параметра в уравнениях движения можно принять отношение [1]) $m/e \sim \varepsilon$, что гарантирует большое значение частоты вращения $\Omega = eB/mc \sim \varepsilon^{-1}$. Однако в гамильтоновой формулировке (2.3.34) главные члены как по $\boldsymbol{p}$, так и по $\boldsymbol{A}$ имеют порядок $Be/mc \sim \varepsilon^{-1}$ и почти сокращаются, что затрудняет оценку порядков величин по ε. Эта трудность связана не с самим дрейфовым приближением, а лишь с его гамильтоновым описанием [2]). Подобные задачи побудили Крылова и Боголюбова [242], Боголюбова и Зубарева [32], Боголюбова и Митропольского [33] и Крускала [239] сформулировать адиабатическую теорию возмущений для системы дифференциальных уравнений общего вида, необязательно гамильтоно-

---

[1]) Этот параметр является формальным, поскольку он никак не связан с реальным возмущением в задаче — с неоднородностью поля.— *Прим. ред.*

[2]) Это утверждение спорно, см., например, [468]. Отмеченные трудности связаны отчасти с тем, что обычно невозмущенным считается движение частицы в однородном магнитном поле, которое является инфинитным, т. е. качественно отличается от финитного возмущенного движения частицы в магнитной ловушке. По поводу другого выбора невозмущенной системы в этой задаче см. [464].— *Прим. ред.*

вых или необязательно в канонических переменных [1]). Как и в каноническом случае, эти методы предполагают наличие быстрой переменной по одной степени свободы и медленных по остальным степеням свободы и содержат усреднение на коротком масштабе времени. Будучи эффективными и очень общими, эти методы неизбежно оказываются и очень громоздкими, особенно в высших порядках. В канонической формулировке дифференциальные уравнения получаются из скалярной функции H; это же касается и преобразования переменных, которое определяется скалярной производящей функцией. В случае общего метода усреднения [2]) эти упрощающие обстоятельства отсутствуют.

Рассмотрим вначале метод Крускала и проиллюстрируем его на примере вычисления адиабатического инварианта первого порядка для медленно изменяющегося гармонического осциллятора. Мы выбрали работу Крускала, а не Крылова и Боголюбова, поскольку Крускал показывает, как неканонические возмущенные решения связаны с переменными действия в тех случаях, когда дифференциальные уравнения можно получить из гамильтониана.

Обращаем внимание читателя на недавно разработанный Литлджоном [281] метод, в котором используются неканонические переменные, но дифференциальные уравнения и преобразования переменных определяются, как и в методе Пуанкаре—Цейпеля, скалярными функциями. Подход Литлджона есть нечто среднее между классической канонической теорией и общими методами усреднения Крылова и Крускала (подробнее см. в [281]) [3]).

Метод усреднения Крускала. Следуя Крускалу, рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \varepsilon), \tag{2.3.36}$$

обладающую тем свойством, что при $\varepsilon = 0$ ($\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x})$) траектория $\boldsymbol{x}(t)$ является замкнутой («петля»). Прежде всего преобразуем переменные, чтобы разделить движение на быструю и медленную части. Если $\boldsymbol{x}$ — N-компонентный вектор, то должно быть $N-1$ «медленных» переменных $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$, описывающих движение самой петли и удовлетворяющих условию

$$\dot{\boldsymbol{y}}\Big|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right)_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{f}_0 \cdot \nabla_x \boldsymbol{y} = 0. \tag{2.3.37}$$

---

[1]) Поскольку это касается работ Боголюбова и его школы, следует заметить, что их основной мотивировкой были приложения к широкому кругу задач, в которых нельзя пренебречь диссипацией и гамильтонов формализм неприменим. — *Прим. ред.*

[2]) См. примечание редактора на с. 104. Используемый здесь и ниже термин «общий метод усреднения» подчеркивает, что такой метод не ограничен гамильтоновыми системами.— *Прим. ред.*

[3]) Обобщение метода Литлджона на релятивистский случай содержится в работе [472].— *Прим. ред.*

При этом оставшаяся «быстрая» переменная $\theta = \theta(\boldsymbol{x})$, периодическая в нулевом порядке ($\varepsilon = 0$), определяет движение вдоль петли. В новых переменных уравнения (2.3.36) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{y}} &= \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}, \theta), \\ \dot{\theta} &= \omega(\boldsymbol{y}, \theta), \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

где быстрая фаза θ связана с одной из медленных переменных y_i которая в каноническом случае была бы переменной действия для быстрой степени свободы. Преобразования переменных можно представить, как и в каноническом случае, в виде разложения по малому параметру ε.

Общий метод усреднения заключается в том, чтобы найти такие «хорошие» переменные $\boldsymbol{z}$ и ψ, эволюция которых не зависит от ψ:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}} &= \varepsilon \boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}), \\ \dot{\psi} &= \Omega(\boldsymbol{z}), \end{aligned} \tag{2.3.39}$$

причем $\boldsymbol{z}$, ψ, $\boldsymbol{h}$ и Ω можно определить независимо в каждом порядке по ε. Необходимо, таким образом, найти четыре уравнения, устанавливающие связь величин n-го порядка с теми же величинами (n—1)-го порядка. Поскольку величины нулевого порядка можно определить непосредственно, то полное решение находится по индукции. Для получения этих соотношений выразим полные производные (2.3.39) через переменные $\boldsymbol{y}$ и θ с помощью выражений (2.3.38) и уравнений преобразования $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, \theta)$, $\psi = \psi(\boldsymbol{y}, \theta)$:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}} &= \nabla_y \boldsymbol{z} \cdot \varepsilon \boldsymbol{g} + \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \theta} \omega = \varepsilon \boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}), \\ \dot{\psi} &= \nabla_y \psi \cdot \varepsilon \boldsymbol{g} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \omega = \Omega(\boldsymbol{z}). \end{aligned} \tag{2.3.40}$$

Дополнительно потребуем периодичности $\boldsymbol{z}$ и ψ:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, \theta + 2\pi) &= \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, \theta), \\ \psi(\boldsymbol{y}, \theta + 2\pi) &= \psi(\boldsymbol{y}, \theta) + 2\pi. \end{aligned} \tag{2.3.41}$$

Из последнего выражения видно, что ψ играет роль угловой переменной. Для определения $\boldsymbol{z}$ и ψ как функций $\boldsymbol{y}$ и θ, введем произвольно следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}, 0) &= \boldsymbol{y}, \\ \psi(\boldsymbol{y}, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.3.42}$$

Возможен и другой выбор начальных условий, однако выбор (2.3.42) упрощает преобразование переменных. Получим теперь выражения, позволяющие определять $\boldsymbol{z}$, ψ, $\boldsymbol{h}$, Ω в любом порядке по ε. Предпо-

ложим пока, что мы сумели каким-то образом найти величины $\boldsymbol{y}$, θ, $\boldsymbol{g}$ и ω точно, хотя в действительности их можно представить и в виде разложений. Разделив (2.3.40) на ω, интегрируя и определяя постоянные из начальных условий, получаем

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \varepsilon \int_0^\theta \left(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}) - \nabla_y \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{g}\right) \frac{d\theta}{\omega}, \tag{2.3.43а}$$

$$\psi = \int_0^\theta \left(\Omega(\boldsymbol{z}) - \varepsilon \nabla_y \psi \cdot \boldsymbol{g}\right) \frac{d\theta}{\omega}. \tag{2.3.43б}$$

Условия периодичности дают

$$\int_0^{2\pi} \left(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}) - \nabla_y \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{g}\right) \frac{d\theta}{\omega} = 0, \tag{2.3.44а}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\Omega(\boldsymbol{z}) - \varepsilon \nabla_y \psi \cdot \boldsymbol{g}\right) \frac{d\theta}{\omega} = 2\pi. \tag{2.3.44б}$$

Уравнения (2.3.43) и (2.3.44) являются теми четырьмя уравнениями, которые позволяют находить неизвестные величины $\boldsymbol{z}$, ψ, $\boldsymbol{h}$, Ω в любом порядке по ε. В канонической теории они соответствуют разделению уравнения (2.3.14) для производящей функции S_1 на среднюю и переменную части [1]).

Следующим шагом является разложение $\boldsymbol{z}$ и ψ в ряд по степеням ε, например:

$$\boldsymbol{z} = \sum_n \boldsymbol{z}_n \varepsilon^n, \tag{2.3.45}$$

после чего $\boldsymbol{h}$ и Ω также можно представить рядами, например:

$$\varepsilon \boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}) = \varepsilon \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{z}_0) + \varepsilon^2 \left[\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{z}_0) + \boldsymbol{z}_1 \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{z}_0)\right] + \ldots \tag{2.3.46}$$

В нулевом порядке по ε имеем $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{y}$. В первом порядке эти переменные определяются из выражений (2.3.43) и (2.3.44) при $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1$ следующим образом. Из (2.3.43а) находим

$$\boldsymbol{z}_1 = \int_0^\theta \left(\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{z}) - \nabla_y \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{g}\right) \frac{d\theta}{\omega}, \tag{2.3.47}$$

---

[1]) См. уравнения (2.3.49) — (2.3.52).— *Прим. ред.*

а из условия периодичности (2.3.44а)

$$\int_0^{2\pi} \left(\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{z}) - \nabla_y \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{g}\right) \frac{d\theta}{\omega} = 0 \cdot \tag{2.3.48}$$

Используя $\nabla_y \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}$ и определяя среднюю часть соотношением

$$\langle \boldsymbol{g} \rangle = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{g} \frac{d\theta}{\omega} \Big/ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega}, \tag{2.3.49}$$

а интеграл от переменной части $\boldsymbol{g}$ посредством

$$\tilde{\boldsymbol{g}} = \int_0^{\theta} (\boldsymbol{g} - \langle \boldsymbol{g} \rangle) \frac{d\theta}{\omega}, \tag{2.3.50}$$

получаем из (2.3.48) и (2.3.47)

$$\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{z}) = \langle \boldsymbol{g} \rangle, \tag{2.3.51}$$

$$\boldsymbol{z}_1 = -\tilde{\boldsymbol{g}}. \tag{2.3.52}$$

Аналогичные вычисления с использованием уравнений (2.3.43б) и (2.3.44б) определяют ψ в первом порядке по ε. Заметим, что физический смысл этих преобразований заключается в том, что в каждом порядке переменные определяются таким образом, чтобы их средняя часть была равна нулю и интегрирование по углу не приводило бы к появлению секулярных членов. Сами переменные могут иметь при этом различную природу. Для осциллятора с одной степенью свободы и медленно изменяющейся частотой величина y может быть гамильтонианом. В случае нескольких степеней свободы с не зависящим от времени гамильтонианом величина $\boldsymbol{y}$ может представлять вектор переменных действия. В любом случае, согласно формальной схеме Крускала, инвариант должен определяться обычным образом:

$$J = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{dq_k}{d\psi} \cdot d\psi, \tag{2.3.53}$$

где p_k, q_k могут быть либо компонентами $\boldsymbol{z}$, либо в более общем случае функциями от $\boldsymbol{z}$. Крускал демонстрирует каноническую природу J и ψ, вычисляя для них скобки Пуассона

$$[\psi, J] = 1. \tag{2.3.54}$$

Фактическое вычисление является довольно сложным, но уже сам вид выражения (2.3.53) для J показывает, что это действительно переменная действия.

Медленно изменяющийся осциллятор. Проиллюстрируем метод Крускала на примере изменяющегося во времени гармонического осциллятора. Хотя этот метод был разработан для применения в многомерных системах, его основные черты можно показать и на одномерной модели. Имеем

$$\frac{dp}{dt} = -F(\varepsilon t)\, q, \qquad \frac{dq}{dt} = Gp, \tag{2.3.55}$$

причем для упрощения принято $G = \text{const}$. Чтобы привести (2.3.55) к стандартному виду автономной системы уравнений первого порядка, введем новую независимую переменную $\tau = \varepsilon t$. Обозначая точкой производную по времени, получаем

$$\dot{p} = -F(\tau)\, q, \qquad \dot{q} = Gp, \qquad \dot{\tau} = \varepsilon. \tag{2.3.56}$$

В нулевом порядке по ε имеем $\tau = \text{const}$ и, следовательно, $F = \text{const}$. Пусть векторная переменная $\boldsymbol{y}$ равна

$$\boldsymbol{y} = (H,\ \tau), \tag{2.3.57}$$

т. е. имеет компоненты H и τ. Здесь H — гамильтониан системы

$$H = \frac{F}{2} q^2 + \frac{G}{2} p^2, \tag{2.3.58}$$

который в нулевом порядке сохраняется. Величины H и τ являются (с точностью до знака) каноническими переменными расширенного фазового пространства. Решение нулевого порядка есть просто гармонические колебания

$$q = q_0 \sin(\omega_0 t + \beta), \qquad p = Rq_0 \cos(\omega_0 t + \beta), \tag{2.3.59}$$

где, как и прежде, $R = (F/G)^{1/2}$ и $\omega_0 = (FG)^{1/2}$. Определяя угловую переменную посредством $\theta = \omega_0 t + \beta$, находим из (2.3.59)

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Rq}{p}\right). \tag{2.3.60}$$

Мы хотим перейти к новым «хорошим» переменным, не зависящим от быстрой фазы. Для этого надо использовать преобразования (2.3.43) и (2.3.44) последовательно в каждом порядке по ε. Чтобы найти необходимые производные $\dot{H}$ и $\dot{\theta}$, продифференцируем (2.3.58), подставляем в него (2.3.56) и получаем

$$\dot{H} = \frac{\varepsilon}{2} F' q^2, \tag{2.3.61}$$

где F' — производная по τ. Из (2.3.58) и (2.3.60) можно выразить q и p через H и θ:

$$q^2 = \frac{2H}{F}\sin^2\theta, \qquad p^2 = \frac{2H}{G}\cos^2\theta. \tag{2.3.62}$$

Подставляя q^2 в выражение для $\dot{H}$ и учитывая равенство $R'/R = F'/2F$, имеем

$$\dot{H} = 2\varepsilon\left(\frac{R'}{R}\right)H\sin^2\theta, \tag{2.3.63}$$

или

$$\dot{\boldsymbol{y}} \equiv (\dot{H},\ \dot{\tau}) = \varepsilon \boldsymbol{g}(H,\ \tau,\ \theta). \tag{2.3.64}$$

Аналогичным путем, дифференцируя (2.3.60) и используя (2.3.56), определяем производную для угловой переменной:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{1+\left(\frac{Rq}{p}\right)^2}\left\{\varepsilon\frac{R'}{R}\frac{Rq}{p} + \omega_0\left[1+\left(\frac{Rq}{p}\right)^2\right]\right\}. \tag{2.3.65}$$

Выражая Rq/p из (2.3.60) и преобразуя, получаем

$$\dot{\theta} = \omega_0 + \varepsilon\frac{R'}{2R}\sin 2\theta \equiv \omega(H,\ \tau,\ \theta). \tag{2.3.66}$$

Уравнения (2.3.63) и (2.3.66) можно теперь использовать для получения «хороших» переменных $\boldsymbol{z}$ и ψ. Применяя (2.3.63), (2.3.64) и (2.3.66) при вычислении выражения (2.3.49), в первом порядке находим

$$\langle \boldsymbol{g}\rangle = \left(\frac{R'H}{R},\ 1\right) \tag{2.3.67}$$

и, согласно (2.3.51), $\boldsymbol{h}_1 = \langle \boldsymbol{g}\rangle$. Полагая $\boldsymbol{z} = (\bar{H},\ \tau)$, вычисляя интеграл (2.3.50) и используя (2.3.51), получаем

$$\bar{H} = H\left[1+\varepsilon\left(\frac{R'}{2\omega_0 R}\right)\sin 2\theta\right]. \tag{2.3.68}$$

Аналогичные вычисления приводят к тривиальному результату $\bar{\tau} = \tau$, что вместе с (2.3.68) позволяет определить в первом порядке «хорошие» переменные $\boldsymbol{z} = (\bar{H},\ \bar{\tau})$, так что $\dot{\boldsymbol{z}}$ не зависит от ψ. Подобным же образом строятся и преобразования для угловой переменной ψ.

Получив хорошие переменные, можно выразить через них интеграл движения

$$\overline{J} = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p \frac{dq}{d\psi} d\psi, \tag{2.3.69}$$

где p и q — функции $\overline{H}$ и ψ. В первом порядке по ε достаточно выполнить интегрирование по θ вместо ψ: это упрощение использовано в работе Нортропа и др. [321]. Используя выражения (2.3.62) и вычисляя производную от q, получаем

$$\overline{J} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2H}{\omega_0} \cos^2 \theta d\theta.$$

С помощью (2.3.68) в первом порядке по ε находим

$$\overline{J} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\overline{H}}{\omega_0} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \frac{R'}{R} \sin 2\theta\right) \cos^2 \theta d\theta.$$

Производя интегрирование, получаем выражение для адиабатического инварианта

$$\overline{J} = \frac{\overline{H}}{\omega_0} = \frac{H}{\omega_0} \left(1 + \frac{\varepsilon R'}{2\omega_0 R} \sin 2\theta\right). \tag{2.3.70}$$

Это выражение совпадает с выражением (2.3.27), полученным в канонической теории возмущений. Если H вычисляется в области, где параметры не изменяются, то $R' = 0$ и мы приходим к обычному выражению

$$\frac{H}{\omega_0} = \text{const}, \tag{2.3.71}$$

которое, как это видно из (2.3.70), справедливо только в нулевом порядке.

§ 2.4. Резонансная теория возмущений [1)]

Вблизи резонанса невозмущенной системы малые знаменатели появляются уже при вычислении адиабатических инвариантов первого порядка (см. § 2.3). Эти знаменатели можно устранить

[1)] В оригинале — secular perturbation theory (секулярная теория возмущений). Принятый в переводе термин более непосредственно отражает назначение теории, тогда как секулярной в прямом смысле является классическая нерезонансная теория возмущений (см. § 2.2).— *Прим. ред.*

путем канонического преобразования к специальным (резонансным) переменным. Такое преобразование можно наглядно представить себе как переход во «вращающуюся» в фазовом пространстве систему отсчета. При этом новые переменные описывают медленные фазовые колебания на резонансе, центр которого соответствует неподвижной эллиптической точке на новой фазовой плоскости [1]). Такая техника применялась ранее в нелинейной теории движения частиц в ускорителях (см. [255], где приведена также дополнительная литература) и при изучении электронного циклотронного резонанса в магнитной ловушке [367]. Этот метод близок к использованному Чириковым в работе [67] [2]). После устранения резонансных знаменателей применяются описанные выше (§ 2.3) методы усреднения по быстрой фазе. В дальнейшем рассматривается автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы. Обобщение на неавтономные системы не представляет труда путем введения расширенного фазового пространства (см. § 1.2).

Если возмущение достаточно велико, то появляются вторичные резонансы, которые могут в свою очередь изменить или разрушить интегралы первичных резонансов, вычисленные в п. 2.4а. Малые знаменатели вторичных резонансов можно устранить аналогично тому, как это делается для первичных резонансов (п. 2.4б). Механизм, с помощью которого вторичные резонансы разрушают интегралы первичных резонансов, повторяет механизм разрушения невозмущенных интегралов первичными резонансами; он составляет основу методов анализа перехода от регулярного движения к хаотическому в гамильтоновых системах (гл. 4).

В качестве иллюстрации в п. 2.4в рассмотрен резонанс между волной и частицей, который описан ранее в п. 2.2б. Отыскивается резонансный интеграл движения и демонстрируется влияние вторичных резонансов. Все это поясняется с помощью некоторых результатов численного моделирования.

Преобразование к резонансным переменным — не единственный способ описания топологических изменений адиабатического инварианта вблизи резонанса. Имеется определенная свобода выбора инварианта, так как если J — инвариант невозмущенной системы, то и любая функция $I(J)$ тоже инвариант. Выбирая $dI/dJ=0$ вблизи резонансных значений J, можно учесть изменения в топологии возмущенной системы. Этот метод, разработанный Дуннетом и др. [111] (метод ДЛТ), описан в п. 2.4г и иллюстрируется на том же примере резонанса волна—частица.

---

[1]) Возможность устранения резонансных знаменателей связана с учетом нелинейности, точнее, неизохронности колебаний (зависимости их частоты от амплитуды); см. ниже в этом параграфе и п. 3.2а.— *Прим. ред.*

[2]) Подобные методы использовались во многих работах (см., например, [33, 232, 469]).— *Прим. ред.*

* 2.4а. Устранение резонансных знаменателей

Рассмотрим гамильтониан

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta), \tag{2.4.1}$$

где H_0 описывает интегрируемую систему, а H_1 является периодической функцией θ:

$$H_1 = \sum_{l,\, m} H_{l,m}(J)\, e^{in\cdot\theta}. \tag{2.4.2}$$

Здесь $n = (l, m)$ — целочисленный вектор. Если между невозмущенными частотами имеется резонансное соотношение

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r}{s}, \tag{2.4.3}$$

где r, s — целые числа и

$$\omega_1(J) = \frac{\partial H_0}{\partial J_1}, \qquad \omega_2(J) = \frac{\partial H_0}{\partial J_2}, \tag{2.4.4}$$

то попытка найти решение с помощью теории возмущений, описанной в § 2.2 и 2.3, приводит к малым резонансным знаменателям. Будем считать, что условие (2.4.3) относится либо к первичному резонансу в системе, либо ко вторичному резонансу с фазовыми колебаниями на первичном резонансе. В обоих случаях резонансные знаменатели можно устранить с помощью преобразования, которое исключает одну из переменных действия J_1 или J_2. Выберем производящую функцию

$$F_2 = (r\theta_1 - s\theta_2)\,\tilde{J}_1 + \theta_2\tilde{J}_2, \tag{2.4.5}$$

которая задает каноническое преобразование от J, θ к $\tilde{J}$, $\tilde{\theta}$:

$$J_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1} = r\tilde{J}_1, \tag{2.4.6а}$$

$$J_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2} = \tilde{J}_2 - s\tilde{J}_1, \tag{2.4.6б}$$

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{J}_1} = r\theta_1 - s\theta_2, \tag{2.4.6в}$$

$$\tilde{\theta}_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{J}_2} = \theta_2. \tag{2.4.6г}$$

Скорость изменения новой резонансной переменной

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = r\dot{\theta}_1 - s\dot{\theta}_2 \tag{2.4.7}$$

характеризует медленные отклонения от резонанса.

При использовании производящей функции вида (2.4.5) имеется произвол в том, какую из исходных фазовых переменных оставить

неизменной. Предположим, что $\dot{\theta}_2$ — наименьшая из двух частот, и примем $\tilde{\theta}_2 = \theta_2$, тогда усреднение гамильтониана по быстрой фазовой переменной после преобразования будет проводиться по более медленной из исходных фазовых переменных. Такой выбор особенно удобен, если предстоит устранять знаменатели резонансов высших порядков, так как в последних остается при этом более низкая гармоника [1]).

Применяя преобразование (2.4.6) к гамильтониану (2.4.1) и используя (1.2.13в), находим

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0(\tilde{\boldsymbol{J}}) + \varepsilon \tilde{H}_1(\tilde{\boldsymbol{J}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}), \tag{2.4.8}$$

$$\tilde{H}_1 = \sum_{l,\, m} H_{l,\, m}(\tilde{\boldsymbol{J}}) \exp\left\{\frac{i}{r}\left[l\tilde{\theta}_1 + (ls + mr)\tilde{\theta}_2\right]\right\}. \tag{2.4.9}$$

Для получения преобразованного гамильтониана первого порядка можно, как и в § 2.3, усреднить по переменной $\tilde{\theta}_2$ [ср. (2.3.17)], что дает

$$\overline{H} = \overline{H}_0(\tilde{\boldsymbol{J}}) + \varepsilon \overline{H}_1(\tilde{\boldsymbol{J}}, \tilde{\theta}_1), \tag{2.4.10}$$

$$\overline{H}_0 = \tilde{H}_0(\tilde{\boldsymbol{J}}), \tag{2.4.11}$$

$$\overline{H}_1 = \left\langle \tilde{H}_1(\tilde{\boldsymbol{J}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \right\rangle_{\tilde{\theta}_2} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{-pr,\, ps}(\tilde{\boldsymbol{J}})\, e^{-ip\tilde{\theta}_1}. \tag{2.4.12}$$

Это усреднение справедливо вблизи резонанса, где $\dot{\tilde{\theta}}_2 \gg \dot{\tilde{\theta}}_1$. Так как $\overline{H}$ не зависит от $\tilde{\theta}_2$, то

$$\tilde{J}_2 = \tilde{I}_{20} = \text{const}. \tag{2.4.13}$$

Это — первый член ряда, представляющего адиабатический инвариант для гамильтониана (2.4.8). Из (2.4.6б) видно, что $\tilde{J}_2$ является комбинацией инвариантов невозмущенной системы:

$$\tilde{J}_2 = J_2 + \frac{s}{r} J_1 = \text{const}. \tag{2.4.14}$$

Таким образом, введение резонансных переменных позволило в явном виде найти новый инвариант системы вблизи резонанса. Однако для резонанса высокого порядка, когда $s \gg r$, новый инвариант $\tilde{J}_2$ просто пропорционален исходному инварианту J_1. Сле-

---

[1]) Это замечание непонятно и несущественно для дальнейшего. Конечный результат не должен зависеть от выбора переменной $\tilde{\theta}_2$, в качестве которой, кстати, можно взять и любую комбинацию θ_1, θ_2, линейно независимую от $\tilde{\theta}_1$.— *Прим. ред.*

довательно, существенны только резонансы низких гармоник [1]).

Поскольку $\tilde{J}_2 = \text{const}$, то движение, определяемое гамильтонианом (2.4.10) в переменных $\tilde{J}_1$, $\tilde{\theta}_1$, имеет фактически одну степень свободы и, следовательно, интегрируемо. Неподвижные точки $\tilde{J}_{10}$, $\tilde{\theta}_{10}$ на фазовой плоскости $\tilde{J}_1$, $\tilde{\theta}_1$, соответствующие периодическим решениям для возмущенного гамильтониана, находятся из условия

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial \tilde{J}_1} = 0, \qquad \frac{\partial \overline{H}}{\partial \tilde{\theta}_1} = 0. \tag{2.4.15}$$

Для невозмущенного гамильтониана периодические решения при резонансном значении $\boldsymbol{J}$ (2.4.3) вырождены по $\boldsymbol{\theta}$, т. е. существуют для всех $\boldsymbol{\theta}$. Возмущение снимает вырождение и оставляет только периодические решения, удовлетворяющие (2.4.15) (см. также обсуждение теоремы Пуанкаре — Биркгофа в п. 3.2б).

Обычно амплитуды Фурье $H_{-pr,\,ps}$ быстро убывают с ростом p. Поэтому интегрируемое движение в переменных $\tilde{J}_1$, $\tilde{\theta}_1$ можно описать с хорошей точностью, удерживая лишь члены с $p = 0, \pm 1$:

$$\overline{H} = \tilde{H}_0(\tilde{\boldsymbol{J}}) + \varepsilon H_{0,0}(\tilde{\boldsymbol{J}}) + 2\varepsilon H_{r,-s}(\tilde{\boldsymbol{J}}) \cos \tilde{\theta}_1, \tag{2.4.16}$$

где принято $H_{-r,\,s} = H_{r,\,-s}$, что всегда можно обеспечить тривиальной заменой $\tilde{\theta}_1 \to \tilde{\theta}_1 + \text{const}$.

Применяя (2.4.15) к гамильтониану (2.4.16), получаем

$$\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{J}_1} + \varepsilon \frac{\partial H_{0,0}}{\partial \tilde{J}_1} + 2\varepsilon \frac{\partial H_{r,-s}}{\partial \tilde{J}_1} \cos \tilde{\theta}_1 = 0, \tag{2.4.17}$$

$$-2\varepsilon H_{r,-s} \sin \tilde{\theta}_1 = 0. \tag{2.4.18}$$

Из (2.4.18) следует существование двух неподвижных точек $\tilde{\theta}_{10} = 0$ и $\tilde{\theta}_{10} = \pi$. При точном резонансе [2])

$$\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{J}_1} = r \frac{\partial H_0}{\partial J_1} - s \frac{\partial H_0}{\partial J_2} = r\omega_1 - s\omega_2 = 0 \tag{2.4.19}$$

и уравнение (2.4.17), определяющее $\tilde{J}_{10}$, принимает вид

$$\frac{\partial H_{0,0}}{\partial \tilde{J}_1} \pm 2 \frac{\partial H_{r,-s}}{\partial \tilde{J}_1} = 0, \tag{2.4.20}$$

где положительный знак соответствует $\tilde{\theta}_{10} = 0$, а отрицательный — $\tilde{\theta}_{10} = \pi$.

---

[1]) Это замечание справедливо, но по другой причине: обычно, хотя и не всегда, резонансы высших гармоник очень слабые и соответственно область резонанса с измененной топологией инвариантных поверхностей оказывается узкой по переменным действия [см. (2.4.31)].— *Прим. ред.*

[2]) Отметим, что условие точного резонанса по невозмущенным частотам (2.4.19) совместимо с (2.4.15), вообще говоря, лишь в нулевом порядке по ε [см. (2.4.17)].— *Прим. ред.*

Рассмотрим два случая.

1. Резонанс в невозмущенной системе имеет место только при некоторых значениях J_1 и J_2. Такая система (и ее гамильтониан H_0) называется *невырожденной* [1]). Это наиболее типичный случай, при котором невозмущенный гамильтониан после преобразования зависит от обеих переменных действия

$$\widetilde{H}_0 = \widetilde{H}_0(\widetilde{J}_1, \widetilde{J}_2). \tag{2.4.21}$$

2. Условие резонанса (2.4.3) выполняется для любых J_1, J_2. Такая система называется *вырожденной* [2]). Очевидно, что в этом случае

$$H_0 = H_0(sJ_1 + rJ_2), \tag{2.4.22}$$

и после преобразования (2.4.6а), (2.4.6б)

$$\widetilde{H}_0 = \widetilde{H}_0(\widetilde{J}_2), \tag{2.4.23}$$

т. е. $\widetilde{H}_0$ не зависит от $\widetilde{J}_1$. Вырождение по отношению к одному из первичных резонансов довольно часто встречается в физических системах [3]), представляющих интерес. Однако этого почти никогда не происходит по отношению ко вторичным резонансам в силу очень сложной зависимости их частот от переменных действия. Особенности вырожденных систем рассматривались Егером и Лихтенбергом [212] и Израйлевым [207] [4]).

Невырожденный случай. Из гамильтониана (2.4.16) с учетом (2.4.21) получаем оценки

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{J}} &\sim \varepsilon H_{r,-s}, \\ \dot{\widetilde{\theta}} &\sim 1, \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

откуда следует, что (2.4.16) можно разложить в окрестности неподвижной точки по переменной $\widetilde{J}_1$ (но не по $\widetilde{\theta}_1$). Обозначая

$$\Delta\widetilde{J}_1 = \widetilde{J}_1 - \widetilde{J}_{10}, \tag{2.4.25}$$

имеем

$$\overline{H}_0(\widetilde{\boldsymbol{J}}) = \widetilde{H}_0(\widetilde{\boldsymbol{J}}_0) + \frac{\partial\widetilde{H}_0}{\partial\widetilde{J}_1}\Delta\widetilde{J}_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\widetilde{H}_0}{\partial\widetilde{J}_1^2}(\Delta\widetilde{J}_1)^2 + \ldots \tag{2.4.26}$$

---

[1]) В оригинале — accidentally degenerate (случайно вырожденная). Этот термин используется в отечественной литературе в совершенно ином смысле, соответствующем случаю 2, рассмотренному ниже.— *Прим. перев.*

[2]) В оригинале — intrinsically degenerate (внутренне вырожденная).— *Прим. перев.*

[3]) Например, в случае линейных невозмущенных колебаний. Классическим примером вырождения для нелинейной системы является задача Кеплера (см. п. 1.3в).— *Прим. ред.*

[4]) Любопытные эффекты вырождения рассмотрены также в работах [134, 470].— *Прим. ред.*

Вторым членом в правой части (2.4.26) можно пренебречь в силу (2.4.19). Подставляя (2.4.26) в (2.4.16), опуская постоянную и удерживая лишь члены низшего порядка по ε и $\Delta\tilde{J}_1$, находим гамильтониан, описывающий движение вблизи резонанса

$$\Delta\overline{H} = \frac{1}{2} G(\Delta\tilde{J}_1)^2 - F\cos\tilde{\theta}_1, \tag{2.4.27}$$

здесь G — *параметр нелинейности*

$$G(\tilde{\boldsymbol{J}}_0) = \frac{\partial^2 \tilde{H}_0}{\partial \tilde{J}_1^2}, \tag{2.4.28}$$

а

$$F(\tilde{\boldsymbol{J}}_0) = -2\varepsilon H_{r,-s}(\tilde{\boldsymbol{J}}_0). \tag{2.4.29}$$

Этот примечательный результат показывает, что *движение вблизи любого резонанса* [1]) *подобно движению маятника* с его колебаниями вращением и сепаратрисой. Приближение (2.4.27) использовалось Чириковым [70] и другими авторами для описания типичного поведения гамильтоновых систем вблизи резонанса; оно же является основой нашего подхода при изучении хаотического движения в окрестности сепаратрисы резонанса. Гамильтониан (2.4.27) дает в некотором смысле универсальное описание движения вблизи резонанса, поэтому мы будем иногда называть $\Delta\overline{H}$ *стандартным гамильтонианом*.

Перестройка движения под действием возмущения вблизи резонанса иллюстрируется на рис. 2.8, *а*. При $GF>0$ устойчивая и неустойчивая неподвижные точки расположены при $\tilde{\theta}_1 = 0$ и $\tilde{\theta}_1 = \pi$ соответственно. Частота колебаний вблизи устойчивой неподвижной точки (центр резонанса) мала:

$$\tilde{\omega}_1 = (FG)^{1/2} \sim (\varepsilon H_{r,-s})^{1/2}. \tag{2.4.30}$$

Эта частота уменьшается вплоть до нуля при приближении к сепаратрисе, оставаясь все время много меньше частоты $\dot{\theta}_2$, которая по порядку величины равна единице. Максимальное отклонение $\Delta\tilde{J}_{1\,\text{макс}}$ мало, происходит на сепаратрисе (при $\tilde{\theta}_1 = 0$) и равно половине ее ширины

$$\Delta\tilde{J}_{1\,\text{макс}} = 2\left(\frac{F}{G}\right)^{1/2} \sim (\varepsilon H_{r,-s})^{1/2}. \tag{2.4.31}$$

---

[1]) Правильнее было бы сказать — типичного резонанса, поскольку «приближение маятника» (2.4.27) справедливо все же лишь при определенных условиях — так называемой умеренной нелинейности, во-первых [см. (3.2.36)], и малости кратных гармоник, во-вторых (противоположный пример см. в работе [471], § 4.2). — *Прим. ред.*

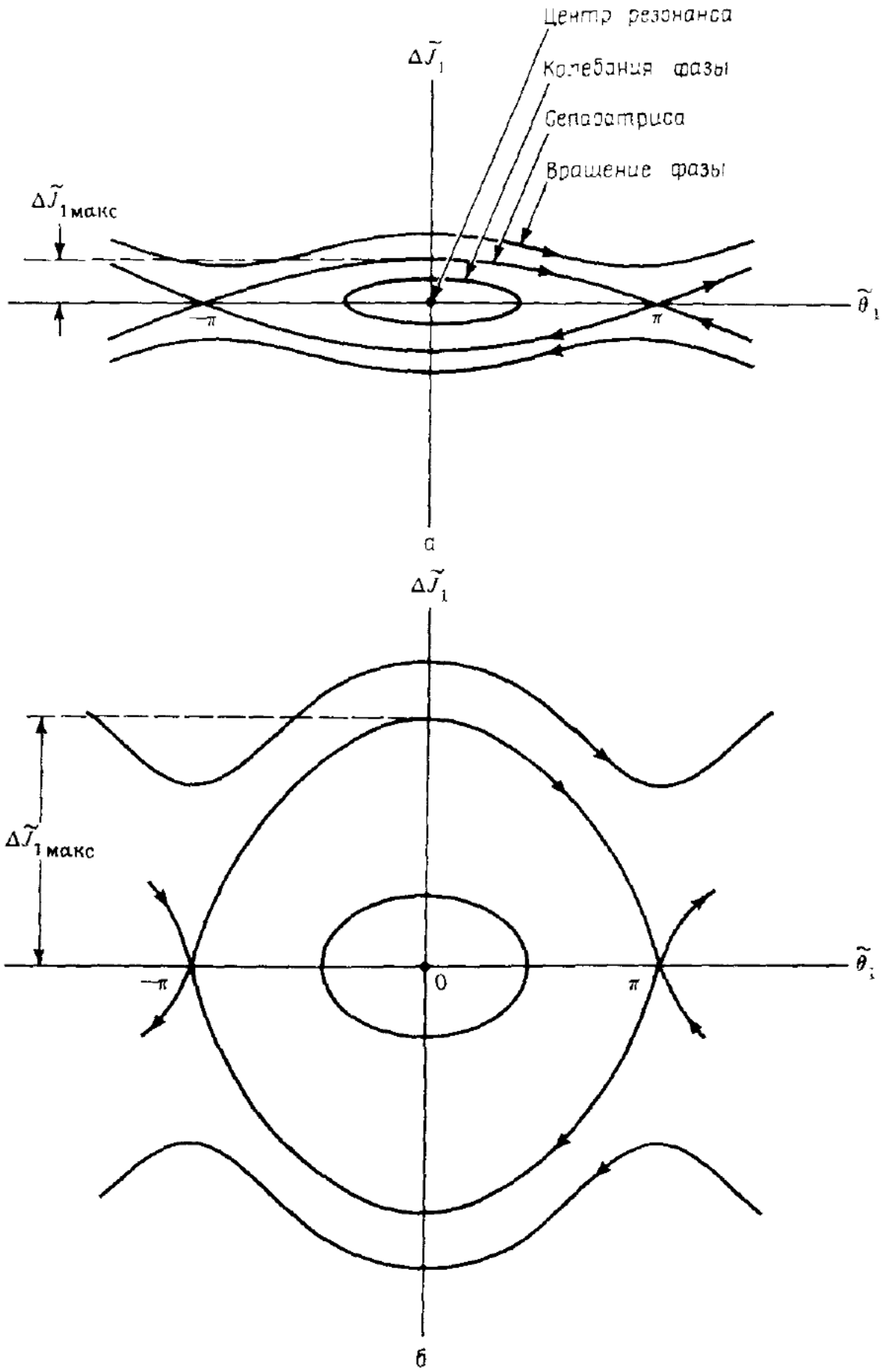


Рис. 2.8. Фазовые траектории вблизи резонанса.

а — невырожденный случай; полуширина резонанса $\Delta\tilde{J}_{1\,макс}$ и частота фазовых колебаний $\tilde{\omega}_1$ малы ($\sim \varepsilon^{1/2}$); б — вырожденный случай; ширина резонанса порядка единицы, а частота порядка ε.

Вблизи центра резонанса фазовые траектории являются эллипсами с отношением полуосей

$$\frac{\Delta\tilde{J}_1}{\Delta\tilde{\theta}_1}=\left(\frac{F}{G}\right)^{1/2}\sim(\varepsilon H_{r,-s})^{1/2}. \tag{2.4.32}$$

Для полного решения задачи следовало бы выполнить преобразование к переменным действие — угол медленных колебаний (или вращения). Однако такое преобразование необходимо по существу лишь при учете вторичных резонансов и мы отложим его до п. 2.4б.

Вырождение. Действуя, как и в предыдущем случае, но учитывая независимость гамильтониана $\tilde{H}_0$ от $\tilde{J}_1$ [см. (2.4.23)], вместо (2.4.24) получаем оценки

$$\dot{\tilde{J}}_1\sim\varepsilon H_{r,-s},\qquad \dot{\tilde{\theta}}_1\sim\varepsilon H_{0,0}\sim\varepsilon H_{r,-s}, \tag{2.4.33}$$

из которых следует, что отклонение по $\tilde{J}_1$ и $\tilde{\theta}_1$ одного порядка, поэтому нельзя разлагать гамильтониан (2.4.16) только по $\tilde{J}_1$, как это было сделано выше. В общем случае для анализа движения системы (2.4.16) можно перейти к новым переменным действие—угол (см. п. 1.3а). Выясним сначала общий характер движения, разлагая гамильтониан (2.4.16) в окрестности центра резонанса $\tilde{\theta}_1=0$ по степеням $\Delta\tilde{J}_1$ и $\Delta\tilde{\theta}_1=\tilde{\theta}_1$ до квадратичных членов. Имеем

$$H_{0,0}(\tilde{J})=H_{0,0}(\tilde{J}_0)+\frac{\partial H_{0,0}}{\partial\tilde{J}_1}(\Delta\tilde{J}_1)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{0,0}}{\partial\tilde{J}_1^2}(\Delta\tilde{J}_1)^2+\ldots, \tag{2.4.34}$$

$$H_{r,-s}(\tilde{J})=H_{r,-s}(\tilde{J}_0)+\frac{\partial H_{r,-s}}{\partial\tilde{J}_1}(\Delta\tilde{J}_1)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{r,-s}}{\partial\tilde{J}_1^2}(\Delta\tilde{J}_1)^2+\ldots, \tag{2.4.35}$$

$$\cos\tilde{\theta}_1=1-\frac{1}{2}(\Delta\tilde{\theta}_1)^2+\ldots. \tag{2.4.36}$$

Линейные по $\Delta\tilde{J}_1$ члены выпадают в силу (2.4.20); опуская постоянные, мы приходим к гамильтониану гармонического осциллятора

$$\Delta\overline{H}=\frac{1}{2}G(\Delta\tilde{J}_1)^2+\frac{1}{2}F(\Delta\tilde{\theta}_1)^2, \tag{2.4.37}$$

где

$$G=\frac{\partial^2\tilde{H}_0}{\partial\tilde{J}_1^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 H_{0,0}}{\partial\tilde{J}_1^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 H_{r,-s}}{\partial\tilde{J}_1^2}, \tag{2.4.38}$$

$$F=-2\varepsilon H_{r,-s}. \tag{2.4.39}$$

Но при вырождении первый член в (2.4.38) равен нулю, поэтому как G, так и F оказываются величинами порядка ε. Частота малых колебаний вблизи центра резонанса равна

$$\tilde{\omega}_1 = (GF)^{1/2} \sim \varepsilon, \tag{2.4.40}$$

а отношение полуосей эллипса —

$$\frac{\Delta \tilde{J}_1}{\Delta \tilde{\theta}_1} = \left(\frac{F}{G}\right)^{1/2} \sim 1. \tag{2.4.41}$$

Вблизи центра резонанса вырождение определяется соотношением (2.4.38) и происходит при уменьшении первого слагаемого до нуля.

Аналогичным образом вблизи неустойчивой неподвижной точки $\tilde{\theta}_1 = \pm \pi$ получаются гиперболические фазовые траектории с асимптотами, наклоненными к оси $\tilde{\theta}_1$ под углами $\pm \chi$, где

$$\operatorname{tg} \chi = \left(\frac{F}{G}\right)^{1/2}. \tag{2.4.42}$$

Поведение вырожденной системы иллюстрируется на рис. 2.8, *б*. Грубо говоря, оно похоже на невырожденное, если только $G \neq 0$. Различия между ними, существенные для отображений и теории КАМ, обсуждаются в п. 3.2а; там же кратко рассмотрен особый случай $G = 0$. Вообще говоря, характерная для вырождения слабая нелинейность приводит к сложному поведению системы, тогда как невырожденный случай оказывается обычно более простым для анализа.

* 2.4б. Вторичные резонансы

Если возмущение ε не очень мало, то существенную роль играют вторичные резонансы [см. (2.4.9)], которые изменяют или разрушают адиабатический инвариант $\tilde{J}_2$. Это резонансы между гармониками фазовых колебаний на первичном резонансе (п. 2.4а) и невозмущенными колебаниями основной частоты ω_2. В адиабатическом пределе их структура показана на рис. 2.9, *а*. Устранение малых знаменателей вторичных резонансов можно провести по общей схеме п. 2.4а, хотя здесь имеются, как будет видно ниже, некоторые дополнительные особенности. Начнем с усредненного гамильтониана (2.4.10), в который необходимо ввести новые переменные действие — угол (I_1, φ_1) для фазовых колебаний. Вместо решения уравнения Гамильтона—Якоби (1.2.50) исследуем, как и в п. 2.2а, движение в окрестности центра резонанса с помощью теории возмущений. Обозначим через K_0 преобразованный гамильтониан и, следуя логике принятых обозначений, будем писать I_2

вместо $\tilde{J}_2$. В приближении (2.4.16) из (2.2.23) сразу же получаем

$$K_0(I_1, I_2) = \tilde{H}_0(\tilde{I}_{10}, I_2) + \tilde{\omega}_1 I_1 - \frac{\varepsilon}{16} G I_1^2 + \ldots, \quad (2.4.43)$$

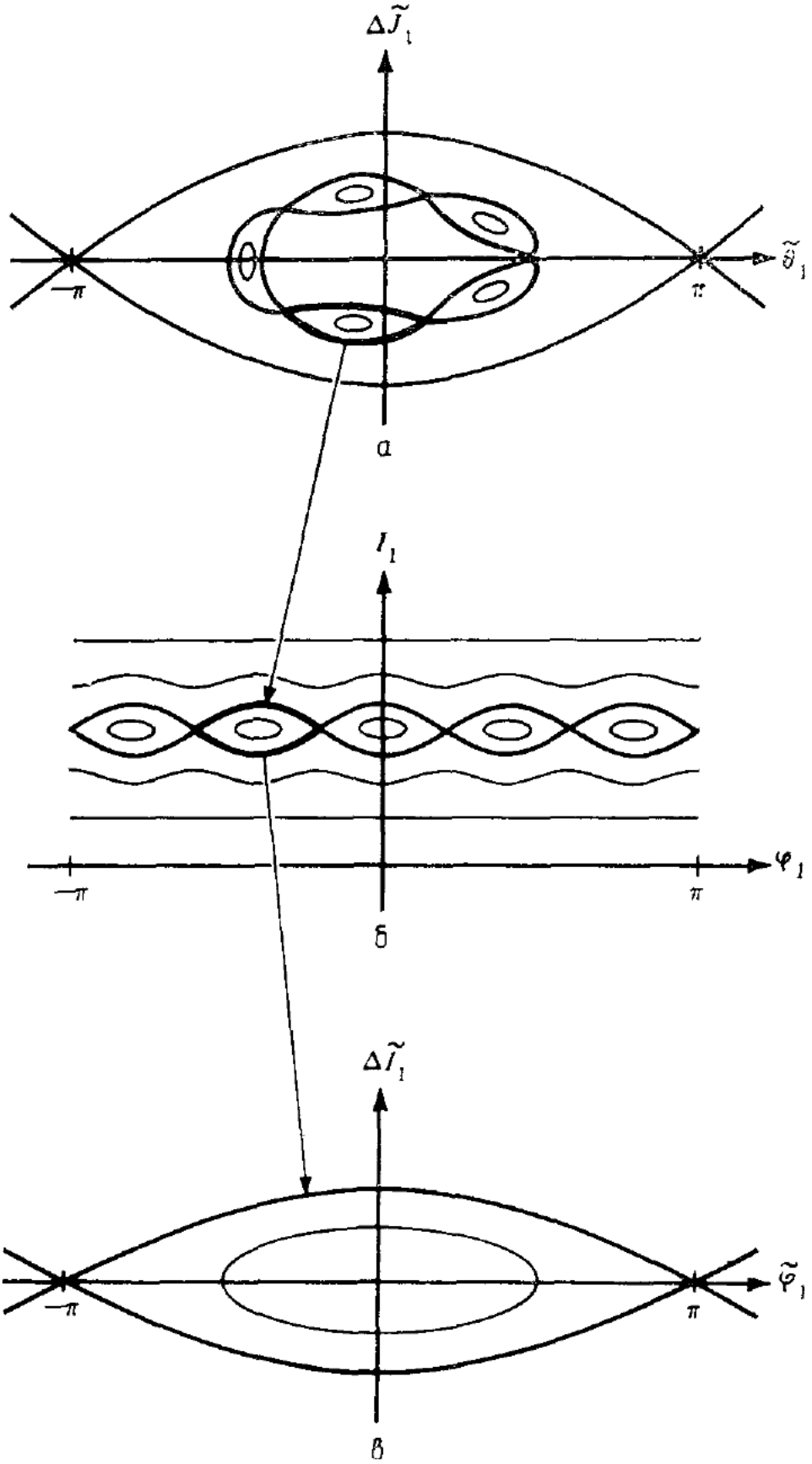


Рис. 2.9. Фазовые траектории вблизи вторичного резонанса.

а — вторичный резонанс $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$ в переменных $\tilde{J}_1$, $\tilde{\theta}_1$; *б* — преобразование к переменным действие — угол I_1, φ_1 невозмущенных фазовых колебаний на первичном резонансе; *в* — преобразование к резонансным переменным вторичного резонанса.

где G и $\tilde{\omega}_1$ — функции I_2, определяемые выражениями (2.4.38) и (2.4.40). Если усреднение по $\tilde{\theta}_2$ справедливо, то разложение (2.4.43) является формальным решением задачи. Оно не зависит от угловых переменных, и, следовательно, существуют два интеграла движения: $I_2 = \tilde{J}_2$ и I_1. Преобразование к переменным I_1, φ_1 показано на рис. 2.9, *б*.

Чтобы учесть эффект вторичного резонанса, восстановим член $\tilde{H}_1'$, отброшенный при усреднении по $\tilde{\theta}_2$:

$$\tilde{H}_1'(\tilde{\boldsymbol{J}},\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \tilde{H}_1(\tilde{\boldsymbol{J}},\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \overline{H}_1(\tilde{\boldsymbol{J}},\tilde{\boldsymbol{\theta}}). \tag{2.4.44}$$

Представим его в виде ряда Фурье

$$\tilde{H}_1' = \sum_{l,m}{}' H_{l,m}(\tilde{\boldsymbol{J}}) \exp\left[i\frac{l}{r}\tilde{\theta}_1 + i\left(l\frac{s}{r}+m\right)\tilde{\theta}_2\right], \tag{2.4.45}$$

где штрих означает, что член с $ls + mr = 0$ из суммы исключен. В окрестности центра резонанса ($\tilde{\theta}_{10} = 0$)

$$\tilde{H}_1' = \sum_{l,m}{}' H_{l,m}(\tilde{J}_{10} + \Delta\tilde{J}_1, \tilde{J}_2) \exp\left[i\frac{l}{r}\Delta\tilde{\theta}_1 + i\left(l\frac{s}{r}+m\right)\tilde{\theta}_2\right]. \tag{2.4.46}$$

Преобразуя это возмущение к переменным действие — угол низшего порядка, т. е. для линейных колебаний переменных $\Delta\tilde{J}_1$, $\Delta\tilde{\theta}_1$ [см. (1.2.68)], и обозначая $\tilde{\theta}_2$ через φ_2, находим

$$K_1 = \sum_{l,m}{}'' H_{l,m}(\tilde{J}_{10}, I_2) \exp\left[i\left(l\frac{s}{r}+m\right)\varphi_2\right] \exp\left[i\frac{l}{r}\left(\frac{2I_1}{R}\right)^{1/2}\sin\varphi_1\right], \tag{2.4.47}$$

где $R = (F/G)^{1/2}$. Мы рассматриваем невырожденный случай и потому пренебрегаем отклонениями $\Delta\tilde{J}_1$, считая их малыми в силу (2.4.32). Разлагая вторую экспоненту, получаем

$$K_1 = \sum_{l,m,n}{}' \Gamma_{lmn}(\tilde{J}_{10}, I) \exp\left[in\varphi_1 + i\left(l\frac{s}{r}+m\right)\varphi_2\right], \tag{2.4.48}$$

где

$$\Gamma_{lmn} = H_{l,m}(\tilde{J}_{10}, I_2)\, \mathcal{J}_n\left[\frac{l}{r}\left(\frac{2I_1}{R}\right)^{1/2}\right], \tag{2.4.49}$$

а $\mathcal{J}_n$ — функция Бесселя. Из (2.4.48) видно, что возможны ре-

зонансы между φ_2 и φ_1, поэтому усреднение по φ_2 может привести к отличному от нуля результату. Чтобы получить новый инвариант, запишем полный гамильтониан, используя (2.4.43) и (2.4.48) в виде

$$K = K_0(I_1, I_2) + \varepsilon_2 K_1(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2), \tag{2.4.50}$$

аналогичном гамильтониану (2.4.1) с некоторым новым параметром возмущения ε_2. Эта аналогия позволяет для устранения сингулярности вторичных резонансов снова использовать метод, описанный в п. 2.4а. Рассмотрим резонанс

$$\frac{\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1} = \frac{p}{q}, \tag{2.4.51}$$

где

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{\partial K_0}{\partial I_2} = \omega_2 \sim 1, \tag{2.4.52}$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\partial K_0}{\partial I_1} \sim \varepsilon^{1/2} \tag{2.4.53}$$

согласно (2.4.4) и (2.4.30). Аналогично (2.4.6) перейдем к новым переменным $\tilde{I}_1$, $\tilde{I}_2$, $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ с медленной фазой

$$\tilde{\varphi}_1 = p\,\varphi_1 - q\,\varphi_2. \tag{2.4.54}$$

Соответствующая производящая функция имеет вид

$$F_2 = (p\,\varphi_1 - q\,\varphi_2)\tilde{I}_1 + \varphi_2 \tilde{I}_2. \tag{2.4.55}$$

Усреднение (2.4.48) по быстрой фазе φ_2 с учетом (2.4.51) приводит к соотношению

$$nq + \left(l\frac{s}{r} + m\right)p = 0,$$

где ls/r — целое число. Это соотношение удовлетворяется, если в (2.4.48) оставить только слагаемые с

$$n = -jp, \quad l = kr, \quad m = jq - ks, \tag{2.4.56}$$

где j, k — любые целые числа. При $j = \pm 1$, например, p-я гармоника фазовых колебаний по φ_1 находится в резонансе с q-й гармоникой колебаний по $\varphi_2 = \tilde{\theta}_2$; резонансам более высоких гармоник отвечают значения $|j| > 1$. Выполняя усреднение для гамильтониана K, получаем

$$\overline{K} = \overline{K}_0(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2) + \varepsilon_2 \overline{K}_1(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{\varphi}_1), \tag{2.4.57}$$

$$\overline{K}_0(\tilde{I}) = K_0(I_1(\tilde{I}), I_2(\tilde{I})), \tag{2.4.58}$$

$$\overline{K}_1 = \sum_j K_{-jp,jq} e^{-ij\tilde{\varphi}_1}. \tag{2.4.59}$$

В последнем выражении амплитуда Фурье j-й гармоники колебаний по $\tilde{\varphi}_1$ равна

$$K_{-jp,jq} = \sum_k \Gamma_{kr,jq-ks,-jp}. \tag{2.4.60}$$

Поскольку $\overline{K}$ не зависит от $\tilde{\varphi}_2$, мы сразу же получаем адиабатический инвариант фазовых колебаний

$$\tilde{I}_2 = I_2 + \frac{q}{p} I_1 = \text{const} \tag{2.4.61}$$

(таким образом, фазовые колебания оказываются интегрируемыми). Сравнивая выражения (2.4.57) и (2.4.59) с (2.4.10) и (2.4.12), видим, что все результаты п. 2.4а применимы и в отношении вторичного резонанса (см. также рис. 2.9, *в*).

Амплитуда фазовых колебаний. Для оценки величины вторичного резонанса возьмем наибольший член в (2.4.60) с $|j| = 1$ и $|k| = 1$, а также положим $q = 1$, что отвечает резонансу с основной частотой невозмущенных колебаний по $\tilde{\theta}_2 = \varphi_2$. Из (2.4.49) следует, что он пропорционален функции Бесселя

$$\mathcal{J}_p\left[(2I_1/R)^{1/2}\right],$$

причем индекс p — целое число и в силу (2.4.51) имеет порядок $\varepsilon^{-1/2}$. Так как $I_{1\,\text{макс}}$ порядка R, то максимальное значение аргумента $(2I_1/R)^{1/2}$ порядка единицы. Отсюда при большом p (малом ε) функцию Бесселя можно оценить как

$$\mathcal{J}_p\left(\sqrt{\frac{2I_1}{R}}\right) \sim \frac{1}{p!}\left(\frac{I_1}{2R}\right)^{p/2} \lesssim \frac{1}{(\varepsilon^{-1/2})!}. \tag{2.4.62}$$

Из этого выражения следует, что амплитуда Фурье резонансного члена пропорциональна $I_1^{p/2}$, так что размеры резонанса быстро падают с убыванием I_1. Заменяя в формулах (2.4.30), (2.4.31) $H_{-r,s}$ на $K_{-p,q}$ и учитывая оценку (2.4.62), приходим к заключению, что амплитуда и частота колебаний $\tilde{I}_1$ меньше, чем для $\tilde{J}_1$ по крайней мере в $\left[(\varepsilon^{-1/2})!\right]^{1/2}$ раз. Явное выражение для гамильтониана вторичного резонанса будет получено в п. 2.4в.

Хотя анализ вторичных резонансов проводится аналогично анализу первичных резонансов, полученные результаты обладают некоторыми особенностями. Так, размер вторичного резонанса зависит от ε значительно сильнее, чем первичного ($\sim \varepsilon^{1/2}$), поэтому при достаточно малом ε вторичные резонансы несущественны [1]). С другой стороны, при относительно больших ε для определения границы справедливости адиабатической инвариантности вторичные

[1]) Напомним, что этот вывод, как и вышеприведенные оценки для вторичных резонансов, справедлив лишь для малых фазовых колебаний на первичном резонансе. Вблизи сепаратрисы резонанса положение существенно изменяется (см. п. 4.3б).— *Прим. ред.*

резонансы могут быть столь же важны, как и первичные резонансы.

Быстрое уменьшение размера вторичных резонансов с возмущением приводит к устойчивости движения внутри резонансов (в «островах») при умеренной величине возмущения. Более того, даже при весьма больших возмущениях, как, например, в случае на рис. 1.13, *в*, интегралы движения сохраняются не только внутри первичных, но и внутри вторичных резонансов. Следствия этой устойчивости будут более подробно рассмотрены ниже.

Описанная процедура устранения малых знаменателей вторичных резонансов в окрестности центра первичного резонанса [213] является одним из вариантов *метода ренормализации*, в котором преобразование от резонанса n-го порядка к резонансу $(n+1)$-го порядка строится таким образом, чтобы сохранить форму гамильтониана, изменяя лишь его параметры. Эта идея является основой некоторых методов анализа перехода от регулярного движения к хаотическому; эти методы анализа будут рассмотрены в гл. 4.

2.4в. Резонансное взаимодействие волны и частицы

Вернемся к примеру [в п. 2.2б — влиянию электростатической волны на движение заряженной частицы в магнитном поле. Рассмотрим случай резонанса между невозмущенным ларморовским вращением частицы и колебаниями волны. Как мы видели выше, в этом случае нельзя найти интегралы движения с помощью классической теории возмущений из-за появления резонансных знаменателей. Однако резонансная теория возмущений дает возможность устранить эти знаменатели локально. Следуя работе [267], рассмотрим две задачи: 1) волна распространяется под углом к магнитному полю ($k_z \neq 0$), что соответствует невырожденному случаю; 2) волна распространяется перпендикулярно магнитному полю ($k_z = 0$), что соответствует вырождению.

Невырожденный случай. При $k_z \neq 0$ условие резонанса (2.2.71) выполняется для различных значений m и импульса частицы P_z. Выберем определенный резонанс $m = l$ и перейдем к резонансным переменным с помощью производящей функции (2.4.5), которая для гамильтониана (2.2.67) принимает вид

$$F_2 = (\psi - l\varphi)\,\tilde{P}_\psi + \varphi\tilde{P}_\varphi. \tag{2.4.63}$$

Имеем

$$\tilde{H} = \frac{k_z^2}{2M}\,\tilde{P}_\psi^2 + \Omega\,(\tilde{P}_\varphi - l\tilde{P}_\psi) - \tilde{P}_\psi\omega + \varepsilon e\Phi_0 \sum_m \mathcal{J}_m(k_\perp\rho)\,\times$$

$$\times \sin\left[\tilde{\psi} - (m-l)\,\tilde{\varphi}\right], \tag{2.4.64}$$

где ρ — функция переменных действия. Достаточно близко от ре-

зонанса переменная $\tilde{\psi}$ изменяется медленно и можно провести усреднение по быстрой фазе φ. В результате остается единственный член с $m = l$ и усредненный гамильтониан равен

$$\overline{H} = \frac{k_z^2}{2M}\tilde{P}_\psi^2 + \Omega\left(\tilde{P}_\varphi - l\tilde{P}_\psi\right) - \tilde{P}_\psi\omega + \varepsilon e\Phi_0\mathcal{J}_l\left(k_\perp\rho\right)\sin\tilde{\psi}. \quad (2.4.65)$$

Если произвести замену $\tilde{\psi} \to \tilde{\psi} + \pi/2$, так что $\sin\tilde{\psi} \to \cos\tilde{\psi}$, то $\overline{H}$ примет вид (2.4.16). Так как $\overline{H}$ не зависит от $\tilde{\varphi}$, имеем

$$\tilde{P}_\varphi = P_\varphi + lP_\psi = \tilde{P}_{\varphi 0}. \quad (2.4.66)$$

Согласно (2.4.18) и (2.4.20), неподвижные точки соответствуют

$$\tilde{\psi}_0 = 0;\ \pi \quad (2.4.67а)$$

и

$$\frac{k_z^2}{M}\tilde{P}_\psi - l\Omega - \omega = \pm\varepsilon e\Phi_0\frac{\partial}{\partial\tilde{P}_\psi}\mathcal{J}_l\left(k_\perp\rho\right), \quad (2.4.67б)$$

где

$$\rho = \left(\frac{2}{M\Omega}\right)^{1/2}\left(\tilde{P}_\varphi - l\tilde{P}_\psi\right)^{1/2}. \quad (2.4.68)$$

Уравнение (2.4.67б) неявно определяет величину $\tilde{P}_{\psi 0}$. Линеаризуя по $\tilde{P}_\psi$ (но не по $\tilde{\psi}$), получаем гамильтониан маятника (2.4.27) с параметрами [см. (2.4.28) и (2.4.29)]

$$G = \frac{k_z^2}{M}, \quad (2.4.69)$$

$$F = -\varepsilon e\Phi_0\mathcal{J}_l\left(k_\perp\rho_0\right). \quad (2.4.70)$$

Согласно (2.4.30), частота малых колебаний равна

$$\tilde{\omega}_\psi = \left|\frac{\varepsilon e\Phi_0\mathcal{J}_l k_z^2}{M}\right|^{1/2}. \quad (2.4.71)$$

Максимальная амплитуда (на сепаратрисе) получается из (2.4.31)

$$\Delta\tilde{P}_{\psi\,\text{макс}} = \frac{2\tilde{\omega}_\psi}{G}. \quad (2.4.72)$$

Как $\tilde{\omega}_\psi$, так и $\Delta\tilde{P}_{\psi\,\text{макс}}$ пропорциональны $\varepsilon^{1/2}$. Определим с помощью (2.2.71) расстояние между соседними резонансами

$$\delta\tilde{P}_\psi = \frac{M\Omega}{k_z^2}. \quad (2.4.73)$$

Отношение удвоенной амплитуды колебаний импульса к расстоянию между резонансами равно

$$\frac{2\Delta\tilde{P}_{\psi\,\text{макс}}}{\delta\tilde{P}_\psi} = \frac{4\omega_\psi}{\Omega}. \quad (2.4.74)$$

Вырождение. Сравним полученные результаты с вырожденным случаем, когда в гамильтониане (2.4.65) $k_z \equiv 0$. Проводя разложение в окрестности центра резонанса как по $\Delta\widetilde{P}_\psi$, так и по $\Delta\widetilde{\psi}$, приходим к гамильтониану гармонического осциллятора с

$$G = \varepsilon e \Phi_0 \frac{\partial^2}{\partial \widetilde{P}_\psi^2} \mathcal{J}_l(k_\perp \rho_0), \tag{2.4.75}$$

$$F = -\varepsilon e \Phi_0 \mathcal{J}_l(k_\perp \rho_0). \tag{2.4.76}$$

Частота малых колебаний и максимальное отклонение импульса равны

$$\widetilde{\omega}_\psi = \varepsilon \left| e\Phi_0 \mathcal{J}_l \frac{\partial^2}{\partial \widetilde{P}_\psi^2} \mathcal{J}_l \right|^{1/2}, \tag{2.4.77}$$

$$\Delta\widetilde{P}_{\psi\,\text{макс}} = \frac{2\widetilde{\omega}_\psi}{G}. \tag{2.4.78}$$

Здесь ω_ψ имеет порядок ε, а $\Delta\widetilde{P}_{\psi\,\text{макс}}$ порядка единицы. Сравнивая (2.4.77) с (2.4.71) и (2.4.78) с (2.4.72), мы видим, что при вырождении частота малых колебаний в $\varepsilon^{-1/2}$ раз меньше, а максимальное отклонение импульса во столько же раз больше, чем при отсутствии вырождения.

В отличие от случая волны, распространяющейся под углом к магнитному полю, частота возмущения теперь фиксирована и равна ω, поэтому резонанс возможен с одной из гармоник частоты Ω, хотя и при разных значениях импульса $\widetilde{P}_\psi$. Действительно, подставив $k_z = 0$ в (2.4.67б), получаем уравнение

$$\omega + l\Omega \pm \varepsilon e \Phi_0 \frac{\partial}{\partial \widetilde{P}_\psi} \mathcal{J}_l(k_\perp \rho) = 0, \tag{2.4.79}$$

определяющее значение $\widetilde{P}_\psi$ для неподвижных точек. Корни этого уравнения лежат в некотором интервале значений $k_\perp \rho$. Для $\omega + l\Omega = 0$, например, их можно найти из условия

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{P}_\psi} \mathcal{J}_l(k_\perp \rho) = 0. \tag{2.4.80}$$

Если же $\omega + l\Omega = \delta\omega$, то, согласно (2.4.79), резонанс имеет место при условии

$$\left| \varepsilon e \Phi_0 \frac{\partial}{\partial \widetilde{P}_\psi} \mathcal{J}_l(k_\perp \rho) \right| = \left| \delta\omega \right|. \tag{2.4.81}$$

В рассматриваемой задаче вырождение возникает, когда направление распространения волны становится нормальным к магнит-

ному полю. Чтобы увидеть, как происходит переход, учтем члены порядка ε в выражении (2.4.38) для параметра G:

$$G = \frac{k_z^2}{M} + \varepsilon e \Phi_0 \frac{\partial^2}{\partial \widetilde{P}_\psi^2} \mathcal{J}_l(k_\perp \rho). \tag{2.4.82}$$

Вырождение наступает при

$$\frac{k_z^2}{M} \lesssim \varepsilon e \Phi_0 \left| \frac{\partial^2}{\partial \widetilde{P}_\psi^2} \mathcal{J}_l(k_\perp \rho) \right|. \tag{2.4.83}$$

Вторичные резонансы. Для получения гамильтониана вторичного резонанса, как и в п. 2.4б, перейдем к переменным I, θ для малых фазовых колебаний. При $k_z \neq 0$ находим

$$K_0(I, \widetilde{P}_\varphi) = \widetilde{\omega}_\psi I - \frac{\varepsilon^2}{16} G I^2 + \ldots, \tag{2.4.84}$$

$$\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}_0 + \left(\frac{2I}{R}\right)^{1/2} \sin\theta + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{2.4.85}$$

где G и $\widetilde{\omega}_\psi$ определяются выражениями (2.4.69), (2.4.71), а $R = (F/G)^{1/2}$. Низший порядок возмущения выражается в переменных I, θ аналогично (2.4.47)

$$K_1 = e\Phi_0 \sum_{m \neq l} \mathcal{J}_m(k_\perp \rho) \sin\left[\widetilde{\psi}_0 + \left(\frac{2I}{R}\right)^{1/2} \sin\theta - (m-l)\widetilde{\varphi}\right] =$$

$$= e\Phi_0 \sum_{n, m \neq l} \mathcal{J}_m(k_\perp \rho) \mathcal{J}_n\left[\left(\frac{2I}{R}\right)^{1/2}\right] \sin\left[\widetilde{\psi}_0 + n\theta - (m-l)\widetilde{\varphi}\right]. \tag{2.4.86}$$

Оставляя главный член суммы с $m = l + 1$, для резонанса гармоники n получаем

$$K_1 = K_n \sin(\widetilde{\psi}_0 + n\theta - \widetilde{\varphi}), \tag{2.4.87}$$

где

$$K_n = e\Phi_0 \mathcal{J}_{l+1}(k_\perp \rho) \mathcal{J}_n\left[\left(\frac{2I}{R}\right)\right]^{1/2}.$$

Перейдем к новым медленным переменным

$$\widetilde{\theta} = n\theta - \widetilde{\varphi} + \widetilde{\psi}_0 - \frac{\pi}{2}, \tag{2.4.88а}$$

$$I = n\widetilde{I}. \tag{2.4.88б}$$

Усредняя (2.4.86) по быстрой фазе $\tilde{\varphi}$, находим гамильтониан вторичного резонанса

$$\Delta\overline{K} = \frac{1}{2} G_s (\Delta\tilde{I})^2 - F_s \cos\tilde{\theta}, \tag{2.4.89}$$

где для G_s и F_s с помощью формул (2.4.84) и (2.4.87) при $\varepsilon \equiv 1$ имеем

$$G_s = -\frac{G}{8} n^2, \tag{2.4.90а}$$

$$F_s = -K_n. \tag{2.4.90б}$$

Частота малых колебаний и максимальное отклонение импульса аналогично предыдущему равны

$$\tilde{\omega}_s = (F_s G_s)^{1/2}, \tag{2.4.91}$$

$$\Delta\tilde{I}_{\text{макс}} = \frac{2\tilde{\omega}_s}{G_s}. \tag{2.4.92}$$

Расстояние $\delta\tilde{I}$ между соседними вторичными резонансами (гармоники n и $n+1$) можно найти, используя (2.4.88б) и соотношения

$$n\tilde{\omega}_\psi - \Omega = 0, \quad (n+1)\left(\tilde{\omega}_\psi + \frac{G_s \delta\tilde{I}}{n}\right) - \Omega = 0, \tag{2.4.93}$$

откуда (при $n \gg 1$)

$$\delta\tilde{I} = \frac{\tilde{\omega}_\psi}{G_s}. \tag{2.4.94}$$

С помощью выражения (2.4.92) для $\Delta\tilde{I}_{\text{макс}}$ получаем для вторичного резонанса

$$\frac{2\Delta\tilde{I}_{\text{макс}}}{\delta\tilde{I}} = \frac{4\omega_s}{\tilde{\omega}_\psi}, \tag{2.4.95}$$

что совпадает по форме с аналогичным соотношением (2.4.74) для первичного резонанса. По индукции заключаем, что это отношение сохраняет свой вид и для резонансов более высоких уровней (третичных и так далее), т. е. оно является универсальным. Заметим, что вторичным и более высокого уровня резонансам отвечают невырожденные гамильтонианы.

Численные эксперименты. Детальные численные исследования были выполнены Смитом и Кауфманом [385, 386] для невырожденного случая (косая волна) и Карни, Берсом, Фукуямой и др. [222, 220, 145] для вырожденного случая (перпендикулярная волна).

Для косой волны Смит и Кауфман исследовали движение вблизи резонансов с $l = k_z v_z/\Omega = -1;\ 0;\ 1$ в системе отсчета волны ($\omega = 0$). Они выбрали $k_\perp (2E/M)^{1/2}/\Omega = 1{,}48$, где E дается выраже-

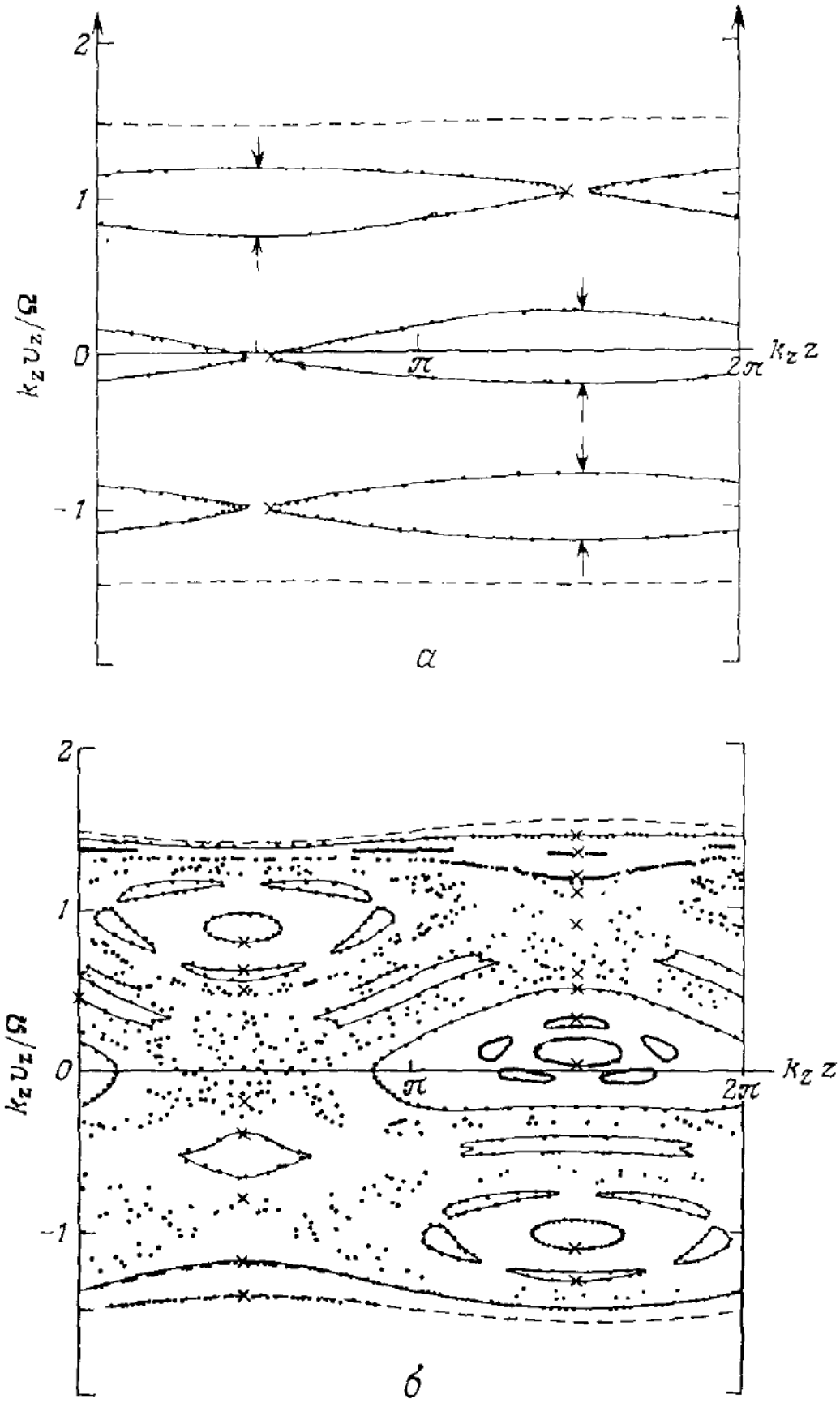


Рис. 2.10. Поверхность сечения в переменных $k_z v_z/\Omega \propto P_\psi$ и $k_z z = \psi$ в случае взаимодействия частицы с косой ($k_z \neq 0$) волной (численное моделирование) (по данным работы [385]).

а — слабое возмущение $\left(\widetilde{\Phi} = k_z^2 e \Phi_0 / M\Omega^2 = 0{,}025\right)$; *б* — сильное возмущение ($\widetilde{\Phi} = 0{,}1$). Численные результаты представлены точками, которые соединены от руки сплошными линиями (для регулярных траекторий). Начальные условия отмечены крестиками. Видны три резонанса.

нием (2.2.66) при $\omega \equiv 0$, $\varepsilon \equiv 1$ и $k_z = k_\perp$, что обеспечивает близкое к максимальному значение функции Бесселя $\mathcal{J}_l(k_\perp \rho)$. Их результаты для зависимости v_z ($\propto P_\psi$) от ψ приведены на рис. 2.10, *а*

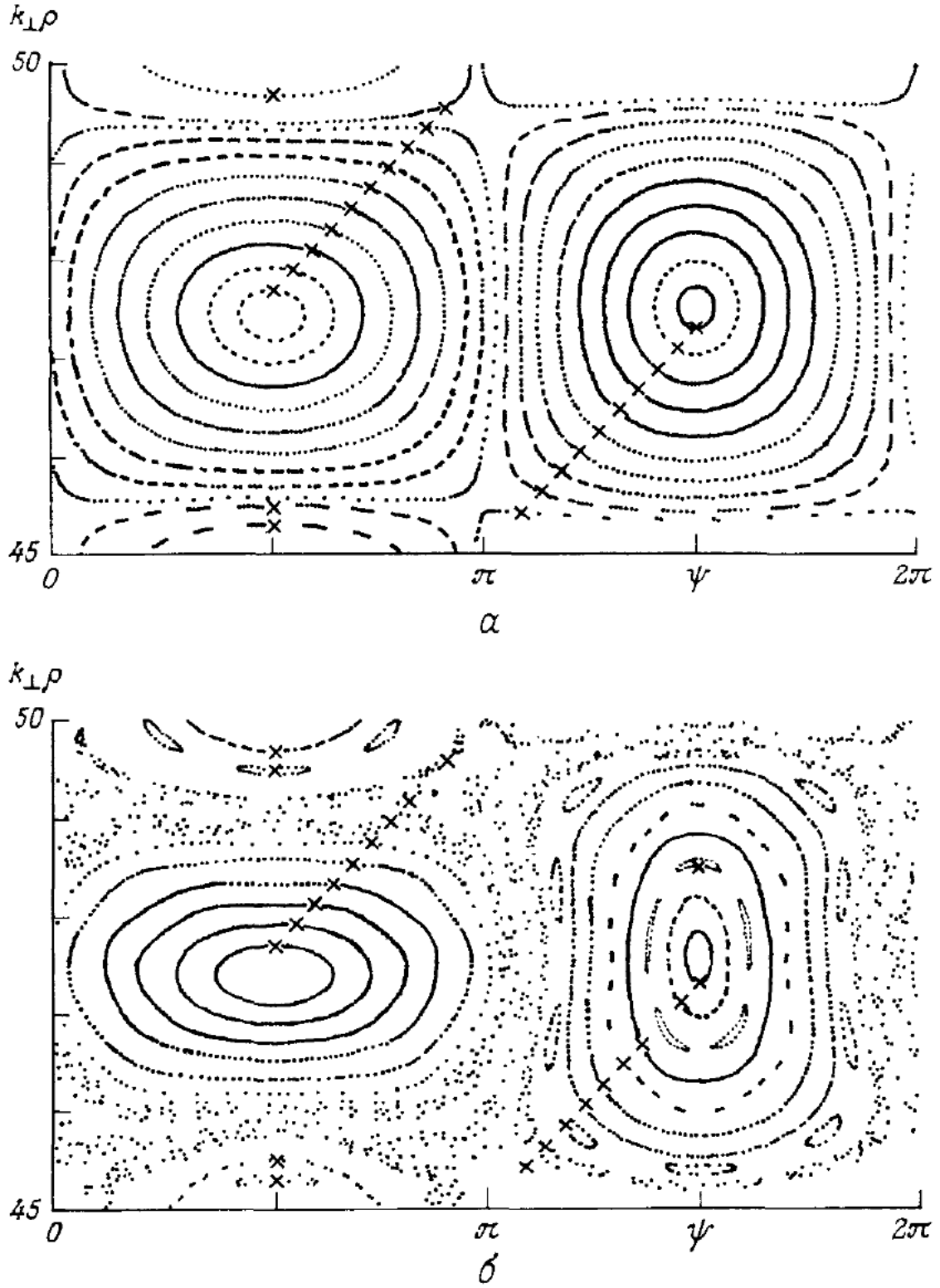


Рис. 2.11. То же, что и на рис. 2.10 для $k_z = 0$ и $\omega/\Omega = -30$ (по данным работы [219]).

а — слабое возмущение; *б* — более сильное возмущение.

и *б* при $k_z^2 e\Phi_0/M\Omega^2 = 0{,}025$ и $0{,}1$ соответственно. На рис. 2.10, *а* видны первичные резонансы, относительная частота малых фазовых колебаний которых равна $\tilde{\omega}_\psi/\Omega = 1/10$, что согласуется с формулой (2.4.71). Вторичные резонансы в этом случае слишком малы и поэтому неразличимы. На рис. 2.10, *б* видны вторичные резо-

нансы пятой гармоники, т. е. с частотой $\tilde{\omega}_\psi/\Omega = 1/5$, что опять согласуется с (2.4.71). Размеры вторичных резонансов можно приблизительно вычислить из соотношения (2.4.92). Разбросанные в окрестности сепаратрис резонансов $l = -1$ и $l = 0$ точки представляют стохастические траектории (см. § 1.4). Решения, полученные в данной главе с помощью метода усреднения, совершенно не отражают стохастическое поведение. Обратим также внимание на резонансы второй гармоники, расположенные между областями главных резонансов; это явление обсуждается в последующих главах.

Сопоставим эти результаты с тем, что получается в случае перпендикулярной волны, который численно исследован Карни [219]. На рис. 2.11, *а* и *б* приведены его результаты для поверхности сечения $\varphi = \pi$ при $l = -30$. Относительная частота малых фазовых колебаний первичного резонанса $\alpha = \tilde{\omega}_\psi/\Omega \approx 1/9$ для меньшего возмущения и $\alpha \approx 1/5$ для большего. В первом случае инвариантные кривые почти совпадают с полученными из усредненного гамильтониана (2.4.65) [1]) при $k_z = 0$. При большем возмущении возникает, как и ожидалось, цепочка из пяти островов и другие уже привычные нам детали. Размер первичных резонансов примерно одинаковый в обоих случаях, поскольку, как было показано выше, этот размер не зависит от возмущения. Как и для косой волны, исследование проводилось при значениях $k_\perp\rho$, близких к максимуму $\mathcal{J}_l(k_\perp\rho)$. Аналогичные результаты для другой задачи были получены Фордом и Лансфордом [134].

2.4г. Глобальное устранение резонансных знаменателей

Теперь мы опишем метод ДЛТ (Дуннета—Лейнга—Тейлора) [111], позволяющий в некоторых случаях устранять знаменатели сразу всех первичных резонансов. Этот метод был вначале использован при изучении движения заряженной частицы в пространственно периодическом магнитном поле [111], а позже применен для анализа резонансного взаимодействия волны и частицы (п. 2.4в); последний случай рассмотрен ниже. Обобщение этого метода на более высокие порядки по параметру разложения выполнено Мак-Намарой [290] и будет описано в конце следующего параграфа.

Метод ДЛТ был разработан для изучения автономных систем с двумя степенями свободы и невозмущенным гамильтонианом H_0 специального вида

$$H_0(J) = a(J_1) + \omega_2 J_2, \tag{2.4.96}$$

где ω_2 — постоянная частота, так что обе частоты ω_1 и ω_2 не за-

[1]) Только для одной (по-видимому, правой) половины поверхности сечения на рис. 2.11. Для другой половины фазовые колебания связаны с членом $m \neq l$ в гамильтониане (2.4.64) ($|m-l| = 1$). То же касается и частоты малых колебаний, например, значение $\alpha = 1/5$ относится только к правому резонансу на рис. 2.11, *б*.— *Прим. ред.*

висят от одной из переменных действия (в нашем случае от J_2). Такая форма гамильтониана не является исключительной и даже типична для неавтономных систем с одной степенью свободы, которые можно изучать в расширенном фазовом пространстве (см. п. 1.2б) [1]).

Метод ДЛТ использует определенную свободу в выборе интегралов движения. На поверхности сечения $\theta_2 = \text{const}$ инвариантные линии являются прямыми $J_1 = \text{const}$. Но и любая функция $I_0(J_1)$ также приводит к этим же прямым

$$I_0(J_1) = \text{const}. \tag{2.4.97}$$

Поэтому I_0 тоже можно рассматривать как интеграл невозмущенного движения и выбирать его конкретную форму по своему усмотрению.

Непригодность классической теории возмущений для описания движения вблизи резонанса обсуждалась в п. 2.2б; там же и в п. 2.4в были рассмотрены конкретные примеры резонансных знаменателей. Неудача классического подхода имеет простое физическое объяснение: топология истинных инвариантных кривых $I = \text{const}$ отличается вблизи резонанса от топологии невозмущенных инвариантных кривых $I_0 = \text{const}$. Вообще говоря, при малом ε линии $I_0 + \varepsilon I_1 = \text{const}$ могут топологически отличаться от линий $I_0 = \text{const}$, только если I_1 велико. Поэтому появление больших значений I_1 есть просто отражение топологических изменений в теории возмущений. Это наводит на мысль о том, что можно улучшить теорию возмущений, если выбрать такие невозмущенные интегралы движения, чтобы отличие в топологии обеспечивалось при малых I_1. Так будет в том случае, когда dI_0/dJ_1 обращается в нуль, т. е. инвариантные кривые $I_0 = \text{const}$ соответствуют максимуму или минимуму по невозмущенному действию J_1.

Теория возмущений. Для построения разложения нового инварианта I заметим, что, согласно (1.2.21), любой интеграл движения удовлетворяет условию

$$[I, H] = 0. \tag{2.4.98}$$

Разлагая H и I, получаем

$$H(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\boldsymbol{J}) + \varepsilon H_1(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) + \ldots, \tag{2.4.99}$$

$$I(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) = I_0(J_1) + \varepsilon I_1(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) + \ldots, \tag{2.4.100}$$

где I_0 выбрано так, что является функцией только J_1. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, находим, что в нулевом порядке условие

$$[I_0, H_0] = 0 \tag{2.4.101}$$

---

[1]) Метод ДЛТ применим и непосредственно к неавтономным системам с одной степенью свободы, причем без ограничений на вид невозмущенного гамильтониана $H_0(J)$.— *Прим. ред.*

всегда удовлетворяется, ибо по построению I_0 и H_0 не зависят от угловых переменных. В первом порядке имеем

$$[I_1, H_0]+[I_0, H_1]=0, \tag{2.4.102}$$

или

$$\omega_1 \frac{\partial I_1}{\partial \theta_1}+\omega_2 \frac{\partial I_1}{\partial \theta_2}=\frac{dI_0}{dJ_1}\frac{dH_1}{d\theta_1}. \tag{2.4.103}$$

Разлагая H_1 и I_1 в ряд Фурье

$$H_1=\sum_{l,m} H_{lm}(J)\, e^{i(l\theta_1+m\theta_2)}, \tag{2.4.104а}$$

$$I_1=\sum_{l,m} I_{lm}(J)\, e^{i(l\theta_1+m\theta_2)}, \tag{2.4.104б}$$

получаем из (2.4.103)

$$(l\omega_1+m\omega_2)\, I_{lm}=l\,\frac{dI_0}{dJ_1}\, H_{lm}. \tag{2.4.105}$$

Чтобы найти инвариант, положим

$$\frac{dI_0}{dJ_1}=\prod_{l',m'} C_{l',m'}(\omega_1 l'+\omega_2 m'), \tag{2.4.106}$$

где $C_{l',m'}$ — некоторые коэффициенты, а произведение берется по всем тем значениям индексов l', m', для которых амплитуды Фурье $H_{l',m'}$ отличны от нуля. По построению dI_0/dJ_1 обращается в нуль на каждом резонансе, и величины I_{lm}, согласно (2.4.105), оказываются конечными. Новый инвариант имеет вид

$$I=I_0+\varepsilon I_1=\text{const}, \tag{2.4.107}$$

где I_0 находится интегрированием (2.4.106), а I_1 определяется равенствами (2.4.105) и (2.4.104б).

Резонанс волна — частица. Для иллюстрации метода рассмотрим гамильтониан (2.2.67) для волны, распространяющейся под углом 45° к магнитному полю [403]. Перейдем в систему отсчета волны ($\omega \equiv 0$) и введем безразмерные переменные: $k_\perp = k_z = 1$, $\Omega = 1$, $M = 1$, $e\Phi_0 = 1$, $\rho = (2P_\varphi)^{1/2}$. Имеем

$$H=\frac{1}{2}P_\psi^2+P_\varphi+\varepsilon\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_m(\rho)\sin(\psi-m\varphi). \tag{2.4.108}$$

В соответствии с (2.4.106) полагаем

$$\frac{dI_0}{dP_\psi}=\prod_{m=-\infty}^{\infty} C_m(P_\psi-m)\equiv$$

$$\equiv \pi P_\psi \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{P_\psi^2}{m^2}\right)=\sin \pi P_\psi. \tag{2.4.109}$$

С помощью выражения (2.4.105) находим

$$I_m = \sin \pi P_\psi \frac{\mathcal{J}_m(\rho)}{P_\psi - m}. \tag{2.4.110}$$

Интеграл движения первого порядка равен

$$I = \frac{1}{\pi} \cos \pi P_\psi - \varepsilon \sin \pi P_\psi \sum_m \mathcal{J}_m(\rho) \frac{\sin(\psi - m\varphi)}{P_\psi - m}. \tag{2.4.111}$$

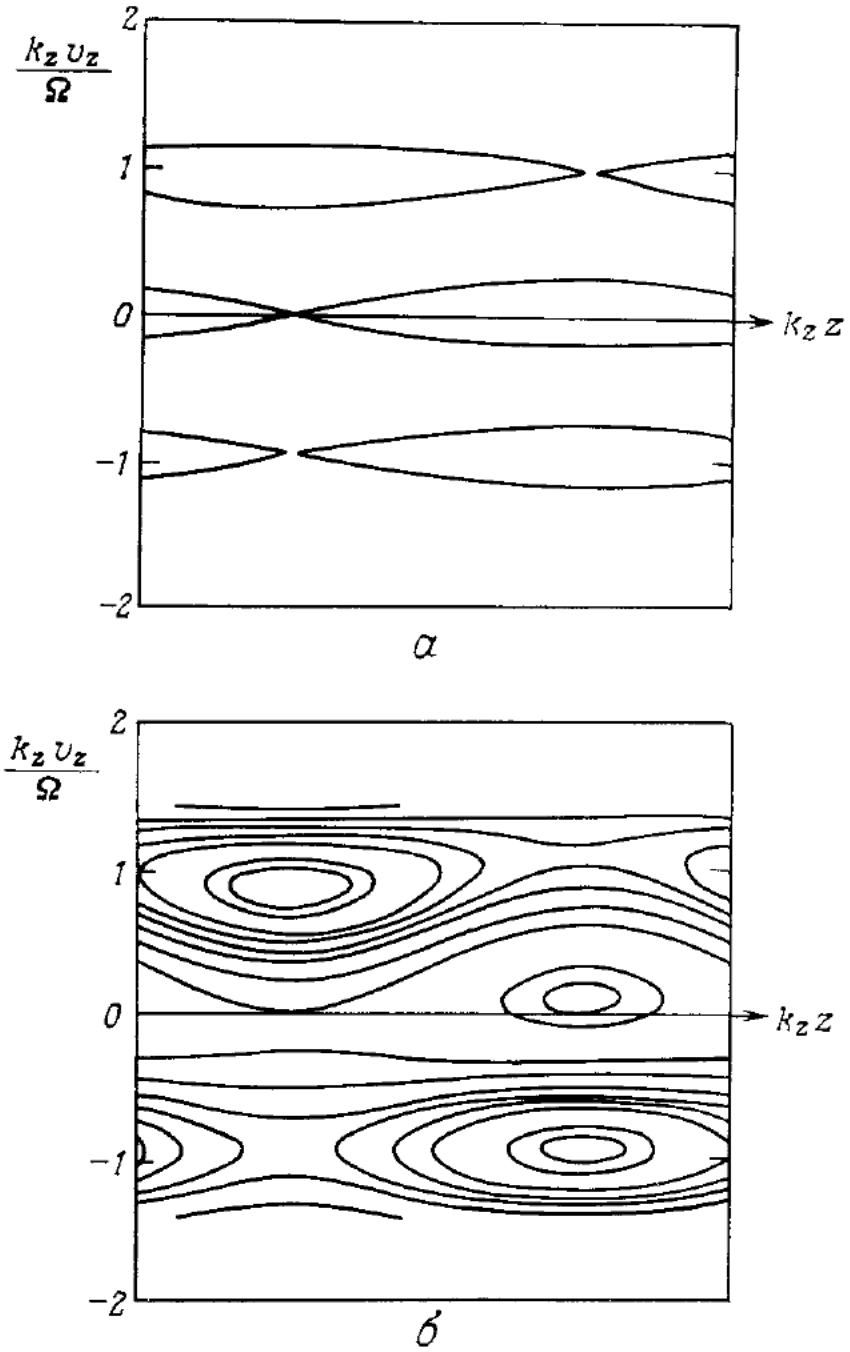


Рис. 2.12. То же, что и на рис. 2.10 согласно теории ДЛТ первого порядка (по данным работы [403]).

Заметим, что второй член этого выражения остается малым даже при резонансах.

На рис. 2.12 показаны инвариантные кривые $I = \text{const}$ на поверхности сечения $\varphi = \pi$ для тех же значений параметров, что

и результаты численного моделирования на рис. 2.10. Согласие между этими рисунками хорошее, хотя, конечно, области хаотического движения, которые наблюдаются при сильном возмущении на рис. 2.10, *б*, нельзя получить из инвариантных кривых.

Отдельный резонанс. Сравним интеграл движения I в методе ДЛТ с интегралом резонансной теории возмущений в случае одного резонанса. Для гамильтониана

$$H = a(J_1) + \omega_2 J_2 + \varepsilon A \sin(l\theta_1 - m\theta_2) \tag{2.4.112}$$

преобразование (2.4.6) к резонансным переменным дает

$$\tilde{H} = a(l\tilde{J}_1) + \omega_2(\tilde{J}_2 - m\tilde{J}_1) + \varepsilon A \sin\tilde{\theta}_1. \tag{2.4.113}$$

Так как $\tilde{H}$ не зависит от $\tilde{\theta}_2$, то $\tilde{J}_2 = \text{const}$. Поскольку $\tilde{H} = \text{const}$, то

$$\tilde{I} = a(l\tilde{J}_1) - m\omega_2\tilde{J}_1 + \varepsilon A \sin\tilde{\theta}_1 \tag{2.4.114}$$

также является интегралом движения. Применяя метод ДЛТ, получаем из (2.4.106) уравнение

$$\frac{dI_0}{dJ_1} = \frac{da}{dJ_1} - \frac{m}{l}\omega_2. \tag{2.4.115}$$

В результате приходим к интегралу движения I, который точно совпадает с $\tilde{I}$.

Распространение метода ДЛТ на более общие, чем (2.4.96), гамильтонианы до сих пор не сделано. Неясно также, как выбирать I_0 в тех случаях, когда амплитуды H_{lm} всех гармоник отличны от нуля, так как при этом производная dI_0/dJ_1 должна обращаться в нуль для всех рациональных значений отношения частот. Тем не менее в пределах этих ограничений метод ДЛТ весьма полезен для глобального устранения резонансных знаменателей [1]).

§ 2.5. Метод преобразований Ли

При использовании теории возмущений часто необходимо иметь разложение выше первого порядка. Так было в задаче Хенона и Хейлеса (см. п. 1.4а), где в силу вырождения потребовалось провести вычисления по крайней мере во втором порядке, чтобы получить хоть какое-то представление об истинных фазовых траекториях даже при низкой энергии. Имеются и другие случаи (см., например, п. 2.5в), когда в первом порядке получается нулевой результат, а отличные от нуля члены возникают только во втором или более высоких порядках.

---

[1]) Отметим, что преимущество метода ДЛТ реально проявляется только в том (по-видимому, редком) случае, когда подбором коэффициентов C_{lm} произведение (2.4.106) можно представить как достаточно простую функцию J_1.— *Прим. ред.*

Применение классических методов Пуанкаре—Цейпеля для разложения выше первого порядка становится все более и более утомительным. При классическом подходе для преобразований от старых переменных $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{\theta}$ к новым $\bar{\boldsymbol{J}}$, $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ используется производящая функция смешанного набора переменных, например $S(\boldsymbol{\theta}, \bar{\boldsymbol{J}}, t)$. В результате и само преобразование также получается в смешанных переменных

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}, \bar{\boldsymbol{J}}, t) = \frac{\partial S(\boldsymbol{\theta}, \bar{\boldsymbol{J}}, t)}{\partial \bar{\boldsymbol{J}}}, \tag{2.5.1}$$

в то время как желательно было бы определить новые переменные как функции старых $\bar{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{J}, t)$, или наоборот. То же самое справедливо и для соотношения между новым и старым гамильтонианами

$$\bar{H}(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{J}}, t) = H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{J}, t) + \frac{\partial S(\boldsymbol{\theta}, \bar{\boldsymbol{J}}, t)}{\partial t}. \tag{2.5.2}$$

Если $\bar{H}$, H и S можно представить в виде рядов по степеням ε, то относительно нетрудно получить разложение в любом порядке [34]. Однако уже во втором порядке по ε появляются громоздкие выражения [см., например, (2.2.19)] без какой-либо явной системы в них. В более высоких порядках количество алгебраических выкладок становится удручающе велико, а физические закономерности оказываются глубоко скрытыми.

Значительным шагом в развитии гамильтоновой теории возмущений явилось введение преобразований Ли в работах Хори [199] и Гарридо [150]. При использовании этих преобразований не возникают функции смешанного набора переменных, а все члены рядов получаются в результате последовательного применения скобок Пуассона, что делает теорию канонически инвариантной. Депри [102] усовершенствовал этот метод и получил соотношение для определения n-го члена разложения преобразования в степенной ряд по ε. Дьюар [105] разработал вариант метода, пригодный для изучения систем, не допускающих представления преобразования в виде степенного ряда. Драгт и Финн [107] использовали метод Ли при изучении сохранения магнитного момента в дипольном поле. Хаулэнд [203] применил этот метод в сверхсходящейся теории возмущений Колмогорова. Существенный вклад в разработку метода внесли Кауфман и сотр. [214, 51, 52, 224, 225], а также Мак-Намара [290]. Новая техника построения разложений, особенно эффективная в высоких порядках, описана Кари [50], который следовал работе Драгта и Финна [108]. Изложение метода Ли содержится в монографиях Найфе [313] и Джакалья [153], а также в методических статьях Кари [49, 50] и Литлджона [280]. Наше изложение основано главным образом на последних статьях.

В п. 2.5а описаны основы метода Ли, который затем используется для получения степенных разложений Депри (п. 2.5б). В качестве иллюстрации получены поправки второго порядка к гамильтониану маятника. С помощью модификации метода Ли в п. 2.5в рассмотрены ряды для адиабатических инвариантов и их приложение к вычислению инварианта второго порядка изменяющегося во времени гармонического осциллятора, а также средней силы, действующей на заряженную частицу в поле электростатической волны. В заключение кратко описана методика Мак-Намары [290] получения адиабатических инвариантов высших порядков. В качестве примера рассмотрен резонанс волна—частица.

2.5а. Общая теория

Начнем с рассмотрения автономных систем; случай явной зависимости гамильтониана от времени исследуем позже. Пусть $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ — вектор обобщенных импульсов и координат, представляющий положение системы в фазовом пространстве. Введем *производящую функцию Ли* $w(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ с помощью уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\varepsilon}=[\boldsymbol{x}, w(\boldsymbol{x}, \varepsilon)], \tag{2.5.3}$$

которое можно рассматривать как уравнение Гамильтона с «гамильтонианом» w и «временем» ε, записанное посредством скобок Пуассона. Его решение при любом ε и начальном условии $\boldsymbol{x}$:

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \tag{2.5.4}$$

представляет собой каноническое преобразование от $\boldsymbol{x}$ к $\boldsymbol{x}$, для которого выполняются соотношения

$$[\bar{q}_i, \bar{q}_j]=[\bar{p}_i, \bar{p}_j]=0; \quad [\bar{q}_i, p_j]=\delta_{ij}. \tag{2.5.5}$$

Введем отвечающий преобразованию (2.5.4) *эволюционный оператор* $\hat{T}$, который переводит любую функцию g в преобразованной точке $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ в соответствующую функцию f в начальной точке, т. е. равенство

$$f=\hat{T}g \tag{2.5.6}$$

означает

$$f(\boldsymbol{x})=g[\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)]. \tag{2.5.7}$$

В частности, если $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$, то

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\hat{T}\boldsymbol{x}. \tag{2.5.8}$$

Для явного определения преобразования $\hat{T}$ введем *оператор Ли* $\hat{L}$:

$$\hat{L}=[w, \quad]. \tag{2.5.9}$$

Из (2.5.3) и (2.5.8) получаем операторное уравнение

$$\frac{d\hat{T}}{d\varepsilon} = -\hat{T}\hat{L}, \tag{2.5.10}$$

которое допускает формальное решение

$$\hat{T} = \exp\left[-\int \hat{L}(\varepsilon)\, d\varepsilon\right]. \tag{2.5.11}$$

Для любого канонического преобразования, в том числе и для порождаемого функцией w, новый гамильтониан $\overline{H}$ связан со старым гамильтонианом H соотношением

$$\overline{H}\left(\overline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)\right) = H(\boldsymbol{x}), \tag{2.5.12}$$

т. е. новый гамильтониан в новой точке равен старому гамильтониану в старой точке. В силу (2.5.6) и (2.5.7) получаем

$$\overline{H} = \hat{T}^{-1} H. \tag{2.5.13}$$

Для неавтономных систем w, $\hat{L}$, $\hat{T}$ являются явными функциями времени t, которое считается фиксированным при выводе преобразования $\hat{T}$. По этой причине все полученные выше соотношения до (2.5.11) включительно остаются справедливыми. Однако старый и новый гамильтонианы не совпадают, и равенство (2.5.13) не выполняется. Правильное соотношение [49]

$$\overline{H} = \hat{T}^{-1} H + \hat{T}^{-1} \int_0^{\varepsilon} \hat{T}(\varepsilon') \frac{\partial w(\varepsilon')}{\partial t}\, d\varepsilon' \tag{2.5.14}$$

[ср. с (1.2.11в) или (1.2.13в)] было впервые получено Дьюаром [105]. Вместе с выражениями (2.5.9) и (2.5.11) для операторов $\hat{L}$ и $\hat{T}$ оно дает полное описание канонических преобразований с помощью производящих функций Ли.

2.5б. Ряды Депри

Разложим w, $\hat{L}$, $\hat{T}$, H и $\overline{H}$ по степеням ε [102, 49]:

$$w = \sum_{n=0} \varepsilon^n w_{n+1}, \tag{2.5.15}$$

$$\hat{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \hat{L}_{n+1}, \tag{2.5.16}$$

$$\hat{T} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \hat{T}_n, \tag{2.5.17}$$

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n H_n, \tag{2.5.18}$$

$$\overline{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \overline{H}_n, \tag{2.5.19}$$

где [см. (2.5.9)]

$$\hat{L}_n = [w_n]. \tag{2.5.20}$$

Подставляя (2.5.16) и (2.5.17) в (2.5.10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем рекуррентное соотношение для $\hat{T}_n$ $(n>0)$:

$$\hat{T}_n = -\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \hat{T}_m \hat{L}_{n-m}, \tag{2.5.21}$$

которое вместе с условием $\hat{T}_0 = 1$ позволяет определить $\hat{T}_n$ через $\hat{L}_n$ во всех порядках. Заметим, что в общем случае эти операторы не коммутируют, т. е. $\hat{L}_i \hat{L}_j \neq \hat{L}_j \hat{L}_i$ и т. д.

Нам потребуются обратные операторы $\hat{T}_n^{-1}$, для определения которых продифференцируем равенство $\hat{T}\hat{T}^{-1} = 1$ по переменной ε, откуда

$$\frac{d\hat{T}^{-1}}{d\varepsilon} = \hat{L}\hat{T}^{-1}. \tag{2.5.22}$$

Последнее уравнение позволяет написать рекуррентное соотношение для $\hat{T}_n^{-1}$ $(n > 0,\ \hat{T}_0^{-1} = 1)$:

$$\hat{T}_n^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \hat{L}_{n-m} \hat{T}_m^{-1}. \tag{2.5.23}$$

В первых трех порядках находим

$$\hat{T}_1 = -\hat{L}_1, \tag{2.5.24а}$$

$$\hat{T}_2 = -\frac{1}{2}\hat{L}_2 + \frac{1}{2}\hat{L}_1^2, \tag{2.5.24б}$$

$$\hat{T}_3 = -\frac{1}{3}\hat{L}_3 + \frac{1}{6}\hat{L}_2\hat{L}_1 + \frac{1}{3}\hat{L}_1\hat{L}_2 - \frac{1}{6}\hat{L}_1^3, \tag{2.5.24в}$$

$$\hat{T}_1^{-1} = \hat{L}_1, \tag{2.5.25а}$$

$$\hat{T}_2^{-1} = \frac{1}{2}\hat{L}_2 + \frac{1}{2}\hat{L}_1^2, \tag{2.5.25б}$$

$$\hat{T}_3^{-1} = \frac{1}{3}\hat{L}_3 + \frac{1}{6}\hat{L}_1\hat{L}_2 + \frac{1}{3}\hat{L}_2\hat{L}_1 + \frac{1}{6}\hat{L}_1^3. \tag{2.5.25в}$$

Основное правило отыскания $\hat{T}_n^{-1}$ по заданному $\hat{T}_n$ таково: вместо $\hat{L}_n$ подставляем $-\hat{L}_n$ и изменяем на обратный порядок записи всех произведений некоммутирующих $\hat{L}$-операторов.

Чтобы получить уравнения для w_n, умножим (2.5.14) на $\hat{T}$ слева и продифференцируем по ε

$$\frac{d\hat{T}}{d\varepsilon}\overline{H}+\hat{T}\frac{d\overline{H}}{d\varepsilon}=\frac{dH}{d\varepsilon}+\hat{T}\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{2.5.26}$$

Исключая $d\hat{T}/d\varepsilon$ с помощью (2.5.10) и умножая слева на $\hat{T}^{-1}$, находим

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{d\overline{H}}{d\varepsilon}-\hat{L}\overline{H}-\hat{T}^{-1}\frac{dH}{d\varepsilon}. \tag{2.5.27}$$

Используя степенные разложения, в n-м порядке ($n\neq 0$) имеем

$$\frac{\partial w_n}{\partial t}=n\overline{H}_n-\sum_{m=0}^{n-1}\hat{L}_{n-m}\overline{H}_m-\sum_{m=1}^{n}m\hat{T}^{-1}_{n-m}H_m. \tag{2.5.28}$$

Переписывая первый член первой суммы в виде $\hat{L}_n\overline{H}_0=\hat{L}_nH_0=[w_n, H_0]$, приходим к окончательному результату

$$\hat{D}_0w_n=n(\overline{H}_n-H_n)-\sum_{m=1}^{n-1}(\hat{L}_{n-m}\overline{H}_m+m\hat{T}^{-1}_{n-m}H_m), \tag{2.5.29}$$

где учтено, что в нулевом порядке $\overline{H}_0=H_0$, и введено обозначение полной производной по времени вдоль невозмущенных траекторий

$$\hat{D}_0\equiv\frac{\partial}{\partial t}+[\quad, H_0]. \tag{2.5.30}$$

Уравнения (2.5.29) до третьего порядка таковы

$$\hat{D}_0w_1=\overline{H}_1-H_1, \tag{2.5.31а}$$

$$\hat{D}_0w_2=2(\overline{H}_2-H_2)-\hat{L}_1(\overline{H}_1+H_1), \tag{2.5.31б}$$

$$\hat{D}_0w_3=3(\overline{H}_3-H_3)-\hat{L}_1(\overline{H}_2+2H_2)-$$
$$-\hat{L}_2\left(\overline{H}_1+\frac{H_1}{2}\right)-\frac{1}{2}\hat{L}_1^2H_1. \tag{2.5.31в}$$

Уравнение (2.5.31а) следует сравнить с эквивалентным ему уравнением первого порядка (2.2.10), полученным по методу Пуанкаре—Цейпеля. В обоих случаях по заданному H_1 мы выбираем некоторое $\overline{H}_1$ обычно так, чтобы устранить секулярности в производящей функции w_1 или S_1, а затем определяем саму производящую функцию. Полученное w_1 используется в правой части уравнения (2.5.31б), где $\overline{H}_2$ выбирается таким образом, чтобы устранить секулярность в w_2 и т. д. вплоть до любого желаемого порядка.

Хотя система уравнений вида (2.5.31) формально справедлива при любом числе степеней свободы, но если их больше одной, то возникают резонансные знаменатели, так же как и при использовании производящих функций от смешанного набора переменных.

Формальный способ их устранения до любого порядка описан в п. 2.5в.

Маятник. Для иллюстрации применения рядов Депри продолжим рассмотрение примера в п. 2.2а и получим описание нелинейных колебаний маятника во втором порядке. Старый гамильтониан (2.2.22) был записан в переменных действие — угол невозмущенной (линейной) системы J, θ. В нулевом порядке из (2.2.22а) имеем

$$\overline{H}_0(J) = \omega_0 J. \tag{2.5.32}$$

В первом порядке (2.5.31а) дает

$$\omega_0 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \overline{H}_1 - H_1, \tag{2.5.33}$$

где H_1 определяется выражением (2.2.22б)

$$H_1 = -\frac{GJ^2}{48}(3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta).$$

Выбирая $\overline{H}_1$ так, чтобы исключить порождающее секулярность среднее от H_1, имеем

$$\overline{H}_1(J) = \langle H_1 \rangle = -\frac{1}{16} GJ^2, \tag{2.5.34}$$

где скобки $\langle\ \rangle$ означают среднее по θ. Уравнение (2.5.33) принимает вид

$$\omega_0 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = -\{H_1\}, \tag{2.5.35}$$

где скобками $\{\}$ обозначена переменная часть. Интегрируя (2.5.35), находим выражение для w_1:

$$w_1 = \frac{1}{192} \frac{GJ^2}{\omega_0} (\sin 4\theta - 8 \sin 2\theta). \tag{2.5.36}$$

Заметим, что в первом порядке $\overline{H}_1$ в (2.5.34) и w_1 в (2.5.36) совпадают с полученными ранее выражениями (2.2.23) и (2.2.25), где вместо J фигурирует $\overline{J}$. Переходя ко второму порядку, переписываем уравнение (2.5.31б)

$$\omega_0 \frac{\partial w_2}{\partial \theta} = 2(\overline{H}_2 - H_2) - \hat{L}_1(\overline{H}_1 + H_1) \tag{2.5.37}$$

через средние и переменные части в виде

$$\omega_0 \frac{\partial w_2}{\partial \theta} = 2(\overline{H}_2 - \langle H_2 \rangle - \{H_2\}) - 2[w_1, \langle H_1 \rangle] - [w_1, \{H_1\}]. \tag{2.5.38}$$

Снова выберем $\overline{H}_2$ так, чтобы обратить в нуль среднее от правой части этого уравнения. Среднее от первых скобок Пуассона уже

равно нулю, так как w_1 содержит только переменную часть. Вторые скобки Пуассона есть произведение двух функций и их среднее отлично от нуля. Положим

$$\overline{H}_2 = \langle H_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle [w_1, \{H_1\}] \rangle. \tag{2.5.39}$$

Выражая второй член с помощью (2.2.22б) и (2.5.36), находим

$$[w_1, \{H_1\}] = -\frac{1}{1152} \frac{G^2 J^3}{\omega_0} (17 - 9\cos 2\theta + \cos 6\theta). \tag{2.5.40}$$

Используя это соотношение и (2.2.22в), получаем

$$\overline{H}_2 = -\frac{1}{256} \frac{G^2 J^3}{\omega_0}.$$

Заметим, что $\overline{H}_2$ не есть просто среднее от H_2, а содержит дополнительное слагаемое, квадратичное по величинам первого порядка. Для получения $\overline{H}_2$ достаточно знать w_1 и вообще для определения $\overline{H}_n$ необходимо иметь w вплоть до порядка $(n-1)$. Чтобы найти w_2, надо проинтегрировать уравнение (2.5.38), которое с учетом (2.5.39) принимает вид

$$\omega_0 \frac{\partial w_2}{\partial \theta} = -2\{H_2\} - 2[w_1, \langle H_1 \rangle] - \{[w_1, \{H_1\}]\}. \tag{2.5.41}$$

Решение этого уравнения не представляет большого интереса и здесь не приводится. Суммируя $\overline{H}_0$, $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$, получаем во втором порядке ($\varepsilon = 1$)

$$\overline{H} = \omega_0 J - \frac{1}{16} G J^2 - \frac{1}{256} \frac{G^2 J^3}{\omega_0}. \tag{2.5.42}$$

На первый взгляд кажется странным, что новый гамильтониан является функцией только старого действия J. Последнее становится, однако, понятным, если учесть, что в методе Ли определяющими являются операции над функциями, а не над их аргументами. Это видно уже из вывода преобразования (2.5.8) с помощью преобразования функций (2.5.6). Аргументы же функций [например, J в (2.5.42)] являются формальными переменными и должны быть заменены в конце вычислений на преобразованные переменные [$J = \overline{J}(\varepsilon)$] [1]).

Так как $\overline{H}$ зависит только от $\overline{J}$, то новая частота с точностью до второго порядка равна

$$\overline{\omega} = \frac{d\overline{H}}{d\overline{J}} = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{8} \frac{G\overline{J}}{\omega_0} - \frac{3}{256} \frac{G^2 \overline{J}^2}{\omega_0^2} \right]. \tag{2.5.43а}$$

---

[1]) Отмеченное выше недоразумение связано просто с неудачным обозначением; гамильтониан (2.5.42) зависит не от старой, а от формальной переменной, которую следовало бы обозначить другой буквой.— *Прим. ред.*

Это выражение следует сравнить с результатом (2.2.24) первого порядка. Исключая действие $\bar{J}$ из (2.5.43а), с помощью соотношения $\bar{H}(\bar{J}) = E + F$, где $\bar{H}(\bar{J})$ дается формулой (2.5.42) с заменой J на $\bar{J}$, а $\omega_0^2 = FG$, получаем зависимость частоты колебаний от энергии

$$\bar{\omega} = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{E+F}{F} \right) - \frac{5}{256} \left(\frac{E+F}{F} \right)^2 \right]. \qquad (2.5.43б)$$

Эта зависимость показана на рис. 2.2 в виде кривой *3*.

2.5в. Адиабатические инварианты

Несмотря на влияние резонансов, которое даже в первом порядке по ε приводит к локальному изменению или разрушению адиабатических инвариантов, часто возникает необходимость в получении асимптотических разложений более высоких порядков. Такие вычисления оказываются очень громоздкими, если используется процедура усреднения Крускала или Боголюбова, потому что выполнение совместных обратных преобразований переменных быстро усложняется. Явные выражения для преобразований до второго порядка были получены в работе Мак-Намары и Уайтмена [292]; конкретный пример, использующий некоторые упрощения, рассмотрен Нортропом и др. [321].

Другой, более простой метод, использующий скобки Пуассона, был предложен еще Уиттекером [430] и развит в работах Мак-Намары и Уайтмена [292] и Джакалья [153]. Оба метода по существу эквивалентны до второго порядка, как было показано Мак-Намарой и Уайтменом [292], а для некоторого класса задач и во всех порядках, согласно Штерну [391]. Позднее Мак-Намара установил [290], что использование скобок Пуассона является частным случаем метода преобразований Ли. Последний метод сменил старую технику, в том числе и с использованием скобок Пуассона; он положен в основу нашего описания адиабатических инвариантов высших порядков. Подробности старых методов можно найти в цитированных выше работах.

Порядки величин при адиабатическом возмущении. При *медленном* возмущении гамильтониан имеет вид (см. п. 2.3а)

$$H = H_0(J, \theta, \varepsilon \boldsymbol{y}, \varepsilon t) + \varepsilon H_1(J, \theta, \varepsilon \boldsymbol{y}, \varepsilon t) + \ldots \qquad (2.5.44)$$

Здесь J, θ переменные действие — угол для единственной быстрой степени свободы и $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ — обобщенные переменные остальных медленных степеней свободы. Порядок производных по $\boldsymbol{y}$ и по времени t на единицу выше порядка тех членов, из которых они получены. Построенные в п. 2.5б ряды не отражают этого измене-

ния порядков и потому должны применяться с осторожностью. Для медленных возмущений оператор Ли имеет вид

$$\hat{L} = \hat{L}_f + \varepsilon \hat{L}_s, \tag{2.5.45}$$

где быстрая часть

$$\hat{L}_f = \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial J} - \frac{\partial w}{\partial J} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \tag{2.5.46а}$$

а медленная

$$\hat{L}_s = \sum_i \left(\frac{\partial w}{\partial (\varepsilon q_i)} \frac{\partial}{\partial (\varepsilon p_i)} - \frac{\partial w}{\partial (\varepsilon p_i)} \frac{\partial}{\partial (\varepsilon q_i)} \right) \tag{2.5.46б}$$

и $w = w(J, \theta, \varepsilon \boldsymbol{y}, \varepsilon t)$. Из выражения (2.5.23) видно, что $\hat{T}_n^{-1}$ определяется через коэффициенты степенных разложений $\hat{L}_f$ и $\hat{L}_s$ как полином n-го порядка по ε. Наконец, член $\partial w_n/\partial t$ в уравнении (2.5.29) имеет порядок ε: $\partial w_n/\partial t \to \varepsilon \partial w_n/\partial (\varepsilon t)$. Для решения этого уравнения можно разложить w_n и $\overline{H}_n$ по степеням ε, например:

$$w_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_{nk}, \tag{2.5.47}$$

и приравнять в (2.5.29) коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получается цепочка уравнений, из которой можно последовательно найти w_{n0}, w_{n1} . . . . На каждом шаге $\overline{H}_{nk}$ выбирается так, чтобы устранить секулярность по быстрой переменной θ. Фактически в n-м порядке теории возмущений необходимо найти члены w_{mk} только для $m + k \leqslant n$. Эта процедура эквивалентна в любом порядке описанному в § 2.3 методу усреднения. Она является более удобной, поскольку в порядках величин быстрых и медленных переменных автоматически устанавливается разница на единицу; это позволяет проводить усреднение по быстрой переменной в любом порядке теории возмущений и исключать возникновение секулярных членов. Однако все присущие методу усреднения ограничения (см. § 2.3) проявляются и здесь.

Первое уравнение цепочки ($k = 0$) есть

$$\omega_\theta \frac{\partial w_{n0}}{\partial \theta} = n(\overline{H}_{n0} - H_n) - \sum_{m=1}^{n-1} (\hat{L}_{f,\ n-m} \overline{H}_{m0} + m \hat{T}_{f,\ n-m}^{-1} H_m), \tag{2.5.48}$$

причем выражения для T_f^{-1} получаются из выражений (2.5.25) заменой $\hat{L}$ на $\hat{L}_f$. Каждое уравнение цепочки имеет вид

$$\omega_\theta \frac{\partial w_{nk}}{\partial \theta} = n \overline{H}_{nk} + \Phi, \tag{2.5.49}$$

где Φ — известная функция медленных переменных и времени. В процессе решения этой цепочки уравнений резонансные знаменатели никогда не возникают, ибо левая часть (2.5.49) является

производной только от быстрой фазовой переменной. Однако, как мы уже знаем, резонансы между быстрыми и медленными колебаниями приводят к тому, что ряд, представляющий w_n, оказывается асимптотическим.

Процедуру получения инварианта выше первого порядка лучше всего продемонстрировать на конкретном примере. Вначале мы продолжим вычисления п. 2. 3в и получим адиабатический инвариант второго порядка для медленно изменяющегося гармонического осциллятора. В качестве второго приложения теории найдем среднюю силу, действующую на заряженную частицу в поле высокочастотной электростатической волны.

Медленно изменяющийся гармонический осциллятор. Из выражения (2.3.25), обозначая штрихом дифференцирование по аргументу εt и записывая для простоты ω вместо ω_0, получаем гамильтониан

$$H = \omega J + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{\omega'}{\omega} J \sin 2\theta, \tag{2.5.50}$$

где

$$\omega = \omega(\varepsilon t). \tag{2.5.51}$$

Примем в выражении (2.3.23) $G = 1$, $F = \omega^2(\varepsilon t)$. В нулевом порядке $\overline{H}_0 = H_0$; в первом порядке уравнение (2.5.31а) имеет вид

$$\omega \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial(\varepsilon t)} = \overline{H}_1 - H_1. \tag{2.5.52}$$

Чтобы решить это уравнение с точностью до ε, полагаем

$$w_1 = w_{10} + \varepsilon w_{11}, \quad \overline{H}_1 = \overline{H}_{10} + \varepsilon \overline{H}_{11}, \tag{2.5.53}$$

что приводит к системе

$$\omega \frac{\partial w_{10}}{\partial \theta} = \overline{H}_{10} - \frac{1}{2} \frac{\omega'}{\omega} J \sin 2\theta, \tag{2.5.54а}$$

$$\omega \frac{\partial w_{11}}{\partial \theta} = \overline{H}_{11} - \frac{\partial w_{10}}{\partial(\varepsilon t)}. \tag{2.5.54б}$$

Чтобы избежать секулярности в w_{10} и w_{11}, следует выбрать $\overline{H}_{10} = 0$ и $\overline{H}_{11} = 0$, поэтому

$$\overline{H}_1 = \overline{H}_{10} + \varepsilon \overline{H}_{11} = 0. \tag{2.5.55}$$

Интегрируя (2.5.54а) и подставляя полученное выражение для w_{10} в (2.5.54б), находим

$$w_1 = w_{10} + \varepsilon w_{11} = \frac{1}{4} \frac{\omega'}{\omega^2} J \cos 2\theta - \frac{\varepsilon}{8\omega} \left(\frac{\omega'}{\omega^2}\right)' J \sin 2\theta. \tag{2.5.56}$$

Во втором порядке уравнение (2.5.31б) принимает вид

$$\omega \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial w_2}{\partial (\varepsilon t)} = 2(\overline{H}_2 - H_2) - \hat{L}_1(\overline{H}_1 + H_1). \qquad (2.5.57)$$

Поскольку это уравнение следует решить в нулевом порядке по ε, опустим второй член в левой части, а во втором члене правой части положим $\hat{L}_1 = \hat{L}_{f1} = [w_{10}, \quad]$; с учетом $H_2 = 0$, согласно (2.5.50), получим

$$\omega \frac{\partial w_{20}}{\partial \theta} = 2\overline{H}_{20} - [w_{10}, H_1]. \qquad (2.5.58)$$

Скобки Пуассона

$$[w_{10}, H_1] = -\frac{1}{4} \frac{(\omega')^2}{\omega^3} J \qquad (2.5.59)$$

не содержат переменной части. Чтобы избежать секулярности, полагаем

$$\overline{H}_{20} = -\frac{1}{8} \frac{(\omega')^2}{\omega^3} J, \qquad (2.5.60)$$

откуда $w_{20} = 0$.

Подставляя вместо формальной переменной J переменную $\overline{J}$, для нового гамильтониана второго порядка находим

$$\overline{H} = \omega \overline{J} - \frac{1}{8} \frac{(\omega')^2}{\omega^3} \overline{J}. \qquad (2.5.61)$$

Дифференцируя это выражение по $\overline{J}$, определяем новую частоту

$$\overline{\omega} = \omega \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\omega'}{\omega^2}\right)^2\right]. \qquad (2.5.62)$$

Согласно (2.5.8), можно выразить новое действие $\overline{J}$ через старые переменные

$$\overline{J} = \hat{T} J. \qquad (2.5.63)$$

Используя (2.5.24а) и (2.5.24б), во втором порядке имеем

$$\overline{J} = J - \varepsilon [w_1, J] + \frac{\varepsilon^2}{2} [w_{10}, [w_{10}, J]]. \qquad (2.5.64)$$

В эту зависимость входит функция первого порядка w_1. Используя определяющее ее выражение (2.5.56), получаем

$$\overline{J} = J + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\omega'}{\omega^2} J \sin 2\theta + \frac{\varepsilon^2}{8} \left(\frac{\omega'}{\omega^2}\right)^2 J + \frac{\varepsilon^2}{4\omega} \left(\frac{\omega'}{\omega^2}\right)' J \cos 2\theta. \qquad (2.5.65)$$

В силу (2.5.61) $\overline{J} = \text{const}$, и соотношение (2.5.65) описывает инвариантные кривые на плоскости (J, θ). Этот результат совпадает

с полученным в работах [282, 391, 429], однако использование преобразований Ли позволило существенно упростить вычисления.

Движение в быстро осциллирующем поле. В качестве второго примера найдем *среднюю силу*, действующую на заряженную частицу в поле электростатической волны с медленно изменяющейся амплитудой [1]). Хорошо известно, что средняя сила пропорциональна квадрату амплитуды волны, поэтому потребуется провести вычисления во втором порядке. Примем гамильтониан в виде

$$H_W(p,\ x,\ t)=\frac{1}{2m}p^2+\varepsilon e\Phi(\varepsilon kx)\cos(kx-\omega t), \qquad (2.5.66)$$

где параметр ε соответствует адиабатическому возмущению. Вводя расширенное фазовое пространство и считая $E=-H_W$ импульсом, канонически сопряженным времени t, находим

$$H_e(p,\ E,\ x,\ t)=\frac{1}{2m}p^2+E+\varepsilon e\Phi(\varepsilon kx)\cos(kx-\omega t). \qquad (2.5.67)$$

С помощью производящей функции

$$F_2=(-kx+\omega t)J_\theta+kxJ_\varphi \qquad (2.5.68)$$

имеем

$$\begin{gathered} E=\frac{\partial F_2}{\partial t}=\omega J_\theta, \qquad \varphi=\frac{\partial F_2}{\partial J_\varphi}=kx, \\ p=\frac{\partial F_2}{\partial x}=k(J_\varphi-J_\theta), \quad \theta=\frac{\partial F_2}{\partial J_\theta}=\omega t-kx. \end{gathered} \qquad (2.5.69)$$

Новый гамильтониан H зависит от быстрой θ и медленной $\varepsilon\varphi$ фаз:

$$H=H_0+\varepsilon e\Phi(\varepsilon\varphi)\cos\theta, \qquad (2.5.70)$$

а гамильтониан невозмущенного движения

$$H_0=\frac{k^2}{2m}(J_\varphi-J_\theta)^2+\omega J_\theta \qquad (2.5.71)$$

определяет частоты колебаний

$$\omega_\varphi=\frac{k^2}{m}(J_\varphi-J_\theta)=kv_x, \qquad (2.5.72)$$

$$\omega_\theta=\omega-\frac{k^2}{m}(J_\varphi-J_\theta)=\omega-kv_x. \qquad (2.5.73)$$

---

[1]) Это неудачный пример для демонстрации преимущества метода преобразования Ли, поскольку рассматриваемая задача гораздо проще и в более общем виде решается с помощью классического метода усреднения (см., например, [453], § 30).— *Прим. ред.*

Условие адиабатичности ($\omega_\varphi \ll \omega_\theta$; $\varepsilon = 1$) требует, чтобы частица была далеко от резонанса с волной

$$\left| \frac{\omega}{k} - v_x \right| \gg v_x. \tag{2.5.74}$$

Введем теперь преобразования Ли. В нулевом порядке по ε гамильтониан $\overline{H}_0 = H_0$, а в первом порядке

$$\omega_\theta \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + \varepsilon \omega_\varphi \frac{\partial w_1}{\partial (\varepsilon \varphi)} = \overline{H}_1 - e\Phi \cos\theta. \tag{2.5.75}$$

Функцию w_1 необходимо найти с точностью до ε, поэтому полагаем

$$w_1 = w_{10} + \varepsilon w_{11},$$
$$\overline{H}_1 = \overline{H}_{10} + \varepsilon \overline{H}_{11} \tag{2.5.76}$$

и находим

$$\omega_\theta \frac{\partial w_{10}}{\partial \theta} = \overline{H}_{10} - \varepsilon \Phi \cos\theta, \tag{2.5.77а}$$

$$\omega_\theta \frac{\partial w_{11}}{\partial \theta} = \overline{H}_{11} - \omega_\varphi \frac{\partial w_{10}}{\partial (\varepsilon \varphi)}. \tag{2.5.77б}$$

Так как среднее от $e\Phi \cos\theta$ равно нулю, то выбираем $\overline{H}_{10} = 0$ и интегрируем (2.5.77а)

$$w_{10} = -\frac{e\Phi}{\omega_\theta} \sin\theta. \tag{2.5.78а}$$

Используя это выражение в (2.5.77б) и полагая $\overline{H}_{11} = 0$, после интегрирования находим

$$w_{11} = -\frac{\omega_\varphi}{\omega_\theta} \frac{e\Phi'}{\omega_\theta} \cos\theta. \tag{2.5.78б}$$

Переходя ко второму порядку теории, мы должны найти w_2 в нулевом порядке по ε, поэтому опускаем в уравнении (2.5.31б) члены высших порядков, учитываем, что $H_2 = 0$, $\overline{H}_1 = 0$, $\partial H_1/\partial J_\theta = 0$, и получаем

$$\omega_\theta \frac{\partial w_{20}}{\partial \theta} = 2\overline{H}_{20} + \frac{\partial w_{10}}{\partial J_\theta} \frac{\partial H_1}{\partial \theta}. \tag{2.5.79}$$

Выберем $\overline{H}_{20}$ так, чтобы исключить секулярность по θ:

$$\overline{H}_{20} = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial w_{10}}{\partial J_\theta} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \right\rangle_\theta. \tag{2.5.80}$$

Вычисляя это выражение с помощью (2.5.78а), приходим к квадратичной зависимости гамильтониана от амплитуды волны

$$\overline{H}_{20} = \frac{1}{4} \frac{e^2 \Phi^2 (\varepsilon\varphi)}{\omega_\theta^2} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial J_\theta}. \tag{2.5.81}$$

Возвращаясь в усредненном гамильтониане $\overline{H} = \overline{H}_0 + \varepsilon\overline{H}_1 + \varepsilon^2\overline{H}_2$ к исходным переменным, получаем выражение в виде суммы кинетической и эффективной потенциальной энергии ($\varepsilon = 1$):

$$\overline{H}_W = \frac{p^2}{2m} + \frac{k^2}{4m}\frac{e^2\Phi^2(kx)}{(\omega - kv_x)^2} = \frac{p^2}{2m} + U_{\text{эфф}}(x) = \text{const}. \quad (2.5.82)$$

Средняя сила равна

$$\overline{F} = -\frac{\partial U_{\text{эфф}}}{\partial x} = -\frac{e^2k^3}{2m}\frac{\Phi\Phi'}{(\omega - kv_x)^2}. \quad (2.5.83)$$

Видно, что эта сила обращается в нуль вблизи максимума или минимума амплитуды волны, причем минимум отвечает устойчивым колебаниям частицы.

При приближении к резонансу средняя сила, согласно (2.5.83), неограниченно возрастает, но при этом нарушается условие адиабатичности ($\omega_\varphi \ll \omega_\theta$). Этот случай можно исследовать в рамках резонансной теории возмущений, или в более высоком порядке, с помощью комбинации метода ДЛТ и преобразований Ли, как это будет описано ниже.

Устранение резонансных знаменателей. Адиабатические инварианты, как это было показано в § 2.4, в окрестности резонансов претерпевают топологические изменения. Для отдельного резонанса замена переменных вида (2.4.6) (резонансные переменные) позволяет учесть изменения топологии и составляет основу резонансной теории возмущений, изложенной в п. 2.4а в первом порядке по ε. Поскольку для двух степеней свободы движение полностью разделяется на быстрое и медленное, то методы этого параграфа применимы и для нахождения интегралов движения более высоких порядков вблизи резонансов.

В работе [290] Мак-Намара соединил технику преобразований Ли с методом ДЛТ (п. 2.4г). Напомним, что с помощью этого метода для определенного класса задач удается построить интеграл движения первого порядка с учетом влияния сразу всех первичных резонансов. Метод основан на том факте, что если J — интеграл невозмущенной системы, то и любая функция $I_0(J)$ также является интегралом. Выбирая $I_0(J)$ так, чтобы производная dI_0/dJ обращалась в нуль при резонансных значениях J, можно учесть топологические изменения интеграла $\overline{I}$ возмущенной системы. Техника преобразований Ли позволяет легко ввести функцию I_0 вместо J следующим образом. В соответствии с методом этого параграфа эволюционный оператор $\hat{T}$ вычисляется с точностью до желаемого порядка n. Затем, вместо записи интеграла в форме (2.5.63), т. е.

$$\overline{J} = \hat{T}J = \text{const}, \quad (2.5.84)$$

положим

$$\overline{I} = \hat{T}^{-1}I_0 = \text{const} \quad (2.5.85)$$

и выберем $I_0(J)$ так, чтобы устранить полюсы функции $\bar{I}(J)$. Мак-Намара показал, что необходимость выбора $I_0(J)$ возникает только после того, как будет достигнут n-й порядок разложений, и дал правила такого выбора.

Резонансное взаимодействие волны и частицы. Применим последний метод к решению рассмотренной ранее в п. 2.2б задачи для волны, распространяющейся под углом 45° к магнитному полю, с гамильтонианом (2.4.108). В первом порядке уравнение (2.5.31а) принимает вид

$$P_\psi \frac{\partial w_1}{\partial \psi} + \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} = -\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{J}_m(\rho) \sin(\psi - m\varphi). \qquad (2.5.86)$$

Запишем решение этого уравнения:

$$w_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{J}_m(\rho) \frac{\cos(\psi - m\varphi)}{P_\psi - m}. \qquad (2.5.87)$$

С помощью (2.5.25а) находим интеграл движения

$$\bar{I} = I_0(P_\psi) + \varepsilon [w_1, I_0], \qquad (2.5.88)$$

или

$$\bar{I} = I_0 + \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial \psi} \frac{dI_0}{dP_\psi}. \qquad (2.5.89)$$

Если выбрать dI_0/dP_ψ согласно (2.4.109), то все резонансные знаменатели в (2.5.87) сокращаются и для $\bar{I}$ получается выражение (2.4.111). Первичные резонансы при $P_\psi = +1, 0, -1$ хорошо описываются полученным интегралом движения (см. п. 2.4г).

Переходя ко второму порядку, следует решить уравнение (2.5.31б) и найти w_2. С помощью (2.5.25) получаем интеграл движения в виде

$$\bar{I} = I_0 + \varepsilon [w_1, I_0] + \frac{\varepsilon^2}{2} [w_2, I_0] + \frac{\varepsilon^2}{2} [w_1, [w_1, I_0]]. \qquad (2.5.90)$$

Эта функция имеет полюсы второго порядка при целых P_ψ и полюсы первого порядка при полуцелых P_ψ. Чтобы устранить все эти полюсы, выберем

$$\frac{dI_0}{dP_\psi} = \sin^2 \pi P_\psi \sin 2\pi P_\psi. \qquad (2.5.91)$$

Инвариантные кривые ($\bar{I} = \text{const}$) показаны на рис. 2.13; их следует сравнить с инвариантными кривыми первого порядка (рис. 2.12, *б*) и с численными результатами (рис. 2.10, *б*). Полуцелые резонансы, как и нерезонансные области, хорошо воспроиз-

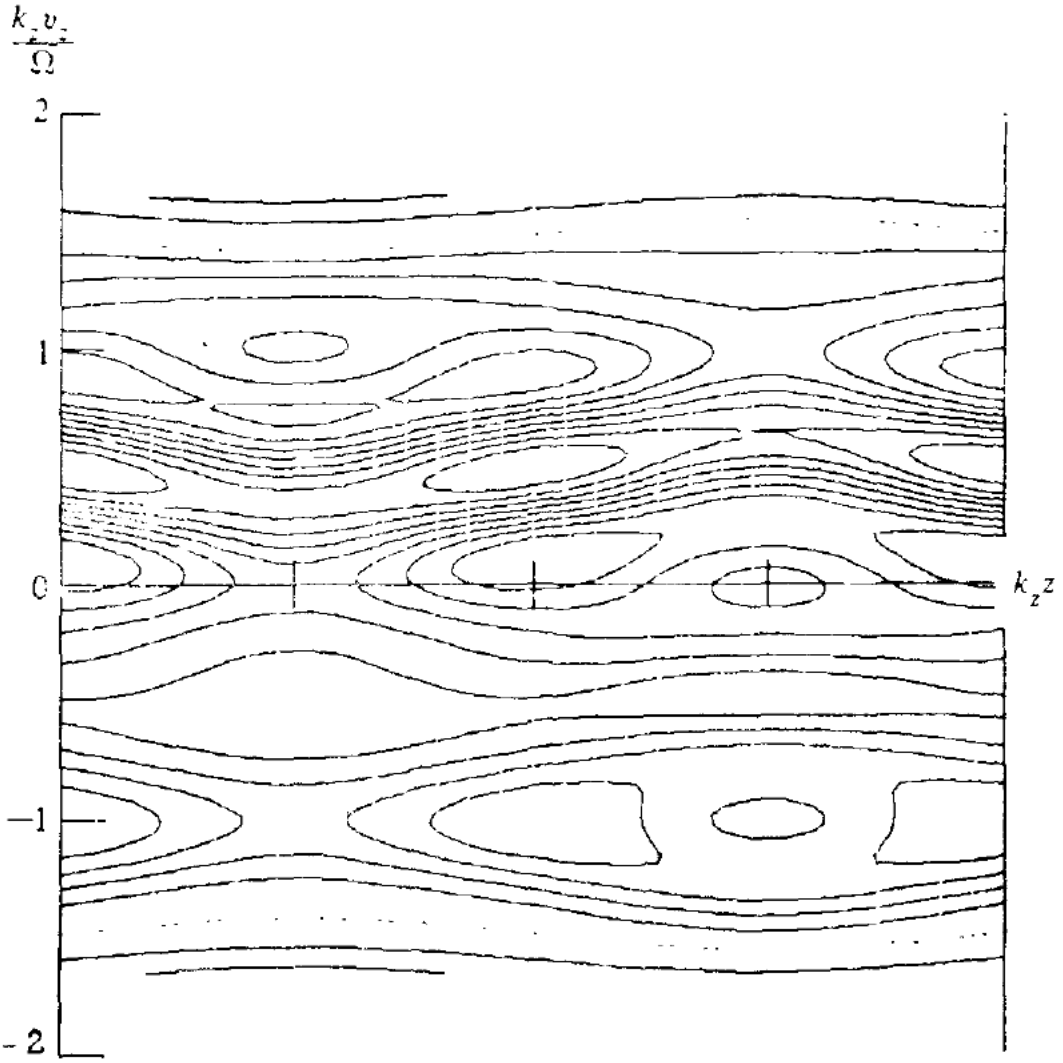


Рис. 2.13. То же, что и на рис. 2.10, *б* во втором порядке по $\varepsilon = 0{,}1$ (по данным работы [290]).

водятся на рис. 2.13. Однако целые резонансы сильно искажены, хотя для меньшей величины возмущения согласие гораздо лучше [290]. Здесь остается еще много неясных вопросов [1]).

§ 2.6. Сверхсходимость

Рассмотрим теперь некоторый класс методов теории возмущений, предложенных Колмогоровым [229] и играющих, как показано в гл. 3, фундаментальную роль при доказательстве теоремы КАМ. Их основной чертой является чрезвычайно быстрая сходимость последовательных приближений. Во всех до сих пор рассмотренных в этой главе методах гамильтониан $H = H_0 + \varepsilon H_1$ подвергался таким последовательным каноническим преобразованиям, при которых порядок возмущения по ε изменялся на единицу на каждом шаге:

$$\varepsilon H_1 \to \varepsilon^2 H_2 \to \varepsilon^3 H_3 \to \ . \ . \ . \to \varepsilon^n H_n.$$

[1]) Это замечание относится, по-видимому, не столько к самой задаче, сколько к возможностям и пределам применимости метода ДЛТ.— *Прим. ред.*

Это ясно видно, например, из системы уравнений (2.5.31). Выбирая производящую функцию Ли w_1, мы исключаем $\{\varepsilon H_1\}$, но остается $\varepsilon^2 H_2$; выбирая w_2, исключаем $\{\varepsilon^2 H_2\}$, но остается $\varepsilon^3 H_3$ и т. д. Колмогоров показал, что последовательность канонических замен переменных можно организовать таким образом, чтобы оставшееся на каждом шаге возмущение было порядка квадрата предыдущего:

$$\varepsilon H_1 \to \varepsilon^2 H_2 \to \varepsilon^4 H_3 \to \ . \ . \ . \to \varepsilon^{(2^{n-1})} H_n.$$

Выполнив n преобразований, можно получить таким путем решение задачи с точностью порядка $\varepsilon^{(2^{n-1})}$. Такая процедура носит название *сверхсходимости* или иногда квадратичной сходимости [1]).

Продемонстрируем оба обсуждаемых подхода на имеющей самостоятельный практический интерес задаче отыскания корня уравнения

$$f(x) = 0. \tag{2.6.1}$$

Следуя Мозеру [310] и Берри [26], предположим, что нам известно некоторое значение x_0 (обычно это решение невозмущенной задачи), которое можно принять в качестве начального приближения для корня. Следующее приближение x_1 найдем из первых двух членов разложения Тейлора вокруг x_0:

$$f(x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0. \tag{2.6.2}$$

Для получения приближения x_n на n-м шаге необходимо определить корень полинома n-й степени

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x_n - x_0)^m = 0. \tag{2.6.3}$$

Выберем малый параметр $\varepsilon = x - x_0$ и представим функцию $f(x)$ рядом по степеням ε. Вычитая из этого ряда выражение (2.6.3), получаем, что ошибка $e_n = x - x_n$ после n-го приближения является величиной порядка ε^{n+1}:

$$e_n \sim \frac{1}{(n+1)!} \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{f'(x_0)} \varepsilon^{n+1}. \tag{2.6.4}$$

Такая линейная сходимость характерна для обычных методов теории возмущений.

Чтобы продемонстрировать квадратичную сходимость, воспользуемся методом касательных Ньютона. Первый шаг этого метода представлен уравнением (2.6.2). Ошибка e_1 первого шага

---

[1]) В отечественной литературе употребляется также термин «ускоренная сходимость» [463].— *Прим. перев.*

оценивается с помощью разложения $f(x)$ относительно точки x_0 до ε^2:

$$e_1 \sim \alpha(x_0)(x-x_0)^2 = \alpha\varepsilon^2, \tag{2.6.5}$$

где

$$\alpha(x_0) = -\frac{1}{2} f''(x_0)/f'(x_0). \tag{2.6.6}$$

Таким образом, ошибка e_1 имеет порядок ε^2. На следующем шаге повторим процедуру разложения $f(x)$ вокруг точки x_1 (а не x_0) и найдем

$$x_2 - x_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{2.6.7}$$

Ошибка этого шага с учетом (2.6.5) равна

$$e_2 \sim \alpha(x_1)(x-x_1)^2 \sim \alpha(x_1)\alpha^2(x_0)\varepsilon^4 \tag{2.6.8}$$

и является величиной порядка ε^4. Быстрая сходимость обеспечивается за счет того, что значение переменной, вокруг которого выполняется разложение, с каждой итерацией приближается к точному значению. По индукции для ошибки после n итераций имеем

$$(x-x_n) \sim \varepsilon^{(2^n)} \prod_{k=1}^{n} \alpha^{(2^{n-1})}(x_{k-1}). \tag{2.6.9}$$

Вообще говоря, $f''/f' \sim 1$, так что ошибка уменьшается квадратично на каждом шаге. Однако, если

$$f''/f' \sim \varepsilon^{-1}, \tag{2.6.10}$$

[это соответствует резонансу вблизи разыскиваемого значения корня, $f(x) \sim (x-x_r)^{-1}$; $x_r \sim x_0$], то и тогда квадратичная сходимость оказывается сильнее [1]). Аналогично сверхсходящееся разложение в теории КАМ также подавляет действие малых резонансных знаменателей.

Сверхсходящиеся разложения не нашли пока широкого применения в практических расчетах. Как мы увидим ниже, соответствующие вычисления оказываются при этом слишком громоздкими. Чириков [70] демонстрирует сверхсходимость на примере маятника, используя производящую функцию от смешанного набора переменных. Однако более естественно применить сверхсходимость в сочетании с преобразованиями Ли. Для автономных систем это впервые было сделано Хаулэндом [203]. Мы рассмотрим эту технику в п. 2.6а, следуя Кари [49], метод которого применим также и для неавтономных систем. В работе Мак-Намары [290] кратко обсуждается возможность использования сверхсходящихся преоб-

[1]) Фактически для сходимости требуется, чтобы $f''/f' \sim \varepsilon^{-\tau}$; $\tau < 1$ ($\varepsilon \to 0$); похожее условие возникает и при доказательстве теоремы КАМ (см. п. 3.2а).

разований Ли для вычисления интегралов движения вблизи резонансов.

Получение приближенных решений для систем, близких к интегрируемым, тесно связано с отысканием *периодических решений* в таких системах. Последние важны, поскольку они образуют плотное множество и позволяют анализировать близкие решения с помощью линейной теории (см. § 3.3). Хеллеман, Эминицер и др. [116] разработали в последнее время весьма эффективные сверхсходящиеся методы нахождения периодических решений. Эти методы описываются в п. 2.6б и иллюстрируются на примере задачи Хенона—Хейлеса.

2.6а. Метод Колмогорова

Следуя Кари [49], рассмотрим гамильтониан

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n H_n(\boldsymbol{x}, t), \tag{2.6.11}$$

где H_0 — интегрируемая часть, а вектор $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta})$ означает переменные действия — угол для H_0. Введем последовательные преобразования Ли, приводящие к последовательности новых гамильтонианов, занумерованных с помощью верхнего индекса. Используя метод Депри (п. 2.5б), начнем с уравнений (2.5.31) для первой производящей функции Ли $w^{(1)}$:

$$\overline{H}_0^{(1)} = H_0, \tag{2.6.12а}$$

$$\hat{D}_0 w_1^{(1)} = \overline{H}_1^{(1)} - H_1, \tag{2.6.12б}$$

$$\hat{D}_0 w_2^{(1)} = 2\left(\overline{H}_2^{(1)} - H_2\right) - \left[w_1^{(1)}, \left(\overline{H}_1^{(1)} + H_1\right)\right]. \tag{2.6.12в}$$

Обычно эти уравнения интегрируются одно за другим. В каждом порядке новый гамильтониан $\overline{H}_i^{(1)}$ выбирается так, чтобы исключить секулярность в $w_i^{(1)}$, после чего определяется сама функция $w_i^{(1)}$. Затем $w_i^{(1)}$ подставляется в следующее уравнение и весь процесс повторяется. Интегрирование каждого из уравнений есть единичный «шаг» процедуры, и после n таких шагов мы получаем новый гамильтониан $\overline{H}$, зависящий с точностью порядка ε^n только от переменной действия $\overline{\boldsymbol{J}}$.

В методе Колмогорова гамильтонианы и производящие функции выбирают иначе. Основное правило состоит в том, что одновременно решаются все те уравнения, правые части которых не содержат w_i. При этом, как и прежде, $\overline{H}_i$ выбирается таким образом, чтобы устранить секулярности в w_i. Во всех оставшихся уравнениях w_j $(j > i)$ полагаются равными нулю, после чего из них определяются $\overline{H}_j$. Выполнение всей этой процедуры является единичным «шагом» разложения.

На первом шаге мы можем «одновременно» решить только одно уравнение, а именно (2.6.12б). Полагая $\overline{H}_1^{(1)} = \langle H_1 \rangle$, находим $w_1^{(1)}$ из уравнения

$$\hat{D}_0 w_1^{(1)} = -\{H_1\}. \tag{2.6.13}$$

Гамильтониан $\overline{H}_2^{(1)}$ определяется из (2.6.12в) при $w_2^{(1)} = 0$ и т. д. Нельзя одновременно [1]) с $w_1^{(1)}$ найти, например, $w_2^{(1)}$, так как в уравнение (2.6.12в) входит неизвестная еще функция $w_1^{(1)}$.

Приступая ко второму шагу, вводим новый «старый гамильтониан»

$$H^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \overline{H}_n^{(1)}, \tag{2.6.14}$$

в котором

$$H_0^{(1)} = \overline{H}_0^{(1)} + \varepsilon \overline{H}_1^{(1)}, \tag{2.6.15а}$$

$$H_1^{(1)} = 0, \tag{2.6.15б}$$

$$H_j^{(1)} = \overline{H}_j^{(1)}, \quad j > 1. \tag{2.6.15в}$$

Таким образом, в новом невозмущенном гамильтониане полностью учтено решение, полученное на предыдущем шаге. Поскольку возмущение не содержит теперь члена первого порядка, то $\overline{H}_1^{(2)} = 0$; $w_1^{(2)} = 0$ и $\overline{H}_0^{(2)} = H_0^{(1)}$. Система уравнений Депри принимает вид

$$\hat{D}_0^{(1)} w_2^{(2)} = 2\left(\overline{H}_2^{(2)} - H_2^{(1)}\right), \tag{2.6.16а}$$

$$\hat{D}_0^{(1)} w_3^{(2)} = 3\left(\overline{H}_3^{(2)} - H_3^{(1)}\right), \tag{2.6.16б}$$

$$\hat{D}_0^{(1)} w_4^{(2)} = 4\left(\overline{H}_4^{(2)} - H_4^{(1)}\right) - \left[w_2^{(2)}, \overline{H}_2^{(2)} + H_2^{(1)}\right], \tag{2.6.16в}$$

$$\vdots$$

где

$$\hat{D}_0^{(1)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + [\quad, H_0^{(1)}] \tag{2.6.17}$$

— полная производная по времени вдоль траекторий *первого порядка* исходной системы. Теперь мы можем одновременно решить *два* первых уравнения (2.6.16а) и (2.6.16б), устраняя секулярности в $w_2^{(2)}$ и $w_3^{(2)}$ выбором $\overline{H}_2^{(2)}$ и $\overline{H}_3^{(2)}$ соответственно. В остальных урав-

---

[1]) То есть на этом же шаге; если же мы сначала найдем $w_1^{(1)}$ из (2.6.13), а затем подставим его в (2.6.12в), то вернемся к обычной теории возмущений.— *Прим. ред.*

нениях полагаем $w_j^{(2)} = 0$ и используем их для определения $\overline{H}_j^{(2)}$, $j > 3$. В результате находим новый гамильтониан

$$H^{(2)} = H_0^{(2)} + \varepsilon^4 H_4^{(2)} + \varepsilon^5 H_5^{(2)} + \ldots, \tag{2.6.18}$$

где

$$H_0^{(2)} = \overline{H}_0^{(2)} + \varepsilon^2 \overline{H}_2^{(2)} + \varepsilon^3 \overline{H}_3^{(2)}, \tag{2.6.19}$$

$$H_j^{(2)} = \overline{H}_j^{(2)}, \quad j > 3, \tag{2.6.20}$$

причем $H_0^{(2)}$ является функцией только переменных действия, а возмущение не содержит членов порядка ε^2 и ε^3.

На третьем шаге можно сразу устранить члены возмущения порядка с четвертого по седьмой. Это следует по индукции из общего уравнения Депри (2.5.29). Пусть возмущение в $H^{(n)}$ имеет порядок $\varepsilon^{(2^n)}$ или выше. Используя преобразование с производящей функцией $w^{(n+1)}$, получим $w_j^{(n+1)} = 0$, $\hat{L}_j^{(n+1)} = 0$, $(\hat{T}^{-1})_j^{(n+1)} = 0$ и $\overline{H}_j^{(n+1)} = 0$ для $j < 2^n$. Отсюда находим, что для $m < 2^{n+1}$ уравнение (2.5.29) записывается в виде

$$\hat{D}_0^{(n)} w_m^{(n+1)} = m\left(\overline{H}_m^{(n+1)} - H_m^{(n)}\right). \tag{2.6.21}$$

Следовательно, уравнения с номерами от $m = 2^n$ до $m = 2^{n+1} - 1$ можно решить одновременно.

Отметим, что каждый шаг в методе Колмогорова оказывается намного сложнее, чем в обычной теории возмущений. Более того, на каждом шаге требуется проводить интегрирование вдоль новых траекторий системы. Возможно, что это есть выражение всеобщего «закона сохранения»: на одну и ту же высоту можно взобраться либо за много мелких шагов, либо за несколько крупных! Мы думаем, что метод Колмогорова не лучший способ выполнения практических вычислений [1]). С другой стороны, он совершенно необходим в теории КАМ для получения сходящихся рядов вне резонансов.

2.6б. Периодические траектории

Для замкнутых периодических траекторий в системах с несколькими степенями свободы удается построить сходящиеся решения. Это становится возможным потому, что условие точной периодичности позволяет представить траекторию простым рядом Фурье и избежать, таким образом, появления резонансных знаменателей

[1]) Это заключение авторов представляется преждевременным, так как еще не накоплен достаточный опыт практических расчетов с использованием сверхсходящихся методов. Можно, например, отметить, что если требуется умеренная точность, скажем, до $\sim \varepsilon^3$ включительно, то сверхсходимость заведомо упрощает вычисления (см. [70], § 2.2; 5.1).— *Прим. ред.*

(п. 2.2б). Однако, чтобы обеспечить периодичность в рамках теории возмущений, необходимо изменять начальные условия в каждом из последовательных приближений, поддерживая частоту неизменной [1]). Это отличается от обычной схемы теории возмущений, в которой для заданных начальных условий точность последовательных приближений повышается за счет переопределения частоты.

Метод построения периодических решений с фиксированной частотой и фазой был разработан Хеллеманом, Эминицером и сотр. Этот метод использовался во многих задачах, например вынужденные колебания ангармонического осциллятора [116], модель Хенона и Хейлеса [183] (см. п. 1.4а) и отображение Хенона [178] (см. п. 3.2г). Авторы называют свой метод «обратным» ввиду отмеченной выше необычной последовательности действий — от частоты к начальным условиям.

Хотя мера всех периодических траекторий равна нулю, они являются всюду плотными в фазовом пространстве. Наглядно периодические траектории соответствуют рациональным числам на отрезке, мера которых равна нулю, но которые тем не менее сколь угодно хорошо приближают любое иррациональное число. Поэтому на первый взгляд может показаться, что отыскание периодических траекторий эквивалентно получению вообще всех траекторий. На самом деле это не так, поскольку периодические траектории, вообще говоря, не ограничивают апериодические траектории. Даже если в начальный момент они близки, то позже могут оказаться произвольно далеко друг от друга в фазовом пространстве. В отличие от этого при двух степенях свободы инвариантные торы ограничивают близкие траектории и поэтому являются значительно более важными для описания динамики системы. Тем не менее и в общем случае периодические траектории могут оказаться весьма полезными по двум причинам. Во-первых, они могут выявлять некоторые особенности общей структуры движения, например резонансы различного уровня с определенным числом вращения. Во-вторых, можно исследовать их устойчивость, что будет использовано в § 4.4 при определении глобальной устойчивости движения.

Вариационный метод. Рассмотрим замкнутую траекторию в автономной системе с N степенями свободы. Движение при этом является периодическим, т. е. существует $N-1$ резонансных условий вида

$$\boldsymbol{l}_k \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \tag{2.6.22}$$

где все N-мерные целочисленные векторы $\boldsymbol{l}_k$ линейно независимы [2]).

---

[1]) Этот прием, служащий фактически основой теории КАМ, был предложен Колмогоровым [229] (см. также [11]).— *Прим. ред.*

[2]) Вектор основных частот $\boldsymbol{\omega}$ не имеет в данном случае определенного смысла [ср. (2.6.24) и (3.1.5)], полная же система частот определяется соотношением (2.6.23).— *Прим. ред.*

Все частоты являются целыми кратными основной частоты обращения

$$\omega_i = m_i \omega_r. \tag{2.6.23}$$

Это позволяет представить координаты q_j и скорости $\dot{q}_j$ с помощью рядов Фурье

$$q_j = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_{jm} e^{im\omega_r t}, \tag{2.6.24а}$$

$$\dot{q}_j = i\omega_r \sum_{m=-\infty}^{\infty} m Q_{jm} e^{im\omega_r t}. \tag{2.6.24б}$$

Вариационное уравнение для замкнутой траектории удобнее всего записать с помощью лагранжиана (1.2.1). Из принципа Гамильтона получаем

$$\delta \oint L\left(\dot{q}_j,\ q_j\right) dt = \delta \langle L \rangle = 0, \tag{2.6.25}$$

где $\langle L \rangle$ — интеграл по периоду обращения $2\pi/\omega_r$. Считая $\dot{q}_j$ и q_j функциями коэффициентов Фурье Q_{jm} и варьируя эти коэффициенты, находим

$$\delta \langle L \rangle = \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial Q_{jm}} \delta Q_{jm}. \tag{2.6.26}$$

Из вариационного исчисления известно, что

$$\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial Q_{jm}} = 0, \tag{2.6.27}$$

если удовлетворяются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial q_i} = 0 \tag{2.6.28}$$

Заметим, что $\langle L \rangle$ — чисто алгебраическая функция Q_{jm} (и ω_r). Если задано $\langle L \rangle$, то Q_{jm} находятся как корни системы уравнений (2.6.27), которые определяют стационарную точку функции $\langle L \rangle$. Трудность вычисления этих корней связана с тем, что в общем случае стационарная точка $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ не отвечает ни максимуму, ни минимуму $\langle L \rangle$, а является седловой (см. рис. 2.14). Тип этого седла разрывно зависит от изменения Q_{jm} (а также, следовательно, и от начальных значений $\dot{q}_j$ и q_j). Используем для вычисления корней простой метод касательных Ньютона. Введем векторную переменную $\boldsymbol{Q}$, составленную из коэффициентов Q_{jm}, и положим $\boldsymbol{f} = \partial\langle L \rangle / \partial \boldsymbol{Q}$, тогда из (2.6.27)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Q}_0) + \Delta \boldsymbol{Q} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{Q}_0} = 0, \tag{2.6.29}$$

где $\boldsymbol{Q}_0$ — начальное приближение корней, а $\Delta \boldsymbol{Q}$ — первая поправка.

Подставляя выражение для $\boldsymbol{f}$, имеем

$$\Delta \boldsymbol{Q} \cdot \frac{\partial^2 \langle L \rangle}{\partial \boldsymbol{Q}_0^2} = -\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \boldsymbol{Q}_0}. \tag{2.6.30}$$

Диагонализуя матрицу кривизны $\partial^2 \langle L \rangle / \partial \boldsymbol{Q}_0^2$ (см. рис. 2.14), приходим к следующим заменам:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &\to \boldsymbol{c}, \\ \Delta \boldsymbol{Q} &\to \Delta \boldsymbol{c}, \\ \frac{\partial^2 \langle L \rangle}{\partial \boldsymbol{Q}_0^2} &\to \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{c}_0), \\ \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \boldsymbol{Q}_0} &\to \langle L \rangle' (\boldsymbol{c}_0). \end{aligned} \tag{2.6.31}$$

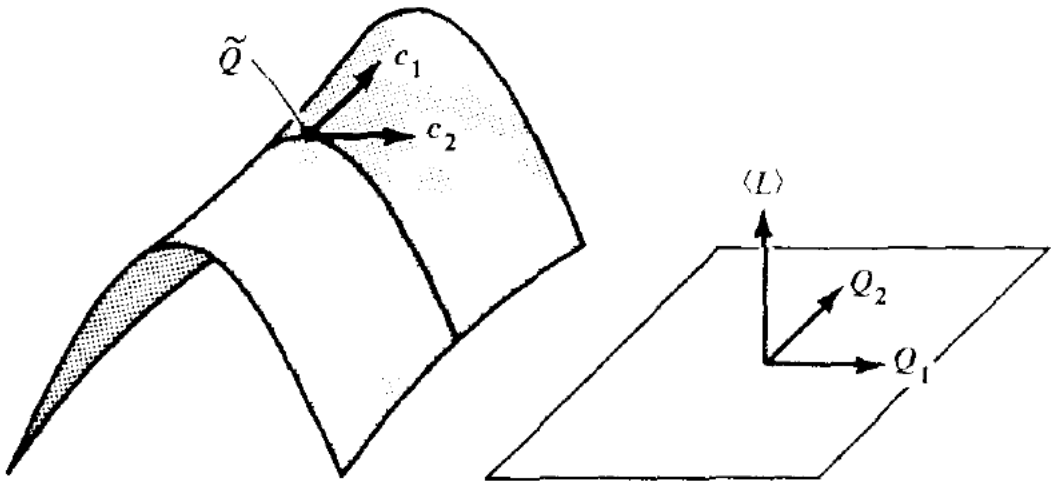


Рис. 2.14. Двумерное седло.

$\tilde{\boldsymbol{Q}}$ — стационарная точка усредненного лагранжиана $\langle L \rangle$. Q_1, Q_2 — исходные переменные; c_1, c_2 — новые переменные, в которых матрица кривизны диагональна.

Уравнение (2.6.30) принимает вид

$$\lambda_n(\boldsymbol{c}_0)\,\Delta c_n = -\langle L \rangle_n' (\boldsymbol{c}_0), \tag{2.6.32}$$

где n нумерует компоненты вектора c в диагонализованной системе. Среди значений кривизны $\lambda_n(\tilde{\boldsymbol{c}})$ имеются как положительные, так и отрицательные. Пронумеруем их в порядке возрастания от отрицательных к положительным, при этом одно из значений $\lambda_m(\tilde{\boldsymbol{c}}) = 0$ (см. [179]). Однако в процессе итераций эта упорядоченность, вообще говоря, не сохраняется. Положение можно исправить, введя в метод Ньютона корректирующую поправку

$$(\lambda_n - \bar{\lambda})\,\Delta c_n = -\langle L \rangle_n', \tag{2.6.33}$$

где $\bar{\lambda}$ выбирается так, чтобы знак $\lambda_n - \bar{\lambda}$ при итерациях не изменялся. Такой прием обеспечивает линейную сходимость к $\tilde{c}_n$. Бо-

лее того, когда решение c подходит достаточно близко к $\tilde{c}$, можно убрать $\bar{\lambda}$ и восстановить квадратичную сходимость. В качестве $\bar{\lambda}$ удобно выбрать $\lambda_m(c)$, так как при $n \lesseqgtr m$ разность $\lambda_n(c) - \lambda_m(c) \lesseqgtr 0$ и $\lambda_m \to 0$ при $c \to \tilde{c}$, как и требуется для сходимости в (2.6.33). Таким образом, вместо обычных начальных условий

$$q_j(0) = \sum_m Q_{jm}, \tag{2.6.34а}$$

$$\dot{q}_j(0) = i\omega_r \sum_m mQ_{jm}, \tag{2.6.34б}$$

мы задаем теперь значение $n = m$, для которого кривизна равна нулю, или

$$\langle L \rangle'_m(c) = 0 \tag{2.6.35}$$

для любого вектора c, что гарантирует $\lambda_m = 0$ в первом порядке по Δc_m.

В практических расчетах используются исходные (Q), а не диагонализованные (c) переменные и конечные ряды Фурье. Были придуманы и различные другие приемы для сокращения вычислений и ускорения сходимости; подробности можно найти в цитированных выше оригинальных статьях.

Задача Хенона и Хейлеса. Продемонстрируем применение изложенного общего метода к системам с двумя степенями свободы, следуя работам Баунтиса [35] и Хеллемана и Баунтиса [183]. Условие резонанса имеет вид

$$s\omega_1 - r\omega_2 = 0, \tag{2.6.36}$$

где

$$\alpha = \frac{s}{r} \tag{2.6.37}$$

— некоторая постоянная, а r и s — взаимно простые целые числа. Частоты ω_1 и ω_2 теперь уже не являются независимыми, а кратны общей частоте обращения

$$\omega_r = \frac{\omega_1}{r} = \frac{\omega_2}{s}. \tag{2.6.38}$$

Период обращения равен $\tau_r = 2\pi/\omega_r$. Обозначая соответствующие частотам ω_1 и ω_2 координаты через x и y, можно представить решение в виде рядов Фурье (2.6.24а) по каждой степени свободы:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\omega_r t}, \qquad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\omega_r t}. \tag{2.6.39}$$

В рассматриваемом методе можно было бы задать ω_r и два из четырех начальных условий x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, а коэффициенты Фурье A_n,

B_n и оставшиеся два условия найти путем последовательных приближений. Поскольку, однако, для обеспечения периодичности траектории достаточно задать только r и s, то можно фиксировать три начальных условия, а частоту ω_r и четвертое условие найти с помощью рядов. Так как главными частотами в (2.6.39) являются, конечно, исходные частоты (2.6.36), то можно ожидать, что главными в фурье-разложении (2.6.39) будут члены с амплитудами $A_{\pm r}$ и $B_{\pm s}$. Выделение этих членов помогает достижению быстрой сходимости решения.

Для иллюстрации метода рассмотрим, следуя Баунтису [35], потенциал Хенона и Хейлеса, заданный выражением (1.4.4) (см. также рис. 1.11). Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\ddot{x} = -x - 2xy, \tag{2.6.40а}$$

$$\ddot{y} = -y + y^2 - x^2. \tag{2.6.40б}$$

Чтобы явно ввести фигурирующие в (2.6.36) частоты, перепишем эти уравнения в форме

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = \varepsilon\left[\left(\omega_1^2 - 1\right)x - 2xy\right], \tag{2.6.41а}$$

$$\ddot{y} + \omega_2^2 y = \varepsilon\left[\left(\omega_2^2 - 1\right)y + y^2 - x^2\right]. \tag{2.6.41б}$$

Правые части этих уравнений считаются в некотором смысле малыми, на что указывает введенный малый параметр ε. Уравнения (2.6.41) эквивалентны (2.6.33) [183]. Разложим теперь коэффициенты Фурье в (2.6.39) по степеням ε:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nj} e^{in\omega_r t},$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{nj} e^{in\omega_r t}. \tag{2.6.42}$$

Подставляя эти выражения в (2.6.41), получаем систему рекуррентных соотношений

$$\left(r^2 - n^2\right)\omega_r^2 A_{n,\,j+1} = \left(r^2\omega_r^2 - 1\right)A_{nj} - 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{kj} B_{n-k,\,j}, \tag{2.6.43а}$$

$$\left(s^2 - n^2\right)\omega_r^2 B_{n,\,j+1} = \left(s^2\omega_r^2 - 1\right)B_{nj} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{kj} B_{n-k,\,j} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{kj} A_{n-k,\,j}, \tag{2.6.43б}$$

из которых можно найти все коэффициенты, кроме главных $n = \pm r$ и $n = \pm s$, так как для последних левая часть уравнений обращается в нуль. Эти коэффициенты проще всего получить, задав

в дополнение к r и s три начальных условия. Выберем, например, $x = x_0$ при $t = 0$ и будем считать коэффициенты Фурье действительными ($A_n = A_{-n}$, $B_n = B_{-n}$), откуда следует $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$. Тогда амплитуда A_r определяется непосредственно из (2.6.42) с помощью рекуррентного соотношения

$$A_{r,\,j+1} = \frac{1}{2} x_0 - \frac{1}{2} A_{0j} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^{\infty} A_{nj}, \tag{2.6.44}$$

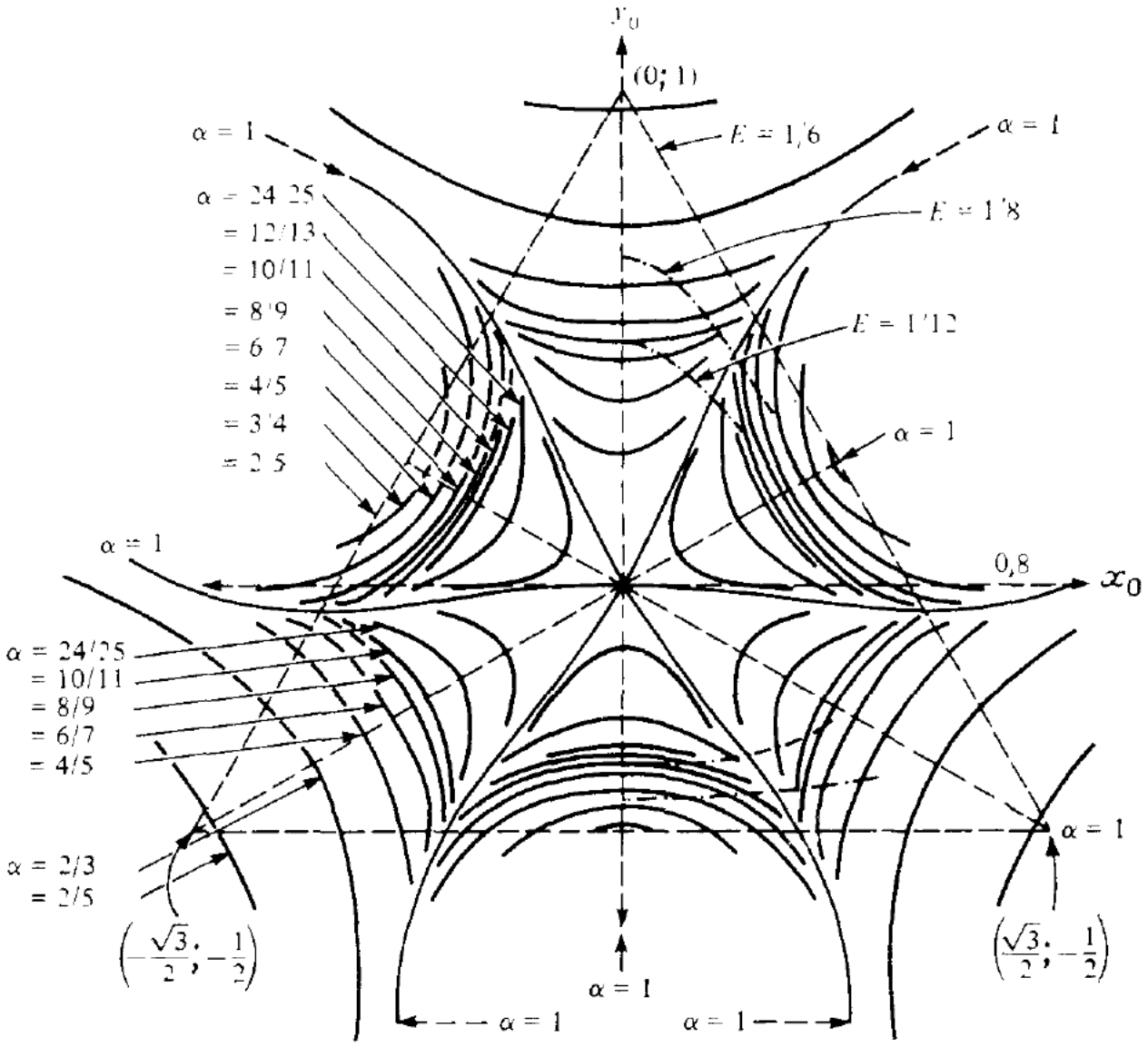


Рис. 2.15. Начальные условия x_0, y_0 периодических решений системы Хенона — Хейлеса при $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ для различных значений $\alpha \equiv s/r$, где s, r — взаимно простые числа (по данным работы [183]).

а частота находится из уравнения (2.6.43а) при нулевой левой части:

$$\omega_{r,\,j+1}^2 = \frac{1}{r^2 A_{rj}} \left[A_{rj} + 2 \sum_k A_{kj} B_{r-k,\,j} \right]. \tag{2.6.45}$$

Вместо того чтобы находить B_0 и B_s из уравнения (2.6.43б) при $n = 0$ и $n = s$ соответственно, обратим процедуру для ускорения сходимости. Если использовать уравнение (2.6.43б) с нулевой ле-

вой частью и единственными отличными от нуля коэффициентами $B_{0,0}$, $B_{\pm s,0}$ и $A_{\pm r,0}$, то в первом приближении имеем

$$\left(s^2\omega_r^2-1\right)-2B_{0,0}=0. \tag{2.6.46}$$

Это дает возможность найти B_s из рекуррентного соотношения, которое получается с помощью (2.6.43б) при $n=0$:

$$2B_{s,j+1}^2=B_{0j}-\sum_k\sum_{\pm s}B_{kj}^2+\sum_k A_{kj}^2. \tag{2.6.47}$$

Входящие сюда величины B_{0j} определяются в любом порядке из того же самого уравнения при $n=s$:

$$B_{0,j+1}=\frac{1}{2B_{sj}}\left[\left(1-s^2\omega_r^2\right)B_{sj}-\sum_k\sum_{0,s}B_{kj}B_{s-k,j}+\sum_k A_{kj}A_{s-k,j}\right]. \tag{2.6.48}$$

Соотношение (2.6.47) эквивалентно условию (2.6.35). Все остальные коэффициенты A_n и B_n получаются рекуррентно из уравнений (2.6.43) с некоторым разумным максимальным значением n. После этого начальное значение y определяется в любом порядке прямо из (2.6.39).

С помощью этой процедуры Баунтис [35] построил кривые зависимости начальных координат x_0, y_0 при постоянном значении отношения $\alpha=s/r$ и непрерывно изменяющейся частоте ω_r. Величины α выбраны так, чтобы наилучшим образом аппроксимировать значение $\alpha=1$ (отношение частот малых колебаний). Полученные результаты приведены на рис. 2.15. Каждая кривая постоянного α соответствует определенному диапазону непрерывного изменения ω_r. Однако зависимость решения от α разрывна, т. е. малые изменения α приводят к совершенно другим значениям ω_r, r и s.

Следуя подходу создателей метода, мы использовали уравнения движения в форме Лагранжа. Однако все это можно было бы проделать и в канонической форме с помощью подстановки $\dot{x}=p$, хотя для периодических траекторий такая формулировка не дает каких-либо очевидных преимуществ. Что на самом деле желательно, так это иметь дело с лагранжианами, содержащими невысокие степени координат. В противном случае метод становится слишком громоздким из-за необходимости перемножать сразу много рядов Фурье, что приводит к появлению многократных сумм в рекуррентных соотношениях для коэффициентов [1]).

[1]) В работе [473] предложен другой метод нахождения периодических траекторий, свободный от этих недостатков.— *Прим. ред.*

Глава 3

ОТОБРАЖЕНИЯ И ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Некоторые топологические соображения помогают наглядно представить, а затем и понять многомерное движение. Они естественно приводят к разностным уравнениям, т. е. к *отображению* динамической траектории системы на некоторое подпространство ее фазового пространства. В случае двух степеней свободы такие отображения дают простую и наглядную картину движения. Более того, использование отображений — обычно наиболее удобный путь проведения как аналитических и численных расчетов стохастического движения, так и математических доказательств существования различных типов траекторий. Вместе с тем регулярное движение, как мы видели в гл. 2, часто бывает удобно описывать дифференциальными уравнениями. Переход от дифференциальных уравнений (Гамильтона) к отображениям и *обратно* широко используется при анализе движения большинства нелинейных динамических систем.

Мы рассмотрим три случая возникновения отображений:

а) непосредственно из физической постановки задачи, например, для модели ускорения Ферми, которая обсуждалась в гл. 1 и подробно рассмотрена в § 3.4;

б) как результат последовательных пересечений динамической траектории с некоторой поверхностью [1]), например, в задаче Хенона — Хейлеса (гл. 1);

в) как результат аппроксимации движения, справедливой на некотором ограниченном интервале времени или только в некоторой области фазового пространства, например, в задаче о движении в окрестности сепаратрисы маятника под действием периодического возмущения (§ 3.5).

В этой главе мы рассмотрим канонические отображения для связанных нелинейных осцилляторов с произвольным числом N степеней свободы, но особенно подробно для $N = 2$.

В § 3.1 устанавливается связь между гамильтоновыми системами и каноническими отображениями путем использования метода сечения Пуанкаре в фазовом пространстве. На примере отображения поворота показывается, как построить отображение по

---

[1]) Так называемый метод сечения Пуанкаре (см. п. 1.2б).— *Прим. ред.*

данному гамильтониану и как по отображению восстановить гамильтониан. Эти результаты применимы, вообще говоря, к системам как с двумя, так и с бо́льшим числом степеней свободы.

В § 3.2 обсуждаются строгие математические результаты, касающиеся важных особенностей поведения системы, включая теорему КАМ, которая устанавливает устойчивость квазипериодических колебаний под действием достаточно малого возмущения. Проанализированы условия «умеренной» нелинейности, которая необходима для теоретического анализа регулярного движения. На основании теоремы Пуанкаре—Биркгофа о неподвижной точке рассматривается структура фазового пространства вблизи устойчивых и неустойчивых периодических траекторий, в том числе и стохастические слои. Излагая математические результаты, мы не стремимся к строгости. Читателям, интересующимся математическими аспектами теории, следует обратиться к обзорам Арнольда и Авеза [14] и Мозера [310], в которых приведены многие математические доказательства.

В § 3.3 мы рассмотрим линеаризованное движение и его устойчивость в окрестности неподвижных точек. Для иллюстрации применения этих методов к системам с двумя степенями свободы в § 3.4 рассматривается модель ускорения Ферми, описываемая с помощью отображения. Неподвижные точки (периодические решения) и их устойчивость исследуются аналитически и сравниваются с численными результатами. Получена также гамильтонова форма отображения. Наконец, в § 3.5 рассматривается задача о движении маятника под действием периодического возмущения в окрестности сепаратрисы. Производится переход от уравнений Гамильтона к отображению и рассмотрен характер линеаризованного движения. Такой подход был использован Чириковым [70] при анализе перехода от регулярного к стохастическому движению. Этот метод будет изложен в гл. 4. Он применяется также при оценке скорости диффузии Арнольда в гл. 6.

* § 3.1. Гамильтоновы системы как канонические отображения

* 3.1а. Интегрируемые системы

Рассмотрим осциллятор с двумя степенями свободы, гамильтониан которого H не зависит от времени. Так как система предполагается интегрируемой, то можно ввести переменные действие — угол (см. п. 1.2в) и

$$H(J_1, J_2) = E, \tag{3.1.1}$$

где E — сохраняющаяся энергия системы, а J_1, J_2 — интегралы движения. Сохранение энергии позволяет уменьшить размерность области движения в фазовом пространстве с четырех до трех. Со-

хранение любой из переменных действия позволяет привести эту область к двумерной поверхности в трехмерном пространстве постоянной энергии. Движение по этой поверхности можно параметризовать с помощью частот, соответствующих каждой из двух степеней свободы:

$$\theta_1 = \omega_1 t + \theta_{10}, \quad \theta_2 = \omega_2 t + \theta_{20}, \tag{3.1.2}$$

где угловые переменные определены по модулю 2π.

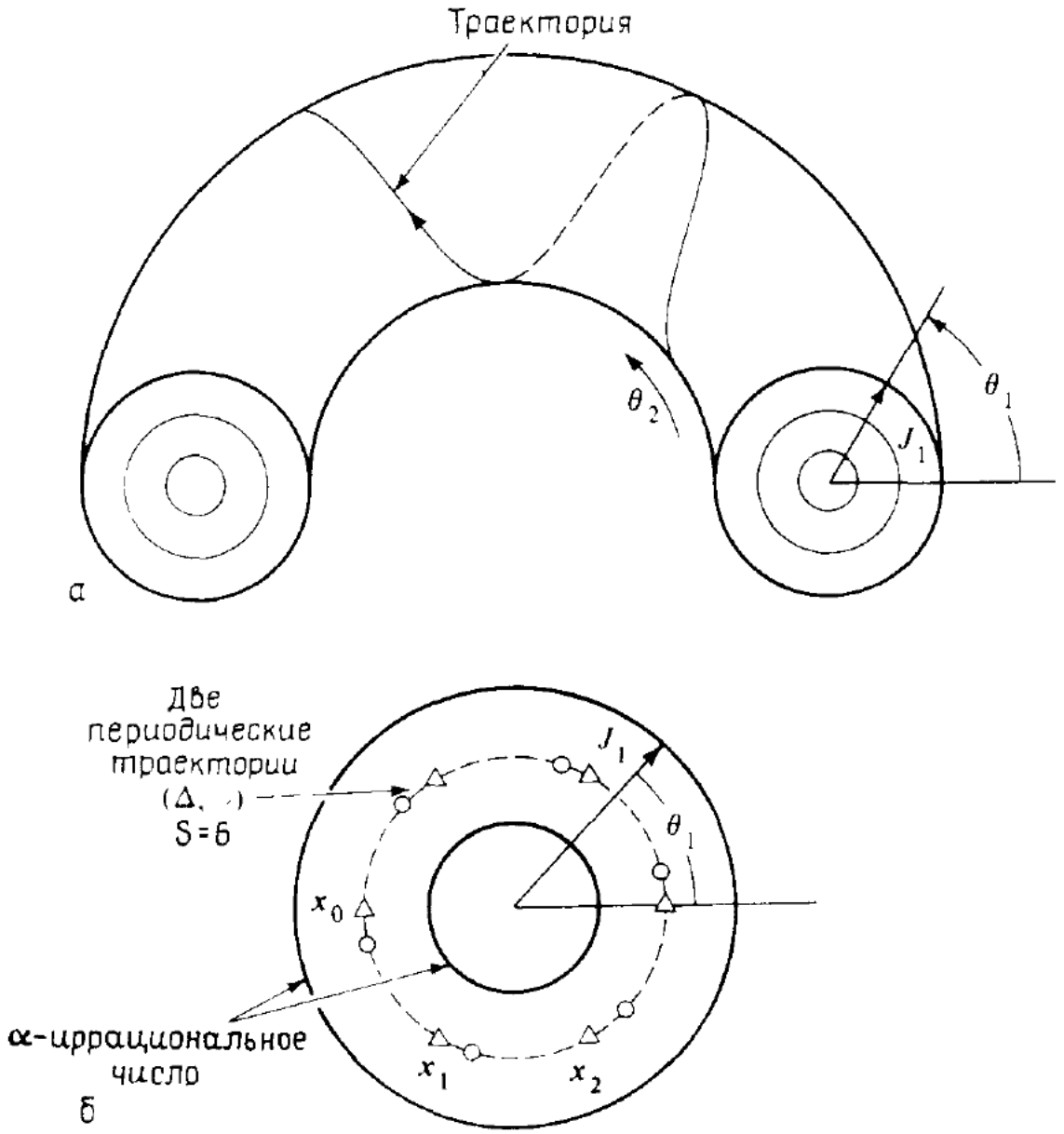


Рис. 3.1. Интегрируемая система с двумя степенями свободы.

а — движение на торе $J_1 = \text{const}$, $J_2 = \text{const}$; *б* — поверхность сечения Пуанкаре $\theta_2 = \text{const}$, треугольники и кружки — две периодические траектории ($s = 6$) с разными начальными условиями. Сплошные линии показывают большое число пересечений квазипериодической траектории.

Движение на торе. Движение описанной системы удобно представить как движение на торе в фазовом пространстве. Такое представление можно обобщить и на системы с бо́льшим числом степеней свободы. Зададим некоторую энергию E и рассмотрим одну из двух степеней свободы, скажем первую. Тогда J_1 параметризует инвариантные поверхности, т. е. задает «радиусы окружностей»,

а угол θ_1 характеризует положение системы на окружности. Для полного описания необходимо учесть угол θ_2, так что инвариантная поверхность оказывается тором, как показано на рис. 3.1, *а*.

Задание J_1 и E определяет также J_2, а вместе с ним и отношение

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \tag{3.1.3}$$

поскольку $\omega_1 = \omega_1(\boldsymbol{J})$ и $\omega_2 = \omega_2(\boldsymbol{J})$. При $\alpha = r/s$, где r, s — взаимно простые целые числа, частоты соизмеримы, и движение на торе вырождается в периодическую траекторию, которая замыкается после r оборотов по θ_1 и s оборотов по θ_2. В общем случае α — иррациональное число, и траектория покрывает всю поверхность тора. Поскольку r и s могут быть очень большими, периодические траектории расположены в фазовом пространстве всюду плотно.

Представление о движении на торе особенно полезно, потому что его можно обобщить и на системы с более чем двумя степенями свободы. Сохранение каждой из переменных действия уменьшает размерность инвариантной поверхности на единицу. Так, если у системы с N степенями свободы в $2N$-мерном фазовом пространстве все N переменных действия сохраняются, движение происходит по N-мерной поверхности, или многообразию, и описывается N угловыми переменными. Топологически эта поверхность является *N-мерным тором*, т. е. по аналогии с рис. 3.1,*а* N фазовых переменных взаимно ортогональны и определены по модулю 2π, а положение поверхности задается переменными действия.

Важным следствием этих представлений является то, что в произвольных канонических переменных

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) \tag{3.1.4}$$

движение интегрируемой системы можно записать в виде

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{J}) e^{i(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\beta})}, \tag{3.1.5а}$$

$$\boldsymbol{q}(t) = \sum_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{J}) e^{i(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\beta})}, \tag{3.1.5б}$$

где $\boldsymbol{m}$ — целочисленный, а $\boldsymbol{\beta}$ — постоянный N-мерные векторы. Уравнения (3.1.5) следуют из фурье-разложения по угловым переменным и в общем случае описывают квазипериодические колебания $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

Для получения периодического решения положим [1])

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0. \tag{3.1.6}$$

Так как вектор $\boldsymbol{m}$ имеет целочисленные компоненты, то отношение частот ω_i является рациональным числом, т .е. $\omega_i = n_i\omega_0$, где це-

[1]) Имеется в виду, что $N = 2$.— *Прим. ред.*

лые числа n_i не имеют общего множителя. Траектория замыкается через период

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi n_i}{\omega_i}, \tag{3.1.7}$$

где n_i — число оборотов по i-й степени свободы с частотой ω_i.

Отображение поворота. При изучении фазовых траекторий, особенно в случае двух степеней свободы, удобно использовать метод сечения Пуанкаре, подробно описанный в п. 1.2б. Для гамильтониана (3.1.1) в качестве поверхности сечения можно выбрать либо плоскость (J_1, θ_1) $(\theta_2 = \text{const})$, либо плоскость (J_2, θ_2) $(\theta_1 = \text{const})$. В первом случае последовательные пересечения с плоскостью (J_1, θ_1) отделены друг от друга интервалом времени $\Delta t = 2\pi/\omega_2$, причем $J_1 = \text{const}$ (см. рис. 3.1, *а*). За это время θ_1 увеличивается на $\omega_1 \Delta t = 2\pi\alpha(J_1)$, где α — число вращения. Так как $J_2 = J_2(J_1, E)$, то при заданном E величину α можно считать функцией только J_1. Опуская для упрощения записи индекс 1, получаем уравнения, описывающие переход от n-го к $(n+1)$-му пересечению:

$$J_{n+1} = J_n, \tag{3.1.8а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}), \tag{3.1.8б}$$

где для дальнейшего мы записали α как функцию J_{n+1}, а не J_n. Отображение (3.1.8) называется *отображением поворота* [1]). При таком отображении окружности переходят в себя, но число вращения зависит, вообще говоря, от радиуса окружности. При иррациональном α любая траектория равномерно заполняет окружность при $n \to \infty$. При рациональном $\alpha = r/s$, где r и s — взаимно простые числа, получаются периодические траектории с периодом s итераций. Две такие траектории с $s = 6$ показаны на рис. 3.1, *б*.

Отображение поворота не обязательно записывать в переменных действие — угол. Например, уравнения

$$x_{n+1} = x_n \cos\psi - y_n \sin\psi, \tag{3.1.9а}$$

$$y_{n+1} = x_n \sin\psi + y_n \cos\psi, \tag{3.1.9б}$$

где ψ — параметр, определяют линейное отображение поворота. Возмущение этого отображения будет описано в п. 3.2г.

Как отмечалось в п. 1.2б, двумерное отображение поворота должно сохранять площадь:

$$\frac{\partial(J_{n+1}, \theta_{n+1})}{\partial(J_n, \theta_n)} \equiv [\theta_{n+1}, J_{n+1}] = 1. \tag{3.1.10}$$

Аналогичное соотношение выполняется и для (3.1.9).

---

[1]) В оригинале — twist mapping (закручивающее отображение). — *Прим. перев.*

Эти результаты обобщаются и на интегрируемые системы с N степенями свободы ($H = \text{const}$). Выбирая, скажем, $Q_N = \text{const}$ в качестве поверхности сечения, получаем отображение поворота для $N-1$ оставшихся пар переменных действие — угол:

$$\boldsymbol{J}_{n+1} = \boldsymbol{J}_n, \tag{3.1.11а}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \boldsymbol{\theta}_n + 2\pi\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J}_{n+1}), \tag{3.1.11б}$$

где $\alpha_i = \omega_i/\omega_N$ — число вращения для i-й пары. Условия на скобки Пуассона, эквивалентные сохранению площади двумерного отображения, очевидно выполняются.

* 3.1б. Системы, близкие к интегрируемым

Отображения, сохраняющие площадь. Рассмотрим малое возмущение интегрируемой системы с двумя степенями свободы. При этом гамильтониан зависит от угловых переменных

$$H(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\boldsymbol{J}) + \varepsilon H_1(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}). \tag{3.1.12}$$

На поверхности сечения $\theta_2 = \text{const} \pmod{2\pi}$ отображение поворота (3.1.8) перейдет теперь в *возмущенное отображение поворота*

$$J_{n+1} = J_n + \varepsilon f(J_{n+1}, \theta_n), \tag{3.1.13а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}) + \varepsilon g(J_{n+1}, \theta_n), \tag{3.1.13б}$$

где f и g — периодические функции θ. Так как это отображение получается из гамильтоновых уравнений, оно должно сохранять площадь. Мы выбрали функции f и g зависящими от J_{n+1}, а не от J_n, так что сохранение площади принимает особенно простую форму. В самом деле, соотношения (3.1.13) можно получить из производящей функции

$$F_2 = J_{n+1}\theta_n + 2\pi\mathscr{A}(J_{n+1}) + \varepsilon\mathscr{G}(J_{n+1}, \theta_n), \tag{3.1.14}$$

причем

$$\alpha = d\mathscr{A}/dJ_{n+1}, \tag{3.1.15а}$$

$$f = -\partial\mathscr{G}/\partial\theta_n, \tag{3.1.15б}$$

$$g = \partial\mathscr{G}/\partial J_{n+1}, \tag{3.1.15в}$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial J_{n+1}} + \frac{\partial g}{\partial \theta_n} = 0, \tag{3.1.16}$$

и площадь сохраняется. Метод преобразований Ли ([108], см. также § 2.5) позволяет получить отображения, в которых J_{n+1} и θ_{n+1} явно выражаются через J_n и θ_n. Однако они неудобны для наших целей.

Если f зависит от J_{n+1}, то J_{n+1} зависит от J_n неявно [см. (3.1.13а)]. Численно величину J_{n+1} легко найти, используя метод

касательных Ньютона или метод последовательных приближений, в котором новое приближение $J_{n+1}^{(i)}$ находится путем подстановки предыдущего J_{n+1}^{i-1} в функцию f. Оба метода обеспечивают быструю сходимость (см. § 2.6) [1]).

Во многих интересных случаях f не зависит от J и $g \equiv 0$. Тогда (3.1.13) принимают вид *явного отображения поворота* [2]):

$$J_{n+1} = J_n + \varepsilon f(\theta_n), \tag{3.1.17а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}). \tag{3.1.17б}$$

В дальнейшем мы подробно рассмотрим два таких отображения: упрощенное отображение Улама (§ 3.4) и сепаратрисное отображение (§ 3.5).

Если линеаризовать (3.1.17б) в окрестности неподвижной точки $J_{n+1} = J_n = J_0$, для которой $\alpha(J_0)$ — целое число, то

$$J_n = J_0 + \Delta J_n. \tag{3.1.18}$$

Вводя новую переменную действия

$$I_n = 2\pi\alpha' \Delta J_n, \tag{3.1.19}$$

приходим к *обобщенному стандартному отображению*

$$I_{n+1} = I_n + Kf^*(\theta_n), \tag{3.1.20а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}, \quad \mathrm{mod}\, 2\pi. \tag{3.1.20б}$$

Здесь

$$K = 2\pi\alpha'\varepsilon f_{\text{макс}} \tag{3.1.21}$$

— *параметр стохастичности*, а $f^* = f/f_{\text{макс}}$ — приведенное изменение переменной действия, нормированное на единицу. Таким образом, обобщенное стандартное отображение локально (по J) и эквивалентно произвольному возмущенному отображению поворота. В случае $f^* = \sin\theta_n$ оно переходит в *стандартное отображение* (известное также, как отображение Чирикова — Тейлора)

$$I_{n+1} = I_n + K\sin\theta_n, \tag{3.1.22а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}. \tag{3.1.22б}$$

Отображение (3.1.22) использовалось Чириковым [70] и Грином [165] для оценки перехода от регулярного движения к хаотическому. Эти вопросы рассмотрены в гл. 4.

Достаточно симметричные отображения можно представить в виде произведения более простых отображений. Представление явного отображения поворота как произведения двух *инволюций* и ис-

---

[1]) Обсуждение важного вопроса о существовании и единственности решения для неявного отображения, а также условий сходимости последовательных приближений содержится в работе [474].— *Прим. ред.*

[2]) В оригинале — radial twist mapping (радиальное закручивающее отображение).— *Прим. перев.*

пользование такого представления для нахождения неподвижных точек описано в п. 3.3б и 3.4г.

Обобщение возмущенного отображения поворота на случай большего числа степеней свободы при $H = \text{const}$ получается с помощью производящей функции

$$F_2 = \boldsymbol{J}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\theta}_n + 2\pi \mathscr{A}(\boldsymbol{J}_{n+1}) + \varepsilon \mathscr{G}(\boldsymbol{J}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_n). \tag{3.1.23}$$

Отсюда находим $(N-1)$ пару канонических (по построению из F_2) отображений

$$\boldsymbol{J}_{n+1} = \boldsymbol{J}_n + \varepsilon \boldsymbol{f}(\boldsymbol{J}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_n), \tag{3.1.24а}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \boldsymbol{\theta}_n + 2\pi \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J}_{n+1}) + \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{J}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_n). \tag{3.1.24б}$$

Если $\mathscr{G}$ не зависит от $\boldsymbol{J}_{n+1}$, получается $(2N-2)$-мерное явное отображение поворота. Примером такого отображения могут служить разностные уравнения в задаче о бильярде. Эта задача упоминалась в п. 1.4б и подробно рассмотрена в гл. 6.

Вводя $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta})$, можно символически записать все такие отображения в виде

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = T\boldsymbol{x}_n. \tag{3.1.25}$$

* 3.1в. Уравнения Гамильтона и отображения

Как уже отмечалось, переход от уравнений Гамильтона к отображению и обратно используется при анализе движения динамических систем. Как мы увидим в следующем параграфе, типичное поведение гамильтоновых систем описывается обычно в терминах отображений. Используя отображение, легко провести также численное моделирование нелинейных колебаний на времени порядка миллионов периодов. Наконец, аналитический вывод диффузионных уравнений для хаотического движения получается, опять-таки исходя из отображений. Вместе с тем регулярные свойства отображений часто легче получить из уравнений Гамильтона. Как мы увидим ниже, отображения можно представить в виде некоторых специальных уравнений Гамильтона. Это позволяет связать анализ отображений с общей теорией гамильтоновых систем. Покажем сначала, как перейти от уравнений Гамильтона к отображению, и наоборот.

Переход к отображению. Для двух степеней свободы функции f и g возмущенного отображения поворота (3.1.13) можно найти в первом порядке по ε следующим образом. Интегрируя уравнение Гамильтона

$$\frac{dJ_1}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1} \tag{3.1.26}$$

на одном периоде движения по θ_2, получаем

$$\Delta J_1 = -\varepsilon \int_0^{T_2} dt \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1} (J_{n+1},\ J_2,\ \theta_n + \omega_1 t,\ \theta_{20} + \omega_2 t), \quad (3.1.27)$$

где (напомним) J_2, ω_1 и ω_2 — функции J_{n+1}, и использованы невозмущенные переменные $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{\theta}$, т. е. интегрирование производится по невозмущенной траектории. Изменение переменной действия J определяется соотношением

$$\varepsilon f(J_{n+1},\ \theta_n) = \Delta J_1 (J_{n+1},\ \theta_n). \quad (3.1.28)^1)$$

Соответствующее изменение фазы наиболее удобно определить из условия сохранения площади (3.1.16). Для возмущенного отображения поворота это дает

$$g(J,\ \theta) = -\int \frac{\partial f}{\partial J} d\theta. \quad (3.1.29)$$

В случае явного отображения поворота $g \equiv 0$.

При вычислении изменения одной из переменных действия не обязательно выражать невозмущенное движение по остальным степеням свободы в переменных действие—угол. Для гамильтониана

$$H = H_0 (J_1,\ p_2,\ q_2) + \varepsilon H_1 (J_1,\ \theta_1,\ p_2,\ q_2). \quad (3.1.30)$$

Уравнение (3.1.26) остается прежним, откуда с точностью до ε имеем

$$\Delta J_1 = -\varepsilon \int_0^{T_2} dt \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1} (J_{n+1},\ \theta_n + \omega_1 t,\ p_2(t),\ q_2(t)). \quad (3.1.31)$$

Мы вернемся к этому выражению при рассмотрении сепаратрисного отображения в § 3.5.

Описанная процедура обобщается и на случай N степеней свободы, что приводит к изменению $N-1$ переменной действия

$$\Delta \boldsymbol{J} = -\varepsilon \int_0^{T_N} dt \frac{\partial H_1}{\partial \theta} (\boldsymbol{J}_{n+1},\ J_N,\ \boldsymbol{\theta}_n + \boldsymbol{\omega} t,\ \theta_N + \omega_N t) \quad (3.1.32)$$

и $\varepsilon \boldsymbol{f} = \Delta \boldsymbol{J}$. Как и в (3.1.15), функция $\mathscr{G}$ в (3.1.23) находится путем интегрирования $\boldsymbol{f}$ по θ_n, откуда $\boldsymbol{g} = \partial \mathscr{G} / \partial \boldsymbol{J}_{n+1}$, и отображение (3.1.24) полностью определено.

Переход к уравнениям Гамильтона. Рассмотрим явное отображение поворота (3.1.17). Часто бывает желательно представить отображе-

---

[1]) В этом соотношении J_2 выражено с точностью до ε через J_1 из гамильтониана $H_0(J_1,\ J_2) = \text{const}$. — *Прим. ред.*

ние в форме уравнений Гамильтона, причем роль «времени» играет номер итерации n [1]). Это можно сделать, вводя в (3.1.17а) периодическую дельта-функцию:

$$\delta_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) = 1 + 2\sum_{q=1}^{\infty} \cos 2\pi q n, \tag{3.1.33}$$

где последнее выражение есть разложение Фурье. Тогда (3.1.17) принимает вид

$$\frac{dJ}{dn} = \varepsilon f(\theta)\,\delta_1(n), \tag{3.1.34а}$$

$$\frac{d\theta}{dn} = 2\pi\alpha(J), \tag{3.1.34б}$$

где $J(n)$, $\theta(n)$ — значения величин J_n, θ_n как раз перед моментом «времени» n. Уравнения (3.1.34) имеют гамильтонову форму и соответствуют гамильтониану

$$\widetilde{H}(J,\ \theta,\ n) = 2\pi \int \alpha(J)\,dJ - \varepsilon\delta_1(n) \int f(\theta)\,d\theta. \tag{3.1.35}$$

Отметим, что гамильтониан $\widetilde{H}$ этой системы с одной степенью свободы явно зависит от времени [2]). Описанный метод легко обобщается и на случай явного отображения поворота с N степенями свободы. Мы используем гамильтониан (3.1.35) для отображения Улама в § 3.4.

*§ 3.2. Типичное поведение канонических отображений

Рассмотрим общее поведение системы связанных нелинейных осцилляторов и структуру их фазового пространства. Основным результатом здесь является теорема КАМ, гарантирующая существование инвариантных торов для систем как с двумя, так и с бо́льшим числом степеней свободы. Однако некоторые следствия теоремы КАМ существенно различаются для этих двух случаев. Так, диффузия Арнольда возможна лишь в последнем случае. Мы отложим обсуждение этого вопроса до гл. 6. Здесь же для иллюстрации теоремы КАМ и характерной структуры фазового пространства мы ограничимся рассмотрением двумерных (сохраняющих площадь) отображений с некоторыми естественными обобщениями на случай большего числа степеней свободы.

---

[1]) При этом считается, что n изменяется непрерывно. Напомним также, что «время» n не совпадает с физическим временем t ($dn/dt \approx \omega_N/2\pi$), причем зависимость $t(n)$ может быть очень сложной, так как $\omega_N = \omega_N(J_1)$, а J_1 — может изменяться хаотически.— *Прим. ред.*

[2]) И конечно, совершенно не похож на исходный физический гамильтониан H с двумя степенями свободы. Тем не менее траектории обеих систем совпадают для целочисленных моментов «времени» n. Однако для привязки к физическому времени t необходимо знать зависимость $\omega_2(J_1) \approx \omega_2(J_1, J_2(H_0, J_1))$, или исходный гамильтониан $H_0(J_1, J_2)$.— *Прим. ред.*

* 3.2а. Иррациональные числа вращения и теория КАМ

С учетом возмущения гамильтониан системы зависит от угловых переменных (3.1.12) и, как мы видели в гл. 2, резонансы между степенями свободы могут нарушить сходимость рядов теории возмущений. Тем не менее можно доказать теорему (теорема КАМ), согласно которой при выполнении определенных (перечисленных ниже) условий существуют инвариантные торы

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_0 + \boldsymbol{v}(\xi, \varepsilon), \tag{3.2.1а}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \xi + \boldsymbol{u}(\xi, \varepsilon). \tag{3.2.1б}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ периодичны по ξ и равны нулю при $\varepsilon = 0$, а вектор ξ связан с невозмущенными частотами [1]) на торе соотношением $\dot{\xi} = \boldsymbol{\omega}$. Условия применимости теоремы КАМ следующие:

1) частоты должны быть линейно независимы в некоторой области $\boldsymbol{J}$ (условие нелинейности невозмущенных колебаний [2]))

$$\sum_i m_i \omega_i(\boldsymbol{J}) \neq 0, \tag{3.2.2}$$

где ω_i — компоненты вектора $\boldsymbol{\omega} = \partial H_0/\partial \boldsymbol{J}$, а m_i — компоненты целочисленного вектора $\boldsymbol{m}$;

2) возмущение должно иметь достаточно большое число непрерывных производных (условие гладкости возмущения);

3) система должна находиться достаточно далеко от всех резонансов, так что

$$|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega}| \geqslant \gamma |\boldsymbol{m}|^{-\tau} \tag{3.2.3}$$

для всех $\boldsymbol{m}$. Здесь τ зависит от числа степеней свободы и гладкости возмущения H_1, а γ зависит от величины возмущения εH_1 и нелинейности G невозмущенного гамильтониана H_0.

Поскольку неравенство (3.2.3) не может выполняться при слишком большом значении γ, которое растет с $|\varepsilon H_1|$ и $1/G$, инвариантные торы существуют лишь при достаточно малой величине возмущения. Из условий 1 и 3 следует также и условие *умеренной нелинейности* [3]). Если условия теоремы выполнены, то, например, окружности отображения поворота слегка деформируются под действием возмущения, не изменяя топологии, как это показано для сечения инвариантного тора на рис. 3.2, *а*.

---

[1]) Лучше было бы сказать средними частотами, поскольку успех теории КАМ связан прежде всего с фиксацией средних частот, а не начальных условий, как это обычно делается (см. примечание редактора на с. 168). Именно для этих фиксированных частот и справедливы условия (3.2.2) и (3.2.3), приведенные ниже.— *Прим. ред.*

[2]) Это последнее условие имеет вид: $\det(\partial\omega_i/\partial J_k) \neq 0$ [см. (3.2.10)]; условие же (3.2.2) следует из (3.2.3).— *Прим. ред.*

[3]) См. (3.2.36).— *Прим. перев.*

Эта теорема была доказана Арнольдом [10] для аналитического возмущения H_1 на основе работы Колмогорова [229] и Мозером [308] при условии существования достаточно большого числа не-

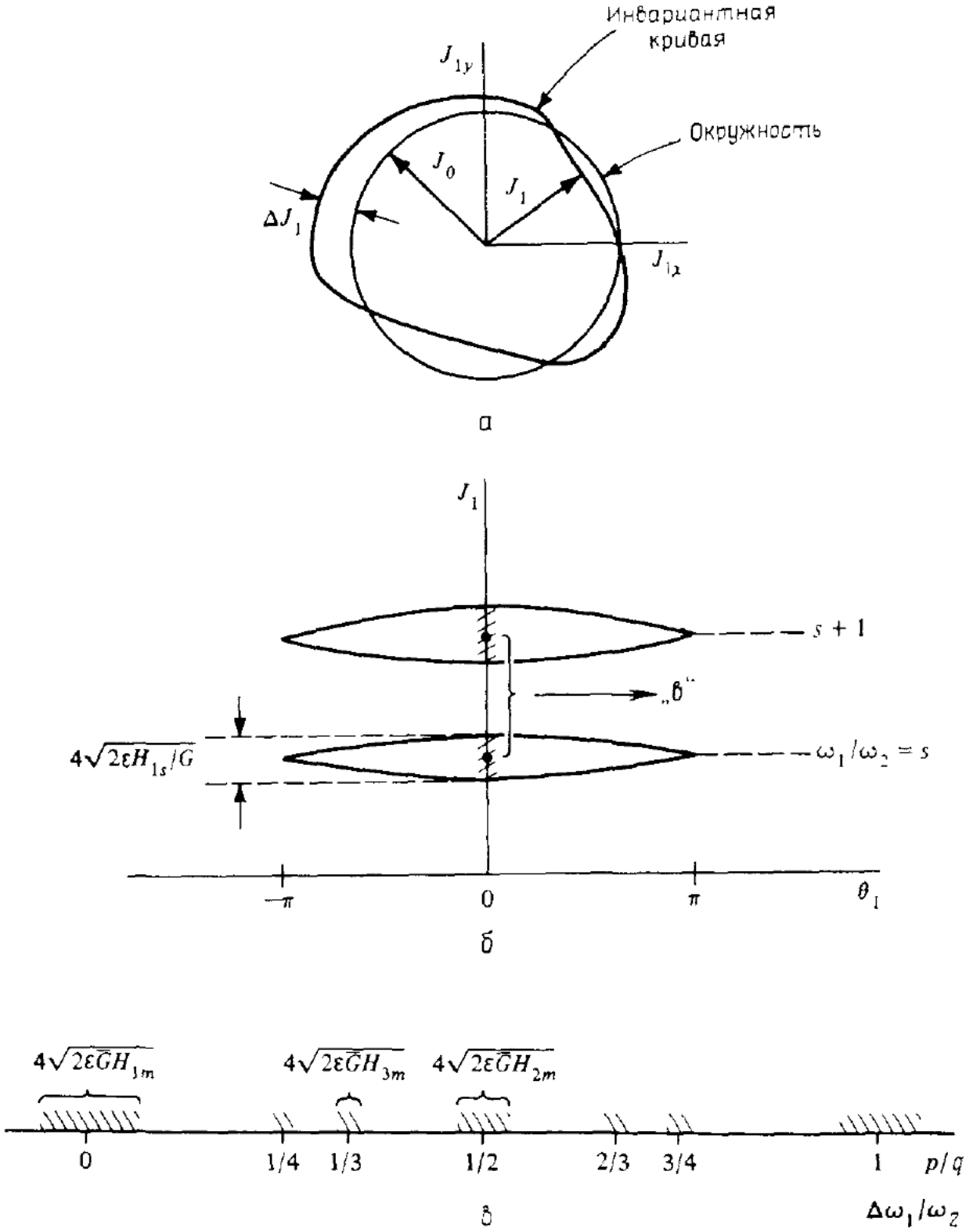


Рис. 3.2. К теории КАМ.

а — в нелинейной системе возмущенная инвариантная кривая лежит вблизи невозмущенной (окружность); *б* — целые резонансы; *в* — дробные резонансы между двумя целыми резонансами *б*; области резонансов заштрихованы; $\Delta\omega_1 = G\Delta J_1$; $\Delta\omega_1/\omega_2 = (\omega_1/\omega_2) - s$.

прерывных производных. Теорема устанавливает существование интегралов движения для многомерных нелинейных колебаний. Как признание важности работ указанных авторов ее принято на-

зывать теоремой КАМ. Ниже мы обсудим смысл теоремы, идею доказательства и значение условий ее применимости.

Проиллюстрируем трудности доказательства теоремы на примере двумерного отображения поворота (3.1.13). Последовательные пересечения возмущенной траектории с поверхностью $\theta_2 = \text{const}$ (см. рис. 3.1, *а*) описываются разностными уравнениями, которые определяют новые значения переменных J_1, θ_1 на поверхности сечения через их предыдущие значения. Предположим, что инвариантная кривая вида (3.2.1а) удовлетворяет уравнению

$$J_1(\theta_1 + 2\pi\alpha) = J_1(\theta_1) + v(\theta_1), \tag{3.2.4}$$

где $v(\theta_1)$ — некоторая известная периодическая функция. Попробуем решить это уравнение путем разложения в ряд Фурье по θ_1:

$$J_1(\theta_1) = \sum_k a_k e^{ik\theta_1}; \qquad v(\theta_1) = \sum_k b_k e^{ik\theta_1}. \tag{3.2.5}$$

Тогда

$$J_1(\theta_1 + 2\pi\alpha) - J_1(\theta_1) = -\sum_k a_k [1 - \exp(ik2\pi\alpha)] \exp(ik\theta_1), \tag{3.2.6}$$

откуда

$$a_k = -\frac{b_k}{1 - \exp(ik\,2\pi\alpha)}. \tag{3.2.7}$$

Коэффициенты a_k убывают медленнее, чем b_k, а при рациональных α некоторые из них не определены. В этом и состоит проблема малых знаменателей, препятствующих сходимости рядов теории возмущений. Если α зависит от J_1, то величину J_1 нужно выбирать так, чтобы ни один знаменатель не оказался резонансным. Для этого необходимо соответствующим образом изменить процедуру разложения, а также потребовать достаточно быстрого убывания коэффициентов b_k. Доказательства теоремы КАМ чрезвычайно сложны и мы не будем их здесь излагать. Основная идея доказательства состоит в изменении начальных условий на каждом шаге разложения таким образом, чтобы все время оставаться достаточно далеко от всех резонансов и тем самым иметь возможность продолжать разложение.

Нелинейность [1]). Мы уже знаем, что при наличии резонанса между степенями свободы невозмущенной системы фазовые траектории

[1]) В оригинале — linear independence or sufficient nonlinearity (линейная независимость, или достаточная нелинейность). Термин «линейная независимость частот» обычно связывается только с условием вида (3.2.2), которое может выполняться и для линейного осциллятора с постоянными частотами. Поэтому в переводе используется в этом случае термин «нелинейность (колебаний)», понимаемый в смысле условия (3.2.10), приведенного ниже.— *Прим. ред.*

существенно искажаются под действием возмущения. Если невозмущенные частоты зависят от переменных действия, то изменения последних выводят систему из резонанса и тем самым ограничивают эти изменения. Если максимальные колебания J много меньше невозмущенного значения J_0, то возможно существование инвариантных кривых, расположенных «вблизи» невозмущенных $J = J_0$. В этом и состоит смысл условия нелинейности невозмущенных колебаний. Это условие гарантирует, что в выражении (3.2.1а) $\boldsymbol{v}(\xi, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Чтобы полнее изучить этот вопрос, найдем условие линейной зависимости частот. Для простоты рассмотрим систему с двумя степенями свободы и предположим, что частоты $\omega_1(J_1, J_2)$ и $\omega_2(J_1, J_2)$ связаны соотношением

$$f(\omega_1, \omega_2) = 0.$$

Дифференцируя, получаем

$$df = \frac{\partial f}{\partial \omega_1}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial J_1} dJ_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial J_2} dJ_2\right) + \\ + \frac{\partial f}{\partial \omega_2}\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial J_1} dJ_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial J_2} dJ_2\right) = 0$$

для любых dJ_1 и dJ_2. Это уравнение удобно записать в матричном виде

$$\boldsymbol{\omega}_J \cdot \boldsymbol{f}_\omega = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial J_1} & \dfrac{\partial \omega_2}{\partial J_1} \\ \dfrac{\partial \omega_1}{\partial J_2} & \dfrac{\partial \omega_2}{\partial J_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \omega_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \omega_2} \end{pmatrix} = 0. \qquad (3.2.8)$$

Если $\det \boldsymbol{\omega}_J \neq 0$, то единственное решение: $\boldsymbol{f}_\omega = 0$. Это означает, что не существует справедливого для всех J соотношения вида

$$f = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = 0. \qquad (3.2.9)$$

Следовательно, необходимое условие *нелинейности* колебаний можно записать в виде [1])

$$\det \boldsymbol{\omega}_J \neq 0. \qquad (3.2.10)$$

Именно в такой форме его обычно и приводят.

Для некоторого заданного резонанса условие (3.2.10) можно ослабить, потребовав лишь, чтобы частота не оставалась постоянной [2]) вдоль направления фактического приращения $\boldsymbol{J}$. Действи-

---

[1]) В теории КАМ это условие необходимо для компенсации сдвига частот из-за возмущения ($\Delta\boldsymbol{\omega}$) путем изменения начальных условий ($\Delta\boldsymbol{J}$), т. е. для разрешимости системы линейных уравнений $\Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_J \cdot \Delta\boldsymbol{J}$ относительно $\Delta\boldsymbol{J}$. — *Прим. ред.*

[2]) Точнее, чтобы не сохранялось условие резонанса $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0$. — *Прим. ред.*

тельно, рассмотрим систему с двумя степенями свободы и гамильтонианом (2.4.1):

$$H = H_0(J_1,\ J_2) + \varepsilon \sum_{l,\,m} H_{lm}(J_1,\ J_2)\, e^{i(l\theta_1 - m\theta_2)}. \qquad (3.2.11)$$

Выбирая резонанс с $l = r$, $m = s$ и $\omega_2/\omega_1 = r/s$, подставляя в (3.2.8) с $\partial f/\partial\omega_1 = r$, $\partial f/\partial\omega_2 = -s$ и учитывая, что из уравнений Гамильтона $dJ_1/dJ_2 = -r/s$, получаем условие на нелинейность в виде

$$r^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_1^2} - 2rs \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_1 \partial J_2} + s^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_2^2} \neq 0; \qquad (3.2.12)$$

оно используется также при доказательстве теоремы КАМ. В случае произвольного числа степеней свободы аналогичный результат приведен в § 3.3 работы [70]:

$$m_i \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_j} m_j \neq 0. \qquad (3.2.13)$$

Поучительно получить соотношение (3.2.12) с помощью резонансной теории возмущений (§ 2.4). Используя производящую функцию (2.4.5),

$$F_2 = (r\theta_1 - s\theta_2)\tilde{J}_1 + \theta_2 \tilde{J}_2, \qquad (3.2.14)$$

перейдем в гамильтониане (3.2.11) к новым переменным (2.4.6). Разлагая гамильтониан в окрестности резонансного значения переменной действия и усредняя по быстрой фазе, находим в низшем порядке по ε:

$$\Delta\tilde{H} = \frac{\partial^2 \tilde{H}_0}{\partial \tilde{J}_1^2} \frac{(\Delta\tilde{J}_1)^2}{2} + 2\varepsilon H_{rs} \cos\tilde{\theta}_1, \qquad (3.2.15)$$

где для простоты амплитуда H_{rs} принята действительной. Если $\partial^2\tilde{H}_0/\partial\tilde{J}_1^2$, то нелинейность появляется лишь в более высоком порядке, и ширина сепаратрисы не будет ограничена величиной порядка $\varepsilon^{1/2}$. Таким образом, мы получили условие на нелинейность, эквивалентное (3.2.12):

$$G = \frac{\partial^2 \tilde{H}_0}{\partial \tilde{J}^2} \neq 0. \qquad (3.2.16)$$

Это условие разделяет системы на *невырожденные* $(\partial^2\tilde{H}_0/\partial\tilde{J}_1^2 \neq 0)$, или *сильно нелинейные*, и *вырожденные* $(\partial^2\tilde{H}_0/\partial\tilde{J}_1^2 = 0)$, или *слабо нелинейные*. Именно невырожденные системы удовлетворяют условиям теоремы КАМ. Покажем эквивалентность условий (3.2.16) и (3.2.12). Представляя (3.2.16) в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_0}{\partial \tilde{J}_1^2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{J}_1}\left(\frac{\partial H_0}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial \tilde{J}_1} + \frac{\partial H_0}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \tilde{J}_1}\right) \neq 0 \qquad (3.2.17)$$

и учитывая, что $\partial J_1/\partial\tilde{J}_1 = r$, а $\partial J_2/\partial\tilde{J}_1 = -s$, получаем (3.2.12).

Величину необходимой нелинейности G при заданном ε можно оценить, потребовав, чтобы максимальное изменение переменной действия ΔJ_1 было много меньше невозмущенного значения J_0. Полная ширина сепаратрисы равна $\Delta J_1 = r\Delta\tilde{J}_1$. Используя (3.2.15), находим

$$4r\left(\frac{2\varepsilon H_{rs}}{G}\right)^{1/2} \ll J_0,$$

или

$$G \gg \frac{32r^2\varepsilon H_{rs}}{J_0^2}. \tag{3.2.18}$$

Вырождение, при котором не выполняется условие (3.2.10), встречается во многих системах, представляющих физический интерес. Возникает естественный вопрос: существуют ли инвариантные кривые для таких систем? Представляется, что обычно, хотя и не всегда, общая структура теории КАМ сохраняется и в этом случае [1]). Мы уже рассматривали два таких примера: задачу Хенона—Хейлеса (§ 1.4) и резонанс волна—частица (§ 2.4). Еще один пример — «эффекты встречи» в накопительных кольцах [404] [2]). Во всех этих задачах не зависящая от фаз часть гамильтониана имеет вид

$$H_0 = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{J} + \varepsilon H_{10}(\boldsymbol{J}), \tag{3.2.19}$$

а нелинейность возникает из члена возмущения с $\boldsymbol{m} = 0$. Хотя величина нелинейности G порядка ε, условие на нелинейность (3.2.18) все еще может выполняться. Таким образом, инвариантные кривые могут существовать и для вырожденных систем. Если теперь рассмотреть резонансы второго и более высоких порядков, как это было сделано в § 2.4, то соответствующие им гамильтонианы оказываются, как правило, невырожденными. Таким образом, структура фазового пространства вырожденных и невырожденных систем является, вообще говоря, сходной.

Отметим, что есть также особые случаи вырождения, когда инвариантные кривые не существуют. Интересным примером служит система, рассмотренная Лансфордом и Фордом [286], а также Контопулосом [89]. Следуя Контопулосу, запишем гамильтониан системы в виде

$$H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + \varepsilon\,[\alpha\cos(m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + m_3\theta_3) + \\ + \beta\cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2 + n_3\theta_3)], \tag{3.2.20}$$

где α и β — некоторые нелинейные функции I_i, а m_i, n_i — целые числа. Так как гамильтониан зависит только от двух линейных

---

[1]) Обобщение на вырожденные системы проведено Арнольдом и Мозером (см. [11], § 10 и [374], § 34).— *Прим. ред.*

[2]) См. также [207].— *Прим. ред.*

комбинаций фаз, то преобразование вида (2.4.5) оставляет лишь две новые фазы:

$$\widetilde{H} = \widetilde{\omega}_1 \widetilde{I}_1 + \widetilde{\omega}_2 \widetilde{I}_2 + \widetilde{\omega}_3 \widetilde{I}_3 + \varepsilon \left[\alpha \cos \widetilde{\theta}_1 + \beta \cos \widetilde{\theta}_2\right], \qquad (3.2.21)$$

где $\widetilde{\theta}_1 = m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + m_3\theta_3$, $\widetilde{\theta}_2 = n_1\theta_1 + n_2\theta_2 + n_3\theta_3$, $\widetilde{\omega}_1 = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3$ и т. д. Поскольку гамильтониан не зависит от $\widetilde{\theta}_3$, то $\widetilde{I}_3$ — сохраняется, и задача приводится к двум степеням свободы. Однако если выбрать частоты так, что $\widetilde{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_2 = 0$, как это сделали Лансфорд и Форд, то гамильтониан приведенной системы принимает вид

$$\widetilde{H} = \varepsilon \left[\alpha \cos \widetilde{\theta}_1 + \beta \cos \widetilde{\theta}_2\right]. \qquad (3.2.22)$$

В отличие от задачи с волной (см. п. 2.4в) разделение на быстрые и медленные переменные здесь невозможно. Следовательно, неприменима и резонансная теория возмущения. Фактически рассматриваемая система вообще не имеет малого параметра [1]), т. е. не близка к интегрируемой. В таком случае нет основания ожидать существования инвариантных кривых даже в пределе $\varepsilon \to 0$. Это и было обнаружено Лансфордом и Фордом путем численного интегрирования уравнений движения [2]).

Условие на гладкость возмущения. Необходимую гладкость возмущения (число его непрерывных производных) можно определить, исходя из представления о том, что инвариантные кривые существуют только вне всех резонансных областей. Если все фазовое пространство между двумя резонансами низшего порядка заполнено другими резонансами, разумно заключить, что инвариантные кривые здесь не существуют. Рассмотрим снова простейший случай двух степеней свободы с гамильтонианом (3.2.11). Будем считать, что невозмущенный гамильтониан H_0 зависит от J_2 линейно, и положим $\omega_1/\omega_2 = s$. Тогда расстояние между целыми резонансами по частоте $\delta\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$ и не зависит от J_1 и J_2 (см. рис. 3.2,*б*). Между этими целыми резонансами расположены дробные резонансы с отношением частот $\omega_1/\omega_2 = s + p/q$, где p, q — целые числа и $p < q$. В (3.2.11) при $l = q$ это соответствует целым числам

$$m(p, q) = p + sq. \qquad (3.2.23)$$

Используя выражение (2.4.31) для ширины сепаратрисы отдельного резонанса

$$\Delta \widetilde{J}_1 = 4 \left(\frac{2\varepsilon H_{qm}}{G}\right)^{1/2},$$

---

[1]) Поскольку характер ее движения вообще не зависит от величины ε, которая определяет лишь масштаб времени.— *Прим. ред.*

[2]) Принятое выше условие $\widetilde{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_2 = 0$ означает наличие двух независимых резонансов в невозмущенной линейной системе (3.2.20). Отсутствие таких резонансов и есть дополнительное условие применимости теории КАМ к вырожденным системам (см. примечание редактора на с. 190).— *Прим. ред.*

а также соотношения $\Delta J_1 = q\Delta\tilde{J}_1$ и $G = q^2\partial^2 H_0/\partial J_1^2 = q^2\bar{G}$, получаем

$$\sum \Delta J_1 = 4\left(\frac{2\varepsilon}{\bar{G}}\right)^{1/2} \sum_{p,\,q} H_{qm}^{1/2}, \tag{3.2.24}$$

где суммирование производится по всем вторичным резонансам. Поскольку

$$\Delta\omega_1 = \frac{\partial\omega_1}{\partial J_1}\,\Delta J_1 = \bar{G}\Delta J_1, \tag{3.2.25}$$

то отношение суммарной ширины вторичных резонансов, заштрихованных на рис. 3.2, *в*, к расстоянию между первичными резонансами равно

$$\frac{\Sigma\Delta\omega_1}{\delta\omega_1} = \frac{4\,(2\varepsilon\bar{G})^{1/2}}{\omega_2} \sum_{p,\,q} H_{qm}^{1/2}. \tag{3.2.26}$$

Предположим теперь, что возмущение в гамильтониане имеет S непрерывных производных. Так как величина m пропорциональна q, то фурье-амплитуды убывают при больших q по закону [1])

$$H_{qm} \sim \frac{\Lambda_0}{q^{S+2}}, \tag{3.2.27}$$

где Λ_0 — некоторая постоянная. Подставляя эту оценку в (3.2.26 и замечая, что

$$\sum_p H_{qm}^{1/2} \sim qH_{qm}^{1/2}, \tag{3.2.28}$$

получаем

$$\frac{\Sigma\Delta\omega_1}{\delta\omega_1} \sim \frac{4\,(2\varepsilon\bar{G}\Lambda_0)^{1/2}}{\omega_2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-S/2}. \tag{3.2.29}$$

При $S>2$ эта сумма сходится к некоторому положительному числу σ. Таким образом, независимо от коэффициента перед суммой мы приходим к важному условию существования инвариантных торов:

$$S>2. \tag{3.2.30}$$

Можно сравнить этот результат с условием применимости теоремы КАМ, записав соотношение (3.2.3) для случая двух степеней свободы в виде

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s}\right| > \gamma s^{-(\tau+1)}. \tag{3.2.31}$$

---

[1]) В случае двух степеней свободы достаточно наложить условие на гладкость только по одной из фаз, так как зависимость от другой фазы можно исключить переходом к отображению. Оценка для коэффициентов Фурье (3.2.27) справедлива при следующих дополнительных условиях (см., например, [548]): 1) $|H_{qm}|$ убывают монотонно с q; 2) $(S+1)$-я производная ограничена и имеет конечное число разрывов.— *Прим. ред.*

Левую часть этого неравенства можно рассматривать как относительную ширину одного из дробных резонансов, которая исключается неравенством (3.2.31). Просуммируем теперь по всем дробным резонансам, лежащим между двумя целыми резонансами, т. е. на единичном интервале отношения частот ω_1/ω_2, учитывая, что число возможных значений r на этом интервале не превышает s. Суммарную величину исключаемого интервала $\mathscr{M}$ (по мере Лебега, см., например, [374]) можно найти, умножая (3.2.31) на s и затем суммируя по s. Получаем

$$\mathscr{M} > \gamma \sum_{s=1}^{\infty} s^{-\tau}. \tag{3.2.32}$$

Сравнивая выражения (3.2.32) и (3.2.29), мы видим, что τ соответствует величина $S/2$, а $\gamma \sim (\varepsilon \overline{G} \Lambda_0)^{1/2}/\omega_2$. Как и в (3.2.29), сумма в (3.2.32) сходится при $\tau > 1$. Как показал Мозер (см. [374]), этого хватает для существования инвариантных торов. Если учесть, что гамильтониан (3.2.11) является интегралом соответствующего отображения [см. (3.1.27)], то отсюда можно прийти к заключению, что для существования инвариантных кривых двумерных отображений достаточно двух непрерывных производных для самого отображения или трех производных для соответствующего гамильтониана. Мозер утверждает [310], что для доказательства существования инвариантных кривых достаточно потребовать [1]) $S > 4$, и высказывает предположение, что это условие можно фактически ослабить до $S > 3$. Приведенные в п. 3.4б численные данные указывают на существование инвариантных кривых [2]) при $S \geqslant 2$, аналогичный результат был получен Чириковым [70]. Однако при $S = 0$ это уже не так (п. 3.4б). С другой стороны, Тэкенс [402] построил пример, в котором нет инвариантных кривых и при $S = 2$. Таким образом, как и Мозер [310], мы можем предположить, что условия $S > 3$ всегда достаточно для существования инвариантных кривых [3]). Можно также думать, что в некоторых слу-

---

[1]) Здесь и ниже приведены значения S для гамильтониана. Следует иметь в виду, что в общем случае параметр гладкости S может быть и не целым числом, как это видно из фурье-представления возмущения (3.2.27).— *Прим. ред.*

[2]) Этот вывод противоречит условию (3.2.30) и является спорным, в частности, в работах [70, 475] интерпретация аналогичных численных данных совсем иная (см. примечание редактора на с. 227).— *Прим. ред.*

[3]) При сравнении условия (3.2.30) с цитированными результатами математических работ следует иметь в виду, что в последних рассматриваются любые возмущения определенного класса непрерывности (по Гёльдеру) C^l, не ограниченные неявно принимаемыми в основном тексте дополнительными условиями (см. примечание редактора на с. 192). Если понимать S как параметр убывания коэффициентов Фурье в (3.2.27), то утверждение Мозера соответствует $S > 3$ и подтверждается последними результатами Германа и Рюссмана (см. [476]), а гипотеза Мозера $S > 2$ опровергается контрпримерами Германа для любого $S < 3$.— *Прим. ред.*

чаях инвариантные кривые могут существовать и при двух непрерывных производных возмущения в гамильтониане.

Расчеты, приводящие для двух степеней свободы к условию (3.2.30), были выполнены Чириковым [70] в общем виде для N степеней свободы. Он получил следующее *необходимое* условие существования инвариантных торов [1]):

$$S > 2N - 2. \tag{3.2.33}$$

Для этого же случая Мозер [309] получил строгое *достаточное* условие

$$S > 2N + 2 \tag{3.2.34}$$

в предположении, что величина γ, стремящаяся к нулю вместе с ε, выбрана также достаточно малой. Отметим, что это более сильное требование, чем гипотеза Мозера $S > 3$ для двумерных отображений [2]).

Достаточная иррациональность и умеренная нелинейность. Предполагая, что сумма в (3.2.29) сходится к некоторому σ, мы видим, что инвариантные кривые не существуют, если $\alpha = \omega_1/\omega_2$ лежит внутри одного из заштрихованных на рис. 3.2, *в* интервалов [3]). Так как ширина этих интервалов пропорциональна $(\varepsilon G)^{1/2}$ и убывает с ростом q, то необходимо, чтобы величина α лежала достаточно далеко от любого рационального значения p/q. При малых ε это условие легко выполнимо, но с ростом ε инвариантные кривые существуют лишь для таких иррациональных α, которые наиболее плохо аппроксимируются рациональными числами. С этой точки зрения самым иррациональным числом является золотое сечение: $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2 \equiv \alpha_g$. Грин [165] дал очень точный критерий возникновения сильной стохастичности в предположении[4]), что инвариантная кривая с $\alpha = \alpha_g$ разрушается последней (с ростом ε). Мы опишем метод Грина и его результаты в гл. 4.

Положив левую часть (3.2.29) равной единице, получим условие малости возмущения ε:

$$4\left(2\varepsilon\bar{G}\Lambda_0\right)^{1/2} \lesssim \frac{\omega_2}{\sigma}, \tag{3.2.35}$$

---

[1]) Обобщение этого результата на случай явной квазипериодической зависимости от времени дано в работе [477].— *Прим. ред.*

[2]) Оценку Мозера (3.2.34) можно, по-видимому, улучшить, если учесть, что фактически гладкость по одной из N фаз несущественна (см. примечание редактора на с. 192), т. е. $N \to N-1$. Считая, как и выше, S параметром в (3.2.27) (см. примечание редактора на с. 193), получаем $S > 2N-1$. Оценка (3.2.33) при этом не изменится.— *Прим. ред.*

[3]) Правильнее сказать, что пока мы не уверены, существуют ли инвариантные кривые внутри этих интервалов. На самом деле размер областей, где они действительно разрушаются, много меньше (см. [70] и п. 4.2б).— *Прим. ред.*

[4]) Обсуждение этой гипотезы см. в работе [76].— *Прим. ред.*

а также (при заданном ε) некоторое ограничение на нелинейность сверху. Используя выражения (3.2.18) и (3.2.35), приходим к условию *умеренной нелинейности*

$$\frac{32\varepsilon\Lambda_0}{J_0^2} < \bar{G} < \frac{\omega_2^2}{32\varepsilon\Lambda_0\sigma^2}. \tag{3.2.36}$$

При этом в (3.2.18) мы положили $(r^2/q^2)\, H_{rs} \sim \Lambda_0$. Аналогичные оценки были получены Чириковым [70].

При доказательстве теоремы КАМ [308] возмущение ε приходится, вообще говоря, полагать чрезвычайно слабым. Чириков [67] нашел, что критическую величину возмущения можно оценить из условия перекрытия целых резонансов, изображенных на рис. 3.2, *б*. Численные эксперименты показали, что этот критерий дает разумную оценку для величины возмущения, при которой разрушаются последние инвариантные кривые, проходящие между этими резонансами. Используя аналитические и численные результаты с учетом дробных резонансов $q = 2$ и $q = 3$, Чириков [70] усовершенствовал критерий перекрытия и получил весьма точные предсказания для границы стохастичности. Критерий перекрытия резонансов и связанные с ним другие критерии перехода к стохастичности для некоторого класса типичных возмущений будут подробно рассмотрены в гл. 4.

* 3.2б. Рациональные числа вращения и структура резонансов

Продолжим изучение возмущенного отображения поворота (3.1.13). Как мы уже знаем, согласно теореме КАМ, инвариантные кривые с иррациональным значением α, достаточно удаленным от рациональных значений r/s, сохраняют свою топологию и лишь слегка деформируются при малом возмущении. Однако при рациональных значениях $\alpha = r/s$ и вблизи них теорема КАМ неприменима. Для исследования структуры отображений в этом случае воспользуемся более ранней теоремой.

Теорема Пуанкаре—Биркгофа. В случае невозмущенного отображения поворота (3.1.8) *любая* точка на окружности $\alpha(J) = r/s$ является периодической [1]) с периодом s (см. рис. 3.1, *б*). Теорема Пуанкаре—Биркгофа утверждает, что возмущенное отображение поворота будет иметь $2ks$ периодических точек ($k = 1, 2, \ldots$). Поясним это, используя рис. 3.3.

Предположим для определенности, что $\alpha(J)$ возрастает с J. Тогда вне кривой, соответствующей рациональному значению $\alpha(J) = r/s$, существует инвариантная кривая $\alpha > r/s$, которая после

[1]) В оригинале — fixed point (неподвижная точка), термин, который относится не к исходному отображению T, а к его s-й степени T^s, т. е. к отображению после s итераций.— *Прим. перев.*

s итераций отображения окажется повернутой против часовой стрелки (наружные стрелки на рис. 2.3). Существует и инвариантная кривая с $\alpha < r/s$, которая после s итераций окажется поверну-

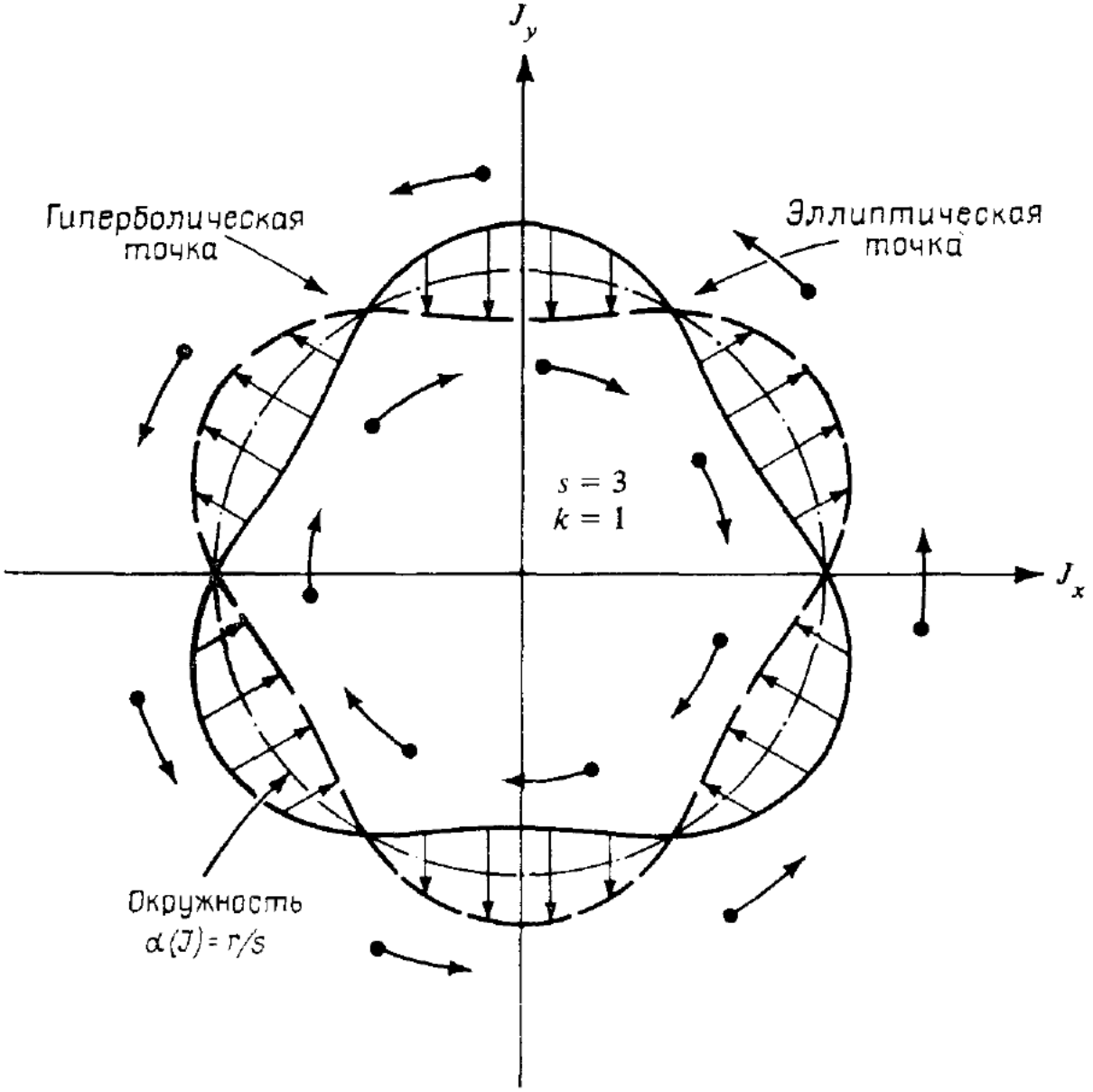


Рис. 3.3. К теореме Пуанкаре—Биркгофа.

Пересечения сплошной кривой, для всех точек которой полярный угол θ остается неизменным после s итераций, с s-й итерацией этой кривой (пунктирной) определяют периодические точки отображения.

той по часовой стрелке (внутренние стрелки). Следовательно, между этими двумя кривыми должна существовать некая (не инвариантная) кривая (на рис. 3.3 — сплошная линия), угловые координаты точек которой не изменяются после s итераций. Радиальные же координаты изменяются таким образом, что сплошная линия на рис. 3.3 переходит в пунктирную. Так как отображение сохраняет площадь, то обе кривые ограничивают одинаковые площади. А это возможно, лишь если эти кривые взаимно пересекаются четное число раз. После s итераций каждая точка пересечения возвращается в исходное положение и, таким образом, каждая из s ее итераций является периодической точкой. При четном числе пересечений всего должно быть $2ks$ таких точек, которые называются пе-

риодическими точками Пуанкаре—Биркгофа. Теорема ничего не говорит о величине k, хотя обычно $k = 1$.

Если мы более подробно рассмотрим отображение в окрестности периодических точек на рис. 3.3, то заметим, что существуют два различных типа поведения. Вблизи *эллиптической* точки (см. рис. 3.3) соседние точки как бы вращаются вокруг нее. В противоположность этому вблизи *гиперболической* точки соседние точки уходят из ее окрестности. Мы уже встречались с поведением такого типа при рассмотрении движения в фазовом пространстве простого маятника в § 1.3. Там мы нашли цепочки чередующихся эллиптических и гиперболических точек, причем первые окружены регулярными траекториями, а вторые соединены между собой сепаратрисами. Такая картина является типичной для нелинейных колебаний при малом возмущении.

Эллиптические точки. В § 2.4 путем перехода к переменным, связанным с эллиптической точкой, нам удалось исследовать все более и более мелкие области регулярного движения на фазовой плоскости. Мы видели, что вокруг эллиптической точки существует своя система резонансов (периодических точек) более высокого порядка, движение вокруг которых повторяет исходное на более мелком масштабе. Было показано также [см. (2.4.62) и последующее обсуждение], что возмущение в высших порядках очень быстро уменьшается с s (пропорционально $1/s!$). Если исходное возмущение мало, то фазовая плоскость заполнена, в основном, инвариантными кривыми, топология которых такая же, как и у невозмущенной системы. Остальная часть фазовой плоскости вокруг эллиптических точек заполнена инвариантными кривыми другой топологии. Можно ли сказать, что вся фазовая плоскость заполнена инвариантными кривыми все возрастающей сложности и все более мелких масштабов, пока с ростом возмущения вся эта структура внезапно не разрушается, переходя в стохастичность? Оказывается, что нет. В *типичном случае* области стохастичности существуют в окрестности сепаратрис (связанных с гиперболическими точками) при любом возмущении и растут вместе с ним.

Гиперболические точки. Рассмотрим поведение отображения в окрестности гиперболической точки. Мы уже знаем, что осциллятор с одной степенью свободы, как, например, маятник, имеет сепаратрису, которая соединяет гиперболические точки, приближаясь к одной из них и удаляясь от другой. У маятника есть лишь одна гиперболическая точка, но в общем случае имеется цепочка из ks гиперболических точек. В интегрируемом случае они соединяются между собой гладкой сепаратрисой. В случае же неинтегрируемой системы с несколькими степенями свободы или соответствующего отображения вида (3.1.13) ситуация оказывается значительно более сложной. Следуя Берри [26], мы качественно опишем картину

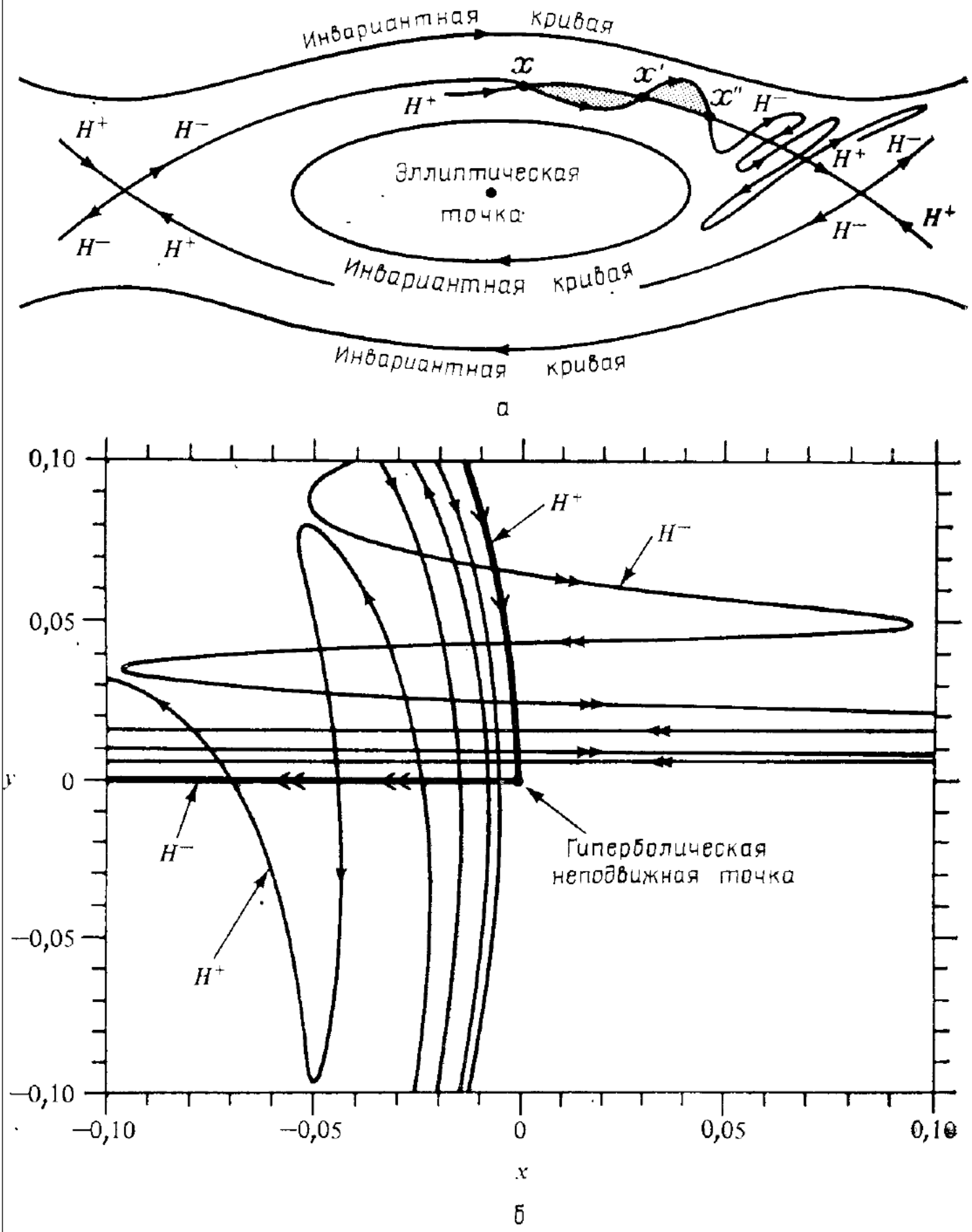


Рис. 3.4. Гомоклинная точка и стохастичность вблизи сепаратрисы (числовые данные из работы [107]).

а — входящая (H^+) и выходящая (H^-) сепаратрисы пересекаются в бесконечном числе точек (схема); *б* — более подробная картина пересечений вблизи гиперболической точки.

поведения сепаратрис, основанную на работах Пуанкаре [337], Биркгофа [30] и Смейла [381] [1]). Близкое изложение содержится в книгах Арнольда и Авеза [14] и Мозера [310].

Гиперболическая точка соединяет четыре траектории: две входящие (H^+) и две выходящие (H^-). Точка $\boldsymbol{x}$ принадлежит сепаратрисе H^+, если в результате последовательных отображений $T^n\boldsymbol{x}$ она приближается к гиперболической точке при $n \to \infty$. Если же это происходит в результате обратных отображений $T^{-n}\boldsymbol{x}$, то точка $\boldsymbol{x}$ принадлежит сепаратрисе H^-. Поскольку на сепаратрисе период колебаний бесконечен, движение точки $\boldsymbol{x}$ становится все более и более медленным по мере приближения к гиперболической точке. Рассмотрим теперь две соседние гиперболические точки одного и того же резонанса. В отличие от интегрируемой системы сепаратриса H^-, выходящая из гиперболической точки, не соединяет ее с соседней, а в типичном случае пересекает сепаратрису H^+, приходящую в соседнюю (сдвинутую по фазе на $2\pi/ks$) гиперболическую точку. Место пересечения называется *гомоклинной точкой*, так как она соединяет выходящую и входящую сепаратрисы одного и того же резонанса. Пересечения сепаратрис соседних резонансов называются *гетероклинными точками*. Легко показать, что если существует одно пересечение, то их существует и бесконечно много.

Такое чрезвычайно сложное поведение можно представить себе несколько более наглядно с помощью следующей схемы, как это было сделано впервые Мельниковым [298]. Рассмотрим гиперболическую точку и ее отображение, как показано на рис. 3.4, *а*. Из пересечения сепаратрис H^- и H^+ в гомоклинной точке $\boldsymbol{x}$ следует, что они пересекаются и в точках $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ и т. д. При этом точка $\boldsymbol{x}''$ расположена к $\boldsymbol{x}'$ ближе, чем $\boldsymbol{x}'$ к $\boldsymbol{x}$. Так как области, заключенные между взаимно пересекающимися кривыми H^- и H^+ (они заштрихованы на рисунке), являются отображениями одна другой, то их площади равны. Следовательно, между точками $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ кривая H^- отклоняется от H^+ сильнее, чем между $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$. Последующие пересечения сепаратрис все более и более сближаются, а амплитуда осцилляций H^- возрастает. На рисунке не изображена сепаратриса H^+, приближающаяся к левой гиперболической точке сверху. Она осциллирует так же сильно, как и H^- справа. Все сказанное относится и к двум другим сепаратрисам в нижней части рисунка. На рис. 3.4, *б* приведены численные результаты Драгта и Финна [107], иллюстрирующие пересечение сепаратрис в окрестности гиперболической точки. Сепаратриса H^-, выходящая из соседней гиперболической точки слева, осциллирует при приближении к гиперболической точке справа, а сепаратриса H^+ (не показанная на рис. 3.4, *а*) осциллирует, удаляясь от нее.

---

[1]) Важную роль в этих исследованиях сыграли также работы Мельникова [298, 299].— *Прим. ред.*

Для численного определения сепаратрис, например H^-, выбираем произвольную точку на кривой H^- вблизи той гиперболической точки, из которой она выходит, и проводим прямую между выбранной точкой и ее отображением. Последовательные итерации этого отрезка и дают осциллирующую сепаратрису H^-, приближающуюся к соседней гиперболической точке справа.

Сами по себе гомоклинные точки еще не дают полной картины всей этой очень сложной области вблизи сепаратрисы. Так как период фазовых колебаний обращается в бесконечность на сепаратрисе, то в ее окрестности имеется бесконечно много вторичных резонанов, соответствующих высоким гармоникам частоты фазовых колебаний. Каждый из этих резонансов имеет свою собственную систему чередующихся эллиптических и гиперболических точек, со своим сложным движением в их окрестности и многократными пересечениями как своих сепаратрис, так и сепаратрис первичного резонанса в гетероклинных точках. Все эти сепаратрисы, по-видимому, всюду плотно заполняют доступное им фазовое пространство. Пересечение сепаратрис фактически показывает, что в этой области не могут существовать инвариантные торы вследствие изменения топологии траекторий[1]). Подробное обсуждение этих вопросов дано Драгтом и Финном [107]. Однако для малых возмущений все это чрезвычайно сложное поведение происходит лишь в ограниченной инвариантными кривыми области фазового пространства (рис. 3.4, *а*).

* 3.2в. Полное описание нелинейного отображения

Теперь мы можем полностью описать структуру отображения, например поверхность сечения нелинейного осциллятора с двумя степенями свободы. Очень схематично топология такого отображения дана Арнольдом и Авезом [14]. Рассмотрим случай умеренного возмущения, когда многие невозмущенные инвариантные кривые ($J = \text{const}$, см. рис. 3.1, *б*) сохраняются и при наличии возмущения. Будем считать для определенности, что $d\omega_1/dJ_1 < 0$, а $\alpha = \omega_{01}/\omega_{02} = 1/\pi$ (иррациональное число) при $J_1 = 0$. С ростом J_1 частота ω_1 уменьшается, пока не достигнет значения, соответствующего первому существенному резонансу $\omega_1 = \omega_2/4$. При этом на поверхности сечения образуется цепочка из четырех островков. Другими словами, если начальные условия траектории совпадают

---

[1]) Связь гомоклинной структуры с неинтегрируемостью обсуждалась еще Пуанкаре [337] и была строго доказана в работе [478] (см. также [479, 480]). Следует, однако, иметь в виду, что это локальная неинтегрируемость, имеющая место лишь на множестве начальных условий, вообще говоря, малой меры, дополнительном к большинству начальных условий, для которых инвариантные торы сохраняются согласно теории КАМ (см. ниже и [477]). — *Прим. ред.*

с периодической точкой отображения, то соответствующая траектория, помеченная точками x_0, x_1, . . . на рис. 3.1, *б*, сделает четыре витка вокруг тора. Для близких соседних точек величина $dJ_1/dt \neq 0$, и их траектории на поверхности сечения охватывают периодические точки. В § 2.4 было показано, как рассчитывать такие замкнутые кривые, другие примеры будут приведены в § 3.4 и 3.5 и в последующих главах. Наши предыдущие качественные рассуждения привели к выводу о чередовании эллиптических и гиперболических точек на поверхности $J = \text{const}$, что совпадает с результатами § 2.4 на основе теории возмущений. Наличие гомоклинных и гетероклинных точек в окрестности гиперболической точки обусловливает существование области хаотического движения, ограниченной инвариантными кривыми.

Увеличивая J_1, мы придем к следующему существенному резонансу $\omega_1 = \omega_2/5$ с цепочкой из пяти островков. При дальнейшем увеличении J_1 будут последовательно встречаться резонансы с числом островков, равным шести, семи и т. д. При этом между каждыми двумя из этих главных резонансов существует еще и бесконечно много промежуточных резонансов, соответствующих всем промежуточным рациональным отношениям частот. Однако величина последних резонансов, как было показано в § 2.4, быстро убывает. Так, например, одним из промежуточных резонансов между двумя главными резонансами с $\alpha = 1/4$ и $\alpha = 1/5$ является резонанс с $\alpha = 2/9$, т. е. с $r = 2$ и $s = 9$. Его размер относится к размеру резонанса с $\alpha = 1/5$ как квадратный корень из отношения соответствующих амплитуд фурье-разложения возмущения. В самом деле, используя выражение (2.4.31), получаем

$$\tilde{\Delta}\tilde{J}_1 \sim \left| \frac{\varepsilon H_{r,-s}}{\partial^2 \tilde{H}_0/\partial \tilde{J}_1^2} \right|^{1/2}, \tag{3.2.37}$$

где $H_{r,-s}$ — амплитуда фурье-разложения соответствующей резонансной гармоники. Максимальная величина фурье-амплитуды равна (см. п. 2.4б):

$$H_{r,-s}^{\text{макс}} \approx \mathcal{J}_s(\pi),$$

где $\mathcal{J}_s$ — функция Бесселя. В результате находим грубую оценку отношения размера резонансов:

$$\frac{\Delta J\ (s/r = 9/2)}{\Delta J\ (s/r = 5)} \approx \left[\frac{\mathcal{J}_9(\pi)}{\mathcal{J}_5(\pi)} \right]^{1/2} \approx 0{,}1. \tag{3.2.38}$$

Таким образом, относительный размер резонансов более высоких гармоник весьма мал.

В итоге мы приходим к качественной картине структуры отображения, представленной на рис. 3.5, *а*. Инвариантные кривые изображены здесь сплошными линиями. Те из них, которые окру-

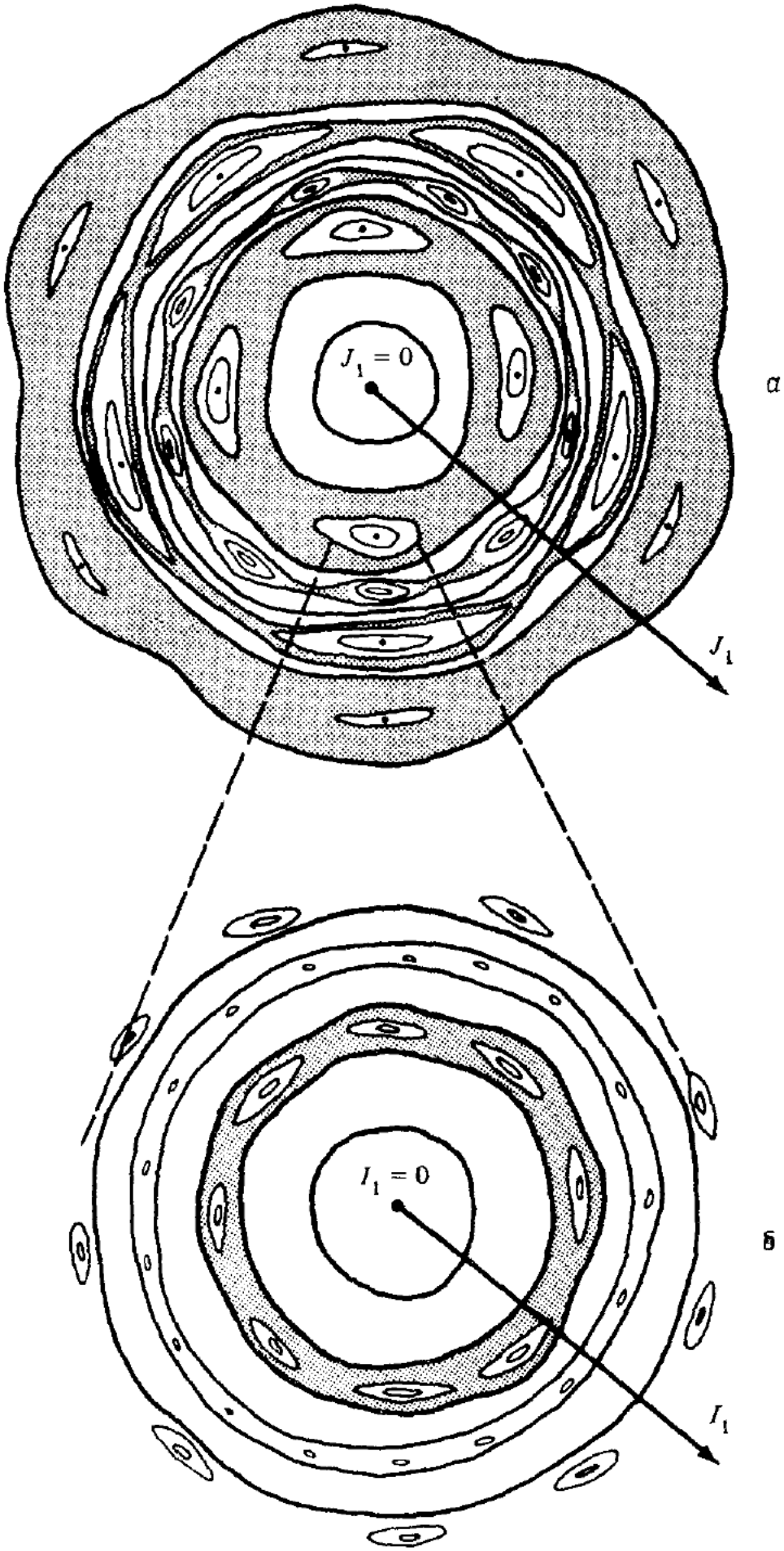


Рис. 3.5. Регулярные и стохастические траектории при относительно большом возмущении.

а — вблизи первичного резонанса; *б* — вблизи вторичного резонанса (увеличено и растянуто по вертикали).

жают начало координат ($J_1 = 0$), при наличии возмущения уже не являются окружностями и соответствуют новым интегралам движения $\overline{J}_1 = \text{const}$, а J_1 является периодической функцией фазы. Приближенные значения этих инвариантов можно получить *методом усреднения* (§ 2.3). Инвариантные кривые, окружающие эллиптические точки, нельзя найти таким способом, но они получаются с помощью *резонансной теории возмущений* (§ 2.4). Для траекторий же вблизи сепаратрис интеграл движения не существует, и они заполняют на поверхности сечения некоторую конечную область. Несколько таких областей показаны на рис. 3.5, *а* штриховкой. Они ограничены инвариантными кривыми. Между резонансом с $\alpha = 1/4$ и $\alpha = 1/5$ расположен более мелкий, но все еще различимый резонанс с $\alpha = 2/9$. Есть, конечно, и все другие промежуточные резонансы. Однако они не показаны на рисунке либо потому, что имеют слишком малые размеры и неразличимы в принятом масштабе, либо потому, что они целиком погружены в хаотические области других резонансов.

Что же мы увидим, если увеличить масштаб в окрестности какого-либо островка одного из резонансов? Для этого перейдем сначала к новым переменным $\tilde{J}_1$, $\tilde{\theta}_1$ (§ 2.4) и введем новую переменную действия

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint \tilde{J}_1 d\tilde{\theta}_1, \tag{3.2.39}$$

соответствующую замкнутой траектории вокруг эллиптической точки с заданным α. При этом траектории исходного резонанса преобразуются в систему концентрических окружностей. Однако резонансы между этими колебаниями и основными частотами системы приводят к возникновению *вторичных резонансов*, которые деформируют окружности. Мы уже рассматривали вторичные резонансы в п. 2.4б и нашли, что их размер и частота фазовых колебаний экспоненциально малы [1]) с показателем, пропорциональным $(1/\alpha)^{1/2}$. Для ширины вторичных резонансов можно получить оценку, аналогичную (3.2.37). Мы отложим это до гл. 4, а сейчас ограничимся качественной иллюстрацией результата с помощью рис. 3.5, *б*. Отметим, что отношение размера вторичных резонансов к расстоянию между ними значительно меньше, чем для первичных резонансов. Эта качественная картина резонансов разных масштабов подтверждает вывод теории КАМ (п. 3.2а): при достаточно малом возмущении бо́льшая часть фазового пространства заполнена инвариантными торами.

Следующие соображения помогут лучше представить себе эту иерархию резонансов. Возьмем произвольную точку поверхности сечения и будем растягивать область вокруг этой точки, пока не

[1]) Точнее, см. оценку (2.4.62).— *Прим. ред.*

увидим какую-то резонансную структуру. Для достаточно малого возмущения выбранная точка будет с большой вероятностью лежать на инвариантной кривой, хотя вокруг нее и расположены стохастические области различных резонансов. Повторим теперь эту процедуру, т. е. снова выберем произвольную точку в пределах растянутой области и продолжим растяжение области, пока не увидим структуру следующего масштаба. В этом новом масштабе значительно меньшая часть площади будет стохастической, и вероятность выбранной точки попасть на инвариантную кривую существенно возрастает. На каждом следующем масштабе доля стохастической области будет экспоненциально уменьшаться, а вероятность попадания произвольной точки на инвариантную кривую будет быстро стремиться к единице. Тем не менее всегда существует конечная вероятность попадания и в стохастическую область. Если это случилось, то все последующие растяжения будут обнаруживать уже только стохастические траектории.

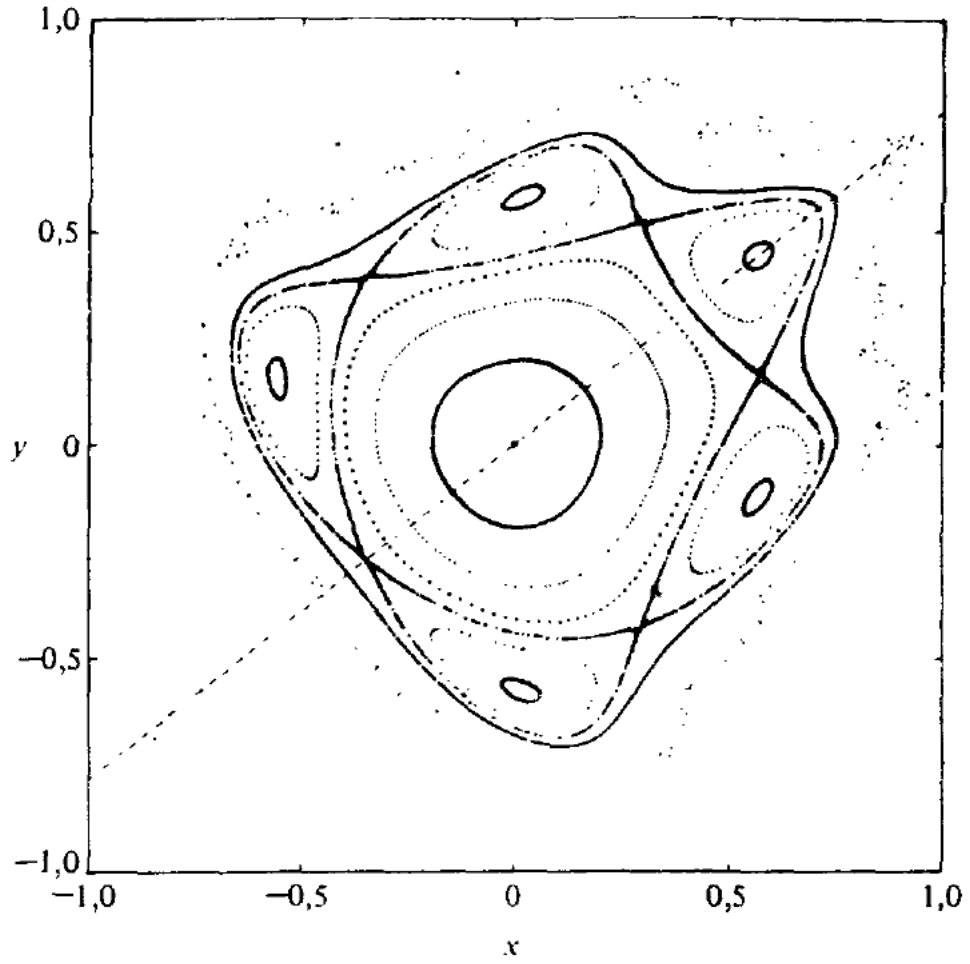
* 3.2г. Численный пример

Исследования нелинейной динамики (в том числе и методом сечения Пуанкаре) путем численного интегрирования уравнений Гамильтона очень трудоемки, поскольку шаг интегрирования должен быть много меньше характерного периода движения. В отличие от этого прямое итерирование заданного на том же периоде отображения может быть легко выполнено на сотни тысяч периодов и дает в существенных чертах ту же картину движения, что и уравнения Гамильтона. Такие отображения интенсивно использовались в различных исследованиях нелинейных колебаний. В § 3.4 мы рассмотрим этим методом задачу об ускорении Ферми [126]. Здесь же проиллюстрируем некоторые обсуждавшиеся выше особенности на примере квадратичного отображения поворота, исследованного Хеноном [185]:

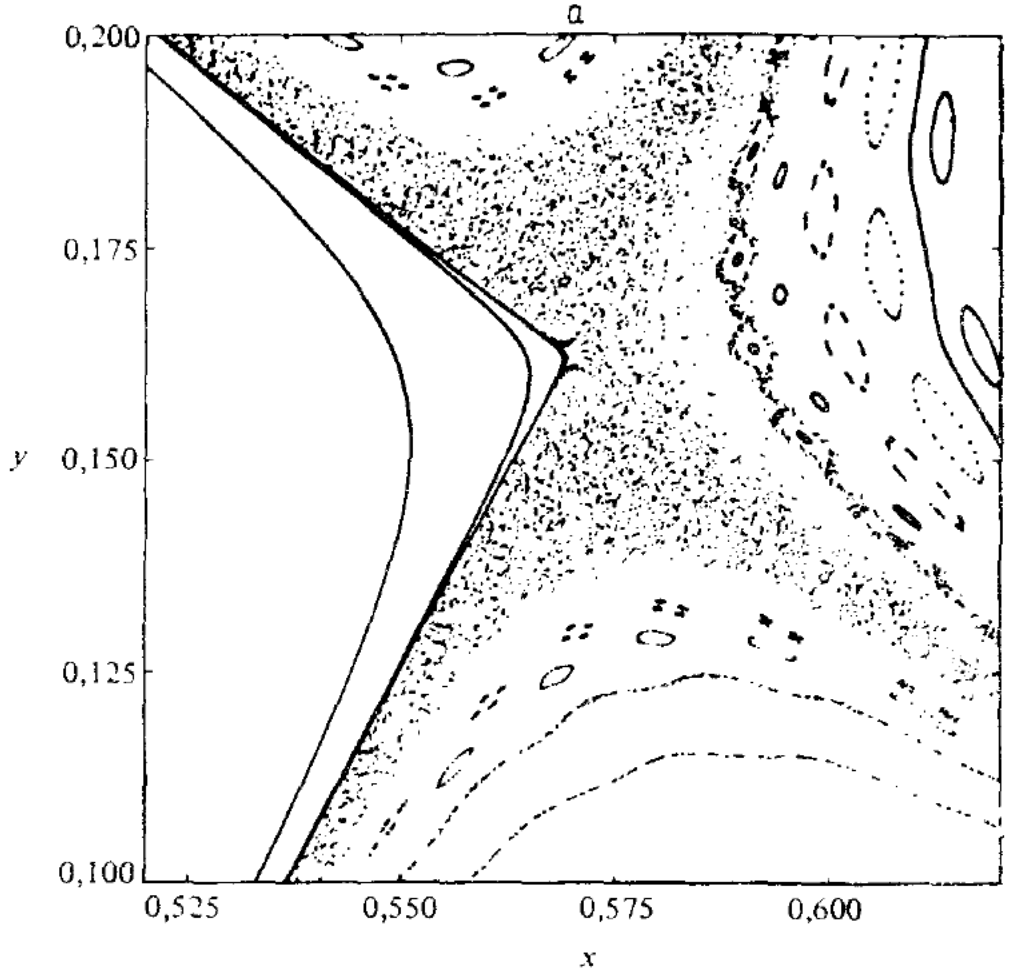
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos\psi - (y_0 - x_0^2)\sin\psi \\ x_0\sin\psi + (y_0 - x_0^2)\cos\psi \end{pmatrix}, \qquad (3.2.40)$$

где $\psi = 2\pi\alpha_0$, а α_0 — число вращения соответствующего линейного отображения поворота (3.1.9).

Вблизи начала координат, которое является эллиптической точкой отображения, нелинейный член x_0^2 мал. На рис. 3.6, *а* и *б* воспроизведены результаты Хенона для $\psi = 76{,}11°$. На рис. 3.6, *а* виден первый главный резонанс с $\alpha = 1/5$, что соответствует углу поворота 72°. Следовательно, нелинейность в данном случае замедляет вращение. Исследование отображения в окрестности гиперболической точки этого резонанса приводит к любопытной картине, представленной на рис. 3.6, *б*. Видны вторичные и третичные резонансы, а также хаотическая траектория (длиной в 50 000



а



б

Рис. 3.6. Траектории отображения Хенона (3.2.40) при $\alpha_0 = 0{,}2114$ (по данным работы [185]).

а — первый целый резонанс на пятой гармонике; *б* — увеличенный участок фазовой плоскости вблизи сепаратрисы целого резонанса. Видны вторичные и третичные резонансы.

итераций), заполняющая некоторую область вблизи гиперболической точки. На рис. 3.7 показаны осцилляции сепаратрисы, соответствующей H^- на схеме рис. 3.4. Данные получены численно Катхиллом и представляют 146 итераций короткого отрезка сепаратрисы вблизи гиперболической точки.

Многие регулярные особенности структуры отображения на рис. 3.6 можно получить аналитически. Мы вернемся к этому во-

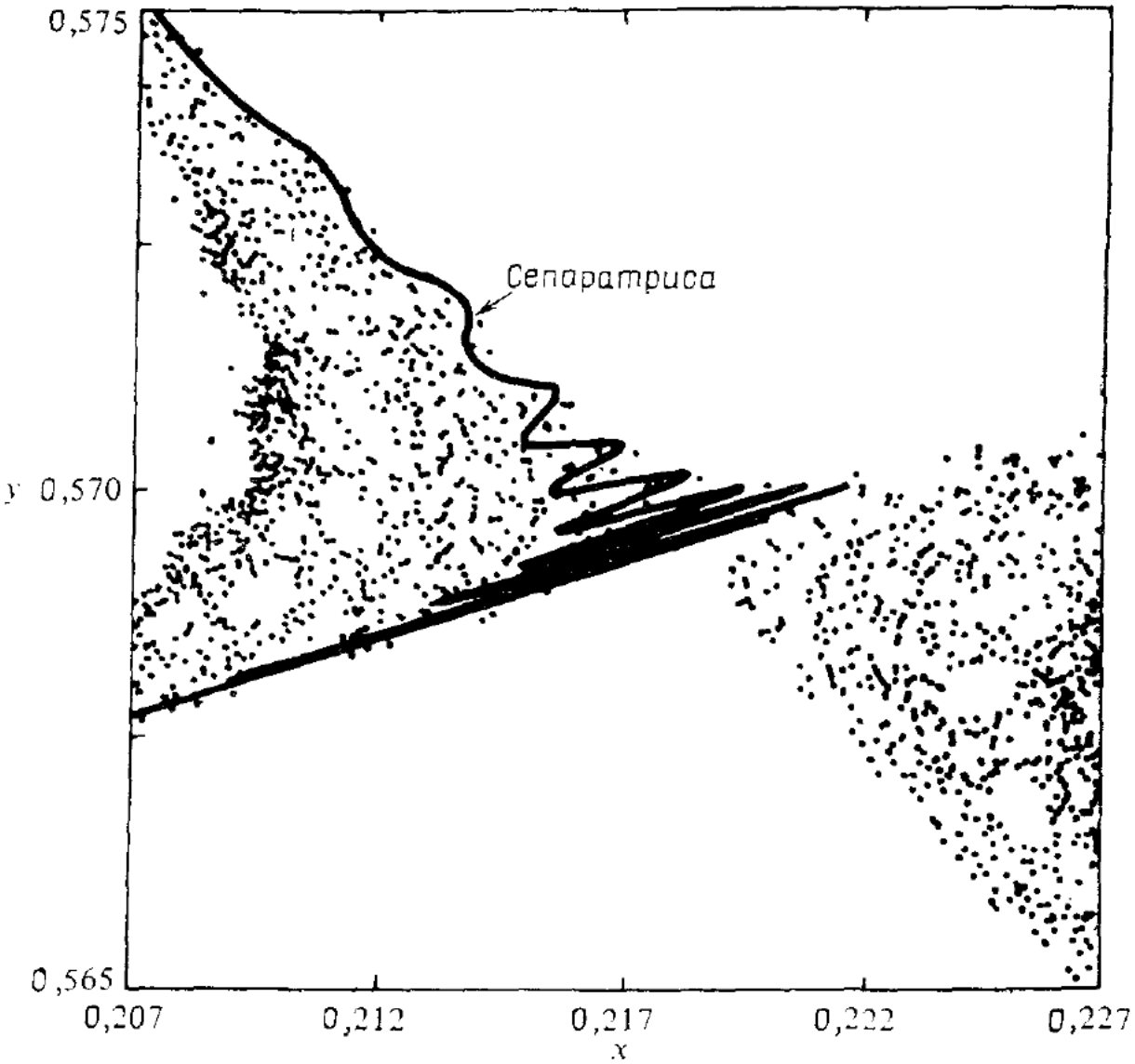


Рис. 3.7. То же, что на рис. 3.6, *б* для $\alpha_0 = 0{,}1845$ (по данным работы [26]). Сплошная линия — одна из сепаратрис.

просу позже, поскольку такие вычисления более естественно проводить после исследования устойчивости периодических траекторий, которому посвящен следующий параграф.

§ 3.3. Линеаризованные уравнения

В принципе периодические точки отображения периода k можно находить непосредственно из условия, что после k-й итерации

$$T^k x_0 = x_0. \tag{3.3.1}$$

Однако при больших k эти вычисления становятся слишком трудоемкими. Вместо этого можно исходить и прямо из гамильтониана. Уравнения, которые надо при этом решать, соответствуют *периодическим траекториям* и их можно записать на поверхности сечения в виде

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \tag{3.3.2}$$

где вектор $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$. В общем случае решение этих уравнений можно найти лишь в форме рядов [116].

После того как периодические точки отображения найдены, можно исследовать их устойчивость в линейном приближении. Это делается следующим образом. Полагая $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}$ и сохраняя только линейные по $\Delta\boldsymbol{x}$ члены, получаем уравнение вида

$$\Delta\boldsymbol{x}_{n+k} = \mathsf{A} \cdot \Delta\boldsymbol{x}_n, \tag{3.3.3}$$

где A — матрица, не зависящая от $\Delta\boldsymbol{x}$.

В предыдущем параграфе было показано, что малые возмущения интегрируемой системы приводят к возникновению последовательности чередующихся эллиптических (устойчивых) и гиперболических (неустойчивых) точек. Об этом говорят, в частности, численные данные, приведенные в п. 3.2г. Однако в случае больших возмущений топологические соображения [1]) уже неприменимы и в принципе все периодические точки могут быть неустойчивыми. В случае неинтегрируемых гамильтоновых систем линейная устойчивость является, по-видимому, необходимым и достаточным условием для нелинейной устойчивости [2]) в том смысле, что первая гарантирует существование инвариантных торов достаточно близко к периодической траектории [3]).

3.3а. Собственные значения и собственные векторы

Обозначив для простоты $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \Delta\boldsymbol{x}_n$ и $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}) = \Delta\boldsymbol{x}_{n+k}$, перепишем линеаризованное уравнение M-мерного отображения (3.3.3) в виде

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x}, \tag{3.3.4}$$

где A — матрица $M \times M$, не зависящая от $\boldsymbol{x}$. Предположим, что ранг матрицы равен M, следовательно, $\det \mathsf{A} \neq 0$. Собственным

---

[1]) По-видимому, имеются в виду скорее наглядные представления на основе рис. 3.3.— *Прим. ред.*

[2]) Это справедливо лишь при дополнительных условиях, в частности указанных в примечании авторов ниже (см. примечание редактора на с. 191).— *Прим. ред.*

[3]) Особыми случаями являются числа вращения $\alpha = 1/3$; $1/4$.

значением системы (3.3.4) является постоянная, входящая в уравнение

$$\mathsf{A}\cdot\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}, \tag{3.3.5}$$

так что некоторый вектор $\boldsymbol{x}$ остается неизменным с точностью до множителя. Из (3.3.5) следует, что λ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\det(\mathsf{A}-\lambda\mathbf{I})=0, \tag{3.3.6}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Это — алгебраическое уравнение M-го порядка, имеющее M корней. Каждое собственное значение соответствует нормальной моде колебаний, или фундаментальному решению. Из (3.3.5) следует также, что для устойчивости колебаний $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda^n$ должен быть ограничен [1]). Векторы $\boldsymbol{x}_k$, соответствующие значениям λ_k, называются собственными векторами, или нормальными колебаниями. Эти векторы можно найти, решая однородную систему уравнений

$$\mathsf{B}\cdot\boldsymbol{x}_k=\sum_j b_{ij}x_{jk}=0, \tag{3.3.7}$$

где $\mathsf{B}(\lambda_k)=\mathsf{A}-\lambda_k\mathbf{I}$. Если все собственные значения A различны, решение можно получить следующим образом. Перенесем члены с $j=l$ в правую часть уравнений (3.3.7) и опустим уравнение с $i=l$. Положим $x_{lk}=c_kB_{ll}$, где c_k — произвольная постоянная, а $B_{ll}\neq 0$ — алгебраическое дополнение элемента b_{ll} матрицы B. Получившуюся таким образом неоднородную систему $M-1$ уравнений решаем стандартным методом Крамера и получаем

$$x_{jk}=c_kB_{lj};\qquad j=1,\ldots,M. \tag{3.3.8}$$

Поскольку ранг матрицы B равен $(M-1)$, то по крайней мере одно $B_{ll}\neq 0$. В случае совпадающих собственных значений метод решения остается таким же, но некоторые из векторов $\boldsymbol{x}_k$ будут зависеть от нескольких произвольных постоянных.

Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{X}$, столбцы которой составлены из компонент разных собственных векторов $\boldsymbol{x}_k$. Если, кроме того, все собственные значения различны [2]), то из (3.3.5) находим

$$\mathsf{A}\cdot\mathsf{X}=\mathsf{X}\cdot\Lambda, \tag{3.3.9}$$

где Λ — диагональная матрица с элементами $\Lambda_{ii}=\lambda_i$. Отсюда

$$\Lambda=\mathsf{X}^{-1}\cdot\mathsf{A}\cdot\mathsf{X}, \tag{3.3.10}$$

---

[1]) Это справедливо, вообще говоря, лишь в том случае, когда матрица A не зависит от x_0 (см. ниже п. 3.3б, 3.3в, 5.2б и работу [55]).— *Прим. ред.*

[2]) Случай совпадающих собственных значений см. в [13] или в любом учебнике по линейной алгебре.

т. е. X диагонализует A. Введем новые векторы

$$\boldsymbol{u}_k = \mathsf{X}^{-1} \cdot \boldsymbol{x}_k; \qquad \boldsymbol{x}_k = \mathsf{X} \cdot \boldsymbol{u}_k. \tag{3.3.11}$$

Из (3.3.5) получаем

$$\Lambda \cdot \boldsymbol{u}_k = \lambda_k \boldsymbol{u}_k, \tag{3.3.12}$$

т. е. $\boldsymbol{u}_k$ являются собственными векторами матрицы Λ и из них можно образовать ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_k$.

Симметрия собственных значений. Если преобразование, задаваемое A, является каноническим, то M равно четному числу $2N$ и выполняются следующие соотношения для скобок Пуассона:

$$[\bar{q}_i, \bar{q}_j] = [\bar{p}_i, \bar{p}_j] = 0, \tag{3.3.13}$$

$$[\bar{q}_i, \bar{p}_j] = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, N.$$

Введем $2N$-мерную антисимметричную матрицу

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\mathsf{I} \\ \mathsf{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.14}$$

каждый элемент которой есть блок $N \times N$; $\Gamma^{\mathrm{T}} = \Gamma^{-1} = -\Gamma$, (T означает транспонирование) и $\det \Gamma = 1$. Тогда соотношения (3.3.13) можно записать в виде

$$[\bar{x}_i, \bar{x}_j] = \sum_{k,l} a_{ik} \Gamma_{kl} a_{jl} = \Gamma_{ij}, \tag{3.3.15}$$

где

$$a_{ik} = \partial \bar{x}_i / \partial x_k. \tag{3.3.16}$$

Из (3.3.15) следует, что в рассматриваемом случае не все элементы матрицы A независимы. В матричной форме имеем

$$\mathsf{A} \cdot \Gamma \cdot \mathsf{A}^{\mathrm{T}} = \Gamma \tag{3.3.17а}$$

или

$$\mathsf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \Gamma \cdot \mathsf{A} = \Gamma. \tag{3.3.17б}$$

Матрица, удовлетворяющая этому условию, называется *симплектической.*

Покажем, что если λ — собственное значение матрицы A, то $1/\lambda$ также является ее собственным значением. Поскольку собственные значения произвольной матрицы не изменяются при транспонировании, то из (3.3.5) имеем

$$\mathsf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{y}, \tag{3.3.18}$$

или

$$(\mathsf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \boldsymbol{y} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{y}. \tag{3.3.19}$$

Из (3.3.17а) получаем

$$\mathsf{A}\cdot(\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{y})=\frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{y}). \tag{3.3.20}$$

Значит, $1/\lambda$ тоже является собственным значением матрицы A с собственным вектором $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{y}$. Отсюда

$$\lambda_{i+N}=\lambda_i^{-1}, \qquad i=1,\ .\ .\ .\ ,\ N. \tag{3.3.21}$$

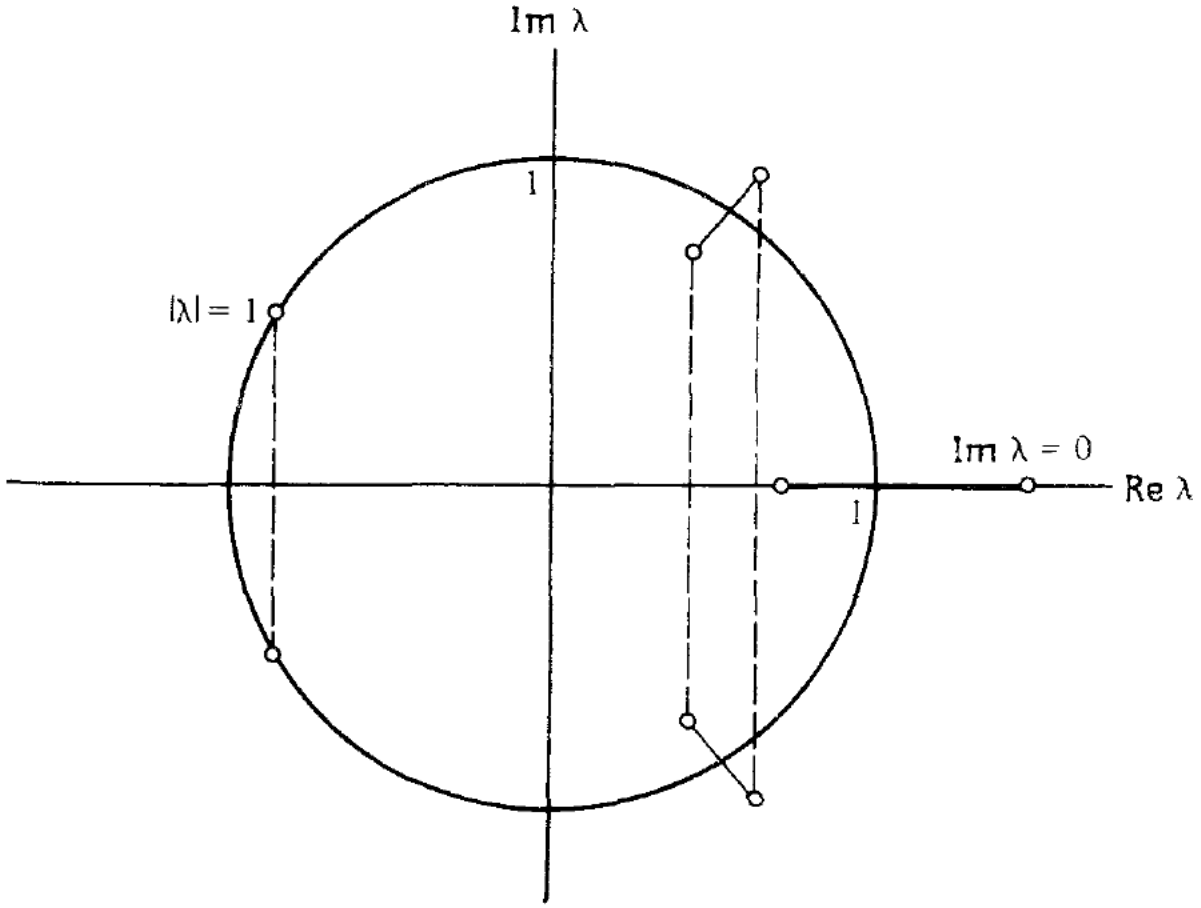


Рис. 3.8. Собственные значения симплектической матрицы.

Так как матрица A вещественная, то комплексные собственные значения появляются только в виде комплексно сопряженных пар. Если же λ комплексная величина и $|\lambda|\neq 1$, то собственные значения образуют четверки:

$$\lambda,\ \lambda^*,\quad 1/\lambda,\quad 1/\lambda^*,$$

симметричные относительно вещественной оси и единичной окружности (рис. 3.8). В случае $\operatorname{Im}\lambda=0$ собственные значения λ, $1/\lambda$ лежат на вещественной оси. При $|\lambda|\neq 1$ движение всегда неустойчиво. Если же $|\lambda|=1$, то собственные значения λ и $\lambda^*=1/\lambda$ лежат на единичной окружности и движение устойчиво.

Легко показать, что из симметрии собственных значений следует, что характеристическое уравнение (3.3.6) можно записать в виде

$$\lambda^N+a_1\lambda^{N-1}+\ .\ .\ .\ +a_{2N-1}\lambda+1=0 \tag{3.3.22}$$

с симметричными коэффициентами:

$$a_1 = a_{2N-1}, \qquad a_2 = a_{2N-2}, \ . \ . \ . \ . \tag{3.3.23}$$

Итак, если все собственные значения различны, то для устойчивости движения необходимо, чтобы все они лежали на единичной окружности. В случае же кратных λ вопрос об устойчивости более сложен (см. [13]). Вообще говоря, при этом имеет место так называемая пограничная устойчивость [1]).

Теперь мы покажем, что если матрица A симплектическая, то и матрицу X тоже можно представить в симплектической форме путем умножения ее столбцов на определенные константы c_k. Рассмотрим антисимметричную матрицу.

$$\mathsf{S} = \mathsf{X} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathsf{X}^{\mathrm{T}}, \tag{3.3.24}$$

элементы которой

$$S_{ij} = \boldsymbol{x}_i \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}. \tag{3.3.25}$$

Из выражений (3.3.9) и (3.3.24) получаем

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \mathsf{S} \cdot \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}} = \mathsf{S}, \tag{3.3.26а}$$

или

$$\lambda_i \lambda_j S_{ij} = S_{ij}. \tag{3.3.26б}$$

Значит, $S_{ij} \neq 0$, лишь если $\lambda_i \lambda_j = 1$. Учитывая соотношение, (3.3.21), находим, что отличные от нуля элементы матрицы S удовлетворяют соотношениям

$$S_{i,i+N} = -S_{i+N,i}, \qquad i = 1, \ . \ . \ . \ , N. \tag{3.3.27}$$

Положив $S_{i,\,i+N} = -1$ и $\boldsymbol{x}_i = c_i \boldsymbol{x}'_i$, получаем из (3.3.25)

$$c_i c_{i+N} \boldsymbol{x}_i'^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \boldsymbol{x}'_{i+N} = -1. \tag{3.3.28}$$

Это уравнение позволяет определять, например c_{i+N} по заданным c_i. Таким образом, $\mathsf{S} = \mathbf{\Gamma}$ по построению. Сравнивая (3.3.24) с (3.3.17а), видим, что матрица X симплектическая. Так как N постоянных c_i можно выбрать произвольно, то построенная матрица X не единственная.

Используя (3.3.17б), можно показать, что $\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \boldsymbol{x}_2$ инвариантно по отношению к симплектическому преобразованию $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x}$, т. е.

$$\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \boldsymbol{x}_2 = \bar{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \bar{\boldsymbol{x}}_2. \tag{3.3.29}$$

---

[1]) Устойчивым является лишь глобальное (нелинейное) движение, в линейном же приближении по Δx движение в этом случае неустойчиво, хотя $|\lambda| = 1$ [см. (3.3.71) и рис. 5.5]. Эта неустойчивость существенна при численном определении перехода от регулярного движения к хаотическому.— *Прим. ред.*

Это соотношение часто используется как определение симплектического преобразования. Положив $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_2 = \mathsf{A}\cdot\boldsymbol{x}$, найдем, что квадратичная форма

$$Q = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Gamma}\cdot\mathsf{A}\cdot\boldsymbol{x} \tag{3.3.30}$$

является инвариантом отображения A.

Только в случае двух степеней свободы, когда для λ получается квадратное уравнение, собственные значения и собственные векторы можно легко найти в явном виде. Однако именно этот случай соответствует двумерным отображениям, которые занимают центральное место в нашем анализе нелинейных колебаний. Что касается большего числа степеней свободы, то аналитические решения здесь удается получить лишь в некоторых специальных случаях.

* 3.3б. Двумерные отображения

Двумерное отображение задается системой двух разностных уравнений первого порядка. Выпишем здесь еще раз уравнения (3.1.13) для возмущенного отображения поворота, положив для упрощения записи $\varepsilon \equiv 1$:

$$J_{n+1} = J_n + f(J_{n+1},\ \theta_n), \tag{3.1.13а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}) + g(J_{n+1},\ \theta_n), \tag{3.1.13б}$$

где f и g — периодические по θ функции с периодом 2π (или иногда для удобства с периодом единица), а число вращения $\alpha = \omega_1/\omega_2$ определяет изменение фазы θ_1 (здесь мы опустили индекс 1) на периоде фазы θ_2. Поскольку величины α, f и g записаны как функции переменной J_{n+1} (а не J_n), то симплектический характер отображения выражается в форме простого условия сохранения площади (3.1.16). Отметим, что вовсе не обязательно записывать отображение в переменных действие—угол, примером служит отображение Хенона (3.2.40).

Периодические точки. Отображение (3 1 13) имеет периодическую точку $\boldsymbol{x}_0 = (J_0,\ \theta_0)$ периода k, если

$$\boldsymbol{x}_0 = T^k\boldsymbol{x}_0, \tag{3.3.31}$$

причем $\boldsymbol{x}_0$ не является периодической точкой меньшего периода. Иначе говоря, первый возврат в начальную точку происходит ровно через k итераций отображения. Для любого k существует счетное множество периодических точек. Они образуют группы, или периодические траектории $\{\boldsymbol{x}_{01},\ \boldsymbol{x}_{02},\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_{0k}\}$, где $\boldsymbol{x}_{0i} = T^i\boldsymbol{x}_{01}$, а длина каждой траектории равна ее периоду k. Система периодических траекторий имеет иерархическую структуру [164].

Для получения всех периодических точек периода k нужно решить $2k + 2$ алгебраических уравнения:

$$J_{i+1} = J_i + f(J_{i+1},\ \theta_i), \qquad i = 1,\ \ldots,\ k, \tag{3.3.32а}$$

$$\begin{aligned} &\theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\alpha(J_{i+1}) + g(J_{i+1}, \theta_i), \\ &J_{k+1} = J_1, \\ &\theta_{k+1} = \theta_1 \pm 2\pi m, \qquad m = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{3.3.32б}$$

где m — целое число взаимно простое с k. За исключением случая $k = 1$ и, возможно, $k = 2$, решать такую систему уравнений очень трудно не только аналитически, но даже и численно. При больших k простые методы нахождения корней, вроде метода касательных Ньютона, становятся непригодными ввиду близости соседних решений в $(2k + 2)$-мерном пространстве. Специальные вариационные методы, разработанные для решения этой задачи [116, 179, 183], описаны в § 2.6.

В случае явного отображения поворота, когда f не зависит от J и $g = 0$, последовательные подстановки выражений для x_i в выражения для x_{i+1} приводят к уравнениям с двумя неизвестными вида

$$\begin{aligned} f_1(J_1, \theta_1) &= 0, \\ f_2(J_1, \theta_1) &= 0. \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

Но и эти уравнения очень трудно решить при большом k из-за чрезвычайно сложного характера функций f_1 и f_2.

Произведение инволюций. Существует важный класс отображений, периодические точки которых можно найти из уравнения с одним неизвестным. Если отображение (или соответствующий гамильтониан) обладает симметрией определенного типа, то его можно представить в виде произведения двух инволюций [104, 166]

$$T = I_2 I_1. \tag{3.3.34}$$

По определению отображение инволюции возвращает систему в начальное состояние после двух итераций, т. е.

$$I_1^2 = I; \qquad I_2^2 = I, \tag{3.3.35}$$

где I — тождественное отображение. Явное отображение поворота можно представить в виде произведения двух инволюций при условии, что функция f антисимметрична относительно некоторого угла (для простоты положим этот угол равным нулю). В этом случае отображение I_1 задается уравнениями:

$$\bar{J} = J_n + f(\theta_n), \tag{3.3.36а}$$

$$\bar{\theta} = -\theta_n, \tag{3.3.36б}$$

а отображение I_2 есть

$$J_{n+1} = \bar{J}, \tag{3.3.37а}$$

$$\theta_{n+1} = -\bar{\theta} + 2\pi\alpha(\bar{J}). \tag{3.3.37б}$$

Использование инволюций чрезвычайно облегчает нахождение периодических точек. В самом деле, так как все точки отображения

инволюции имеют период 2, то особыми могут быть лишь неподвижные точки (с периодом 1). А такие точки легко можно найти. Например, отображение I_1 имеет следующие линии неподвижных точек $\boldsymbol{x}_1$:

$$\theta_1 = 0,\ \pi, \qquad \mathrm{mod}\, 2\pi \tag{3.3.38}$$

независимо от значения J_1, а I_2 имеет линии неподвижных точек $\boldsymbol{x}_2$ при

$$2\theta_2 = 2\pi\alpha\,(J_2), \qquad \mathrm{mod}\, 2\pi. \tag{3.3.39}$$

Используя (3.3.34) и (3.3.35), можно показать, что если как $\boldsymbol{x}$, так и $T^n\boldsymbol{x}$ являются неподвижными точками отображения I_1 (или I_2), то $\boldsymbol{x}$ является также и неподвижной точкой отображения T^{2n}. В § 3.4 мы воспользуемся этим методом для определения периодических точек отображения Улама. Грин использовал этот метод для нахождения периодических точек большого периода в случае стандартного отображения [165] и в задаче Хенона—Хейлеса [166]. В обоих случаях отображение, а значит, и нечетная степень отображения представимы в виде произведения инволюций. Поэтому периодические точки этих отображений можно найти рассмотренным методом. Так, например, отображение T^3 можно представить в виде произведения двух инволюций следующим образом:

$$T^3 = (I_2 I_1 I_2)\,(I_1 I_2 I_1). \tag{3.3.40}$$

Линеаризованное отображение. Разложим отображение вокруг периодической траектории периода k:

$$\boldsymbol{x}_{01} \to \boldsymbol{x}_{02} \to \ .\ .\ . \to \boldsymbol{x}_{0k} \to \boldsymbol{x}_{01}$$

и найдем линеаризованные уравнения движения в окрестности точки $\boldsymbol{x}_{01}$:

$$\Delta\boldsymbol{x}_{n+k} = \mathsf{M}\,(\boldsymbol{x}_{0k})\cdot\Delta\boldsymbol{x}_{n+k-1} = \mathsf{M}\,(\boldsymbol{x}_{0k})\cdot\mathsf{M}\,(\boldsymbol{x}_{0,k-1})\cdot\Delta\boldsymbol{x}_{n+k-2} \tag{3.3.41}$$

и т. д. или

$$\Delta\boldsymbol{x}_{n+k} = \mathsf{A}_1\cdot\Delta\boldsymbol{x}_n. \tag{3.3.42}$$

Здесь

$$\mathsf{A}_1 = \mathsf{M}\,(\boldsymbol{x}_{0k})\cdot\mathsf{M}\,(\boldsymbol{x}_{0,\ k-1})\cdots\mathsf{M}\,(\boldsymbol{x}_{01}) \tag{3.3.43}$$

— упорядоченное произведение k матриц $\mathsf{M}_i = \mathsf{M}\,(\boldsymbol{x}_{0i})$, взятых в последовательных точках периодической траектории, каждая из которых

$$\mathsf{M}\,(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} & \dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \\[2ex] \dfrac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} & \dfrac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \tag{3.3.44}$$

есть матрица Якоби отображения. В окрестности точки x_{0i} аналогичным образом приходим к выражению

$$\mathsf{A}_i = \mathsf{M}_{i-1} \cdot \mathsf{M}_{i-2} \cdots \mathsf{M}_i, \tag{3.3.45}$$

которое получается из A_1 циклической перестановкой матриц.

Для возмущенного отображения поворота матрицу M можно получить путем подстановки выражения (3.1.13а) для J_{n+1} в (3.1.13б), откуда ($\varepsilon = 1$)

$$\begin{gathered} M_{11} = \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \bar{J}}\right)^{-1}; \qquad M_{12} = M_{11} \frac{\partial f}{\partial \theta}; \\ M_{21} = M_{11} \left(2\pi \frac{d\alpha}{d\bar{J}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{J}}\right); \\ M_{22} = 1 + M_{21} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial \theta}. \end{gathered} \tag{3.3.46}$$

Здесь $\theta = \theta_n$, $\bar{J} = J_{n+1}$, а якобиан отображения

$$\det \mathsf{M} = \left(1 + \frac{\partial g}{\partial \theta}\right) \Big/ \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \bar{J}}\right) \tag{3.3.47}$$

определяет изменение фазовой площади. Полагая $\det \mathsf{M} = 1$, получаем условие сохранения площади (3.1.16).

Для неподвижной точки $\mathsf{A}_1 = \mathsf{M}_1$ и движение в ее окрестности определяется матрицей M_1. В случае же периодической точки с периодом, бо́льшим 1, собственные значения и собственные векторы находятся из уравнения

$$\mathsf{A}_1 \cdot x = \lambda x \tag{3.3.48}$$

для движения вблизи точки x_{01} или из уравнения

$$\mathsf{A}_2 \cdot y = \lambda y \tag{3.3.49}$$

для движения вблизи точки x_{02} и т. д. Однако подстановка $\mathsf{A}_2 = \mathsf{M}_1 \cdot \mathsf{A}_1 \cdot \mathsf{M}_1^{-1}$ в уравнение (3.3.49) приводит его к уравнению (3.3.48) с $y = \mathsf{M}_1 \cdot x$. По индукции аналогичным образом связаны также любые A_i и A_{i-1}. Отсюда следует, что собственные значения и условия устойчивости одинаковы для всех точек одной периодической траектории. Собственные же векторы для точки x_{0i} выражаются посредством соотношения

$$x_i = \mathsf{M}_{i-1} \cdot \mathsf{M}_{i-2} \cdots \mathsf{M}_1 \cdot x_1 \tag{3.3.50}$$

через собственные векторы точки x_{01}.

* 3.3в. Линейная устойчивость и инвариантные кривые

Собственные значения линеаризованного отображения являются корнями уравнения (3.3.6):

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp} \mathsf{A} + 1 = 0, \tag{3.3.51}$$

где

$$\mathrm{Sp}\,\mathsf{A} = a_{11} + a_{22}$$

и $\det \mathsf{A} = 1$ ввиду сохранения площади. Корни уравнения (3.3.51) равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{Sp}\,\mathsf{A}}{2} \pm i\left[1 - \left(\frac{\mathrm{Sp}\,\mathsf{A}}{2}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{3.3.52}$$

Произведение корней $\lambda_1\lambda_2 = 1$, а их сумма $\lambda_1 + \lambda_2$ есть вещественное число. Возможны три случая.

1. Корни λ_1, λ_2 являются комплексно сопряженными и лежат на единичной окружности ($\sigma \neq 0$):

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\sigma}. \tag{3.3.53}$$

Это соответствует устойчивым решениям, причем

$$\mathrm{Sp}\,\mathsf{A} = 2\cos\sigma, \tag{3.3.54}$$

$$|\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{A}\,| < 2. \tag{3.3.55}$$

2. Корни действительны и взаимно обратны

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1} \neq \pm 1, \tag{3.3.56}$$

так что

$$|\,\lambda_{1,2}\,| = e^{\pm\sigma} \tag{3.3.57}$$

и

$$|\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{A}\,| = |\,2\,\mathrm{ch}\,\sigma\,| > 2. \tag{3.3.58}$$

Это соответствует экспоненциально растущему и убывающему решениям. Первое (неустойчивое) решение может быть двух видов:

$$\mathrm{Sp}\,\mathsf{A} > 2\,(\lambda_1 > 1) \quad \text{и} \quad \mathrm{Sp}\,\mathsf{A} < -2\,(\lambda_1 < -1).$$

3. Корни равны

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1. \tag{3.3.59}$$

Существование этих трех случаев следует также и непосредственно из симметрии собственных значений. Выясним теперь физический смысл этих решений.

Эллиптические траектории. В случае 1 общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta J_n &= a\cos n\sigma + b\sin n\sigma, \\ \Delta\theta_n &= c\cos n\sigma + d\sin n\sigma \end{aligned} \tag{3.3.60}$$

и описывает движение по эллипсу вокруг периодической точки. Уравнение эллипса можно получить из инвариантной квадратичной формы (3.3.30). Введя обозначения $p = \Delta J$ и $q = \Delta\theta$, чтобы

подчеркнуть, что ΔJ, $\Delta\theta$ не обязаны быть переменными действие — угол, получаем

$$a_{12}q^2+(a_{11}-a_{22})\,qp-a_{21}p^2=Q. \tag{3.3.61}$$

Диагонализуем теперь матрицу **A** с помощью преобразования (3.3.10). При этом координатные оси поворачиваются на угол χ и совпа-

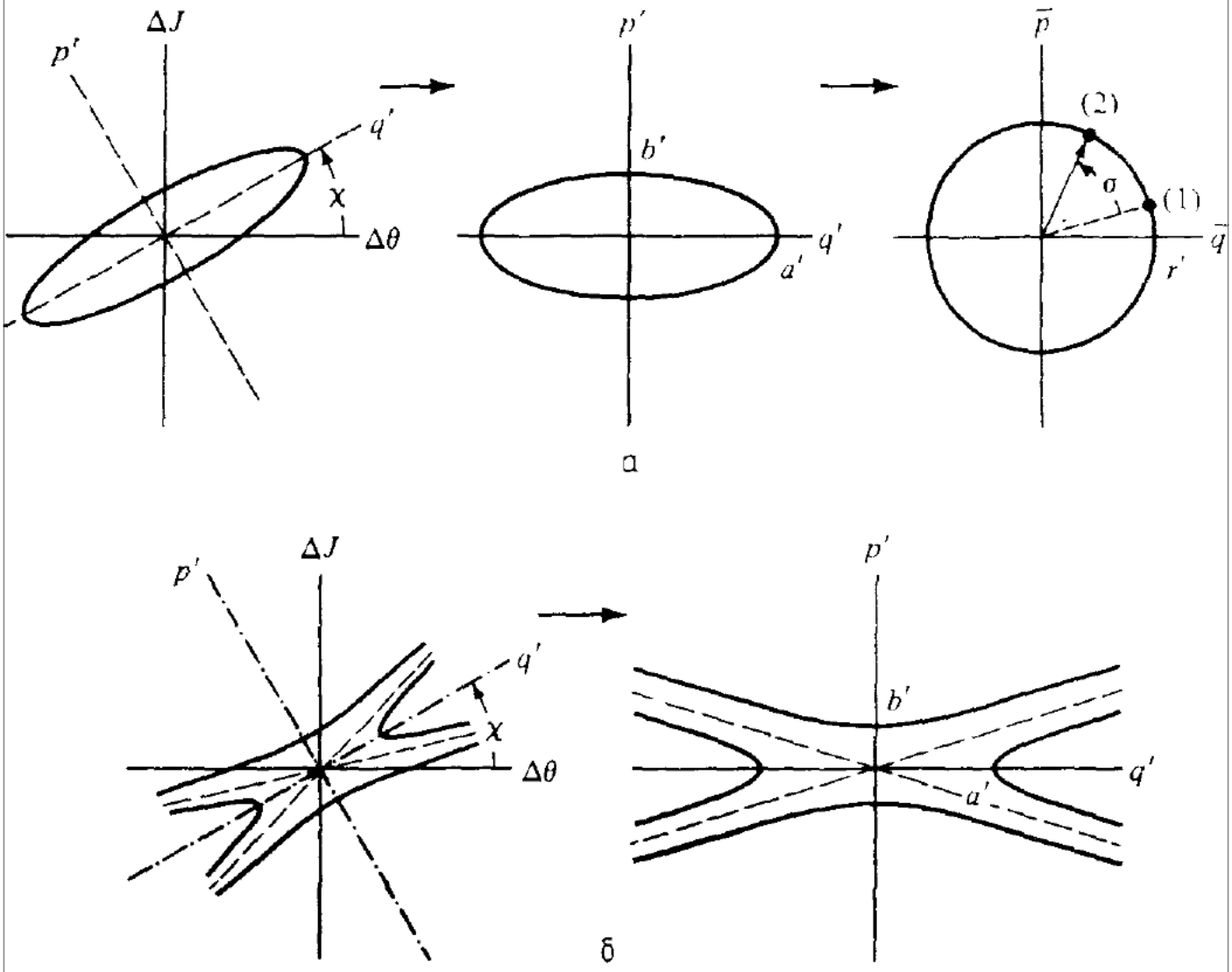


Рис. 3.9. Приведение эллиптических и гиперболических траекторий к нормальной форме.

а — после поворота осей и изменения масштаба эллипс переходит в окружность; *б* — после поворота асимптоты (пунктирные прямые) располагаются симметрично относительно координатных осей.

дают с главными осями матрицы **A**. Перекрестный член в (3.3.61) пропадает (рис. 3.9, *а*), и мы получаем

$$a'_{12}q'^2-a'_{21}p'^2=Q, \tag{3.3.62}$$

где

$$\operatorname{tg}2\chi=\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}+a_{21}}, \tag{3.3.63}$$

$$a'_{11}=a'_{22}=\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\mathbf{A}, \tag{3.3.64a}$$

$$a'_{12}-a'_{21}=a_{12}-a_{21}, \tag{3.3.64б}$$

$$a'_{12}a'_{21}=\frac{1}{2}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{A})^2-1. \tag{3.3.64в}$$

Последние два уравнения можно разрешить относительно недиагональных элементов матрицы **A**. В случае 1 a'_{12} и a'_{21} имеют противоположные знаки, и выражение (3.3.62) переходит в уравнение эллипса с отношением полуосей

$$R=\frac{p'_{\text{макс}}}{q'_{\text{макс}}}=\left|\frac{a'_{12}}{a'_{21}}\right|^{1/2}. \tag{3.3.65}$$

Наконец, преобразование $p'=R^{1/2}\bar{p}$, $q'=R^{-1/2}\bar{q}$ переводит траекторию в окружность, а отображение сводится к простому линейному повороту на угол σ. Если ввести нелинейные члены, пропорциональные более высоким степеням $\Delta\boldsymbol{x}$, то получим возмущенное отображение поворота со всей своей сложной иерархической структурой, показанной на рис. 3.5.

Гиперболические траектории. В случае 2 общее решение имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta J_n&=a\lambda_1^n+b\lambda_1^{-n},\\ \Delta\theta_n&=c\lambda_1^n+d\lambda_1^{-n}\end{aligned} \tag{3.3.66}$$

и описывает движение по одной или по обеим ветвям гиперболы,

Производя поворот к главным осям (см. рис. 3.9, *б*), снова приходим к уравнению (3.3.62). Однако теперь a'_{12} и a'_{21} имеют одинаковый знак, и мы получаем гиперболу с асимптотами

$$p'=\pm Rq'. \tag{3.3.67}$$

Переписав (3.3.66) в этой повернутой системе координат, видим, что при положительной величине λ_1 движение происходит только по одной ветви гиперболы. Если же λ_1 — отрицательная величина, то при каждой итерации отображения p' и q' отражаются относительно начала координат и движение происходит по обеим ветвям гиперболы, как показано на рис. 3.10.

В обычном случае, когда эллиптические и гиперболические периодические точки чередуются, гиперболические траектории остаются на одной ветви гиперболы. Примером может служить маятник с гамильтонианом (1.3.6), который для простоты мы перепишем в виде

$$H=\frac{1}{2}p^2-\cos\varphi=\mathrm{const}. \tag{3.3.68}$$

Соответствующие траектории в фазовом пространстве показаны на рис. 1.4. Линеаризуя гамильтониан в окрестности неподвижных точек $p=0$ и $\varphi=2\pi n$, получаем

$$p^2+(\Delta\varphi)^2=\mathrm{const}. \tag{3.3.69}$$

Аналогично в окрестностях точек $p = 0$ и $\varphi = \pi(n+1)$

$$p^2 - (\Delta\varphi)^2 = \text{const}. \tag{3.3.70}$$

Очевидно, что выражение (3.3.69) описывает эллипсы, а (3.3.70) — гиперболы. Это соответствует неподвижным точкам $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, как показано на рис. 1.4.

Гиперболические точки второго вида (с отражением) также важны для нашего анализа. Как будет видно из дальнейшего, такие точки возникают при сильном возмущении, когда эллиптическая точка превращается в гиперболическую с отражением. В этом

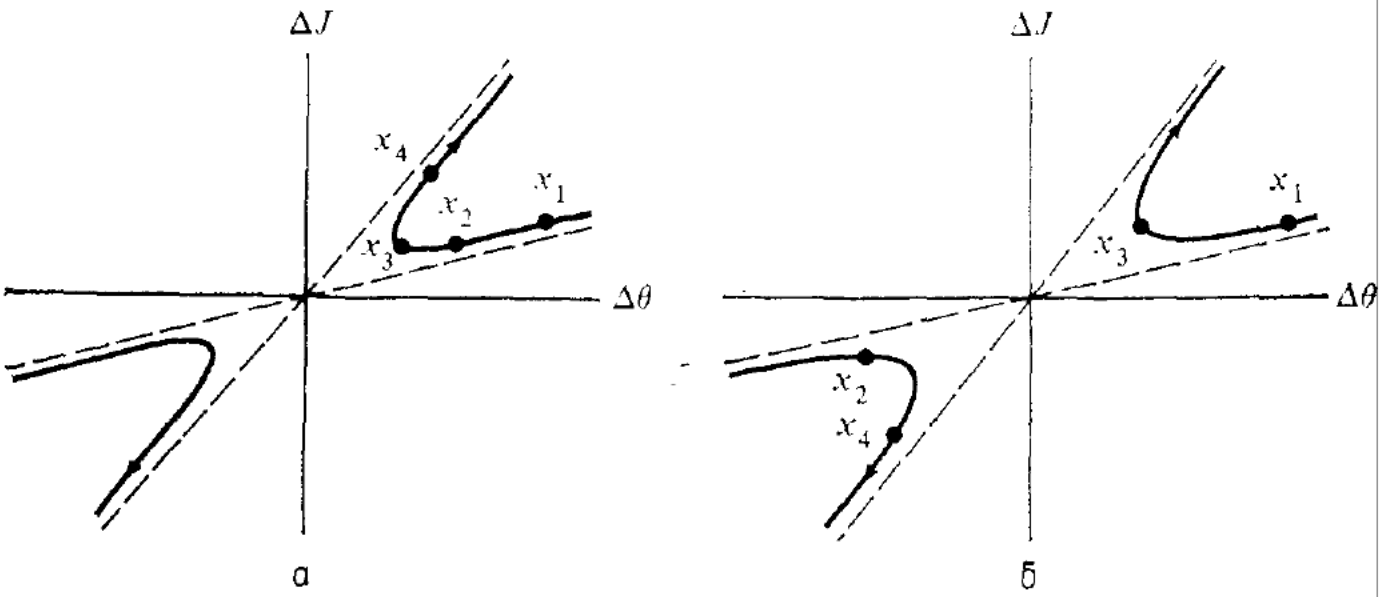


Рис. 3.10. Три последовательных отображения начальной точки x_1.
а — вблизи обыкновенной гиперболической точки $\lambda_1 > 1$; *б* — вблизи гиперболической точки с отражением $\lambda_1 < -1$.

случае все неподвижные точки отображения T^k становятся гиперболическими, и движение в окрестности данного резонанса становится стохастическим. Это будет явно показано в § 3.4.

Случай равных собственных значений. Случай 3, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, особый в том смысле, что он является пограничным между устойчивым и неустойчивым движениями. При $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, переходя к главным осям, отображение можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} p'_{n+k} \\ q'_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_n \\ q'_n \end{pmatrix}. \tag{3.3.71}$$

Это отображение описывает сдвиг вдоль прямой $p' = \text{const}$ [1]). Линия неподвижных точек соответствует $p'_0 = 0$. Аналогично этому

[1]) Возможен также случай, когда $a'_{21} = 0$, а $a'_{12} = a_{12}$. При этом сдвиг происходит вдоль прямой $q' = \text{const}$.

при $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ сдвиг происходит вдоль двух прямых $p' = \pm \text{const}$. Начальному условию $p_0' = 0$ соответствует луч. Периодические точки с периодом 2 лежат на прямой $p_0' = 0$, причем если $q_0' > 0$, то $q_k' = -q_0'$ и т. д. Согласно теореме Пуанкаре — Биркгофа, при включении нелинейного возмущения, некоторые из этих периодических точек сохраняются и ведут с ростом возмущения к бифуркациям, которые будут рассмотрены в п. 3.4г. В § 4.4 мы покажем также, что случай $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ особенно важен при определении перехода между ограниченным и неограниченным стохастическим движением по методу Грина [165].

*§ 3.4. Ускорение Ферми

Предложенный Ферми [126] механизм ускорения космических лучей за счет столкновения их с движущимися магнитными полями моделируется колебаниями частицы между неподвижной и осциллирующей стенками. Если фаза колебаний стенки в момент удара является случайной, то частица в среднем ускоряется. Более интересен вопрос: может ли стохастическое ускорение возникать из нелинейной динамики без дополнительного условия о случайности фазы, например, при периодическом движении стенки. Численное моделирование последнего случая, проведенное Уламом и сотр. [415], показало, что движение частицы является, по-видимому, стохастическим, но ее средняя энергия не возрастает.

Эти результаты Улама были объяснены с помощью аналитических и численных методов Заславским и Чириковым [443] и более полно Брахичем [38] и Либерманом и Лихтенбергом [274]. Они показали, что в случае гладкой зависимости скорости стенки от времени фазовая плоскость движения разбивается на три различные области: 1) область малых скоростей, в которой все неподвижные точки неустойчивы, что приводит к стохастическому движению практически во всей этой области; 2) область промежуточных скоростей, где внутри стохастической компоненты имеются островки устойчивости, окружающие эллиптические точки, и 3) область больших скоростей, в которой стохастические слои в окрестности сепаратрис изолированы друг от друга инвариантными кривыми, которые пересекают весь интервал изменения фазы. Именно последняя область и ограничивает набор энергии частицей. Если же зависимость скорости стенки от времени недостаточно гладкая, то области 3 не существует в согласии с теорией КАМ.

Модель ускорения Ферми явилась одной из первых задач по определению условий существования инвариантных кривых. В сочетании с простотой численного моделирования на «большие времена» она стала как бы пробным камнем в понимании динамики нелинейных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

Важно поэтому выяснить, что в этой задаче типично для систем, близких к интегрируемым, а что зависит от модели. Ниже мы подробно исследуем ряд таких моделей.

*3.4а. Физические задачи и их модели

В литературе рассматривалось несколько моделей ускорения Ферми, которые приводят к различным отображениям на поверхности сечения Пуанкаре. Модель Улама показана на рис. 3.11, *а*. Точное

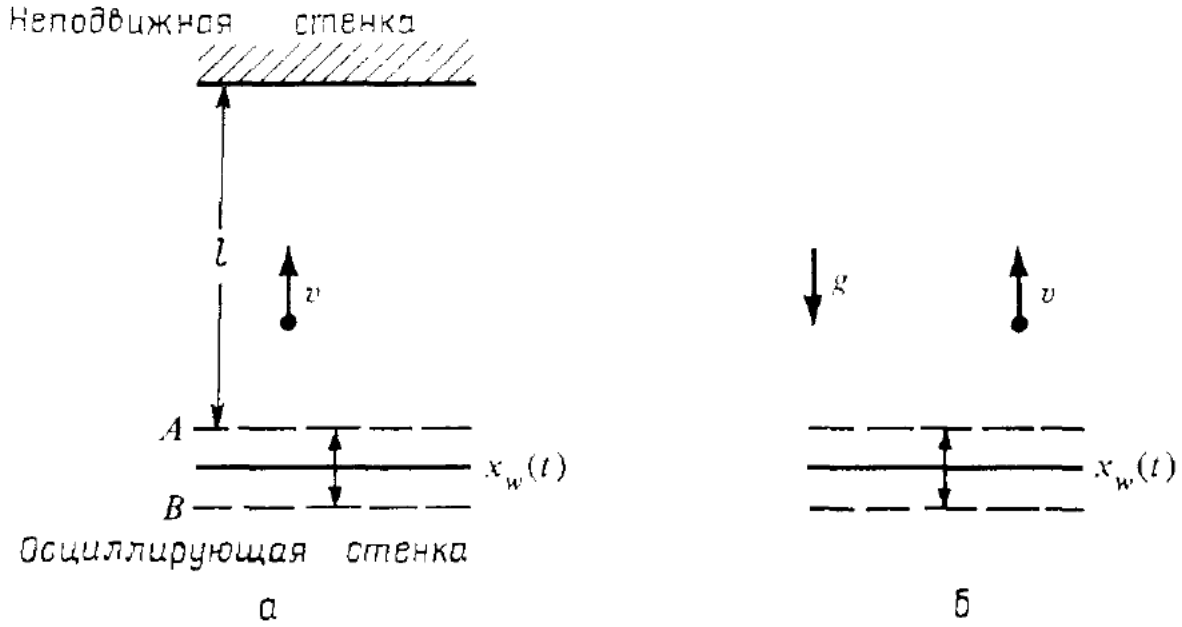


Рис. 3.11. Модели ускорения Ферми.
а — модель Улама: частица совершает колебания между неподвижной и осциллирующей стенками; *б* — модель Пустыльникова: частица отражается от осциллирующей стенки в поле тяжести с ускорением g.

отображение для этой модели исследовано Заславским и Чириковым [443] и Либерманом и Лихтенбергом [274] для пилообразной зависимости скорости стенки от времени $\dot{x}_w(t)$, Брахичем [38] для пилообразной и параболической функции $\dot{x}_w(t)$, а Лихтенбергом и др. [272] в случае произвольной скорости $\dot{x}_w(t)$. «Упрощенное» отображение для модели Улама, в котором пренебрегается смещением подвижной стенки, было введено Либерманом и Лихтенбергом [274] и исследовалось ими для произвольной скорости стенки [1]). Пустыльников [339] исследовал другую модель (рис. 3.11, *б*), в которой частица сталкивается только с одной осциллирующей стенкой и возвращается к ней в постоянном поле тяжести [2]). Здесь также можно ввести упрощенное отображение, которое приводится к стандартному отображению (см. п. 4.1б).

---

[1]) В случае пилообразной скорости такое отображение исследовано также в работе [443].— *Прим. ред.*

[2]) Эта модель была введена и исследована Заславским [481, § 2Б].— *Прим. ред.*

Точное отображение Улама. В случае когда скорость подвижной стенки задается пилообразной функцией времени, Заславский и Чириков получили следующую систему точных разностных уравнений движения частицы:

$$u_{n+1} = \pm u_n + \left(\psi_n - \frac{1}{2}\right), \tag{3.4.1а}$$

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{2} - 2u_{n+1} + \left[\left(\frac{1}{2} - 2u_{n+1}\right)^2 + 4\varphi_n u_{n+1}\right]^{1/2}, \quad \left(u_{n+1} > \frac{1}{4}\psi_n\right), \tag{3.4.1б}$$

$$\psi_{n+1} = 1 - \psi_n + 4u_{n+1}, \quad \left(u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}\psi_n\right), \tag{3.4.1в}$$

$$\varphi_n = \psi_n + \frac{\psi_n(1-\psi_n) + l/4a}{4u_{n+1}}, \quad \mathrm{mod}\ 1. \tag{3.4.1г}$$

Здесь a — амплитуда колебаний стенки, l — минимальное расстояние между стенками, u_n — безразмерная скорость частицы (амплитуда скорости стенки равна 1/4), n — число столкновений с подвижной стенкой, ψ_n — фаза подвижной стенки в момент столкновения. Фаза ψ изменяется от 0 до 1/2 при движении стенки из положения A в положение B и от 1/2 до 1 при обратном движении (см. рис. 3.11, *а*). Знак плюс в выражении (3.4.1а) соответствует соотношению (3.4.1б) на предыдущем шаге, знак минус — соотношению (3.4.1в).

Хотя уравнения (3.4.1) и является точными, они не сохраняют фазовую площадь, т. е. переменные u и ψ оказываются неканоническими. Чтобы перейти к каноническим переменным, запишем, следуя Лихтенбергу и др. [272], разностные уравнения в переменных, относящихся к столкновениям частицы с неподвижной стенкой. Введем $\bar{u}_n = v_n/2\omega a$ — новую нормированную скорость частицы и θ_n — фазу подвижной стенки в момент n-го столкновения частицы с неподвижной стенкой. Будем считать, что движение подвижной стенки задается выражением $x_\omega = aF(\psi)$, где F — четная периодическая функция фазы $\psi = \omega t$ с периодом 2π. Тогда получим следующую систему неявных уравнений, аналогичную (3.4.1):

$$\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n - F'(\psi_c), \tag{3.4.2а}$$

$$\theta_{n+1} = \psi_c + \frac{\left[\pi M + \frac{1}{2}F(\psi_c)\right]}{\bar{u}_{n+1}}, \tag{3.4.2б}$$

$$\psi_c = \theta_n + \frac{\left[\pi M + \frac{1}{2}F(\psi_c)\right]}{\bar{u}_n}. \tag{3.4.2в}$$

Здесь ψ_c — фаза подвижной стенки в момент столкновения с частицей после ее n-го столкновения с неподвижной стенкой, $M = l/2\pi a$, а F' — импульс, получаемый частицей при столкновении. Легко видеть, что скорость частицы v является канонически сопряженной ее расстоянию x до неподвижной стенки, а фаза θ играет роль переменной времени, сопряженной энергии частицы $E = \bar{u}^2$. Это означает, что если в расширенном фазовом пространстве $(v, x, -E, t)$ выбрать поверхность сечения $x = 0$, то для оставшейся пары переменных $(-E, \theta)$ отображение (3.4.2) сохраняет площадь. В самом деле, найдя якобиан непосредственно из системы (3.4.2), получаем

$$\frac{\partial (E_{n+1}, \theta_{n+1})}{\partial (E_n, \theta_n)} = 1. \tag{3.4.3}$$

Упрощенное отображение Улама. Система уравнений (3.4.1) существенно упрощается, если пренебречь смещением колеблющейся стенки. Такая упрощенная модель сохраняет наиболее характерные черты физически более реальной исходной модели и вместе с тем легко обобщается на случай произвольного закона скорости стенки. Мы проведем сравнение результатов численных экспериментов для точного и упрощенного отображений. Каноническими переменными упрощенного отображения являются скорость частицы перед n-м столкновением с движущейся стенкой и фаза колебаний стенки. При пилообразном законе изменения скорости стенки отображение имеет вид

$$u_{n+1} = \left| u_n + \psi_n - \frac{1}{2} \right|, \tag{3.4.4а}$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \frac{M}{u_{n+1}}, \qquad \mathrm{mod}\ 1. \tag{3.4.4б}$$

Здесь $u = v/V$ — безразмерная скорость частицы, $V/4$ — амплитуда скорости стенки, $M = l/16a$, безразмерное время пролета равно $M/u = 2l/vT$, где $T = (32a/V)^{1/2}$ — период колебаний стенки. В выражении (3.4.4а) стоит абсолютная величина, тем самым учитывается изменение направления скорости при $u < 1$, которое имеет место в точном отображении (3.4.1). В наиболее интересной области $u > 1$ это несущественно.

Упрощенное отображение можно получить и непосредственно из точного (3.4.1) при $l/a \gg 1$ и $u \gg 1$. Упрощенные уравнения легко обобщаются на случай нелинейной зависимости $f(\psi) = -F'(\psi)$ в (3.4.2). Например, отображение

$$u_{n+1} = | u_n + (2\psi_n - 1)[1 - (2\psi_n - 1)^2] |, \tag{3.4.5а}$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \frac{M}{u_{n+1}}, \qquad \mathrm{mod}\ 1 \tag{3.4.5б}$$

соответствует кубической зависимости, а отображение

$$u_{n+1} = | u_n + \sin \psi_n |, \tag{3.4.6а}$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \frac{2\pi M}{u_{n+1}} \tag{3.4.6б}$$

— синусоидальной (аналитической) зависимости. В последнем случае интервал изменения фазы ψ принят равным 2π, а не 1. Все эти отображения сохраняют фазовую площадь. Нелинейные законы изменения скорости стенки являются фактически более регулярными, чем «линейный», в том смысле, что для первых функция $f(\psi)$ более гладкая в точке $\psi = 0$. Как отмечалось ранее, для существования инвариантных кривых, согласно теореме КАМ, необходимо, чтобы возмущение имело достаточное число непрерывных производных. В случае пилообразного закона изменения скорости стенки уже само возмущение (скорость) является разрывным, и поэтому можно думать, что в этом случае не существует инвариантных кривых, пересекающих весь интервал изменения фазы ψ. Мы увидим, что это и в самом деле так. Более того, по крайней мере для отображения Ферми мы сможем определить, сколько же непрерывных производных требуется для применимости теоремы КАМ.

*3.4б. Численное моделирование

Современные быстродействующие ЭВМ позволяют получить сотни тысяч итераций рассмотренных выше отображений. Для исследования всей фазовой плоскости разобьем интервал фазы (0,1) или $(0,2\pi)$ на 100 ячеек, а интервал скорости $(0, u_{\text{макс}})$ на 200 ячеек. На рис. 3.12 приведены численные результаты для упрощенного отображения (3.4.4) с $M = 10$ после 163 840 итераций для каждой из 10 траекторий, использованных в счете. На рисунке отмечены ячейки, в которые попала хотя бы одна из этих траекторий. В правой части рисунка показано распределение плотности $P(u)$, проинтегрированное по фазе и по всем итерациям. Начальные условия движения выбраны случайно в области малых скоростей частицы. При этом каждая траектория заполняет всю стохастическую компоненту движения, и конечное распределение на фазовой плоскости не зависит от начальных условий. Незаполненные траекториями островки устойчивости ограничены инвариантными кривыми, и поэтому частицы не могут попасть в них извне. Центрами островков являются эллиптические точки. Ниже мы покажем, что при $u < \frac{1}{2} M^{1/2}$ линеаризованное движение в окрестности всех неподвижных точек неустойчиво. Это видно и непосредственно из картины фазовой плоскости на рис. 3.12. Эллиптическая точка при $u = M$ соответствует резонансу 1 : 1 между колебаниями частицы и стенки. При меньших значениях скорости частицы ($M/u = 2$,

3, 4, . . .) расположены целые резонансы 2 : 1, 3 : 1, 4 : 1, . . . , при которых стенка совершает соответственно два, три, четыре и т. д. колебания за время одного колебания частицы.

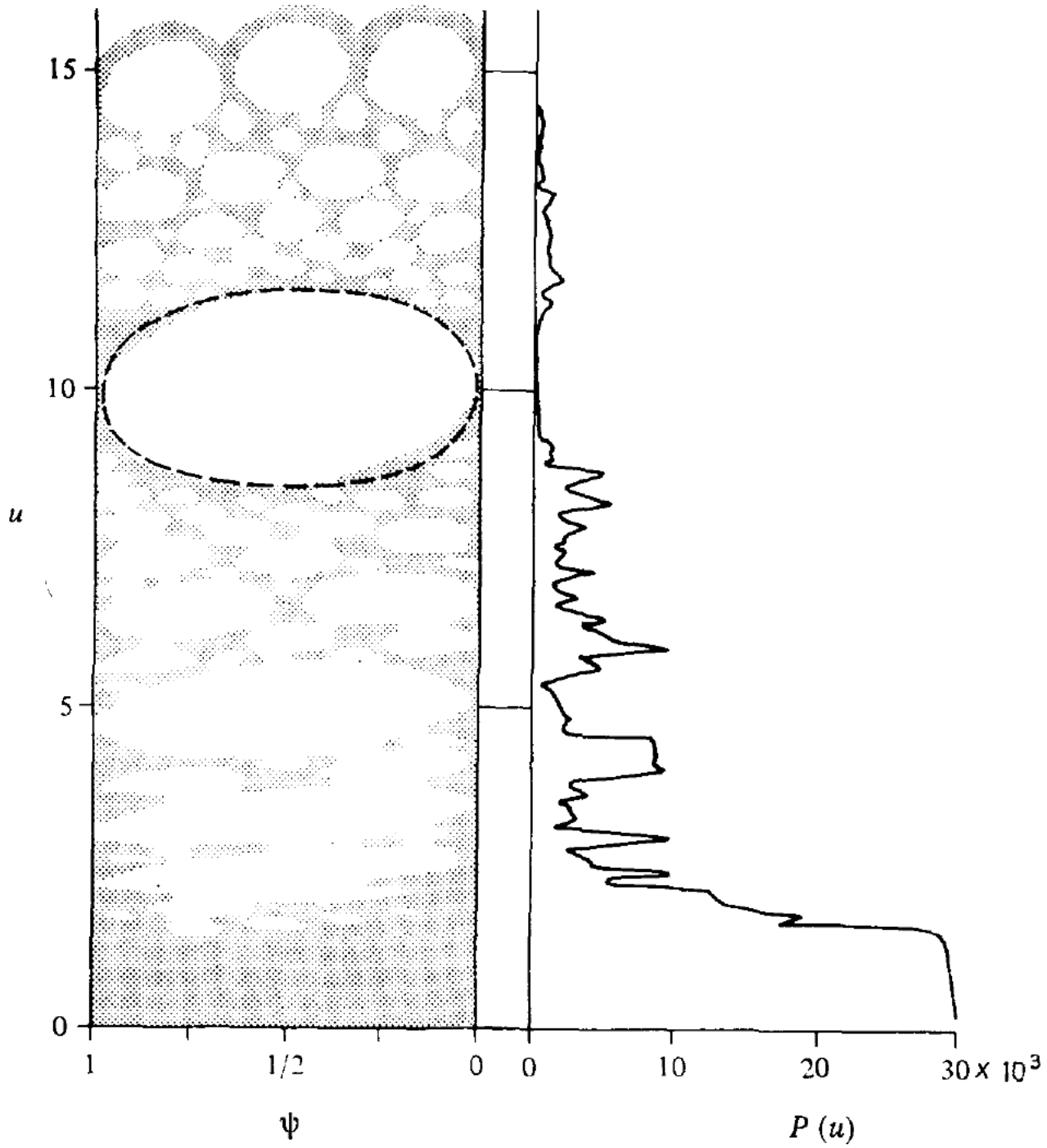


Рис. 3.12. Фазовая плоскость (u, ψ) и функция распределения P (u) для отображения (3.4.4) (по данным работы [274]).

10 траекторий по 163 840 итераций; $M = 10$. Пунктирная кривая рассчитана по резонансной теории возмущений.

Между этими целыми резонансами ($k = 1$) находятся дробные резонансы с $k > 1$. Так, например, между целыми резонансами $M/u = 1$ ($u = 10$) и $M/u = 2$ ($u = 5$) расположен резонанс $M/u = 3/2$ ($u \approx 6{,}67$), соответствующий трем колебаниям стенки на два колебания частицы (см. рис. 3.12). Этот резонанс отделен в свою очередь от целого резонанса другими резонансами с еще бо́льшими k. Число вращения дробных резонансов вблизи края целого

резонанса приблизительно совпадает с числом вращения последнего вследствие линейной зависимости $f(\psi)$ в рассматриваемом случае (3.4.4). По этой же причине внутри целых резонансов нет вторичных резонансов, а траектории фазовых колебаний мало отличаются от эллипсов [1]).

Аналогичное численное моделирование было проведено как для отображения (3.4.6) (см. рис. 1.14), так и для отображения (3.4.5) (рис. 3.13). В последнем случае $M = 10$, а число итераций каждой из 10 траекторий равно 81 920. Размер областей устойчивости при малых скоростях здесь существенно меньше, чем на рис. 3.12, из-за наличия вторичных резонансов. Помимо этого, существует

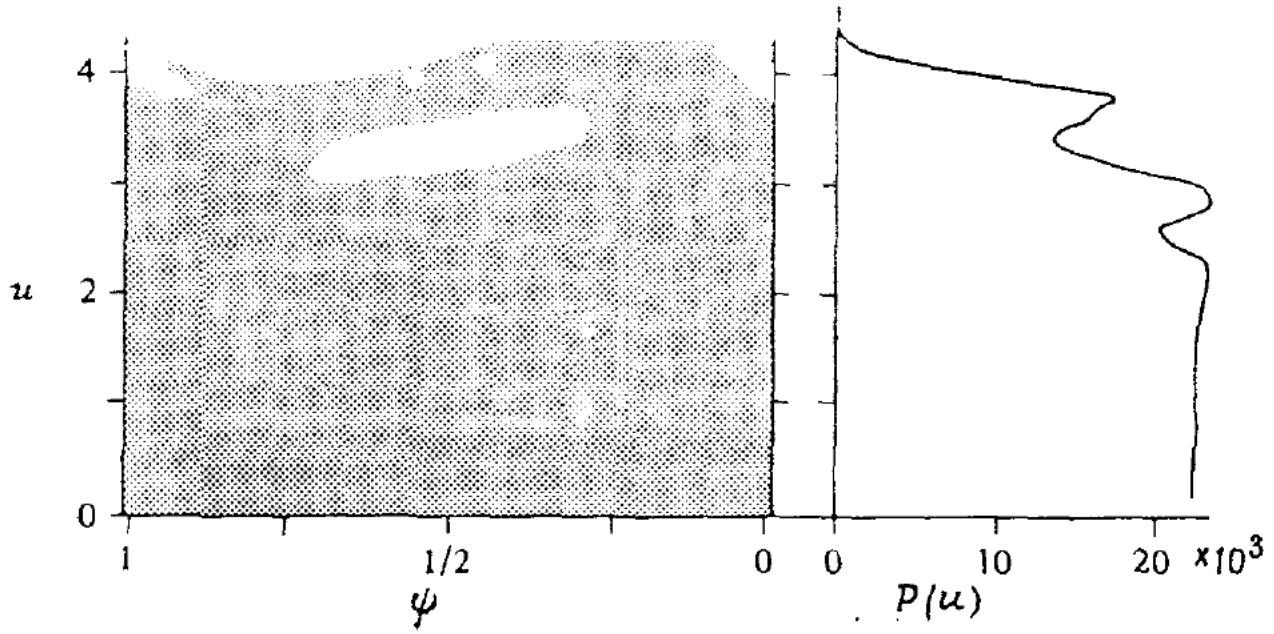


Рис. 3.13. То же, что и на рис. 3.12 для отображения (3.4.5) (по данным работы [274]).
10 траекторий по 81 920 итераций.

верхняя граница скорости u_b (граница стохастичности [2])), выше которой сохраняются невозмущенные инвариантные кривые, пересекающие весь интервал изменения фазы ψ. Кажущееся противоречие, что более устойчивое движение соответствует нелинейной функции $f(\psi)$, объясняется тем, что «линейная» зависимость $f(\psi)$ является на самом деле разрывной. Это и приводит к разрушению инвариантных кривых. Более важно, как показывают результаты численного моделирования отображения (3.4.5), что для существования инвариантных кривых необходимо и достаточно, чтобы гамильтониан (производящая функция) отображения имел две непре-

[1]) С этим же связана еще одна особенность отображения (3.4.3) — отсутствие гиперболических неподвижных точек ($M > 0$) вследствие разрыва функции $f(\psi)$ при $\psi = 0$ (1).— *Прим. ред.*

[2]) В оригинале используется редко употребляемый термин absolute barrier (абсолютный барьер).— *Прим. перев.*

рывные производные ($S=2$)[1]. Действительно, для отображения (3.4.5) производная $df/d\psi$ непрерывна, а $d^2f/d\psi^2$ разрывна и гамильтониан

$$H \sim \int f d\psi. \tag{3.4.7}$$

Полученное значение $S = 2$ на единицу меньше лучшей (достаточной) оценки Мозера [310] для произвольного отображения [2].

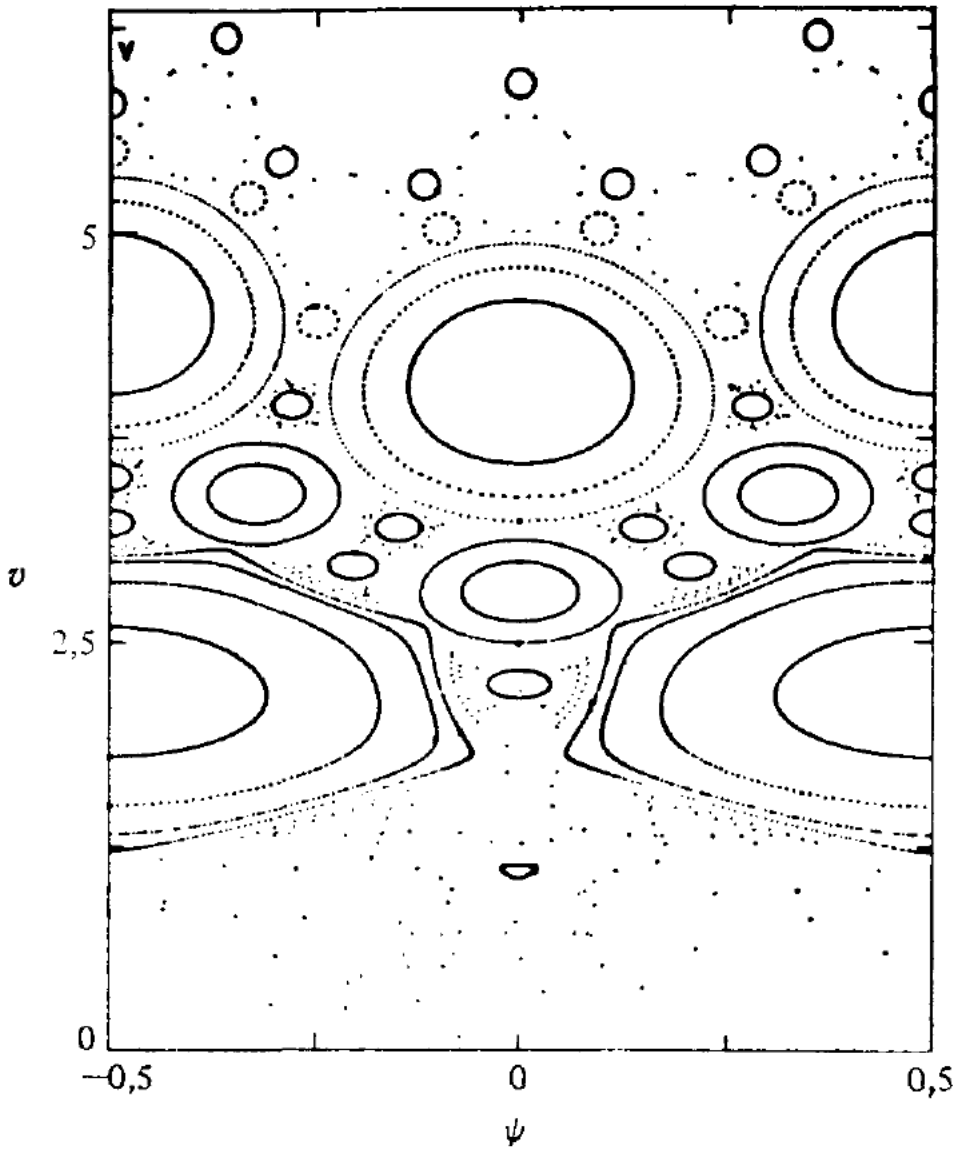


Рис. 3.14. Фазовая плоскость отображения Улама с $M = 1{,}25$ и $v = 2u/M$ (по данным работы [38]).
Видна сложная структура регулярных траекторий.

На рис. 3.12 и 1.14 пунктиром показаны сепаратрисы резонансов, вычисленные из гамильтониана в п. 3.4е. В первом случае сепаратриса имеет приближенно эллиптическую форму, тогда как на рис. 1.14 явно видна неустойчивость движения в окрестности

[1]) Это заключение противоречит оценке (3.2.30) и является спорным. Ограничение диффузии на рис. 3.13 объясняется, по-видимому, просто ее малой скоростью на резонансах высоких гармоник. Подобные эффекты наблюдались неоднократно и при меньших S (см., например, [475, § 4.1] и, [482, § 6], где обсуждается также возможный механизм этого явления).— *Прим. ред.*

[2]) См. примечание редактора на. с. 193.— *Прим. ред.*

сепаратрисы из-за образования вторичных резонансов. Некоторый перекос резонанса по сравнению с расчетным вызван пренебрежением поворотом главных осей (см. рис. 3.9, *а*).

Хотя численные данные на рис. 3.12 и 3.13 хорошо представляют крупномасштабную структуру фазовой плоскости, они не отражают более мелкие детали этой структуры. Последние можно выявить, если проводить численное моделирование с бо́льшим количеством начальных условий. Именно такое исследование было выполнено Брахичем [38] для отображений с различными $f(\psi)$, а также для точного отображения (3.4.1). В последнем случае [1]) его результат для $M = 1{,}25$ показан на рис. 3.14. При сравнении с рис. 3.12 следует учесть сдвиг фазы на 1/2. На рис. 3.14 хорошо виден целый резонанс $k = 1$ при $v = 2{,}2$, а также дробные резонансы с $k = 3$ и $k = 2$, расположенные соответственно при бо́льших скоростях v. Вблизи целого резонанса имеется еще и резонанс с $k = 6$, который деформирует сепаратрису первого. Резонанс $k = 6$ связан с небольшой нелинейностью из-за смещения стенки и зависимости $1/u$ для сдвига фазы. Наконец, в верхней части рис. 3.14 виден вторичный резонанс пятой гармоники, относящийся к целому первичному резонансу $k = 1$. Последний похож на вторичные резонансы для отображения Хенона (см. рис. 3.6).

*3.4в. Периодические точки и их линейная устойчивость

Периодические точки. Рассмотрим периодические точки различных отображений для ускорения Ферми. Запишем упрощенное отображение в виде

$$u_{j+1} = |u_j + f(\psi_j)|, \tag{3.4.8а}$$

$$\psi_{j+1} = \psi_j + \frac{2\pi M}{u_{j+1}}. \tag{3.4.8б}$$

Отметим несколько простых свойств этого отображения. Просуммировав уравнение (3.4.8а) по k итерациям и принимая, что $u_j > f(\psi_j)$ при всех j, получим фазовое соотношение для любой группы периодических точек, лежащих на одной периодической траектории отображения

$$\sum_{j=1}^{k} f(\psi_j) = 0. \tag{3.4.9}$$

Взяв такую же сумму для уравнения (3.4.8б), получим «среднюю» скорость $\bar{u}_{km}$ периодической точки периода k:

$$\bar{u}_{km} = \frac{kM}{m}, \tag{3.4.10}$$

---

[1]) В работе [38] исследовалось несколько иное отображение, однако качественно сложная структура фазовой плоскости на рис. 3.14 характерна и для отображения (3.4.1).— *Прим. ред.*

где m — взаимно простое с k целое число, а

$$\bar{u}_{km}^{-1} = k^{-1} \sum_{j=1}^{k} u_j^{-1}. \qquad (3.4.11)$$

Целое число m нумерует периодические траектории с данным k. Разброс скорости каждой периодической точки (k, m) лежит в пределах $\Delta u_{\text{макс}} = (k-1)\ |f|_{\text{макс}}$.

Как видно из рис. 3.12—3.14, периодические точки, окруженные большими областями устойчивости, расположены при $u \gg 1$, где величина $\varepsilon = |f|_{\text{макс}}/\bar{u}_{km}$ мала. Они соответствуют первичным резонансам и сохраняются даже в пределе $\varepsilon \to 0$. При $\varepsilon \equiv 0$ периодические точки (k, m) имеют координаты: $\psi_j = \psi_0 + 2\pi jm/k$; $u_j = kM/m$; $j = 1, \ldots, k$; ψ_0 — любая величина. Значение ψ_0 становится, однако, определенным при малом, но конечном ε. Расположение неподвижных точек (периода $k = 1$) для различных отображений приведено в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Расположение и устойчивость неподвижных точек ($k=1$)

Отображение	Положение $m=1,2,3, \ldots$		Устойчивость
	ψ_1	u_1	
Точное (3.4.1)	1/2	$M(+1/8)/m$	Устойчивы при $u_1 > \frac{1}{2}(M+1/8)^{1/2}$
Упрощенное (3.4.4) $f=\psi-1/2$	1/2	M/m	—»— $u_1 > \frac{1}{2} M^{1/2}$
Упрощенное (3.4.6) $f=\sin\psi$.	0	M/m	—»— $u_1 > (\pi M/2)^{1/2}$
	π	M/m	Неустойчивы
Упрощенное (3.4.5) $f=x(1-x^2)$ $x=2\psi-1$.	1/2	M/m	Устойчивы при $u_1 > (M/2)^{1/2}$

Линейная устойчивость. Теперь мы проведем подробный анализ устойчивости неподвижных точек, представленных в табл. 3.1. Начнем с отображения (3.4.4). Линеаризуя его в неподвижных точках $u_1 = M/m$; $\psi_1 = 1/2$, получаем

$$\Delta u_{n+1} = \Delta u_n + \Delta\psi_n, \qquad (3.4.12)$$

$$\Delta\psi_{n+1} = \Delta\psi_n - \frac{M}{u_1^2}(\Delta u_n + \Delta\psi_n). \qquad (3.4.13)$$

Откуда для матрицы преобразования вектора $(\Delta u, \Delta\psi)$ имеем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{M}{u_1^2} & 1-\frac{M}{u_1^2} \end{pmatrix}. \qquad (3.4.14)$$

При этом $\det \mathbf{A} = 1$, как и должно быть в силу сохранения фазовой площади. Согласно (3.3.55), условие устойчивости имеет вид

$$|\operatorname{Sp} \mathbf{A}| = \left| 2 - \frac{M}{u_1^2} \right| < 2, \tag{3.4.15}$$

или

$$u_1 > \frac{1}{2} M^{1/2}. \tag{3.4.16}$$

При $u_1 < \frac{1}{2} M^{1/2}$ величина $\operatorname{Sp}\mathbf{A} < -2$, что соответствует гиперболической точке с отражением. Именно такая неподвижная точка возникает, когда эллиптическая точка превращается в гиперболическую на границе устойчивости. Физический смысл такого превращения можно пояснить, вычислив угол поворота σ вокруг неподвижной точки, определяемый выражением (3.3.54):

$$\cos\sigma = \frac{1}{2} \operatorname{Sp}\mathbf{A}. \tag{3.4.17}$$

На границе устойчивости $\cos\sigma = -1$ и, следовательно, сдвиг фазы $\sigma = \pi$. Это явление хорошо известно и детально исследовано в самых разных областях, как, например, распространение волн в периодических структурах [42] или движение частиц в ускорителях [94].

В качестве примера превращения эллиптических точек в гиперболические с отражением рассмотрим отображение (3.4.6). Все неподвижные точки с $\psi_1 = \pi$ (и разными m и u_1) являются гиперболическими (без отражения), так как для них $\operatorname{Sp}\mathbf{A} = 2 + 2\pi m^2/M > 2$ при любом $m \neq 0$. Для неподвижных точек с $\psi_1 = 0$ величина $\operatorname{Sp}\mathbf{A} = 2 - 2\pi m^2/M$. Поэтому те из них, для которых $m < (2M/\pi)^{1/2}$, или

$$u_1 > \left(\frac{\pi M}{2}\right)^{1/2}, \tag{3.4.18}$$

оказываются эллиптическими (устойчивыми), а остальные — гиперболическими с отражением. При меньших скоростях все неподвижные точки становятся гиперболическими (неустойчивыми), а движение в их окрестности — стохастическим [1]). Как видно из табл. 3.1, условия устойчивости для разных отображений отличаются только численным множителем. Можно показать [274], что для отображения (3.4.6) условие устойчивости периодических точек периода $k = 2$ имеет вид $u_2 > (\pi M)^{1/2}$, т. е. граница устойчивости по скорости лежит выше, чем для неподвижных точек ($k = 1$).

Анализ устойчивости периодических точек с $k = 3, 4, 5, \ldots$ становится все более и более трудным. Однако в случае упрощен-

[1]) Это не совсем точно, см. рис. 3.18.— *Прим. ред.*

ного отображения Либерману и Лихтенбергу [274] удалось получить выражение для критерия устойчивости при больших k. Они показали, что граница устойчивости по скорости u лежит тем выше, чем больше величина k. Поэтому самая нижняя граница устойчивости для неподвижных точек ($k = 1$) определяет некоторый важный для динамики переход. Соответствующую граничную скорость будем обозначать u_s. Ниже этой границы нет устойчивых областей

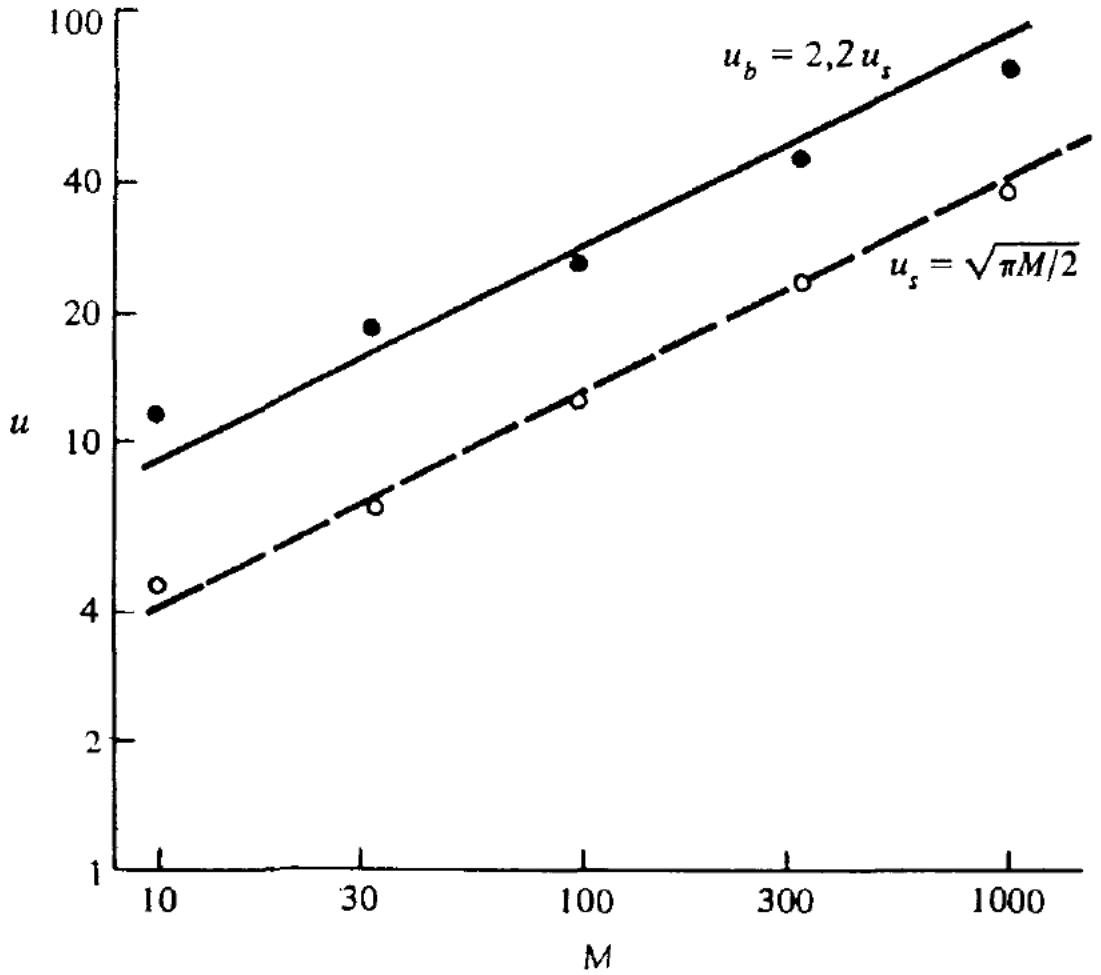


Рис. 3.15. Положение границы стохастичности u_b (черные кружки) и границы устойчивости u_s (светлые кружки) в зависимости от M для отображения (3.4.6) (по численным данным работы [274]).

первичных резонансов. Поэтому стохастические траектории заполняют всю эту область фазовой плоскости, за исключением небольших островков устойчивости вторичного происхождения (см. п. 3.4г), которые появляются, вообще говоря, лишь в узких интервалах значений параметра M. Сравнение теоретической границы устойчивости u_s с численными данными для отображения (3.4.6) в широком диапазоне значений M проведено на рис. 3.15. Дана также граница стохастичности u_b, соответствующая первой снизу инвариантной кривой [1]).

---

[1]) Как сейчас известно (см. [70], § 5.1 и гл. 4 ниже), граница стохастичности $u_b \approx 2u_s$ при $M \gg 1$, что не противоречит численным данным на рис. 3.15. По поводу отклонений при $M \sim 10$ см. [70, § 6.2] и конец п. 4.2б. — *Прим. ред.*

* 3.4г. Бифуркации

Рассмотрим теперь более подробно, как изменяется характер движения в окрестности эллиптической точки при ее превращении в гиперболическую. На рис. 3.16 показан результат 100 000 итераций отображения (3.4.6) при $M = 14$. Для неподвижной точки $u_1 = 14/3$, $\psi_1 = 0$ значение $u_s = 4{,}68947 > u_1$. Поэтому следует ожидать, что эта неподвижная точка должна быть неустойчивой. Она действительно оказывается гиперболической точкой с отражением, но соседние траектории не соединяются с основной стохастической компонентой движения. Последняя отделена от гиперболической точки вместе со стохастическим слоем ее сепаратрисы замкнутыми инвариантными кривыми, которые имеют форму «гантели» (см.

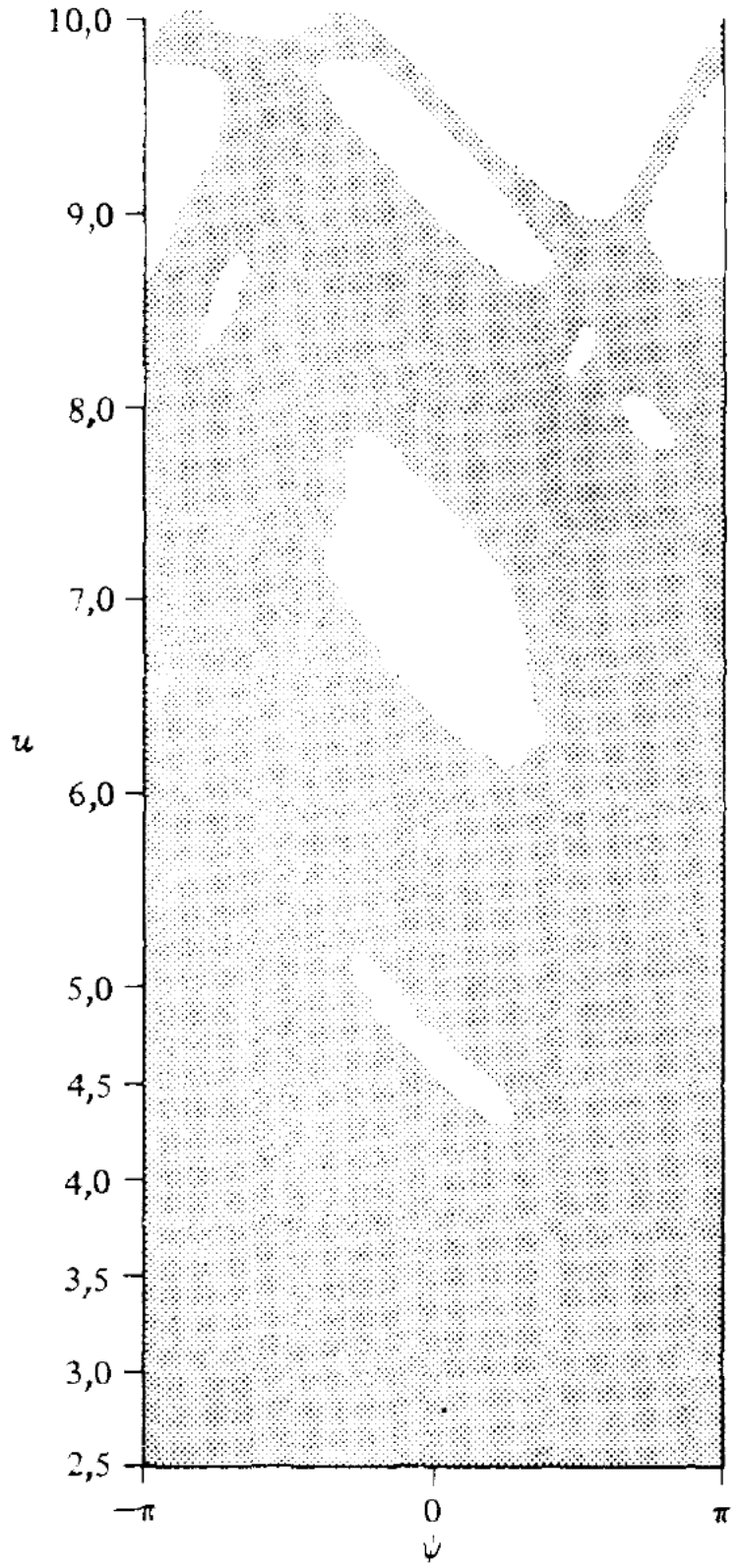


Рис. 3.16. Фазовая плоскость (u, ψ) для отображения (3.4.6) при $M = 14$.

Внутри самого нижнего островка устойчивости произошла бифуркация неподвижной точки (см. рис. 3.18).

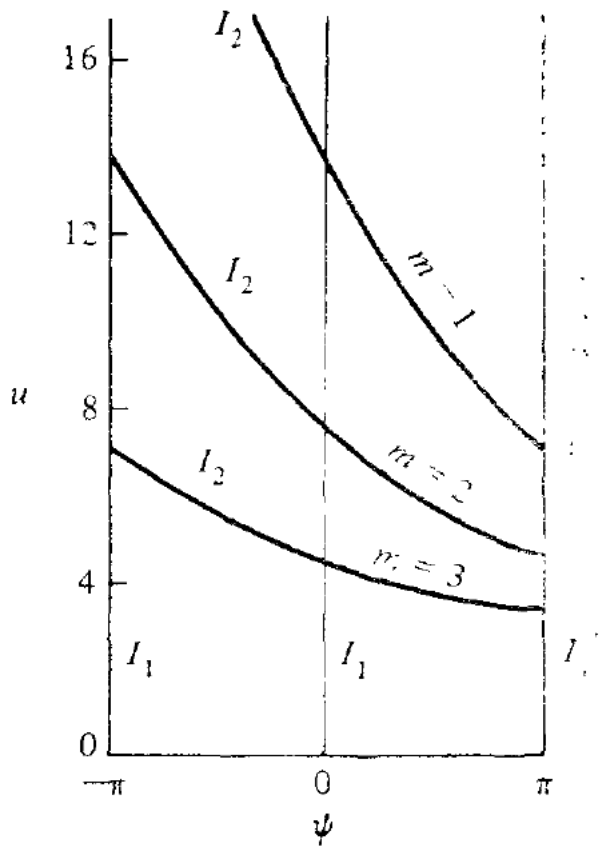


Рис. 3.17. Линии неподвижных точек для инволюций отображения (3.4.6) при $M = 14$.

рис. 3.18). При этом внутри сепаратрисы имеются две периодические точки периода 2, которых не было при $u_s < u_1$. Топология фазовой плоскости на этом малом масштабе в какой-то степени похожа, хотя и не полностью, на глобальную топологию, в которой инвариантные кривые окружают отдельные периодические точки или изолируют друг от друга сепаратрисы.

Чтобы найти положение только что описанных периодических точек периода 2, запишем отображение (3.4.6) в виде произведения двух инволюций I_1 и I_2, как это было сделано в п. 3.3б. Линии неподвижных точек инволюций I_1 и I_2 определяются выражениями (3.3.38) и (3.3.39) и показаны на рис. 3.17. В частности, неподвижные точки I_2 определяются выражением

$$u = \frac{\pi M}{(\psi + \pi m)}. \tag{3.4.19}$$

Используем теперь результат п. 3.2б, устанавливающий связь между неподвижными точками с периодом $k = 2$ и $k = 1$. Если обозначить

$$x = \left(\frac{\pi M}{\psi + \pi m},\ \psi\right), \tag{3.4.20}$$

то

$$Tx = (\bar{u},\ \bar{\psi}),$$

где

$$\bar{u} = \frac{\pi M}{(\psi + \pi m)} + \sin\psi,$$

$$\bar{\psi} = \psi + \frac{2\pi M}{\bar{u}} - 2\pi m. \tag{3.4.21}$$

Чтобы и точка $(\bar{u},\ \bar{\psi})$ была неподвижной точкой инволюции I_2, необходимо выполнение соотношения

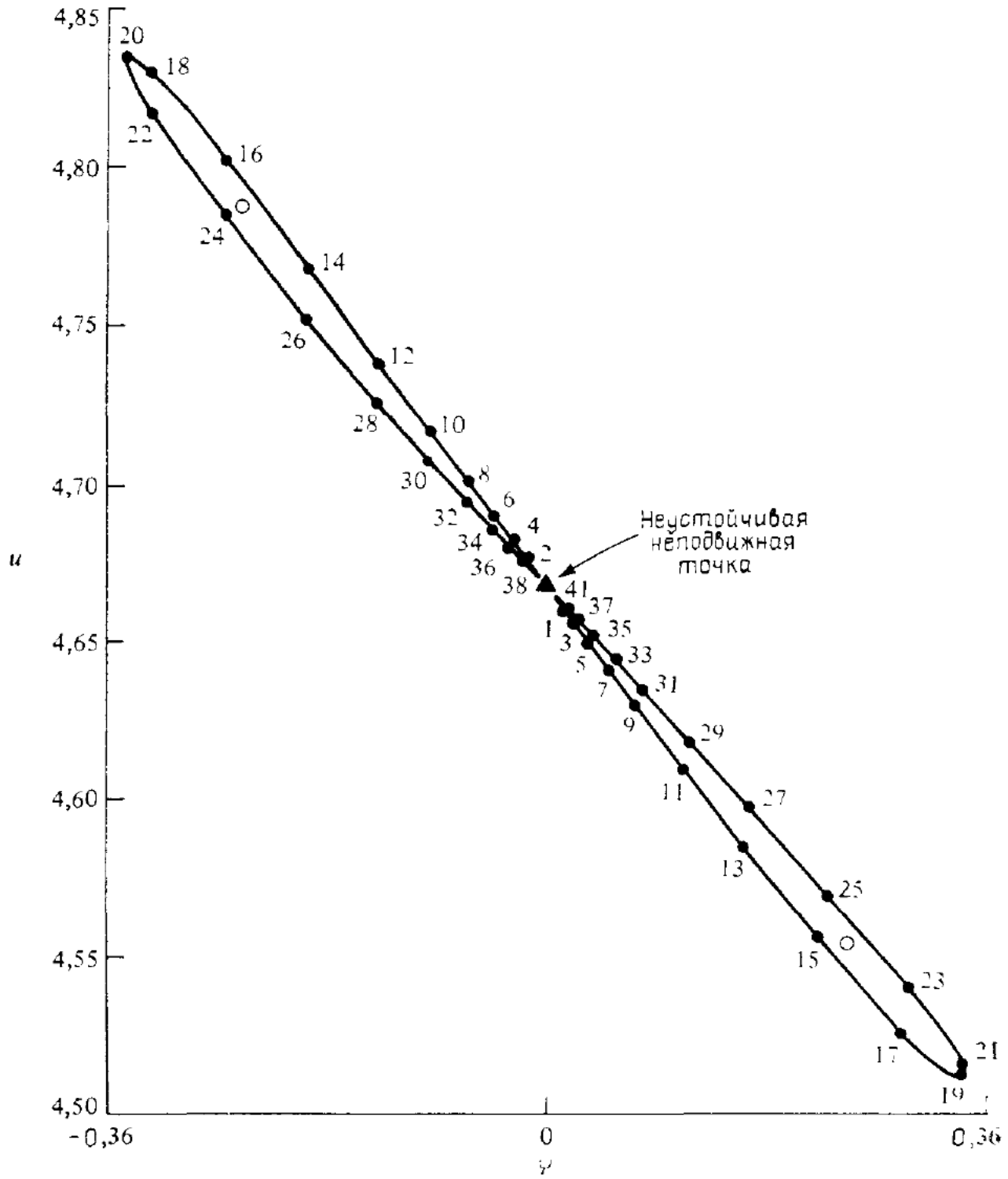
$$\frac{2\psi}{(\pi m)^2 - \psi^2} = \frac{1}{\pi M}\sin\psi. \tag{3.4.22}$$

При $M = 14$, $m = 3$, полагая $\sin\psi \approx \psi - \psi^3/6$, получим $\psi = \pm 0{,}23351$, а u определяется выражением (3.4.19). Эти периодические точки показаны на рис. 3.18 вместе с сепаратрисой, которая имеет форму восьмерки и принадлежит неустойчивой неподвижной точке.

Что же произойдет при дальнейшем уменьшении величины M, а вместе с ней и u_1? Для выяснения этого вопроса заметим, что для u в уравнении (3.4.6а) вблизи кривой I_2 можно использовать выражение (3.4.19). В результате получаем *одномерное* отображение

$$u_{n+1} \approx u_n + \sin \pi \left(\frac{M}{u_n} - m \right). \qquad (3.4.23)$$

Такие отображения естественно возникают при изучении диссипативных систем и подробно описаны в § 7.2. Мы покажем там, что с уменьшением M происходит целый каскад последовательных би-



ис. 3.18. То же, что на рис. 3.16 внутри устойчивости области.

Светлые кружки — устойчивые точки периода 2; треугольник — неустойчивая неподвижная точка с сепаратрисой (сплошная кривая). Цифры показывают последовательность движения по сепаратрисе (ср. рис. 3.10, *б*).

фуркаций устойчивых периодических точек с периодами $2 \to 4 \to \to 8 \to 16$ и т. д. Этот процесс продолжается, пока M не достигнет некоторого предельного значения, ниже которого все траектории

становятся неустойчивыми. В работе Лихтенберга и др. [72] подробно описано поведение периодических точек $k = 2$ с изменением M, включая бифуркацию $2 \to 4$. Общая теория бифуркаций гамильтоновых систем обсуждается в дополнении Б.

* 3.4д. Уравнения Гамильтона

Подобно тому как непрерывное движение динамической системы можно описать разностными уравнениями на поверхности сечения Пуанкаре, физическую задачу, сформулированную в виде отображения, можно представить в форме уравнений Гамильтона. Это позволяет использовать методы усреднения и резонансной теории возмущений, рассмотренные в гл. 2. Как показано в п. 3.1в, разностные уравнения можно преобразовать в дифференциальные с помощью периодической δ-функции (3.1.33). В случае отображения (3.4.6) получаем

$$\frac{du}{dn} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(i\,2\pi n l) \sin\psi, \tag{3.4.24а}$$

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{2\pi M}{u}, \tag{3.4.24б}$$

где n играет роль непрерывной переменной времени. Уравнения (3.4.24) имеют гамильтониан

$$H = 2\pi M \ln u + \sum \exp(i\,2\pi n l) \cos\psi, \tag{3.4.25}$$

где u и ψ — канонические переменные.

Усредненные уравнения. В области больших u ($u \gg M$) частота колебаний частицы 2π велика по сравнению с $\dot{\psi}$, т. е.

$$(\psi_{n+1} - \psi_n)/2\pi \ll 1. \tag{3.4.26}$$

В этом случае, как описано в п. 2.4а, гамильтониан (3.4.25) можно усреднить по n и получить интеграл движения $2\pi M \ln u + \cos\psi = C$. Однако область столь больших скоростей не представляет особого интереса. Вместо этого введем новые переменные, как в резонансной теории возмущений (§ 2.4):

$$\Delta\tilde{u} = u - M/m, \quad \tilde{\varphi} = \psi - 2\pi m n, \tag{3.4.27}$$

где m — целое число. При условии $\Delta\tilde{u} \ll u_1$, система уравнений (3.4.24) принимает вид

$$\frac{d(\Delta\tilde{u})}{dn} = \sum_l \exp(i\,2\pi n l) \sin\tilde{\varphi}, \tag{3.4.28а}$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dn} = -\frac{2\pi M}{u_1^2}\,\Delta\tilde{u} \tag{3.4.28б}$$

с гамильтонианом

$$\Delta\widetilde{H} = -\frac{2\pi M}{u_1^2}\frac{(\Delta\widetilde{u})^2}{2} + \sum_l \exp(i\,2\pi nl)\cos\widetilde{\varphi}. \qquad (3.4.29)$$

Но это как раз и есть гамильтониан фазовых колебаний (п. 2.4а) с учетом высокочастотных членов. Если движение в плоскости $(\Delta\widetilde{u},\ \widetilde{\varphi})$ считать медленным, т. е. если

$$(\widetilde{\varphi}_{n+1} - \widetilde{\varphi}_n) \ll 2\pi, \qquad (3.4.30)$$

то (3.4.29) можно усреднить по n. В результате получаем усредненный гамильтониан

$$\Delta\overline{H} = -\frac{2\pi M}{u_1^2}\frac{(\Delta\widetilde{u})^2}{2} + \cos\widetilde{\varphi} = C, \qquad (3.4.31)$$

описывающий движение в окрестности неподвижных точек $\widetilde{\varphi} = 0$; π и $\Delta\widetilde{u} = 0$. Максимум $\Delta\widetilde{u}$ соответствует сепаратрисе ($C = +1$) и равен [ср. (2.4.31)]:

$$(\Delta\widetilde{u})_{\text{макс}} = 2u_1(2\pi M)^{-1/2}. \qquad (3.4.32)$$

На рис. 3.12 и 1.14 инвариантные кривые системы (3.4.31), показанные пунктиром, сравниваются с результатами численного моделирования. Отношение частоты малых фазовых колебаний [ср. (2.4.30)]

$$\widetilde{\omega}_1 = \frac{(2\pi M)^{1/2}}{u_1} \qquad (3.4.33)$$

к частоте колебаний частицы $2\pi M/u_1$ определяет гармонику вторичных резонансов. Мы отложим эти вычисления, связанные с переходом к стохастическому движению, до гл. 4.

* § 3.5. Движение в окрестности сепаратрисы

Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, близкую к интегрируемой. В окрестности резонанса гамильтониан такой системы можно привести к стандартному виду

$$H = H_0(J) + \frac{1}{2}Gp^2 - \varepsilon F\cos\varphi, \qquad (3.5.1)$$

используя резонансную теорию возмущений и производя усреднение по быстрым фазам (см. § 2.4). Здесь медленное движение описывается интегрируемой системой уравнений маятника (см. п. 1.3а), а быстрое движение описывается уравнениями:

$$J = \text{const}, \qquad (3.5.2)$$

$$\theta = \omega_0(J)\,t + \theta_0. \qquad (3.5.3)$$

Мы знаем, что такая картина движения не является полной, так как взаимодействие между быстрыми (переменные θ) и медленными

(переменная φ) колебаниями приводит к появлению вторичных резонансов и областей стохастичности. В окрестности же сепаратрисы гамильтониана (3.5.1) хаотическая компонента движения сохраняется даже в пределе $\varepsilon \to 0$ (см. п. 3.2в).

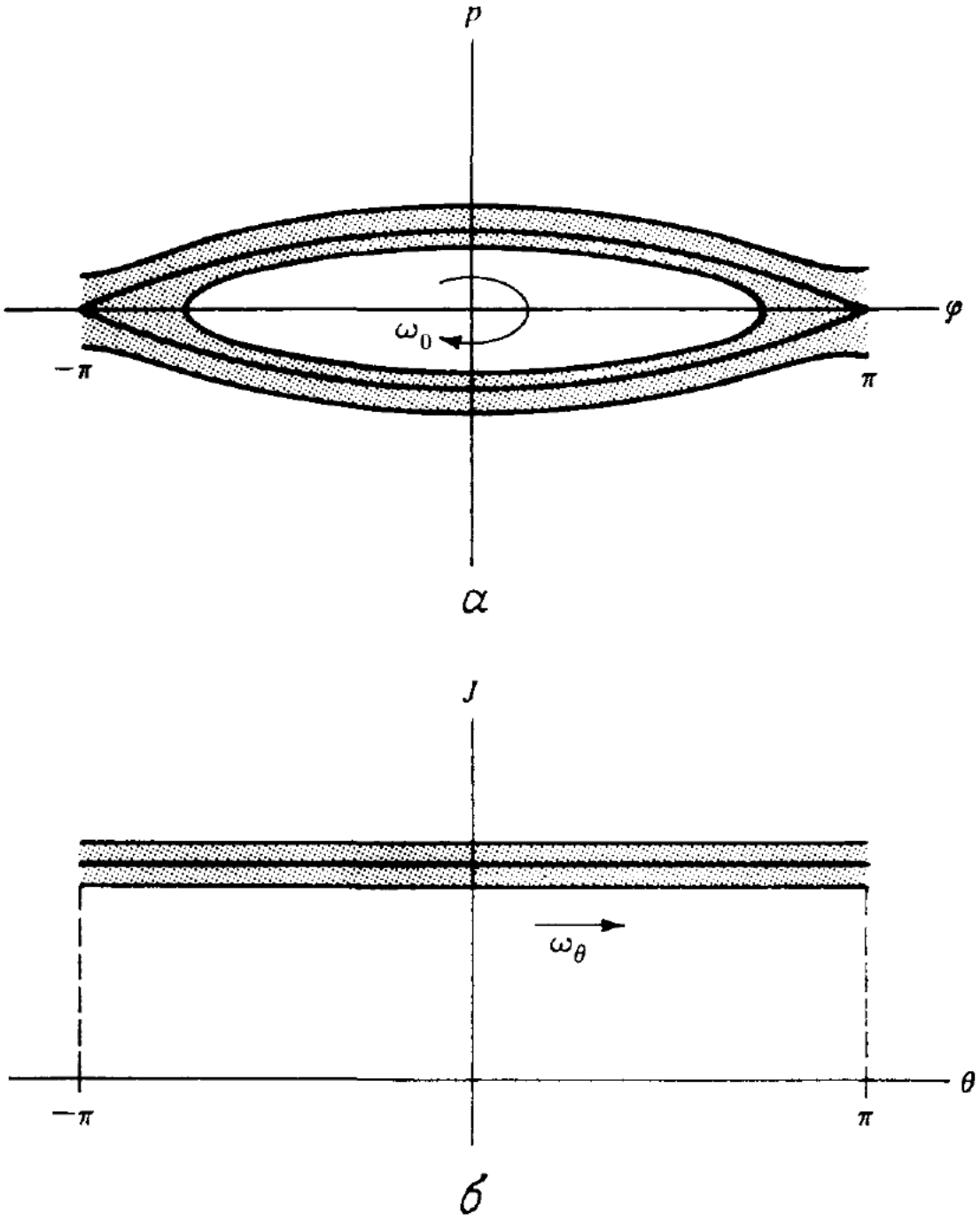


Рис. 3.19. Движение вблизи сепаратрисы маятника.

а — плоскость сечения (p, φ) (θ = const); *б* — плоскость сечения (J, θ) (φ = const). Стохастическая траектория заполняет заштрихованиую область вокруг невозмущенной сепаратрисы (сплошная линия).

Гамильтониан (3.5.1) был получен путем усреднения в окрестности резонанса $\omega_2/\omega_1 = r/s$ следующего гамильтониана [см. (2.4.9)]:

$$H = H_0(J) + \frac{1}{2} Gp^2 - \varepsilon F \cos\varphi +$$

$$+\varepsilon \sum_{\substack{n>1\\ q\neq 0}} \Lambda_{nq} \cos\left(\frac{n}{r}\varphi - \frac{q}{r}\Omega t + \chi_{nq}\right), \tag{3.5.4}$$

где G, F, Λ и χ — функции переменной действия J, канонически сопряженной быстрой фазе θ. Сравнивая (3.5.1) и (3.5.4), видим, что медленное движение в переменных (p, φ) на поверхности сечения $\theta = \text{const}$, описываемое гамильтонианом (3.5.1), возмущено, что приводит к появлению тонкого стохастического слоя вокруг сепаратрисы. Этот слой схематически показан на рис. 3.19, *а* вместе с невозмущенной сепаратрисой.

Можно также исследовать движение в переменных J, θ на поверхности сечения $\varphi = \text{const}$. В этих переменных невозмущенному движению соответствует линия постоянного J. Под влиянием возмущения образуется стохастический слой, заштрихованный на рис. 3.19, *б*. Видно, что в переменных J, θ хаотическое движение четко отделено от интегрируемого (тривиального) движения. Построим поэтому отображение именно в переменных J, θ, выбрав для удобства [1]) поверхность сечения $\varphi \approx 0$.

*3.5а. Вынужденные колебания маятника

Прежде чем найти изменение переменной действия J, рассмотрим более простую задачу. Дело в том, что при изменении J изменяется также и частота $\omega_\theta(J)$. Более простая, но все еще интересная задача получается, если считать частоту ω_θ фиксированной. Это позволяет развязать возмущенный маятник и остальную часть динамической системы. В таком случае фаза θ просто пропорциональна времени, а гамильтониан (3.5.4) принимает вид [2])

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}Gp^2 - \varepsilon F\cos\varphi + \varepsilon \sum \Lambda_{nq}\cos\left(\frac{n}{r}\varphi - \frac{q}{r}\Omega t + \chi_{nq}\right), \tag{3.5.5}$$

где G, F, Λ, Ω и χ теперь постоянные, и мы опустили член $H_0(J)$. С точностью до членов порядка ε гамильтонианы $\tilde{H}$ и H полностью эквивалентны. Это легко показать, если перейти к расширенному фазовому пространству (п. 1.2б) для гамильтониана (3.5.5) с новыми каноническими переменными $J' = -H'/\Omega$ и $\theta = \Omega t$ и новым гамильтонианом

$$H' = \tilde{H} + \Omega J'. \tag{3.5.6}$$

Сравнивая dJ/dt из (3.5.4) с $d\tilde{H}/dt$ из (3.5.5), видим, что изменение J пропорционально изменению $\tilde{H}$:

$$\Delta J = \frac{-\Delta\tilde{H}}{\Omega}. \tag{3.5.7}$$

---

[1]) Выбор переменных J, θ и сечения $\varphi = 0$ продиктован особенностями действия возмущения вблизи сепаратрисы [см. ниже (3.5.12)]. — *Прим. ред.*

[2]) Вместо этого можно просто пренебречь изменением частоты $\omega_\theta(J)$ ввиду малости изменения J, как фактически и сделано ниже. — *Прим. ред.*

Вычисление ΔJ. Проинтегрируем $d\tilde{H}/dt$, или, что эквивалентно, dJ/dt по периоду невозмущенного движения маятника. Как будет видно в дальнейшем, изменение ΔJ мало и экспоненциально зависит от отношения частот $q/r = \Omega/\omega_0$. Предположим, что

$$\omega_0 = (\varepsilon FG)^{1/2} \ll \Omega, \tag{3.5.8}$$

где ω_0 — частота малых колебаний маятника. Так как амплитуды Фурье Λ_{nq} уменьшаются с ростом n и $|q|$, достаточно сохранить лишь главный член с $n = q = 1$. Обозначив $\Lambda = \Lambda_{11}$, получим из (3.1.31)

$$\Delta J = -\frac{\varepsilon\Lambda}{r}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \sin\left[\frac{1}{r}\varphi(\omega_0 t) - \frac{1}{r}(\Omega t + \theta_n)\right], \tag{3.5.9}$$

где для невозмущенного движения по сепаратрисе (1.3.21) (см. рис. 3.20, *а*) имеем

$$\varphi(s) = 4\,\mathrm{arctg}\,(e^s) - \pi, \tag{3.5.10}$$

а

$$\theta = \Omega t + \theta_n. \tag{3.5.11}$$

Величина χ включена в постоянную θ_n, равную фазе θ в момент n-го пересечения поверхности $\varphi \approx 0$. Переходя к переменной $s = \omega_0 t$ и учитывая, что вклад в интеграл дает только симметричная часть подынтегрального выражения, получаем

$$\Delta J = \varepsilon\frac{\Lambda}{\omega_0 r}\mathscr{A}_{(2r)}(Q_0)\sin\theta_n. \tag{3.5.12}$$

Здесь функция

$$\mathscr{A}_m(Q_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds \cos\left[\frac{m}{2}\varphi(s) - Q_0 s\right] \tag{3.5.13}$$

называется интегралом Мельникова—Арнольда, а

$$Q_0 = \frac{1}{r}\frac{\Omega}{\omega_0} \tag{3.5.14}$$

есть отношение частот.

Интеграл Мельникова—Арнольда. Интеграл (3.5.13) является несобственным и фактически не имеет определенного значения. Рассмотрим интеграл

$$\mathscr{A}'_m(Q_0, s_1) = 2\int\limits_0^{s_1} ds \cos\left[\frac{m}{2}\varphi(s) - Q_0 s\right]. \tag{3.5.15}$$

Как видно из рис. 3.20, *в*, при $s_1 \to \infty$ последний интеграл есть сумма быстро осциллирующей части и некоторого среднего значе-

ния. Осциллирующая часть может быть велика по сравнению со средним, но при усреднении по интервалу времени порядка периода колебаний вблизи сепаратрисы вклад от нее стремится к нулю. Среднее значение $\mathscr{A}'_m$ определяется областью $s \lesssim 1/Q_0$. В этой области мгновенная частота $\dot{\varphi} \approx 2\omega_0$ (см. рис. 3.20, *б*) достигает наибольшего значения, максимально приближаясь к частоте возмущения Ω. Это и приводит к поведению, изображенному на рис. 3.20, *в*. Ниже интеграл в (3.5.13) понимается в смысле своего среднего значения. Его оценка была получена Мельниковым (см. [70]) [1]). Для целых m интеграл вычисляется точно с помощью вычетов. При $Q_0 < 0$ имеем

$$\mathscr{A}_m(Q_0) = (-1)^m \times \times \mathscr{A}_m(-Q_0) \exp(\pi Q_0), \tag{3.5.16}$$

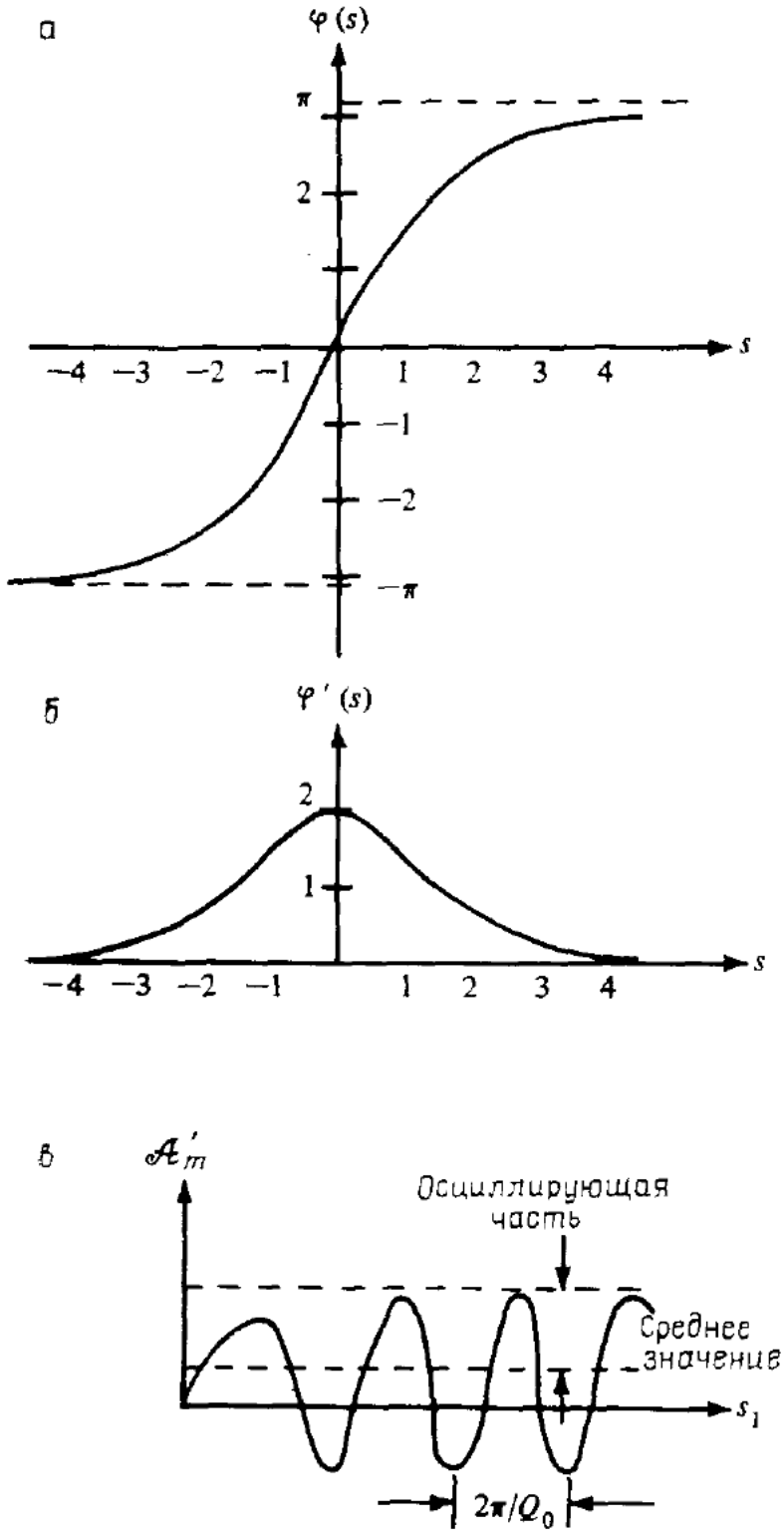


Рис. 3.20. Интеграл Мельникова — Арнольда.

а — движение по невозмущенной сепаратрисе $\varphi(s)$; *б* — скорость движения $\varphi'(s)$; *в* — интеграл Мельникова — Арнольда равен среднему значению функции $\mathscr{A}'_m(s_1)$.

[1]) Приведенные ниже экспоненциальные оценки были впервые получены еще Пуанкаре [337, п. 226]. Поскольку, однако, при $Q_0 \gg 1$ эффект экспоненциально мал, возникает очень серьезная и трудная проблема оценки точности этого результата, которая до сих пор обсуждается в литературе (см., например, [197, 483, 484]). По существу вопрос был решен уже в первых работах Мельникова [298], который показал, что все неэкспоненциальные поправки могут быть оттрансформированы с помощью канонической замены переменных (см. также [314], лемма 10.3). Тем не менее в некоторых специальных случаях, например, для стандартного отображения, эффекты высших приближений приводят к появлению численного множителя порядка единицы, который пока не поддается аналитической оценке (см. [70, § 6.1] и [485]).— *Прим. ред.*

эта величина обычно очень мала. Для $Q_0>0$ получаем

$$\mathcal{A}_1=\frac{2\pi\exp(\pi Q_0/2)}{\operatorname{sh}(\pi Q_0)}, \tag{3.5.17}$$

$$\mathcal{A}_2=2Q_0\mathcal{A}_1, \tag{3.5.18}$$

и рекуррентное соотношение для $m>2$ имеет вид

$$\mathcal{A}_m=\frac{2Q_0\mathcal{A}_{m-1}}{(m-1)}-\mathcal{A}_{m-2}. \tag{3.5.19}$$

При $Q_0\gg m$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\mathcal{A}_m=\frac{4\pi(2Q_0)^{m-1}\exp(-\pi Q_0/2)}{(m-1)!}. \tag{3.5.20}$$

Подробности вычисления этих интегралов можно найти в работе [70].

Вернемся к соотношению (3.5.12). Используя асимптотику (3.5.20) в виду того, что $Q_0\sim\varepsilon^{-1/2}$, получаем первое уравнение возмущенного отображения поворота (3.1.13а) с функцией ($r=1$)

$$f=f_0\sin\theta_n, \tag{3.5.21}$$

$$f_0=8\pi\Lambda\Omega^{-1}Q_0^2\exp\left(-\frac{\pi Q_0}{2}\right). \tag{3.5.22}$$

* 3.5б. Сепаратрисное отображение

Изменение фазы θ между последовательными пересечениями поверхности $\varphi=0$ определяется полупериодом колебаний вблизи сепаратрисы, который, согласно (1.3.15), равен

$$T=\omega_0^{-1}\ln\frac{32}{|w|}, \tag{3.5.23}$$

где величина

$$w(J)=-\frac{\varepsilon F-\Omega J}{\varepsilon F} \tag{3.5.24}$$

характеризует относительное смещение от сепаратрисы по энергии. Изменение фазы θ равно при этом просто ΩT. Отсюда число вращения во втором уравнении отображения поворота (3.1.13б) равно

$$2\pi\alpha=\frac{\Omega}{\omega_0}\ln\frac{32}{|w|}. \tag{3.5.25}$$

Так как функция f считается независящей от J, то из (3.1.16) следует, что можно положить $g\equiv 0$, так что никакого дополнительного изменения фазы не происходит.

Оказывается, что более удобно перейти от J к переменной w, определяемой формулой (3.5.24). Тогда отображение принимает вид

$$w_{n+1} = w_n - w_0 \sin\theta_n, \tag{3.5.26а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + Q_0 \ln\left|\frac{32}{w_{n+1}}\right|, \tag{3.5.26б}$$

где

$$w_0 = \frac{\Omega f_0}{F} = 8\pi\left(\frac{\Lambda}{F}\right) Q_0^2 \exp\left(-\frac{\pi Q_0}{2}\right). \tag{3.5.27}$$

Это и есть сепаратрисное отображение [70], которое описывает движение в окрестности возмущенной сепаратрисы.

Неподвижные точки и их устойчивость. Мы не будем здесь рассматривать сепаратрисное отображение столь же подробно, как отображение Улама выше, а отметим лишь его наиболее характерные особенности. Оба отображения очень похожи друг на друга, оба относятся к классу явных отображений поворота и их можно представить в виде произведения инволюций (см. п. 3.1б). Оба отображения имеют нелинейность одного типа, которая приводит к увеличению фазового сдвига, а следовательно, и к стохастичности при уменьшении переменной действия (w или u).

Неподвижные точки определяются из (3.5.26) условием

$$Q_0 \ln\left|\frac{32}{w_1}\right| = 2\pi m.$$

Откуда

$$w_1 = \pm 32 \exp\left(-\frac{2\pi m}{Q_0}\right), \quad \text{где } m \text{ — целое число}, \tag{3.5.28а}$$

$$\theta_1 = 0;\ \pi. \tag{3.5.28б}$$

Устойчивость неподвижных точек определяется условием (3.3.55)

$$|\operatorname{Sp} \mathbf{A}| = \left|2 + \frac{w_0}{w_1} Q_0 \cos\theta\right| < 2. \tag{3.5.29}$$

Следовательно, при $w_1 > 0$ все неподвижные точки $\theta_1 = 0$ неустойчивы, а $\theta_1 = \pi$ устойчивы при

$$w_1 > w_s = \frac{w_0 Q_0}{4}, \tag{3.5.30}$$

или

$$w_1 > 2\pi\left(\frac{\Lambda}{F}\right) Q_0^3 \exp\left(-\frac{\pi Q_0}{2}\right). \tag{3.5.31}$$

Как и в случае отображения Ферми, можно ожидать, что величина w_s определяет важную границу перехода к сплошной стохастичности при $w < w_s$.

Сепаратрисное отображение играет чрезвычайно важную роль в понимании хаотического поведения систем, близких к интегрируемым. Как мы видели выше, резонансы в таких системах всегда окружены сепаратрисами, а сепаратрисное отображение описывает движение в их окрестности, причем это движение является хаотическим при $w \to 0$. Ввиду такой универсальности сепаратрисное отображение интенсивно изучалось [70] с целью определения границы стохастичности w_b, которая характеризует ширину стохастического слоя вокруг сепаратрисы, а также для выяснения статистических свойств хаотического движения внутри этого слоя. Результаты этих исследований представлены в гл. 4 и 5. Далее в гл. 6 будет показано, что движение в окрестности сепаратрисы лежит в основе анализа диффузии Арнольда, которая, вообще говоря, всегда имеет место в системах с тремя и более степенями свободы.

Глава 4

ПЕРЕХОД К ГЛОБАЛЬНОЙ СТОХАСТИЧНОСТИ

*§ 4.1. Введение

В гл. 3 мы видели, что в системах с двумя степенями свободы, близких к интегрируемым, вблизи сепаратрис резонансов возникают области хаотического движения. Эти области сохраняются для любого ненулевого возмущения ε, хотя их площадь и стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, не существует резкого «перехода к стохастичности» для какого-то критического значения ε, и поэтому смысл любого такого критерия должен быть определен более четко.

Одно из возможных определений состоит в измерении доли фазового пространства с хаотическим движением и в последующем нахождении минимального значения ε, для которого эта доля достигает некоторого произвольно выбранного значения, скажем 1/10 или 1/2. Наличие подобной неопределенности приводит к тому, что такой подход является в каком-то смысле качественным. Несмотря на это, он может в значительной степени способствовать пониманию явления стохастичности. Для определения критерия перехода к стохастичности использовались различные методы:

1) мгновенная скорость расходимости близких траекторий [409, 44];
2) убывание корреляций [302, 401];
3) обмен энергией между степенями свободы [148];
4) фурье-спектр траекторий [318];
5) показатели Ляпунова [19];
6) КС-энтропия [70].

Первые три метода критиковались в литературе (см., например, [55, 59, 60]) как неспособные правильно различать регулярное и стохастическое движение [1]). С другой стороны, последние три метода, как выяснилось, имеют большое значение и для анализа движения внутри хаотических областей, чему посвящена гл. 5.

---

[1]) Хотя упомянутая выше критика и имеет некоторые основания, следует отметить, что эти методы успешно использовались в ряде работ, например в [443] (первый метод) и в [127] (третий метод). Второй метод (при правильном его применении) эквивалентен четвертому и особенно удобен в реальных экспериментах, тогда как два последних метода больше подходят для численного моделирования. Отметим также, что ссылки авторов при перечислении методов носят случайный характер, более аккуратная библиография дана ниже, при описании некоторых из этих методов.— *Прим. ред.*

Более естественное определение «перехода к стохастичности» вытекает из следующего наблюдения, характерного для различных систем с двумя степенями свободы: в фазовом пространстве существует резкая граница между областями с узкими стохастиче-

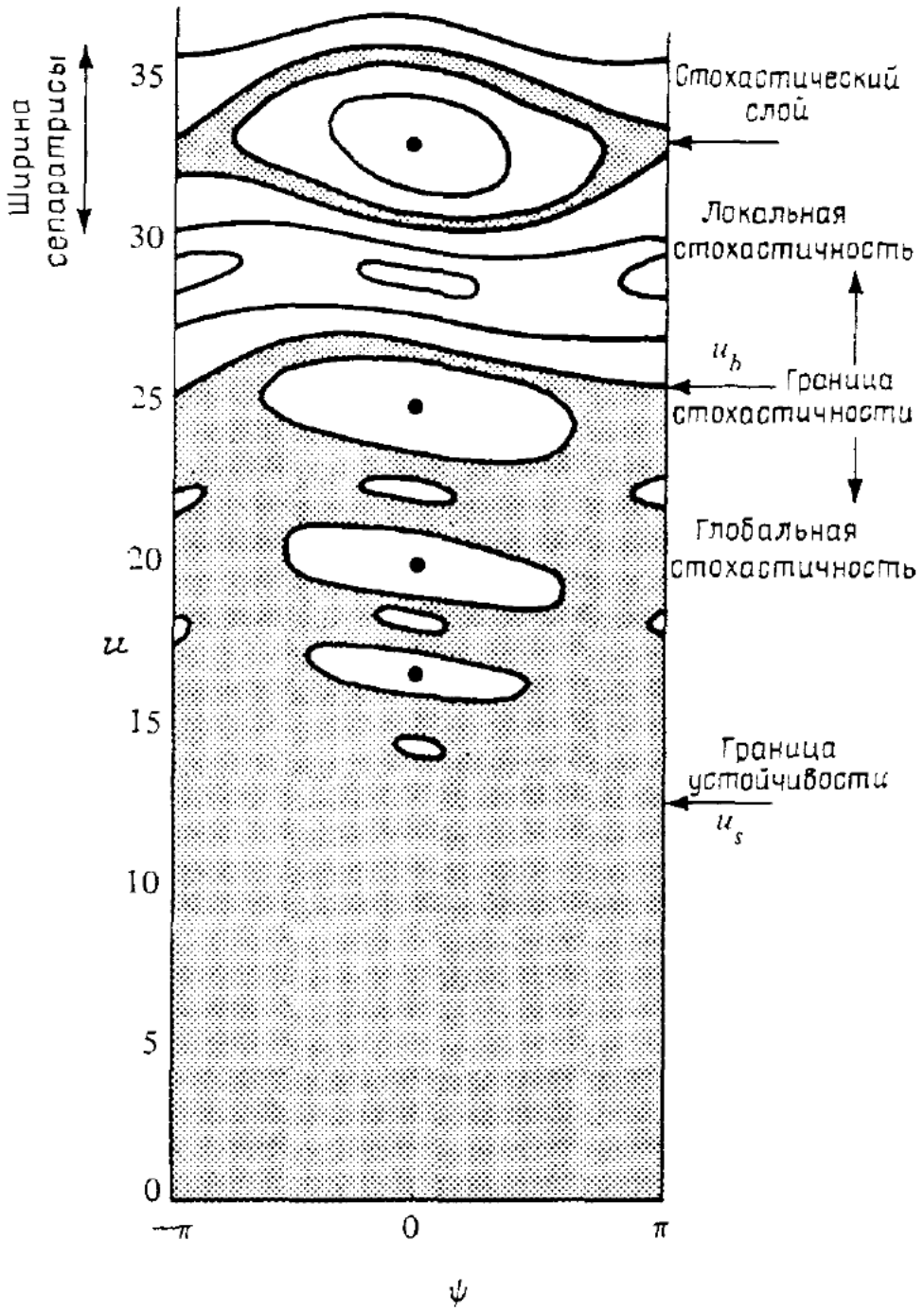


Рис. 4.1. Переход от локальной к глобальной стохастичности с ростом возмущения ($1/u^2$).

скими компонентами движения, запертыми инвариантными поверхностями, и областями сплошного стохастического движения. В первом случае изменение переменных действия ограничено шириной сепаратрисы резонансов (см. рис. 4.1) и $\Delta J/J \propto \sqrt{\varepsilon}$ (п. 2.4а). Во втором случае J изменяется хаотически в широких пределах, так что $\Delta J/J \sim 1$. Ясно, что количественное определение перехода от одного случая к другому дает важную информацию относительно поведения системы. Будем называть эти две области соответственно

локальной (или *изолированной*, или *слабой*) и *глобальной* (или *связанной*, или *сильной*) стохастической областью, а сам переход — *границей стохастичности*, или *переходом к глобальной стохастичности*. Именно такой переход и рассматривается детально в этой главе.

Как мы уже видели в задаче об ускорении Ферми (§ 3.4), граница стохастичности [1]) u_b отделяет сплошную стохастическую компоненту при малых скоростях частицы от области со стохастическими слоями вблизи сепаратрис резонансов при больших скоростях (см. рис. 4.1, 1.14, и 3.15). Эта граница отличается от границы устойчивости u_s, ниже которой все неподвижные точки соответствующего отображения неустойчивы. Оказывается, что $u_b > u_s$, откуда следует, что неустойчивость неподвижных точек достаточна, но не необходима для глобальной стохастичности, т. е. это условие является слишком сильным. Мы же ищем более эффективный критерий, которой был бы и необходимым, и достаточным. К сожалению, чисто аналитического метода получения такого критерия не существует. Поэтому приходится прибегать к различным правдоподобным рассуждениям, подкрепленным численными экспериментами. В этой главе мы рассмотрим пять методов, описанных качественно в п. 4.1а, каждый из которых дает свой вклад в понимание рассматриваемой проблемы. В качестве модели для иллюстрации этих методов мы используем *стандартное отображение*, свойства которого обсуждаются в п. 4.1б.

* 4.1а. Качественное описание критериев перехода

Первый критерий перехода к глобальной стохастичности, предложенный Чириковым [67] и позднее усовершенствованный им [70], известен сейчас как *критерий перекрытия*. В своей простейшей форме он постулирует, что последняя инвариантная поверхность между двумя резонансами разрушается, когда невозмущенные сепаратрисы этих резонансов касаются друг друга. Действительно, интуитивно ясно, что касание стохастических слоев, которые, как мы знаем, окружают сепаратрисы, должно приводить к разрушению всех инвариантных поверхностей в этой области. Строго говоря, критерий перекрытия не является ни необходимым, ни достаточным. С одной стороны, последняя инвариантная поверхность может разрушаться значительно раньше перекрытия рассматриваемых резонансов за счет взаимодействия других резонансов между ними. С другой стороны, возмущение может так исказить сепаратрисы, что они фактически не будут перекрываться вопреки предсказаниям по первому приближению. Фактически численное моделирование показывает, что критерий перекрытия является

[1]) Напомним, что в этой задаче эффективное возмущение пропорционально $1/u^2$.

чересчур жестким условием глобальной стохастичности. Он может быть, однако, сделан более эффективным, если учесть ширину стохастического слоя сепаратрисы и некоторые из промежуточных резонансов [70]. В таком виде критерий перекрытия рассматривается в § 4.2. Однако и в простейшем виде этот критерий дает грубую оценку для границы стохастичности и использовался в самых различных задачах Чириковым [67—71], Фордом и сотр. [423], Розенблютом и др. [349] и многими другими (более полную библиографию см. в работе [70]). Следует отметить, что в качестве грубого критерия стохастичности можно использовать также условие потери линейной устойчивости периодических траекторий, которое приводит к границе устойчивости u_s в примере § 3.4.

Используя аналогичную методику, Егер и Лихтенберг [212] вычисляли размер вторичных резонансов между гармониками фазовых колебаний на основных резонансах и невозмущенными колебаниями. Они показали, что при перекрытии первичных резонансов параметр перекрытия вторичных резонансов, т. е. отношение их размера к расстоянию между ними, сравним с параметром перекрытия для первичных резонансов и по индукции это же справедливо и для резонансов более высоких порядков. При этом локальное число вращения для первичного резонанса вблизи его центра равно $\alpha = 1/4$, т. е. здесь возникает вторичный резонанс четвертой гармоники. Изучение резонансной структуры со всей очевидностью показывает, что простой критерий перекрытия является слишком жестким. Численно было найдено, что когда параметр перекрытия для первичных резонансов достигает 2/3 (при этом появляется вторичный резонанс шестой гармоники), то этого достаточно,чтобы разрушить последнюю инвариантную поверхность между первичными резонансами. Такой критерий применялся для многих задач, как, например, ускорение Ферми [274] и циклотронный нагрев [212, 275]. Отметим, что усовершенствованный критерий перекрытия Чирикова также связан со вторичными резонансами, но не в центре первичного резонанса, а вблизи его сепаратрисы. Использование вторичных резонансов рассматривается в § 4.3. Соответствующая техника разложения, основанная на резонансной теории возмущений, описана в § 2.4.

Третий метод определения границы стохастичности базируется на анализе линейной устойчивости движения вблизи центра резонанса (его периодической траектории). Идея метода состоит в следующем. Поскольку потеря линейной устойчивости для резонансов с наиболее низкой гармоникой ($k = 1$) является слишком жестким условием, более эффективным критерием может служить линейная устойчивость для тех резонансов на высоких гармониках k, которые расположены вблизи некоторой инвариантной поверхности. Эта гипотеза была численно проверена и подтверждена Грином [164, 165]. Более конкретно, гипотеза Грина состоит в том, что существование инвариантной кривой с иррациональным числом вра-

щения α зависит от устойчивости соседних периодических точек, рациональные числа вращения которых сходятся к α. Предполагается также, что эта устойчивость тем выше, чем хуже аппроксимация α рациональными числами. Можно показать (§ 4.4), что на отрезке (0,1), т. е. между двумя целыми резонансами ($k = 1$), иррациональным числом с наихудшей рациональной аппроксимацией является так называемое золотое сечение [1]) $\alpha_g = (\sqrt{5} - 1)/2$. Поэтому можно ожидать, что последней инвариантной кривой, которая будет разрушена по мере роста возмущения, является именно кривая с числом вращения $\alpha = \alpha_g$. Это подтверждается и численными данными Грина [2]). Таким образом, эффективный критерий разрушения всех инвариантных кривых между целыми резонансами сводится к исследованию асимптотической ($k \to \infty$) устойчивости периодических точек с $\alpha \to \alpha_g$. Для практической реализации этого критерия требуется быстрая сходимость при $k \gg 1$, обеспечение которой облегчается следующим свойством периодических точек при $k \to \infty$. Если возмущение близко к критическому для некоторой инвариантной кривой, то в окрестности приближающих ее периодических точек возникают вторичные резонансы с $\alpha = 1/6$, что соответствует приблизительно границе устойчивости периодических точек. Этот факт связан с другим наблюдением (см. § 4.2), что вблизи границы стохастичности такие же вторичные резонансы появляются и внутри целых резонансов ($k = 1$).

Четвертый метод, предложенный Эсканде и Довейлом [17, 18], также основан на анализе резонансов высоких гармоник в окрестности некоторой инвариантной кривой. Однако в отличие от метода Грина это достигается путем последовательной *ренормализации* гамильтониана с сохранением его формы. Этот метод не столь эффективен, как предыдущий, и в типичном случае приводит к значению границы стохастичности на 3÷10 % ниже фактического согласно численным данным [3]). Полученные этим методом результаты относятся к более общему случаю двух резонансов произвольной величины. При этом «последняя инвариантная кривая» не связана, вообще говоря, с золотым сечением. Метод и полученные с его помощью результаты обсуждаются в § 4.5.

В заключение в § 4.6 кратко описан вариационный метод определения условий существования инвариантных торов. В гамильтоновой форме он был развит Персивалем [328], а в лагранжевой — Персивалем [330] и Клейном и Ли [228]. Используемая в последней работе техника весьма близка к описанной в п. 2.6б для нахож-

---

[1]) Таким же свойством обладают и все иррациональные числа вида $\alpha_g + m$, где m — любое целое.

[2]) Но противоречит численным экспериментам, описанным в работе [76]. Обсуждение «золотой» гипотезы Грина см. в [76, 485].— *Прим. ред.*

[3]) Это расхождение (и даже его знак) может быть связано и с точностью численного определения границы стохастичности при относительно коротком времени счета в [17, 18] (см. [70], (4.49) и рис. 5.3).— *Прим. ред.*

дения периодических траекторий и позволяет получить, как и метод Грина, эффективный критерий разрушения инвариантных торов.

В § 4.7 приводится сравнение различных критериев перехода к глобальной стохастичности и обсуждаются особенности их практического использования. Подчеркивается, что простой критерий перекрытия дает оценку только по порядку величины, но его легко применять в самых разных задачах. В качестве более эффективного критерия в некоторых новых задачах можно отказаться от сложных вычислительных процедур и прямо использовать уже полученные решения, например результат Грина для стандартного отображения, или вычисления Эсканде и Довейла. Все эти критерии приводят к правилу «двух третей», которое является достаточно эффективным и удобным для использования [1]). Более подробное обсуждение возможностей различных критериев стохастичности и обширную библиографию можно найти в обзорах Чирикова [70] и Табора [401].

Если система имеет более чем две степени свободы, то резкой границы стохастичности уже не существует. Это связано с тем, что все стохастические слои резонансных сепаратрис в фазовом пространстве связаны между собой. Возникающая при этом диффузия Арнольда является, вообще говоря, очень медленной по сравнению с диффузией в областях глобальной стохастичности. Поэтому в практическом отношении понятие границы стохастичности остается содержательным и для многомерных систем.

*4.1б. Стандартное отображение

Для вычисления границы стохастичности используем в качестве модели стандартное отображение (3.1.22). Это позволит нам аналогично Чирикову и Грину исследовать переход к стохастичности в терминах *параметра стохастичности* K. Мы уже видели в п. 3.1б, что стандартное отображение локально аппроксимирует более общие нелинейные отображения. Покажем прежде всего, что это распространяется и на отображение Улама, и на сепаратрисное отображение.

Для удобства перепишем отображение Улама (3.4.6) еще раз:

$$u_{n+1} = |u_n + \sin\psi_n|, \tag{4.1.1а}$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + 2\pi M/u_{n+1}. \tag{4.1.1б}$$

Чтобы получить стандартное отображение, линеаризуем (4.1.1б)

---

[1]) Это правило справедливо только в случае перекрытия близких по ширине резонансов, см. рис. 4.12.— *Прим. ред.*

по переменной действия u вблизи неподвижной точки $u = u_1$. Согласно табл. 3.1, имеем

$$\frac{2\pi M}{u_1} = 2\pi m, \tag{4.1.2}$$

где m — целое число. Подставляя $u_n = u_1 + \Delta u_n$ и сдвигая фазу $\theta_n = \psi_n - \pi$ $(-\pi < \theta_n \leqslant \pi)$, получаем стандартное отображение

$$I_{n+1} = I_n + K \sin\theta_n, \tag{4.1.3а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}, \tag{4.1.3б}$$

где

$$I_n = \frac{-2\pi M \Delta u_n}{u_1^2} \tag{4.1.4}$$

есть новая переменная действия, а

$$K = \frac{2\pi M}{u_1^2}. \tag{4.1.5}$$

— параметр стохастичности. Следовательно, параметр K связан со старой переменной действия u_1. Переход от отображения Ферми к стандартному отображению иллюстрируется на рис. 4.2 для двух значений u_1, приводящих к различным значениям K.

Проделаем то же самое с сепаратрисным отображением (3.5.26):

$$w_{n+1} = w_n - w_0 \sin\theta_n, \tag{4.1.6а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + Q_0 \ln\left|\frac{32}{w_{n+1}}\right|. \tag{4.1.6б}$$

Неподвижные точки $w = w_1$ даются выражением

$$Q_0 \ln\left|\frac{32}{w_1}\right| = 2\pi m. \tag{4.1.7}$$

Подставляя $w_n = w_1 + \Delta w_n$ и линеаризуя по w, снова получим стандартное отображение (4.1.3), где

$$I_n = \frac{-Q_0 \Delta w_n}{w_1}, \tag{4.1.8}$$

и

$$K = \frac{Q_0 w_0}{w_1}. \tag{4.1.9}$$

Неподвижные точки. Неподвижные точки стандартного отображения получаются из условия:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi m, \\ \theta_1 &= 0,\ \pi. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Для каждого целого числа m имеются две неподвижные точки.

Линеаризуя (4.1.3а), как и в п. 3.4в, получим матрицу преобразования:

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1 & \pm K\\ 1 & 1\pm K\end{pmatrix}, \tag{4.1.11}$$

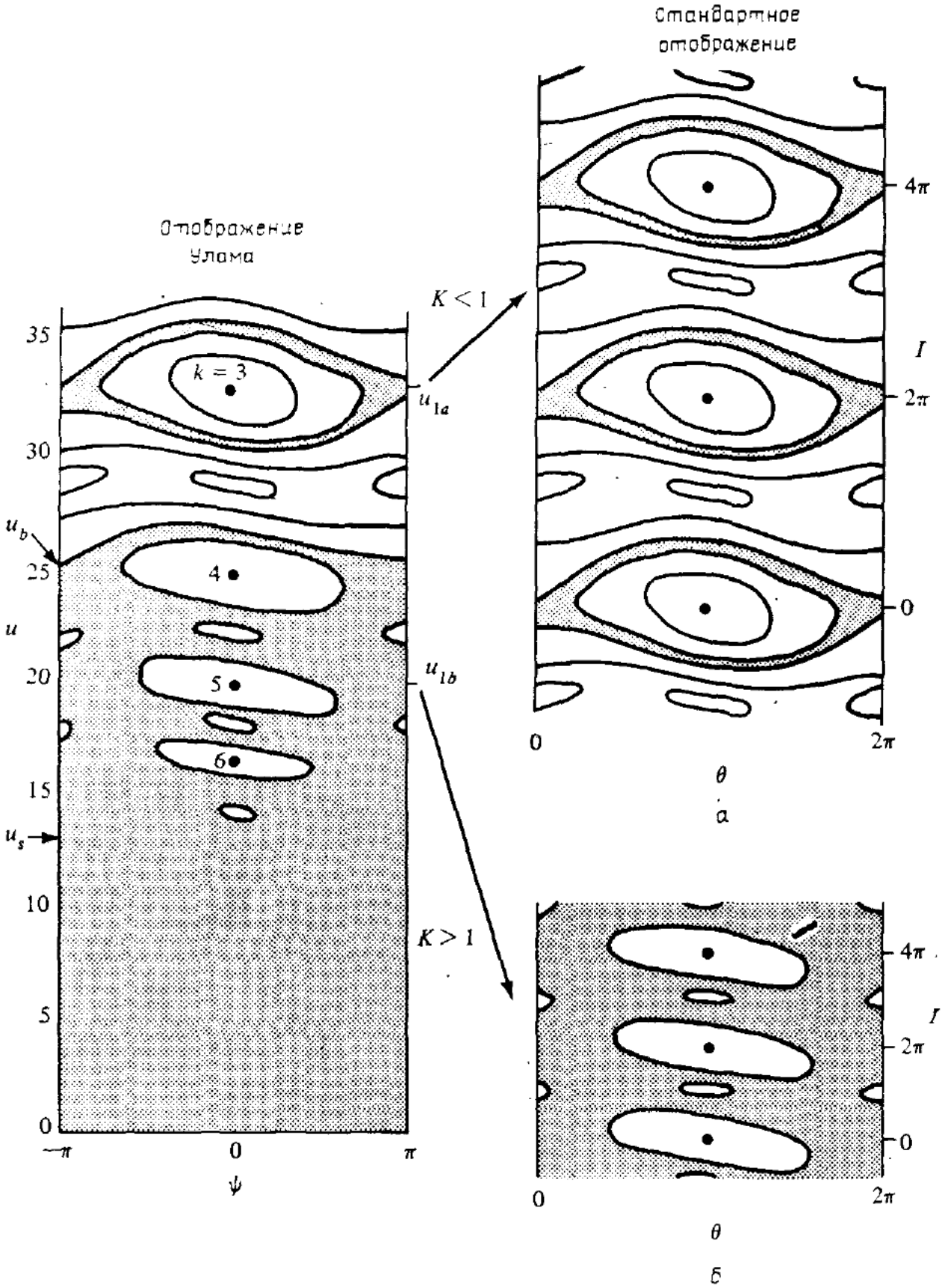


Рис. 4.2. Локальная аппроксимация отображения Улама стандартным отображением.

а — локальная стохастичность для малых K (исходное отображение линеаризовано в окрестности u_{1a}); *б* — глобальная стохастичность для больших K (линеаризация в окрестности u_{1b}).

где верхний знак соответствует $\theta_1 = 0$, а нижний $\theta_1 = \pi$. При этом $\det \mathbf{A} = 1$, как и должно быть для отображения, сохраняющего фазовую площадь. Согласно (3.3.55), условие устойчивости зависит от следа матрицы $\mathbf{A}$ и имеет вид

$$|2 \pm K| < 2. \tag{4.1.12}$$

Поэтому неподвижная точка $\theta_1 = 0$ всегда неустойчива [1]), а эллиптическая точка $\theta_1 = \pi$ превращается в гиперболическую с отражением при

$$K > 4. \tag{4.1.13}$$

В этом случае все неподвижные точки становятся неустойчивыми.

В общем случае отображение всегда периодично по фазе θ, но не по I. Однако стандартное отображение периодично также и по I (4.1.3б). Эта особенность приводит к существованию неподвижных точек другого типа. С учетом периодичности по I соотношения (4.1.10) нужно заменить теперь на следующие:

$$I_{1l} = 2\pi m, \quad K \sin\theta_{1l} = 2\pi l, \tag{4.1.14}$$

где m, l — целые числа.

«Неподвижные» точки с $l \neq 0$ соответствуют на самом деле *ускорительным режимам* движения [70], поскольку I увеличивается на $2\pi l$ при каждой итерации. Условие устойчивости (4.1.12) заменяется на

$$|2 \pm K \cos\theta_{1l}| < 2. \tag{4.1.15}$$

Отсюда и из (4.1.14) следует, что с ростом l (и уменьшением $\cos\theta_{1l}$) интервалы устойчивости существуют для сколь угодно больших значений K. В отличие от этого для $l = 0$ имеется граница устойчивости $K < 4$. Это является любопытной особенностью именно стандартного отображения, и поэтому не следует искать ускорительные режимы в отображениях, которые лишь локально аппроксимируются стандартным отображением.

Периодические точки. Чириков [70], Грин [165], Лихтенберг и др. [272], а также Шмидт [363] исследовали различные семейства периодических точек ($k > 1$). Их можно разделить на два класса: *первичные*, которые существуют и в пределе $K \to 0$, и *бифуркационные*, которые возникают только выше некоторого порогового значения K.

Остановимся подробно на периодических точках с периодом $k = 2$. Такие точки образуют пары: (I_1, θ_1) и (I_2, θ_2). Итерируя отображение дважды, получаем

$$I_2 = I_1 + K \sin\theta_1, \tag{4.1.16а}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + I_2 - 2\pi m_1, \tag{4.1.16б}$$

---

[1]) Считается, что $K > 0$.— *Прим. ред.*

$$I_1 = I_2 + K \sin\theta_2, \tag{4.1.16в}$$

$$\theta_1 = \theta_2 + I_1 - 2\pi m_2, \tag{4.1.16г}$$

где m_1 и m_2 — целые числа. Условие устойчивости определяется следом матрицы

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & K\cos\theta_2 \\ 1 & 1 + K\cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K\cos\theta_1 \\ 1 & 1 + K\cos\theta_1 \end{pmatrix} \tag{4.1.17}$$

и приводится к виду

$$-4 < 2K(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + K^2\cos\theta_1\cos\theta_2 < 0. \tag{4.1.18}$$

Если сложить (4.1.16а) и (4.1.16в), видно, что имеются два случая: а) $\theta_2 = -\theta_1$ и б) $\theta_2 = \theta_1 - \pi$, причем $0 < \theta_1 \leqslant \pi$. Для случая «а» из (4.1.16) следует соотношение

$$2\pi p - 4\theta_1 = K\sin\theta_1, \tag{4.1.19}$$

которое определяет θ_1. Это выражение при $p = m_1 - m_2 = 1$ дает первичные периодические точки, а при $p > 1$ — бифуркационные. Условие устойчивости (4.1.18) принимает вид

$$-4 < K\cos\theta_1 < 0. \tag{4.1.20}$$

Первичные точки ($I_{1,2} = 2\pi(m_2 + 1/2)$; $\theta_{1,2} = \pm\pi/2$ при $K \ll 1$) неустойчивы для любых K, поскольку $\theta_1 \leqslant \pi/2$. Первые бифуркационные точки возникают при $K = 4$, когда неподвижная точка ($I_1 = 2\pi m_2$, $\theta_1 = \pi$) становится неустойчивой, и остаются устойчивыми при $4 < K < 2\pi$. Интервалы устойчивости имеются для сколь угодно больших K, если при этом p достаточно велико.

В случае «б» из (4.1.16) следует соотношение

$$2\pi(p-1) = K\sin\theta_1, \tag{4.1.21}$$

которое определяет θ_1, а условие устойчивости принимает вид

$$K^2\cos^2\theta_1 < 4. \tag{4.1.22}$$

Здесь также имеются первичные точки $I_{1,2} = 2\pi(m_2 + 1/2)$; $\theta_1 = \pi$; $\theta_2 = 0$, устойчивые при $K < 2$. Первые бифуркационные точки для $p = 2$ возникают при $K = 2\pi$, когда аналогичные точки в случае «а» становятся неустойчивыми. Для случая «б» точки устойчивы при $6{,}28 < K < 6{,}59$. Как и в случае «а», имеются интервалы устойчивости для произвольно больших значений K:

$$(2\pi)^2(p-1)^2 < K^2 < (2\pi)^2(p-1)^2 + 4. \tag{4.1.23}$$

Отметим, что другие отображения могут и не иметь этого специфического свойства [272]. Периодические точки большего периода ($k > 2$) исследованы Шмидтом [363] и Шмидтом и Билеком [364].

Граница стохастичности. Численно легко получить сотни тысяч итераций стандартного отображения (4.1.3) и, таким образом, исследовать его динамику для различных значений K и начальных

условий. На рис. 4.3 показано изменение структуры фазовой плоскости с ростом K. При малом K ясно видны первичные эллиптические точки $k = 1, 2$, а также гиперболические точки с их стохасти-

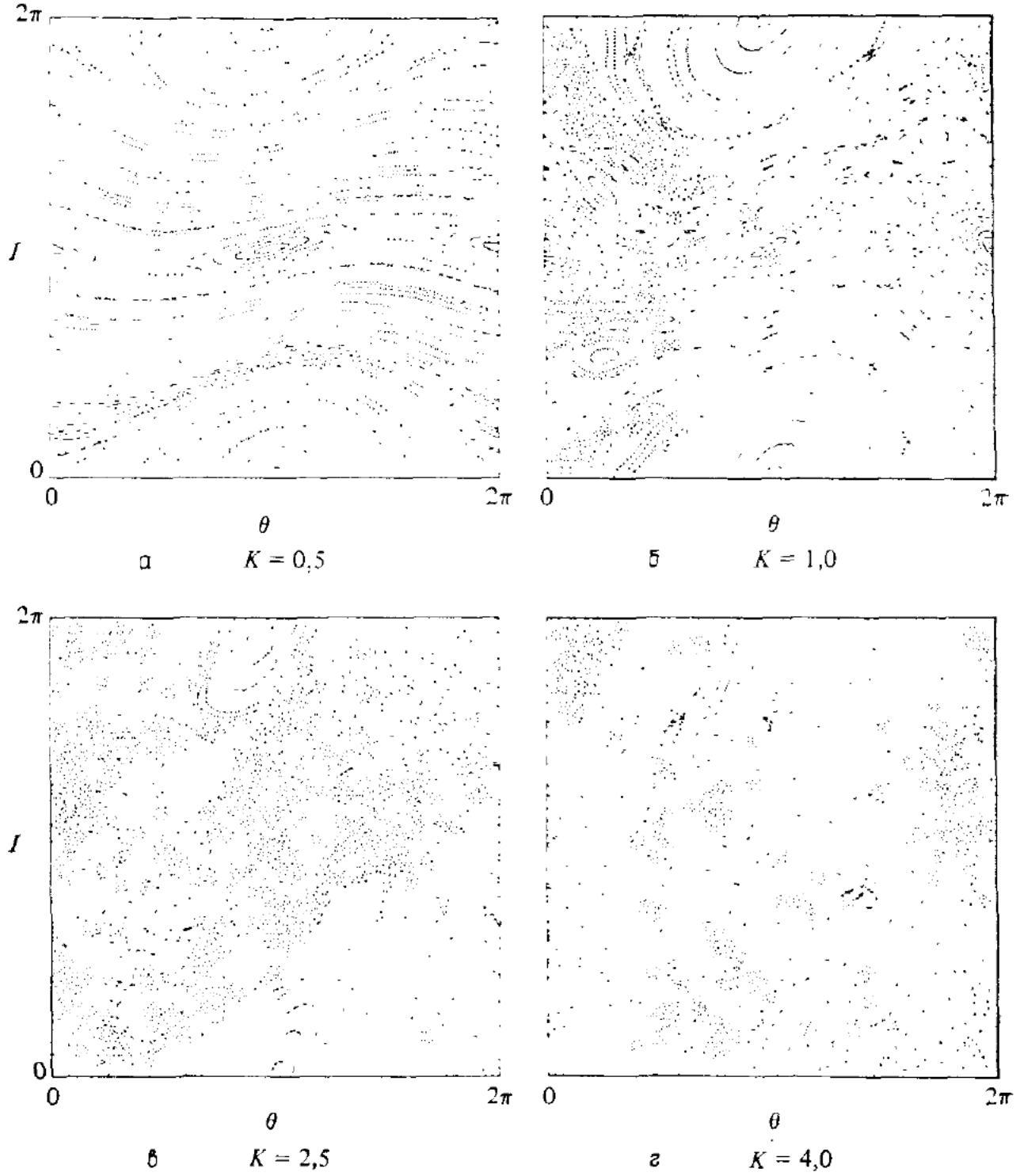


Рис. 4.3. Фазовая плоскость стандартного отображения для разных K (по данным работы [22]).

а — локальная стохастичность вблизи сепаратрис; видны целый и полуцелый резонансы; *б* — глобальная стохастичность; *в* — полное разрушение полуцелого резонанса; виден вторичный резонанс 4-й гармоники вокруг неподвижной точки; *г* — первичная неподвижная точка на пороге устойчивости; инвариантные кривые вытянуты по направлению рождения двух бифуркационных точек.

ческими слоями. Переход от локальной к глобальной стохастичности происходит между $K = 0{,}95$ и $K = 1{,}00$. Более детальные численные исследования дают для границы стохастичности

$K \approx 0{,}9716$ (§ 4.4). С ростом K первичные точки периода 2, а затем и периода 1 становятся неустойчивыми, однако, как видно из рисунка, островки устойчивости существуют и при больших K. Таким образом, стандартное отображение, в котором для любого ненулевого значения K нет ни полной интегрируемости, ни сплошного хаоса, является характерным представителем типичной гамильтоновой системы.

На рис. 4.4 показаны четыре траектории стандартного отображения для $K = 0{,}97$, чуть ниже границы стохастичности. Две из них лежат на инвариантных кривых, изолирующих стохастические слои целого ($k = 1$) и полуцелого ($k = 2$) резонансов. Однако резонанс с $k = 4$ уже поглощен стохастическим слоем целого резонанса.

Гамильтониан. Аналогично отображению Улама (п. 3.4д) гамильтониан стандартного отображения получается с помощью периодической δ-функции и имеет вид

$$H = \frac{I^2}{2} + K\cos\theta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i m n), \tag{4.1.24}$$

где номер итерации n играет роль времени. Предположим, что θ — медленная переменная:

$$\frac{d\theta}{dn} \ll 2\pi. \tag{4.1.25}$$

Учитывая, что основной вклад дают члены с медленно меняющейся фазой, оставим только слагаемые с $m = 0$ и $m = \pm 1$:

$$H = \frac{I^2}{2} + K\cos\theta + 2K\cos\theta\cos 2\pi n. \tag{4.1.26}$$

Последний член в правой части будем считать возмущением, тогда невозмущенный гамильтониан

$$H_0 = \frac{I^2}{2} + K\cos\theta \tag{4.1.27}$$

описывает маятник (п. 1.3а). Его фазовая плоскость показана на рис. 1.4. Частота малых фазовых колебаний вблизи эллиптической точки $\theta = \pi$ равна:

$$\omega_0 = K^{1/2}, \tag{4.1.28}$$

а амплитуда колебаний по I есть

$$\Delta I_{\text{макс}} = 2K^{1/2}. \tag{4.1.29}$$

Поскольку расстояние δI между целыми резонансами равно для стандартного отображения его периоду 2π, параметр перекрытия резонансов имеет вид

$$\frac{2\Delta I_{\text{макс}}}{\delta I} = \frac{4K^{1/2}}{2\pi}. \tag{4.1.30}$$

Это отношение можно выразить через частоту малых фазовых колебаний (4.1.28) или локальное число вращения $\alpha_0 = \omega_0/2\pi$:

$$\frac{2\Delta I_{\text{макс}}}{\delta I} = 4\alpha_0 = \frac{4}{Q_0}. \tag{4.1.31}$$

Здесь $Q_0 = 1/\alpha_0$ — период малых колебаний, выраженный в числе итераций отображения. Соотношение (4.1.31), связывающее отно-

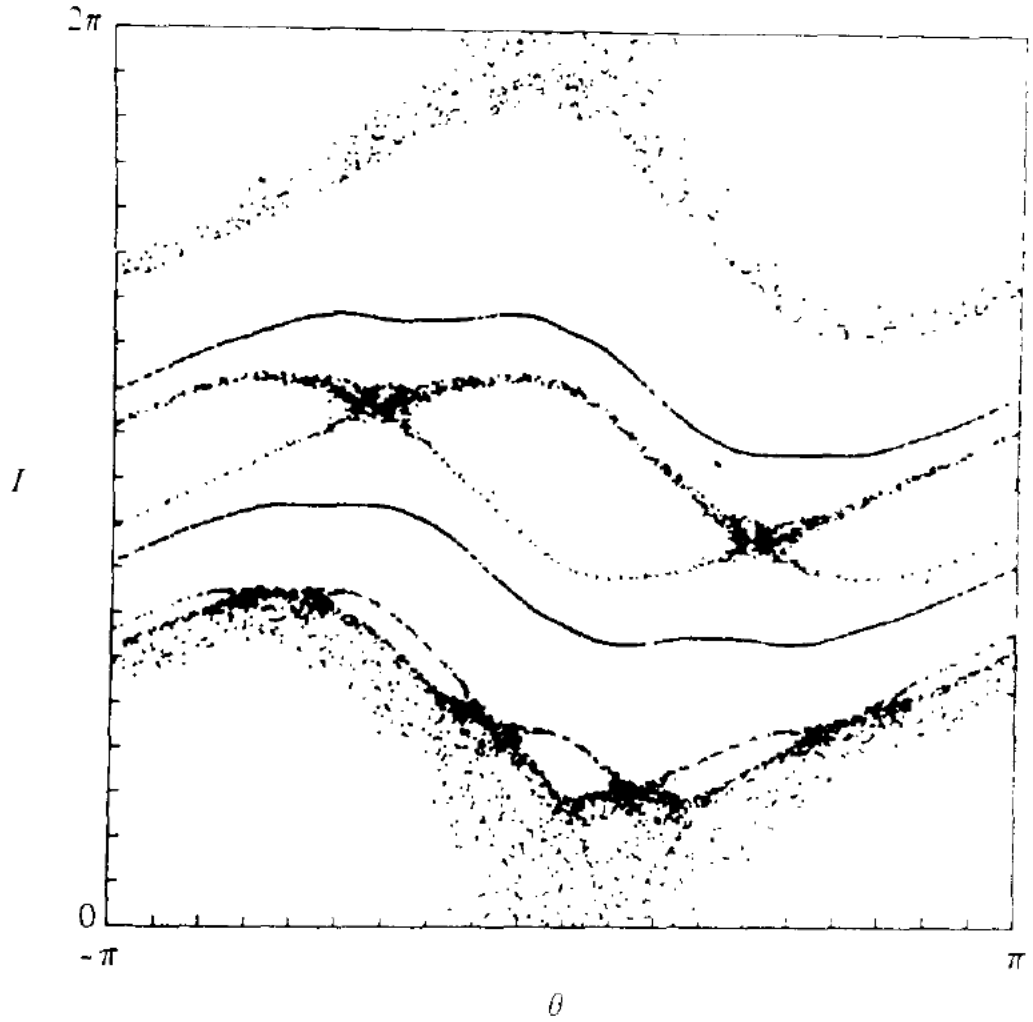


Рис. 4.4. Четыре траектории стандартного отображения для $K = 0{,}97$ (по данным работы [165]).
Верхняя и нижняя группы точек принадлежат одной траектории.

сительный размер резонанса с его числом вращения, справедливо для всех соседних резонансов любого порядка [1]). Например, из того, что согласно численным данным граница стохастичности приблизительно соответствует появлению вторичных резонансов шестой гармоники ($\alpha_0 = 1/6$), вытекает правило «двух третей» $2\Delta I_{\text{макс}}/\delta I \approx 2/3$.

[1]) Конкретный смысл этого «универсального» утверждения зависит от величины δI, см. ниже конец п. 4.4а.— *Прим. ред.*

* § 4.2. Перекрытие резонансов

* 4.2а. Схема получения критериев

В этом параграфе, следуя работе Чирикова [70], мы получим весьма эффективный количественный критерий перехода к глобальной стохастичности. Сначала, используя гамильтониан стандартного отображения, мы найдем условие касания сепаратрис целых резонансов, что приведет к простейшему критерию перекрытия $K = \pi^2/4 \approx 2{,}47$. Далее, учтем полуцелый резонанс и найдем более точное критическое значение $K \approx 1{,}46$. Это уже гораздо ближе к численному результату [70], но все еще остается завышенным. Наконец, учтем ширину стохастического слоя вблизи сепаратрисы. (Чириков нашел, что резонансы третьей гармоники несущественны [1]). Для этого исследуем перекрытие вторичных резонансов вблизи сепаратрисы целого резонанса. Это может быть сделано либо путем перехода от сепаратрисного отображения (§ 3.5) к новому стандартному отображению, как в п. 4.1б выше, либо путем непосредственного вычисления размера вторичных резонансов вблизи сепаратрисы, как в п. 4.3б ниже. Однако для получения точного условия перекрытия вторичных резонансов необходимо ввести те же поправки, что и для первичных и т. д. Можно ожидать, что такой процесс сходится и дает правильный ответ. Вместо проведения соответствующих довольно утомительных выкладок Чириков «замыкает» процедуру, вводя в отображение для вторичных резонансов некоторый «корректирующий множитель» [2]. Это позволяет согласовать аналитические и численные результаты.

* 4.2б. Вычисление критериев перекрытия

Простое перекрытие. Простейший критерий, как видно из рис. 4.5, *а*, состоит в том, чтобы удвоенное значение $\Delta I_{\text{макс}}$, вычисленное по (4.1.29), было равно расстоянию между целыми резонансами $\delta I = 2\pi$, откуда

$$4K^{1/2} = 2\pi \tag{4.2.1}$$

или

$$K = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \approx 2{,}47. \tag{4.2.2}$$

---

[1]) Это не совсем так. С учетом замечания Кари критическое значение понижается до $K \approx 1{,}28$ [70, с. 317].— *Прим. ред.*

[2]) На самом деле речь идет о чисто эмпирическом множителе $R \approx 2{,}15$, который учитывает поправки к интегралу Мельникова — Арнольда (3.5.22) за счет отброшенных в (4.1.26) высокочастотных членов. Аналитическую оценку R пока получить не удалось. Замыкание же процедуры ренормализации резонансов производится элементарно [см. вывод (4.2.23) ниже].— *Прим. ред.*

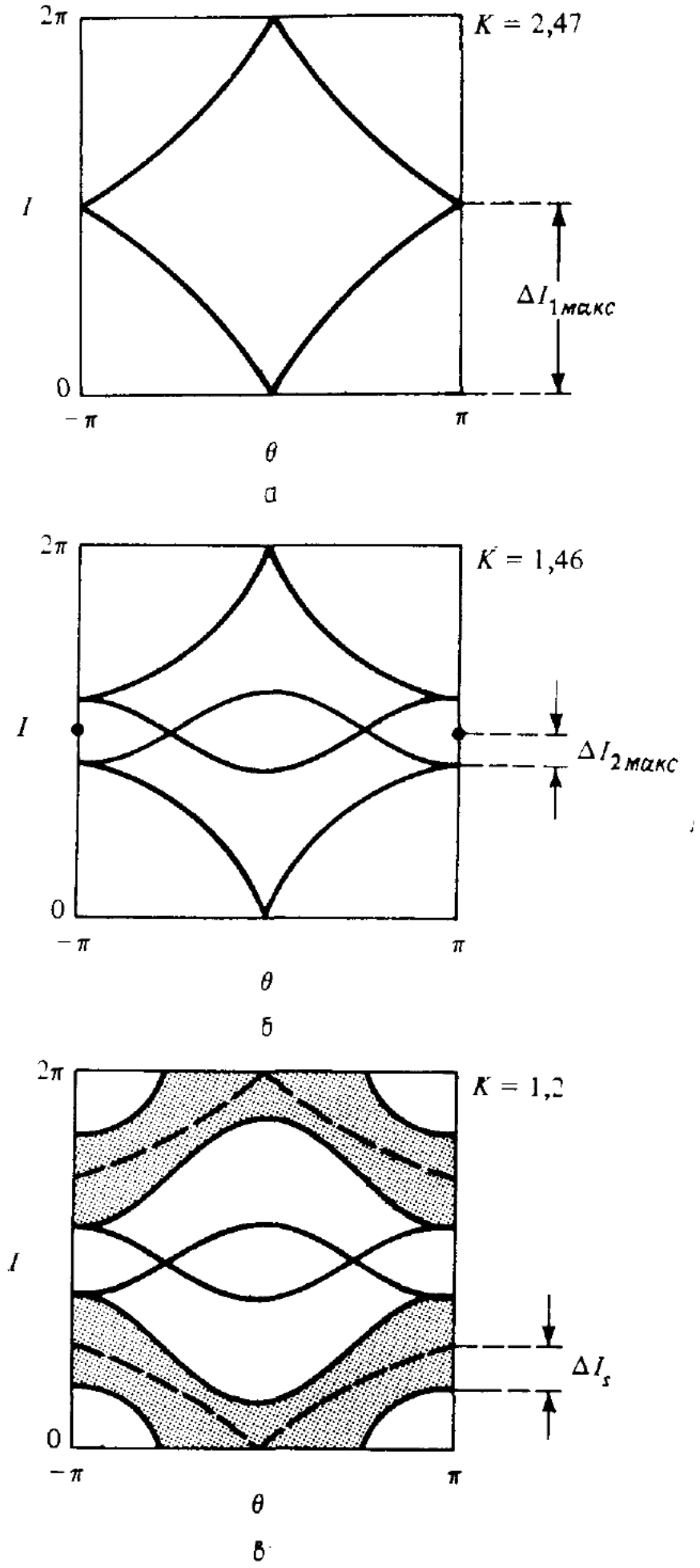


Рис. 4.5. Схема перекрытия резонансов.

а — перекрытие (касание) целых резонансов; *б* — перекрытие целых и полуцелого резонансов; *в* — перекрытие с учетом конечной ширины стохастического слоя целого резонанса (заштриховано).

Поскольку это значение K слишком велико, мы уточним его, приняв во внимание полуцелый резонанс, который расположен посередине между соседними целыми резонансами.

Перекрытие целого и полуцелого резонансов. Как показано на рис. 4.5, *б*, касание сепаратрис этих резонансов приводит к условию

$$\Delta I_{1\,\text{макс}} + \Delta I_{2\,\text{макс}} = (\delta I)_{12} = \pi, \tag{4.2.3}$$

где индексы 1 и 2 обозначают соответственно целый и полуцелый резонансы.

Для вычисления ширины резонанса ΔI_2 нужно учесть вторую гармонику Фурье (§ 2.4). Для стандартного отображения эта гармоника появляется только во втором порядке теории возмущений, поскольку исходное возмущение $K \sin \theta$ имеет только первую гармонику. Так как полуцелый резонанс максимально удален на фазовой плоскости от целых резонансов, то можно использовать стандартную теорию возмущений.

Чтобы получить новый гамильтониан $\overline{H}$ до второго порядка малости, используем метод Ли, описанный в п. 2.5б. Гамильтониан (4.1.24) можно записать в виде

$$H = H_0 + \varepsilon H_1' = \frac{I^2}{2} + \varepsilon K \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - 2\pi m n), \tag{4.2.4}$$

где, как обычно, параметр ε отмечает возмущение. Прежде всего из уравнения Депри (2.5.31а) первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + I\frac{\partial}{\partial \theta}\right) w_1 = \overline{H}_1 - H_1 \tag{4.2.5}$$

найдем производящую функцию Ли w_1. Так как $\langle H_1 \rangle = 0$, где скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по невозмущенной траектории, выберем $\overline{H}_1 = 0$ и решим (4.2.5) относительно w_1:

$$w_1 = K \sum_m \frac{\sin(\theta - 2\pi m n)}{2\pi m - I}. \tag{4.2.6}$$

Поскольку полуцелые резонансы расположены по I между целыми резонансами, т. е.

$$I = (2p + 1)\pi, \tag{4.2.7}$$

где p — целое число, то функция w_1 не является сингулярной. Преобразованный гамильтониан $\overline{H}$ теперь вычисляется из уравнения Депри второго порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + I\frac{\partial}{\partial \theta}\right) w_2 = 2(\overline{H}_2 - H_2) - [w_1, \overline{H}_1 + H_1], \tag{4.2.8}$$

где H_2 и $\overline{H}_1$ равны нулю. Выберем $\overline{H}_2$ так, чтобы среднее от правой

части (4.2.8) обратилось в нуль:

$$\overline{H}_2 = \frac{1}{2} \langle [w_1, H_1] \rangle. \tag{4.2.9}$$

Раскрывая скобки Пуассона

$$\overline{H}_2 = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial w_1}{\partial I_1} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \right\rangle \tag{4.2.10}$$

и подставляя разложения для w_1 и H_1, получаем

$$\overline{H}_2 = \frac{K^2}{2} \left\langle \sum_m \frac{\sin(\theta - 2\pi n m)}{(2\pi m - I)^2} \sum_{m'} \sin(\theta - 2\pi m' n) \right\rangle =$$

$$= \frac{K^2}{4} \left\langle \sum_{m,\, m'} \frac{\cos[2\pi(m' - m)n] - \cos[2\theta - 2\pi(m' + m)n]}{(2\pi m - I)^2} \right\rangle. \tag{4.2.11}$$

При усреднении по невозмущенной траектории $\theta = In$ первая сумма обращается в нуль, за исключением членов $m = m'$. Последние дают постоянное слагаемое, которое можно опустить. Во второй сумме остаются члены, для которых

$$2I - 2\pi(m' + m) = 0 \tag{4.2.12}$$

или с учетом (4.2.7)

$$m + m' = 2p + 1. \tag{4.2.13}$$

Для (4.2.11) это дает

$$\overline{\overline{H}}_2 = -\frac{K^2}{4} \sum_m \frac{\cos[2\theta - 2\pi(2p+1)n]}{(2\pi)^2 \left(m - p - \frac{1}{2}\right)^2}. \tag{4.2.14}$$

Сумма по m не зависит от p:

$$\sum_m \frac{1}{\left(m - p - \frac{1}{2}\right)^2} = \pi^2. \tag{4.2.15}$$

Поэтому во втором порядке имеем

$$\overline{H}_2 = \frac{I^2}{2} - \left(\frac{K}{4}\right)^2 \cos 2\tilde{\theta}, \tag{4.2.16}$$

где

$$\tilde{\theta} = \theta - \pi(2p + 1)n \tag{4.2.17}$$

— медленная фаза. Из (4.2.16) амплитуда колебаний I равна

$$\Delta I_{2\text{макс}} = \frac{1}{2} K. \tag{4.2.18}$$

Значение K, соответствующее перекрытию целых и полуцелых

резонансов, находим с помощью подстановки (4.1.29) и (4.2.18) в (4.2.3):

$$2K^{1/2} + \frac{1}{2} K = \pi, \tag{4.2.19}$$

что дает $K \approx 1{,}46$ [70]. Соотношение (4.2.19) все еще завышает критическое значение K. Дальнейшее улучшение этой оценки возможно путем учета резонансов более высоких гармоник ($k > 2$), а также конечной ширины их стохастических слоев. Чириков сделал и то и другое и нашел, что наиболее существенным является учет ширины стохастического слоя.

Ширина стохастического слоя. Будем исходить из отображения (4.1.6), которое описывает движение вблизи сепаратрисы резонанса:

$$w_{n+1} = w_n - w_0 \sin \varphi_n, \tag{4.1.6а}$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + Q_0 \ln \left| \frac{32}{w_{n+1}} \right| . \tag{4.1.6б}$$

Здесь w — относительное отклонение энергии от ее значения K на сепаратрисе

$$w = \frac{\Delta H}{K}, \tag{4.2.20}$$

а φ — фаза внешнего возмущения [$\varphi = 2\pi n$ в (4.1.26)] в тот момент, когда фаза колебаний на резонансе проходит эллиптическую точку; Q_0 — отношение частоты внешнего возмущения к частоте малых фазовых колебаний:

$$Q_0 = \frac{2\pi}{K^{1/2}} . \tag{4.2.21}$$

Как было показано в п. 4.1б, линеаризация уравнения (4.1.6б) по w приводит к стандартному отображению с параметром стохастичности (4.1.9). Используя для w_0 выражение (3.5.27), получаем параметр стохастичности K_2 для вторичных резонансов вблизи сепаратрисы в виде

$$K_2 = \frac{8\pi Q^3}{w_1} \exp\left(\frac{-\pi Q_0}{2} \right). \tag{4.2.22}$$

Подставляя в это выражение (4.2.21) и требуя, чтобы на границе стохастичности как для первичных, так и для вторичных резонансов $K_2 = K$, получаем полуширину стохастического слоя:

$$w_1 = \frac{4\,(2\pi)^4}{K^{5/2}} \exp\left(\frac{-\pi^2}{K^{1/2}} \right). \tag{4.2.23}$$

Теперь нужно связать w_1 с полушириной стохастического слоя ΔI_s по переменной действия при $\theta = \pi$. Для маятника с гамильтонианом

$$H = \frac{I^2}{2} + K \cos \theta \tag{4.2.24}$$

энергия на сепаратрисе $H = K$, а действие в точке $\theta = \pi$, согласно (4.1.29), равно $I_0 = 2K^{1/2}$. Из (4.2.20) для энергии

$$K + \Delta H = K(1 + w_1) \tag{4.2.25}$$

и фазы $\theta = \pi$ из (4.2.24) найдем

$$I^2 = 2K(2 + w_1), \tag{4.2.26}$$

и если $w \ll 1$, то

$$I \approx 2K^{1/2}\left(1 + \frac{w_1}{4}\right). \tag{4.2.27}$$

Следовательно,

$$\Delta I_s = I - I_0 = w_1 \frac{K^{1/2}}{2}. \tag{4.2.28}$$

Таким образом, уточненный критерий перекрытия (см. рис. 4.5, *в*) можно записать в виде

$$\left(1 + \frac{w_1}{4}\right) 2K^{1/2} + \frac{K}{2} = \pi. \tag{4.2.29}$$

Этот критерий означает, что ширина целого резонанса плюс ширина его стохастического слоя плюс ширина полуцелого резонанса равна расстоянию между центрами двух целых резонансов. Для получения критического значения K, определяющего границу глобальной стохастичности, нужно решить уравнение (4.2.29) с w_1 из (4.2.23). В результате находим $K = 1{,}2$. С помощью дополнительных эвристических соображений [1]) Чириков [70] получил $K \approx 1{,}06$. Подробное численное исследование стандартного отображения [70] дало в качестве верхней границы близкое значение $K \approx 0{,}99$. В § 4.4 будет показано, что более тонкий критерий стохастичности приводит к значению $K \approx 0{,}9716$.

Ускорение Ферми. Задача об ускорении Ферми приводится к стандартному отображению с $K = 2\pi M/u_1^2$ [см. (4.1.5)]. Для исходного нелинейного отображения численно было найдено, что граница стохастичности находится при $u_b = 2{,}8\sqrt{M}$ (см. рис. 3.15). Подстановка $u_b = u_1$ дает $K \approx 0{,}8$. Отличие от значения $K \approx 1{,}0$ для стандартного отображения можно легко объяснить тем, что для этих двух случаев определение границы разное. Из рис. 1.14 видно, что $u_b \approx 28 = 2{,}8\sqrt{M}$. Но полученное таким путем значение u_b является верхней границей стохастического движения

[1]) Главное из них —поправка к интегралу Мельникова—Арнольда; она является по существу чисто эмпирической, см. примечание редактора на с. 257.— *Прим. ред.*

и соответствует первой инвариантной кривой. Однако более правильно связать параметр стандартного отображения K со значением u_1 в центре целого резонанса. Из рис. 1.14 видно, что $u_1 = 25 = 2{,}5\sqrt{M}$. Соответствующие этому значения $K = 1{,}0$ и $\alpha = 1/6$ согласуются с результатами для стандартного отображения. Уменьшение возмущения $K(u)$ при увеличении u для отображения Улама приводит к асимметрии, вследствие которой инвариантные кривые ниже резонанса разрушаются, а выше сохраняются. Можно ожидать, что чем сильнее зависимость $K(u)$, тем больше отклонения от стандартного отображения [1]).

§ 4.3. Вторичные резонансы

В этом параграфе мы рассмотрим вторичные резонансы вынужденных колебаний маятника с гамильтонианом (4.1.26). Вследствие нелинейности свободных колебаний маятника в движении присутствуют гармоники основной медленной частоты ω_0. Эти гармоники могут оказаться в резонансе с быстрым внешним возмущением частоты 2π, который называется поэтому *вторичным резонансом*. Поскольку исследование в общем виде является довольно громоздким, мы рассмотрим отдельно вторичные резонансы вблизи центра первичного резонанса и вблизи его сепаратрисы.

4.3а. Центр резонанса

Особенности вторичных резонансов вблизи центра первичного резонанса (т. е. его эллиптической точки) детально исследованы в п. 2.4б. Переходя к переменным действие—фаза (J, φ) для маятника с гамильтонианом

$$H_0 = \frac{I^2}{2} + \omega_0^2 \cos\theta$$

и используя методы, описанные в п. 2.2а, получаем в первом порядке теории возмущений новый гамильтониан [ср. с (2.4.43)]

$$\overline{H}_0(J) = \omega_0 J - \frac{1}{16} J^2 \tag{4.3.1}$$

и частоту колебаний

$$\omega = \omega_0 - \frac{1}{8} J. \tag{4.3.2}$$

Рассмотрим несколько более общий вид гамильтониана (4.1.26), введя амплитуду V и фазу θ_0 возмущения:

$$H_1 = V \cos(\theta + \theta_0) \cos \Omega t. \tag{4.3.3}$$

---

[1]) Помимо этого, точное положение границы стохастичности зависит от расположения крайнего целого резонанса относительно критического u_c, где $K(u_c) = 1$. Подробное обсуждение этого вопроса см. в работе [70, § 6.2].— *Прим. ред.*

В переменных J, φ

$$\overline{H}_1 = V\cos\left[\left(\frac{2J}{\omega_0}\right)^{1/2}\sin\varphi + \theta_0\right]\cos(\Omega t). \tag{4.3.4}$$

Разложим $\overline{H}_1$ в ряд Фурье:

$$\overline{H}_1 = V\mathcal{J}_0(\chi)\cos\theta_0\cos\Omega t + V\cos\theta_0 \sum_{l=2m>0}\mathcal{J}_l(\chi)[\cos(l\varphi - \Omega t) +$$

$$+\cos(l\varphi + \Omega t)] - V\sin\theta_0 \sum_{l=2m-1>0}\mathcal{J}_l(\chi)[\sin(l\varphi - \Omega t) + \sin(l\varphi + \Omega t)], \tag{4.3.5}$$

где m — целое число,

$$\chi(J) = \left(\frac{2J}{\omega_0}\right)^{1/2}, \tag{4.3.6}$$

а $\mathcal{J}_l$ — функция Бесселя первого рода. Для укороченного стандартного отображения (4.1.26) $V = 2K$, $\Omega t = 2\pi n$, $\theta_0 = 0$ и остаются только четные гармоники по φ.

Среднее от $\overline{H}_1$ по t отлично от нуля лишь вблизи резонансных значений $J = J_0$, для которых

$$l\omega(J_0) = \Omega, \tag{4.3.7}$$

где $\omega(J)$ — частота колебаний маятника. Поэтому, как и в п. 2.4б, можно использовать резонансную теорию возмущений, переходя к медленной фазе

$$\tilde{\varphi} = l\varphi - \Omega t \tag{4.3.8}$$

и сопряженной переменной

$$\tilde{J} = \frac{J}{l}. \tag{4.3.9}$$

Преобразуя гамильтониан и разлагая его около резонансного значения $J = J_0$, получаем

$$\Delta\tilde{H} = \left(\frac{\partial^2\overline{H}_0}{\partial\tilde{J}^2}\right)_0 \frac{(\Delta\tilde{J})^2}{2} + \Lambda_l\sin\tilde{\varphi}. \tag{4.3.10}$$

Здесь

$$\Lambda_l = V\mathcal{J}_l(\chi_0) \times \begin{cases} \cos\theta_0; & l = 2m, \\ -\sin\theta_0; & l = 2m-1 \end{cases} \tag{4.3.11}$$

и, согласно (4.3.1) и (4.3.9),

$$\left(\frac{\partial^2\overline{H}_0}{\partial\tilde{J}^2}\right)_0 = -\frac{l^2}{8}. \tag{4.3.12}$$

Гамильтониан (4.3.10) описывает вторичные резонансы и имеет

ту же форму, что и гамильтониан (4.1.27), описывающий первичные резонансы. Расстояние между вторичными резонансами по частоте равно

$$\delta\omega = \omega(J_l) - \omega(J_{l+1}) = \frac{\Omega}{l} - \frac{\Omega}{l+1} \approx \frac{1}{l}\omega. \qquad (4.3.13)$$

Если присутствуют только четные или только нечетные гармоники, то $\delta\omega = 2\omega/l$. Из (4.3.2) и (4.3.9) имеем

$$\delta\omega = \frac{1}{8} l\delta\tilde{J}. \qquad (4.3.14)$$

Это означает, что расстояние по переменной действия равно

$$\delta\tilde{J} = \frac{8m_s\omega}{l^2}, \qquad (4.3.15)$$

где $m_s = 1$, когда симметрия отсутствует, и $m_s = 2$, если имеется четная или нечетная симметрия. Аналогично можно получить максимальную полуширину сепаратрисы:

$$\Delta\tilde{J}_{\text{макс}} = \left(\frac{2}{l}\right)(8\Lambda_l)^{1/2} \qquad (4.3.16)$$

и частоту малых фазовых колебаний:

$$\tilde{\omega}_l = l\left(\frac{\Lambda_l}{8}\right)^{1/2}. \qquad (4.3.17)$$

Уравнения (4.3.14) — (4.3.17) дают параметр перекрытия

$$\frac{2\Delta\tilde{J}_{\text{макс}}}{\delta\tilde{J}} = \frac{4}{m_s}\frac{\tilde{\omega}_l}{\omega} \qquad (4.3.18)$$

для вторичных резонансов.

Этот параметр обычно очень мал, если только параметр перекрытия для первичных резонансов не становится большим. Например, для гамильтониана (4.1.26) с $m_s = 2$, $V = 2K$, $\omega \approx \omega_0 = K^{1/2}$ параметр перекрытия равен

$$\frac{2\Delta\tilde{J}_{\text{макс}}}{\delta\tilde{J}} = [l^2\mathcal{J}_l(\chi)]^{1/2}. \qquad (4.3.19)$$

Наибольшее значение аргумента функции Бесселя $\chi = \pi$ достигается на сепаратрисе первичного резонанса. Для $l \gg \pi$ функция Бесселя экспоненциально мала, и вторичные резонансы несущественны. По этой же причине можно пренебречь и третичными и т. д. резонансами.

Теперь мы можем оценить, при каком числе вращения вторичные резонансы столь же важны, как и первичные. Приравнивая параметры перекрытия (4.3.19) и (4.1.31) для одного и того же

числа вращения ($Q_0 = l$) и учитывая, что максимальный размер вторичного резонанса достигается вблизи сепаратрисы первичного при $\chi = \pi$, получаем

$$l^4 \mathcal{J}_l(\pi) = 16. \tag{4.3.20}$$

Это соотношение приближенно выполняется для $l = 4$ и $l = 6$ (нечетные гармоники отсутствуют). Поэтому можно ожидать, что взаимодействие вторичных резонансов будет столь же существенно, как и для первичных резонансов при таком значении параметра стохастичности K, когда в центре первичного резонанса появятся вторичные резонансы с $l = 4$ и $l = 6$. По индукции то же справедливо и для резонансов всех уровней. В итоге мы приходим к следующему весьма существенному выводу: при достижении критического числа вращения $\alpha \approx 1/5$ для первичных резонансов резонансы всех уровней характеризуются тем же самым числом вращения и одинаковым значением параметра перекрытия. Такой вывод о резком разрушении последней инвариантной кривой между резонансами является, таким образом, весьма правдоподобным с физической точки зрения [1]). Соответствующий этому переходу параметр возмущения получается из (4.1.28) и равен $K = 1{,}2$.

Численные исследования структуры вторичных резонансов стандартного отображения отсутствуют. Однако они проделаны для большого числа гамильтонианов с двумя степенями свободы, поверхность сечения Пуанкаре которых похожа на фазовую плоскость стандартного отображения. Примером является задача о движении частицы в магнитном поле и поле косой волны [383, 385] (см. п. 2.2б). Соответствующий гамильтониан в системе отсчета волны имеет вид [см. (2.2.67)]

$$H = \frac{k_z^2 P_\psi^2}{2M} - P_\psi \omega + P_\varphi \Omega + \varepsilon e \Phi_0' \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_m [k_\perp \rho(P_\varphi)] \sin(\psi - m\varphi). \tag{4.3.21}$$

Выбрав P_φ таким, чтобы $\mathcal{J}_m$ было порядка единицы, авторы этих работ исследовали несколько близких к резонансу гармоник. Их результат для $m = -1, 0, 1$ приведен на рис. 2.10, *б*. Ясно виден вторичный резонанс пятой гармоники внутри первичного резонанса (в данном случае возмущение имеет нечетные гармоники). Видно также, что между резонансами нет инвариантных кривых, поскольку случайно разбросанные точки представляют одну траекторию, которая свободно блуждает между первичными резонансами.

---

[1]) К сожалению, эта красивая картина одновременного перекрытия резонансов на всех уровнях несправедлива даже качественно, поскольку при перекрытии системы резонансов их центры остаются еще долго неразрушенными. Для стандартного отображения, например, граница стохастичности соответствует $K = K_b \approx 1$, а разрушение центра целых резонансов происходит только при $K = K_s = 4$. Формально, это связано с тем, что уравнение (4.3.20) не имеет решения при $\chi \lesssim 2$, а при $\chi = \pi$ оно несправедливо.— *Прим. ред.*

4.3б. Сепаратриса

Чтобы исследовать структуру вторичных резонансов вблизи сепаратрисы, нужно сначала найти выражение для переменной действия. Это можно сделать либо по теории возмущений, отправляясь от движения по невозмущенной сепаратрисе, либо вычислить действие прямо из точного решения для маятника вблизи сепаратрисы (см. п. 1.3а). Хотя оба метода требуют довольно сложных вычислений, выражение для переменной действия было найдено многими авторами, и мы приведем полученные результаты, не вдаваясь в детали самих вычислений. Ниже мы будем следовать работе Смита [383] и Смита и Перейры [387], где действие было получено непосредственно из точного решения.

Гамильтониан маятника (4.1.27) можно записать в переменных J, φ согласно (1.3.10) и (1.3.11). Для колебаний маятника имеем

$$J = \omega_0 \left(\frac{8}{\pi}\right) [\mathscr{E}(\varkappa) - (1-\varkappa^2)\mathscr{K}(\varkappa)], \qquad \varkappa < 1, \tag{4.3.22}$$

где $\mathscr{E}$ и $\mathscr{K}$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, и

$$2\varkappa^2 = 1 + \frac{H}{\omega_0^2}, \tag{4.3.23}$$

откуда $\varkappa = 1$ при $H = \omega_0^2 = K$, т. е. на сепаратрисе. Частота колебаний маятника, согласно (1.3.13), имеет вид

$$\omega(\varkappa) = \frac{\frac{1}{2}\pi\omega_0}{\mathscr{K}(\varkappa)}, \tag{4.3.24}$$

асимптотическое значение при $\varkappa \to 1$ равно

$$\omega(\varkappa) = \frac{\frac{1}{2}\pi\omega_0}{\ln\left[\frac{4}{(1-\varkappa^2)^{1/2}}\right]}. \tag{4.3.25}$$

Параметр перекрытия вторичных резонансов (4.3.18) можно записать в виде

$$\frac{2\Delta J_{\text{макс}}}{\delta J} = 2\left|\frac{\Lambda_l d\omega}{dJ}\right|^{1/2} \frac{l}{\omega}, \tag{4.3.26}$$

где все величины берутся для резонансного значения J

$$l\omega(J) = 2\pi, \tag{4.3.27}$$

и l — четное число. Поскольку

$$\frac{d\omega}{dJ} = \frac{d\omega}{d\varkappa}\frac{d\varkappa}{dJ}, \tag{4.3.28}$$

то из (4.3.22) и (4.3.23) получим после некоторых преобразований

$$\frac{d\omega}{dJ} = -\frac{1}{16}\frac{\omega^3 J}{\omega_0^4 \varkappa^2 (1-\varkappa^2)}. \tag{4.3.29}$$

Величина Λ_l определяется из разложения Фурье для третьего члена в (4.1.26) с заменой $2K \to V$ и $\theta \to \theta(J, \varphi)$ из (1.3.11). После довольно громоздких вычислений Смит и Перейра нашли ([387], приложение А):

$$\Lambda_l = V \frac{\left(\frac{\pi}{\mathscr{K}(\varkappa)}\right)^2 l q^{l/2}}{1-(-q)^l}, \quad l = 2m, \tag{4.3.30а}$$

где

$$q = \exp\left\{\frac{-\pi \mathscr{K}[(1-\varkappa^2)^{1/2}]}{\mathscr{K}(\varkappa)}\right\}. \tag{4.3.30б}$$

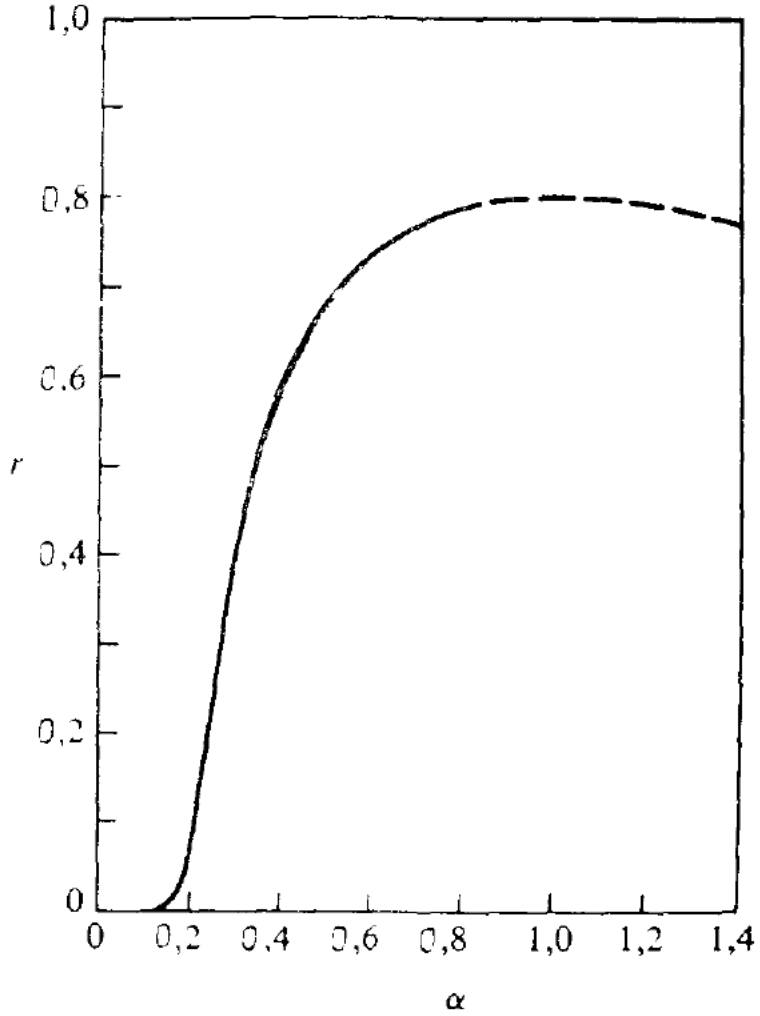


Рис. 4.6. Относительная доля r фазового пространства, в которой выполняется простой критерий перекрытия, в зависимости от числа вращения $\alpha = \omega_0/2\pi$ (по данным работы [145]).

Подставляя (4.3.29) и (4.3.30) в (4.3.26), можно получить параметр перекрытия $2\Delta\tilde{J}_{\text{макс}}/\delta\tilde{J}$ в зависимости от энергии H.

Вблизи сепаратрисы $\varkappa^2 \to 1$ и

$$q^{l/2} = \exp\left(-\frac{\pi Q_0}{2}\right),$$

где $Q_0 = 2\pi/\omega_0$ — отношение частоты возмущения к частоте малых колебаний маятника. Используя (4.3.30а) с $V = 2K = 2\omega_0^2$ и опуская малое слагаемое $(-q)^l$, получаем

$$\Lambda_l = 16\pi\omega \exp\left(-\frac{\pi Q_0}{2}\right).$$

Подставляя это выражение вместе с (4.3.29) в (4.3.26), имеем

$$\left(\frac{2\Delta\tilde{J}_{\text{макс}}}{\delta\tilde{J}}\right)^2 = \frac{16}{\pi} Q_0^3 \exp\left(-\frac{\pi Q_0}{2}\right)\frac{1}{1-\varkappa^2}. \tag{4.3.31}$$

Из (4.2.20) и (4.3.23) находим соотношение

$$\frac{w}{2} = 1-\varkappa^2. \tag{4.3.32}$$

Введем параметр стохастичности K_2 для вторичных резонансов с помощью условия перекрытия (4.2.1) для стандартного отображения

$$\left(\frac{2\Delta\tilde{J}_{\text{макс}}}{\delta\tilde{J}}\right)^2=\left(\frac{4K_2^{1/2}}{2\pi}\right)^2. \tag{4.3.33}$$

Приравнивая правые части (4.3.31) и (4.3.33), находим

$$K_2=\frac{8\pi Q_0^3}{w}\exp\left(-\frac{\pi Q_0}{2}\right), \tag{4.3.34}$$

что в точности совпадает (при $w=w_1$) с результатом (4.2.22), полученным из сепаратрисного отображения.

Фукуяма и др. [145] исследовали простой критерий перекрытия вторичных резонансов в задаче о взаимодействии частицы с волной, используя эллиптические интегралы с некоторыми упрощениями. На рис. 4.6 представлены их результаты для зависимости относительной доли r фазового пространства, где выполняется простой критерий перекрытия [параметр перекрытия (4.3.26) равен единице], от числа вращения

$$\alpha=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{K^{1/2}}{2\pi}.$$

Видно, что быстрый рост стохастической компоненты происходит примерно при $\alpha\approx 0{,}2$, т. е. при появлении вторичных резонансов пятой гармоники. Это согласуется с приведенными выше данными.

*§ 4.4. Резонансы высоких гармоник

* 4.4а. Основы метода Грина

Рассмотрим развитый Грином [164, 165] метод, который позволяет найти точную границу перехода к глобальной стохастичности. Этот метод постулирует соответствие между двумя следующими свойствами системы (рис. 4.7): 1) разрушение инвариантной кривой с иррациональным числом вращения α и 2) потеря устойчивости периодических точек, число вращения которых $r/s\to\alpha$ при $s\to\infty$ (r, s — взаимно простые числа).

Средний вычет. Для линеаризованного отображения, заданного матрицей A вблизи периодической точки (см. п. 3.3б), вычет определяется как

$$R=\frac{1}{4}(2-\operatorname{Sp}\mathsf{A}). \tag{4.4.1}$$

Сравнение с (3.3.54) показывает, что для $0\leqslant R\leqslant 1$

$$R=\sin^2\left(\frac{\sigma}{2}\right), \tag{4.4.2}$$

где σ — сдвиг фазы на одну итерацию отображения. Поэтому периодическая точка устойчива при условии

$$0 < R < 1. \tag{4.4.3}$$

Матрица A вычисляется с помощью (3.3.43) и (3.3.44) и для перио-

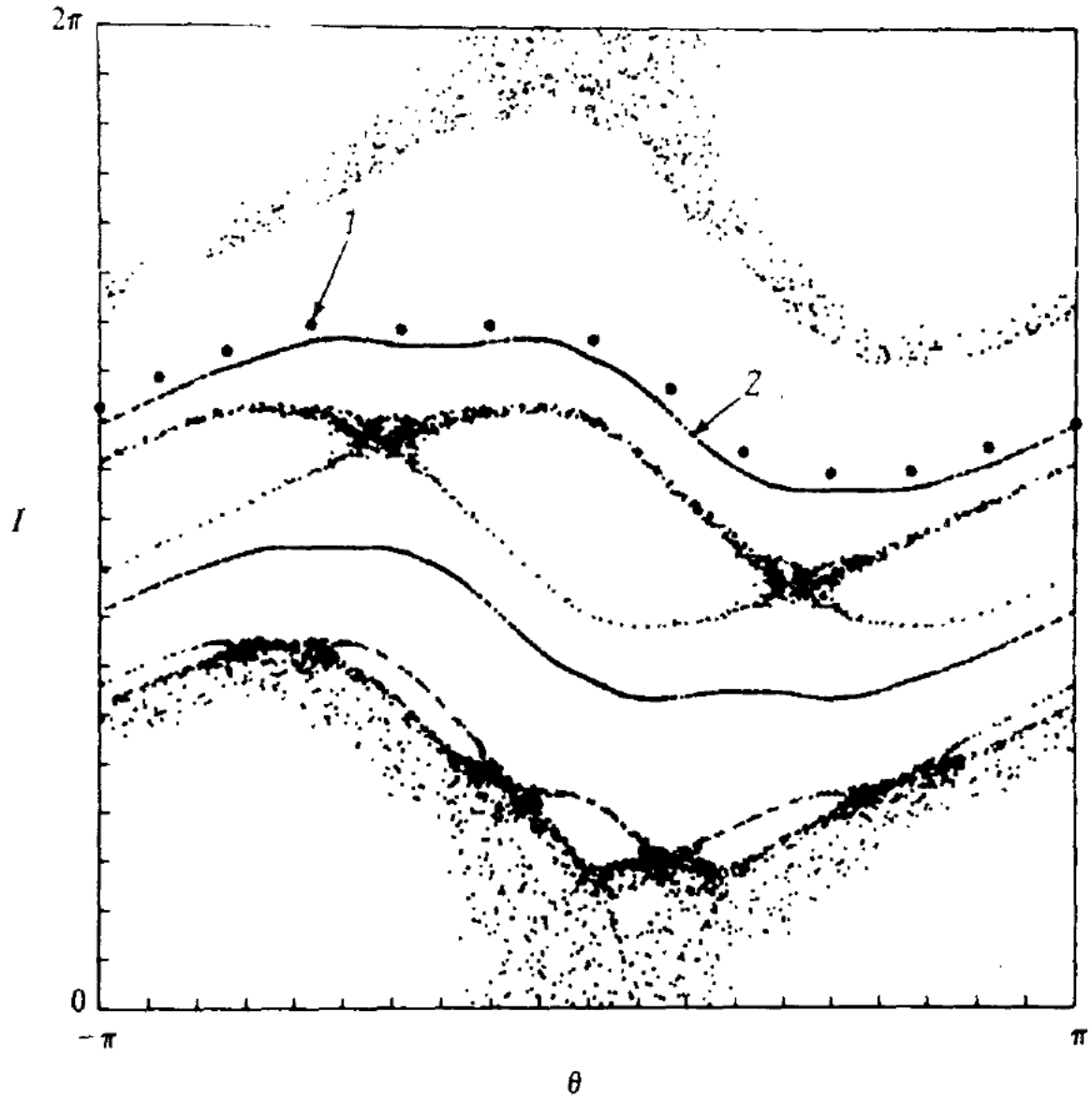


Рис. 4.7. К методу Грина.
Периодические точки 1 с $\alpha_n = r/s$ ($s = 12$) приближают инвариантную кривую 2 с иррациональным числом вращения α.

дической точки с $\alpha = r/s$ стандартного отображения ее можно записать в виде

$$\mathsf{A} = \prod_{i=1}^{s} \begin{pmatrix} 1 & K\cos\theta_i \\ 1 & 1 + K\cos\theta_i \end{pmatrix}. \tag{4.4.4}$$

Из полученного выражения в принципе можно найти вычет R. Однако более удобным методом нахождения вычета является представление его в виде детерминанта, как показано Хеллеманом и

Баунтисом [183]:

$$R = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2+K\cos\theta_1 & -1 & 0 \cdots -1 \\ -1 & 2+K\cos\theta_2 & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ -1 & & 2+K\cos\theta_s \end{vmatrix}. \tag{4.4.5}$$

Соответствующая матрица размерности $s \times s$ является тридиагональной с дополнительными элементами — 1 в двух углах. Если K велико, то $R \propto K^s$. Грин показал, что это верно также и для малых K, и на этом основании принял такую же зависимость и для всех K. Следовательно, вычет экспоненциально зависит от периода s. Для больших s значение R стремится к нулю в устойчивом случае и неограниченно возрастает в неустойчивом. Естественно поэтому исследовать поведение величины

$$f = \left(\frac{|R|}{\beta}\right)^{1/s}, \tag{4.4.6}$$

которую Грин назвал средним вычетом. Постоянная $\beta \sim 1$ выбирается из условия быстрой сходимости при численном итерировании, что дает возможность получать надежные результаты для относительно малых s. Условие устойчивости имеет вид: $f < 1$.

Золотое сечение. Можно показать (см., например, [227]), что наилучшим способом аппроксимации иррационального числа рациональными является разложение первого в непрерывную дробь. Для иррационального α на отрезке (0, 1) такое разложение можно представить в виде

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} \tag{4.4.7}$$

и символически записать как $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$, где a_n — положительные целые числа. Значение a_1 равно целой части $1/\alpha$

и т. д.[1]). Разложение в непрерывную дробь единственно, а подходящие дроби $r_n/s_n = [a_1, \ldots, a_n] \equiv \alpha_n$ наилучшим образом аппроксимируют α в том смысле, что не существует других дробей r/s, которые были бы ближе к α для $s \leqslant s_n$. Можно показать, что знаки последовательных разностей $(\alpha - r_n/s_n)$ противоположны, а сходимость

$$\left|\alpha - \frac{r_n}{s_n}\right| \leqslant \frac{1}{s_n s_{n-1}} \tag{4.4.8}$$

является квадратичной по s для больших s. В качестве примера возьмем число $\alpha = \pi - 3 = 0{,}14159\ldots$, т. е. дробную часть π. Разложение его в непрерывную дробь имеет вид

$$\pi - 3 = [7,\ 15,\ 293,\ \ldots]. \tag{4.4.9}$$

Большие значения a_n ясно указывают на быструю сходимость подходящих дробей.

Можно ожидать, что инвариантная кривая, которая разрушается *последней* с ростом возмущения, имеет число вращения α, которое хуже всего приближается рациональными числами, т. е. разложение которого в непрерывную дробь содержит минимальные a_n. Очевидно, что таким является число [2])

$$\alpha_g = [1,\ 1,\ 1,\ \ldots] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \tag{4.4.10}$$

особые свойства которого были давно известны и которое получило название *золотого сечения*. Поэтому для определения границы стохастичности нужно исследовать устойчивость периодических точек с $\alpha_{gn} \to \alpha_g$. Численные исследования стандартного отображения, действительно, показывают, что последняя инвариантная кривая имеет $\alpha \approx \alpha_g$, подтверждая тем самым интуитивное предположение Грина [3]). Любое отображение, которое можно локально аппроксимировать стандартным отображением, будет обладать этим же свойством. Однако резонансная структура стандартного отображения весьма специфична (она является однородной по импульсу). В более общем случае это уже не так [117]. Мы обсудим этот вопрос в § 4.5.

При численном исследовании устойчивости сходимость улучшается, если начальное значение R уже близко к предельному

---

[1]) Подобно тому как разложение в десятичную дробь ($\alpha = \Sigma g_n k^{-n}$; $k = 10$) можно представить в виде отображения $\beta_{n+1} = k\beta_n$, mod 1; $g_n = [k\beta_n]$, разложению в непрерывную дробь соответствует отображение: $\beta_{n+1} = 1/\beta_n$, mod 1; $a_n = [1/\beta_n]$. Оба отображения, кстати говоря, приводят к хаотическому движению для почти всех α (см., например, [486], гл. 7 и ниже).— *Прим. ред.*

[2]) Это «очевидное» заключение обманчиво. Например, если не ограничиваться положительными a_n, то $\alpha_g - 1 = [-3,\ 3,\ -3,\ \ldots]$.— *Прим. ред.*

[3]) В действительности ситуация как раз обратная: исходя из этого предположения, Грин исследовал устойчивость периодических точек только для $\alpha = \alpha_g$ (см. п. 4.4б ниже).— *Прим. ред.*

при $s \to \infty$. Грин численно показал, что в случае золотого сечения для критического значения $K = K_c$ вычет стремится к пределу

$$R(\alpha_g, K_c) = \frac{1}{4}. \tag{4.4.11}$$

Поэтому при $\beta = 1/4$ в (4.4.6) f становится ближе к единице, и можно ожидать более быстрой сходимости. Это, действительно, подтверждается численными данными.

Метод Грина позволяет также найти условия разрушения инвариантных кривых на фазовой плоскости. Наиболее устойчивой будет инвариантная кривая с числом вращения вида

$$\alpha = [a_1, \ldots, a_n, 1, 1, \ldots], \tag{4.4.12}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ характеризуют определенную область фазовой плоскости. Численные результаты показывают, что и в этом случае вычет имеет тот же предел (4.4.11), а значение $\beta = 1/4$ обеспечивает быструю сходимость.

Помимо разложения в непрерывную дробь, можно использовать и другие аппроксимации α и соответствующие им системы периодических точек. Например, Лансфорд и Форд [286] использовали представление $\alpha^{-1} = k \pm 1/n$, где k, n — целые числа, причем n пробегает значения в интервале $1 < n \leqslant n_0$. Этот метод оказался удобным, хотя и не очень точным. Еще один метод, основанный на фрактальных диаграммах, был предложен Шмидтом и Билеком [364]. Мы сравним его с методом Грина в п. 4.4б.

Другие результаты. В работе Грина [165] получены и другие интересные результаты. Рассмотрим кратко некоторые из них. Прежде всего из (4.4.2) следует, что значение $R = 1/4$ соответствует $\sigma = \pi/3$. Это означает, что разрушение инвариантных кривых в какой-либо области фазового пространства соответствует возникновению вторичных резонансов шестой гармоники вокруг периодических эллиптических точек с большими $s \to \infty$. Но то же самое происходит в стандартном отображении и для неподвижной точки ($s = 1$), т. е. в противоположном пределе по s. Фактически численные результаты Грина показывают, что все периодические траектории с $\alpha = \alpha_{gn}$ обладают этим свойством.

Другой результат Грина имеет большое практическое значение для проведения численных исследований. Он показал (подробнее см. § 5.5), что при численном счете траектории, лежащей на инвариантной кривой, ошибки счета значительно больше вдоль кривой, чем поперек [1]). Поэтому численное определение самой инвариантной кривой можно производить на очень большом числе итераций без существенного ее искажения.

Наконец, укажем, что метод Грина можно использовать для проверки интегрируемости системы. Если $R = 0$ во всем фазовом

[1] По этому поводу см. также работу [57].— *Прим. ред.*

пространстве, то собственные значения линеаризованного отображения равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, а матрица отображения имеет вид (3.3.71). Это означает отсутствие резонансной структуры движения и поэтому такая система является, по-видимому, полностью интегрируемой.

* 4.4б. Численные эксперименты

Численный алгоритм. Схематически методика вычислений Грина [164—166] сводится к следующему.

1. Приводим задачу к исследованию отображения, такого, например, как стандартное отображение, или отображение Улама. В общем случае для системы с двумя степенями свободы это может представлять некоторые трудности. По заданному гамильтониану отображение можно получить методами теории возмущений (см. п. 3.1б) или же с помощью интегрирования уравнений движения на периоде отображения. В некоторых случаях удобно использовать внутреннюю симметрию системы, как это было сделано Грином [166] в задаче Хенона—Хейлеса.
2. Находим точное положение эллиптических неподвижных точек ($k = 1$) по возможности аналитически.
3. Численно находим зависимость α от расстояния до неподвижной точки вдоль линии симметрии. Для иррациональных α это делается путем усреднения за большое число итераций отображения, а для рациональных чисел $\alpha = r/s$ — за s итераций.
4. Выбираем последовательность подходящих дробей $\alpha_n = r_n/s_n$, сходящуюся к некоторому иррациональному числу α, которое соответствует исследуемой инвариантной кривой. Если мы интересуемся переходом к глобальной стохастичности, то в некоторых системах, как, например, стандартное отображение, в качестве α выбираем золотое сечение ($\alpha = \alpha_g$).
5. Находим линеаризованное отображение A вблизи периодических точек с $\alpha_n = r_n/s_n$:

$$\boldsymbol{x}_{s_n} - \boldsymbol{x}_n = \mathsf{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n),$$

где $\boldsymbol{x}_{s_n}$ — значение $\boldsymbol{x}$ после s_n итераций отображения, а $\boldsymbol{x}_n$ — положение исследуемой периодической точки. Матрица A находится обычно численно с помощью соотношений, приведенных в п. 3.3б.

Численные результаты. На рис. 4.4 показаны численные результаты Грина для четырех траекторий стандартного отображения с $K = 0{,}97$. Это значение K, по всей видимости, лишь немногим ниже критического значения, разрушающего последнюю инвариантную кривую. Вследствие симметрии фактически существуют

две такие инвариантные кривые, которые расположены по обе стороны от полуцелого резонанса. Видно также, что траектория вблизи сепаратрисы целого резонанса медленно диффундирует. Вследствие конечного числа итераций неясно, существуют ли и другие инвариантные кривые, ограничивающие эту диффузию. Однако при $K = 0{,}9716$ наблюдается совершенно иная картина для инвариантной кривой с $\alpha = \alpha_g$, а при $K = 0{,}975$ эта кривая уже, несомненно, разрушена, поскольку траектории диффундируют в этом месте фазовой плоскости, хотя и очень медленно.

Грин вычислил значения f для подходящих дробей золотого сечения при $K = 0{,}9716$ и $K = 0{,}9$. Для сравнения эти результаты сведены в табл. 4.1, из которой ясно виден переход от значений $f<1$ при $K = 0{,}9$ к асимптотическому значению $f \approx 1$ при $K = 0{,}9716$. Обратим также внимание на резкое изменение асимптотического значения R (для больших s) от ничтожно малого в устойчивом случае до $R = 0{,}25$ на границе стохастичности.

Таблица 4.1. Вычеты f и R в зависимости от r/s

$K=0{,}9$		$K=0{,}9716$		
r_n/s_n	f	r_n/s_n	f	R
2/3	0,93896	1/1	0,971635	0,24291
3/5	0,919959	1/2	0,971635	0,23602
5/8	0,92775	2/3	1,014042	0,26068
34/55	0,92427	3/5	0,993528	0,24201
55/89	0,92409	377/610	0,99999965	0,24995
89/144	0,92406	610/987	1,00000009	0,25002
144/233	0,92401[a)]	987/1597	0,9999970	0,24988

a) $R=2{,}5\cdot10^{-9}$.

Наглядную картину разрушения инвариантной кривой с $\alpha = \alpha_g$ можно получить, откладывая периодические точки для последовательных пар подходящих дробей. На рис. 4.8 сравниваются два случая: $K = 0{,}95$, для которого $f(\alpha_g) \approx 0{,}977$, и $K = 0{,}9716$, для которого $f(\alpha_g) \approx 1{,}000$. Поскольку каждая последующая подходящая дробь соответствует увеличению числа периодических точек приблизительно в $1/\alpha$ раз, а на каждом из рис. 4.8 используется пара подходящих дробей, ограничивающих значение α сверху и снизу, горизонтальный масштаб последовательно растягивается в $(1/\alpha)^2$ раз для сохранения числа точек в выбранной области. Для облегчения визуального анализа структуры периодических точек, которые ограничивают инвариантную кривую с $\alpha = \alpha_g$, вертикальный масштаб на рис. 4.8 также растягивается в $(1/\alpha)^4$ раз. Из рисунка видно, что при $K = 0{,}95$ последовательные приближения периодических точек равномерно сходятся к инвариантной кри-

вой. Напротив, при $K = 0{,}9716$ периодические точки обнаруживают все новую и новую структуру на каждом последующем масштабе. Разумно заключить, что в этом случае инвариантная кривая не существует [1]).

В заключение обсуждения метода Грина мы приводим на рис. 4.9 схематическую зависимость числа вращения $\tilde{\alpha}$ вблизи периодических точек от их периода s. Для $\tilde{\alpha} > 1/2$ периодические точки не-

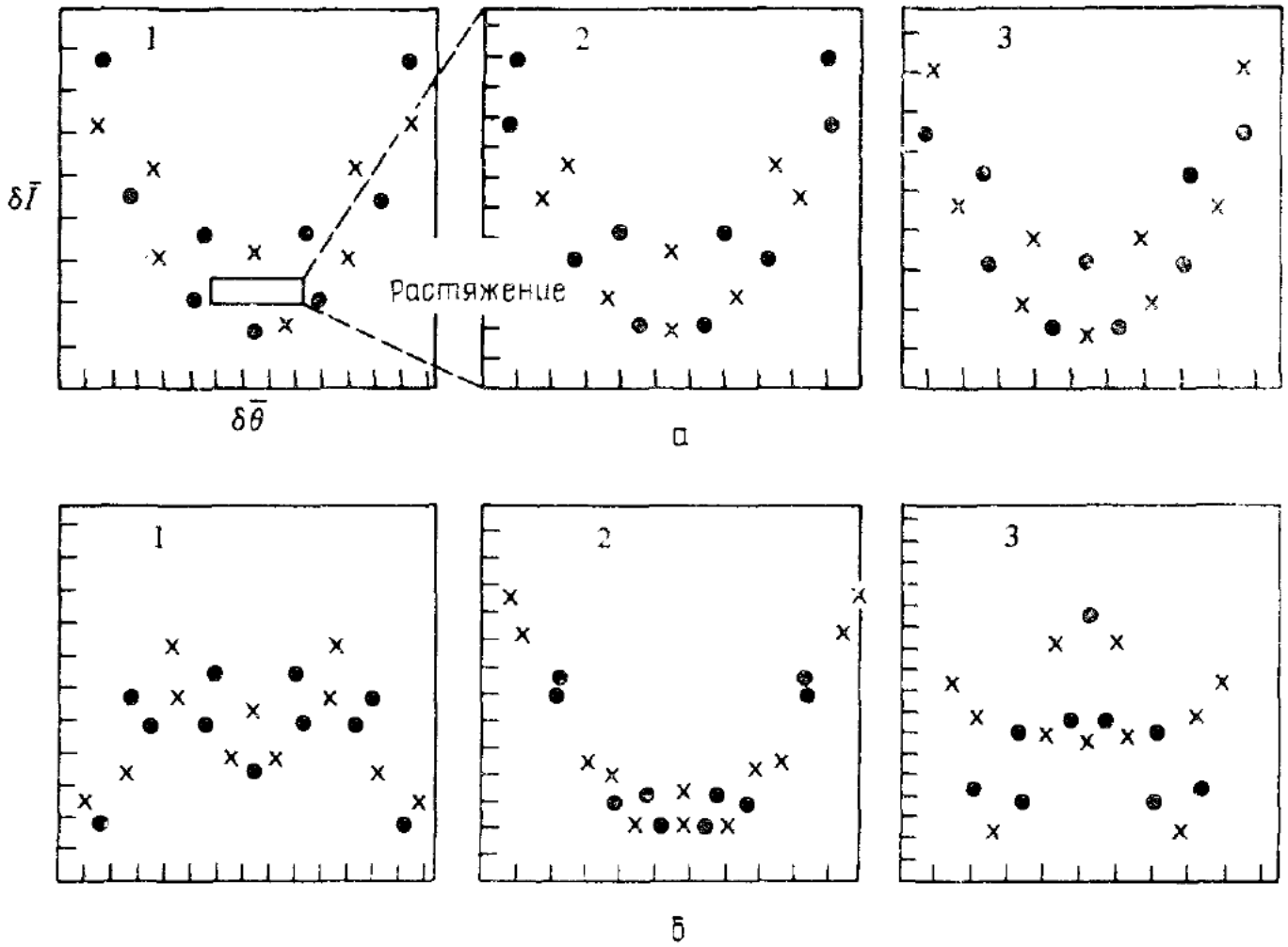


Рис. 4.8. Периодические точки, соответствующие последовательным парам подходящих дробей золотого сечения (по данным работы [165]).
а) $K = 0{,}95$; *б*) $K = 0{,}9716$.

устойчивы. При $K \ll 1$ $\tilde{\alpha}$ существенно меньше 1/6 даже для $s = 1$ (когда $\tilde{\alpha} = \alpha$) и экспоненциально убывает с увеличением s. Последнее сохраняется для любого $K < 0{,}9716$. Если же $K = 0{,}9716$, то, как следует из табл. 4.1, $\tilde{\alpha} = 1/6$ ($R = 0{,}25$) для всех достаточно больших s. В этом случае все периодические точки устойчивы, а отношение размера соответствующих им резонансов к расстоянию между последовательными резонансами (s_n и s_{n+1}) одинаково для всех $n \to \infty$. При $K > 0{,}9716$ величина $\tilde{\alpha}$ растет и при достаточно большом s периодические точки оказываются неустой-

[1]) Конечно, это не более чем наглядные соображения. В этом отношении данные табл. 4.1 более убедительны (см. также рис. 4.9).— *Прим. ред.*

чивыми. Таким образом, горизонтальная прямая $\tilde{\alpha} = 1/6$ на рис. 4.9 соответствует как раз критическому значению K. Этот результат подтверждается исследованиями Эсканде и Довейла [117, 118], которые описаны в § 4.5.

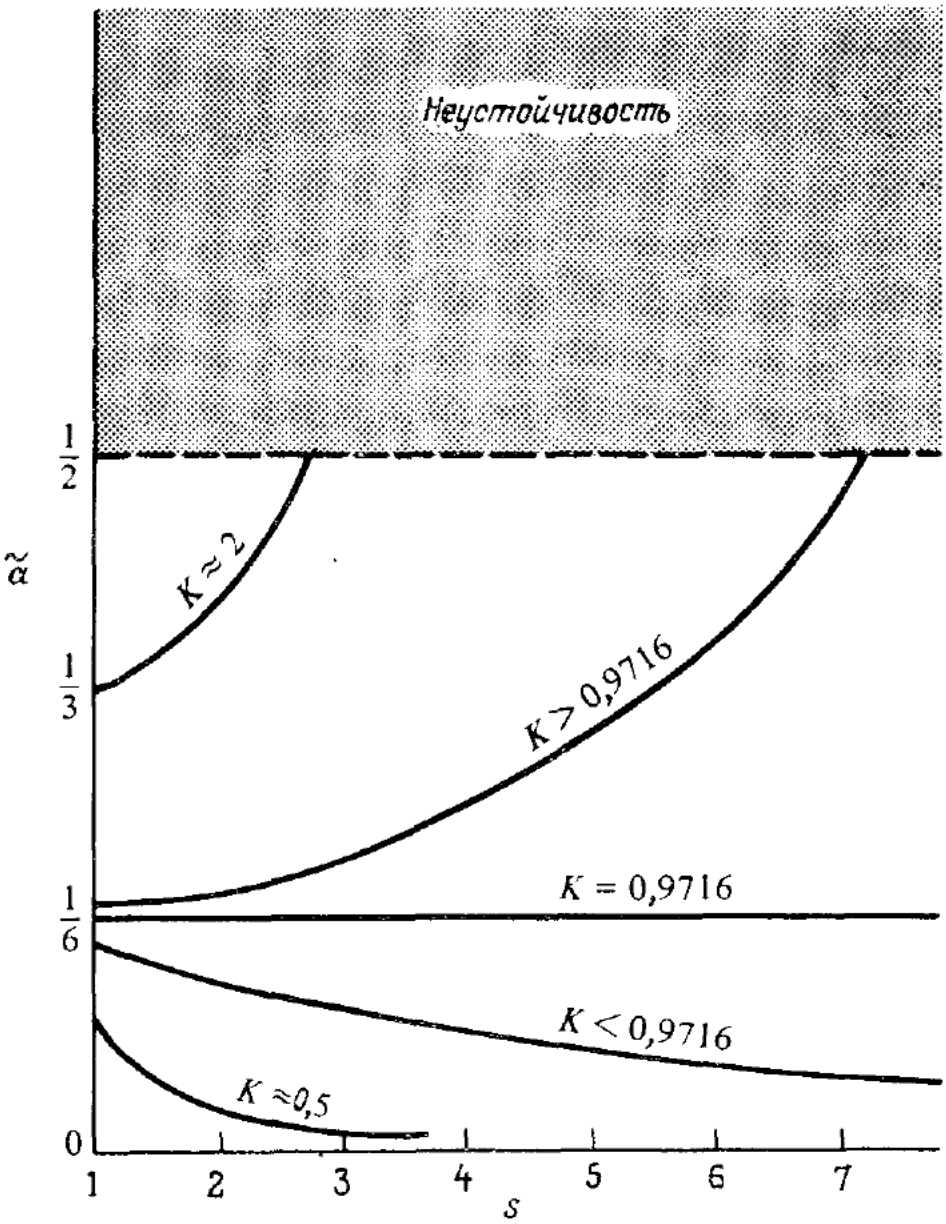


Рис. 4.9. Схематическая зависимость числа вращения $\tilde{\alpha}$ вблизи периодических точек от их периода s.

Другой подход к исследованию системы резонансов высоких гармоник связан с упорядочением соответствующих им периодических точек на границе устойчивости с помощью *фрактальных* диаграмм [364]. Основная идея состоит в разбиении всех периодических точек на последовательные поколения по значению числа вращения α. Первые два поколения соответствуют [1])

$$\alpha_1 = \frac{1}{n}; \qquad \alpha_2 = \frac{1}{n \pm \frac{1}{m}}, \tag{4.4.13}$$

[1]) Последовательные поколения дают разложение произвольного $\alpha = [n, m, \ldots]$ в непрерывную дробь, для которой α_l есть подходящие дроби.— *Прим. ред.*

где n, m — любые целые (положительные и отрицательные) числа, кроме нуля. С увеличением m периодические точки второго поколения приближаются к сепаратрисе одного из резонансов первого поколения. Если же $m = 1$, то мы попадаем, очевидно, в первое поколение. На рис. 4.10 показана зависимость критического значения параметра $K(\alpha_l)$ (граница устойчивости) стандартного ото-

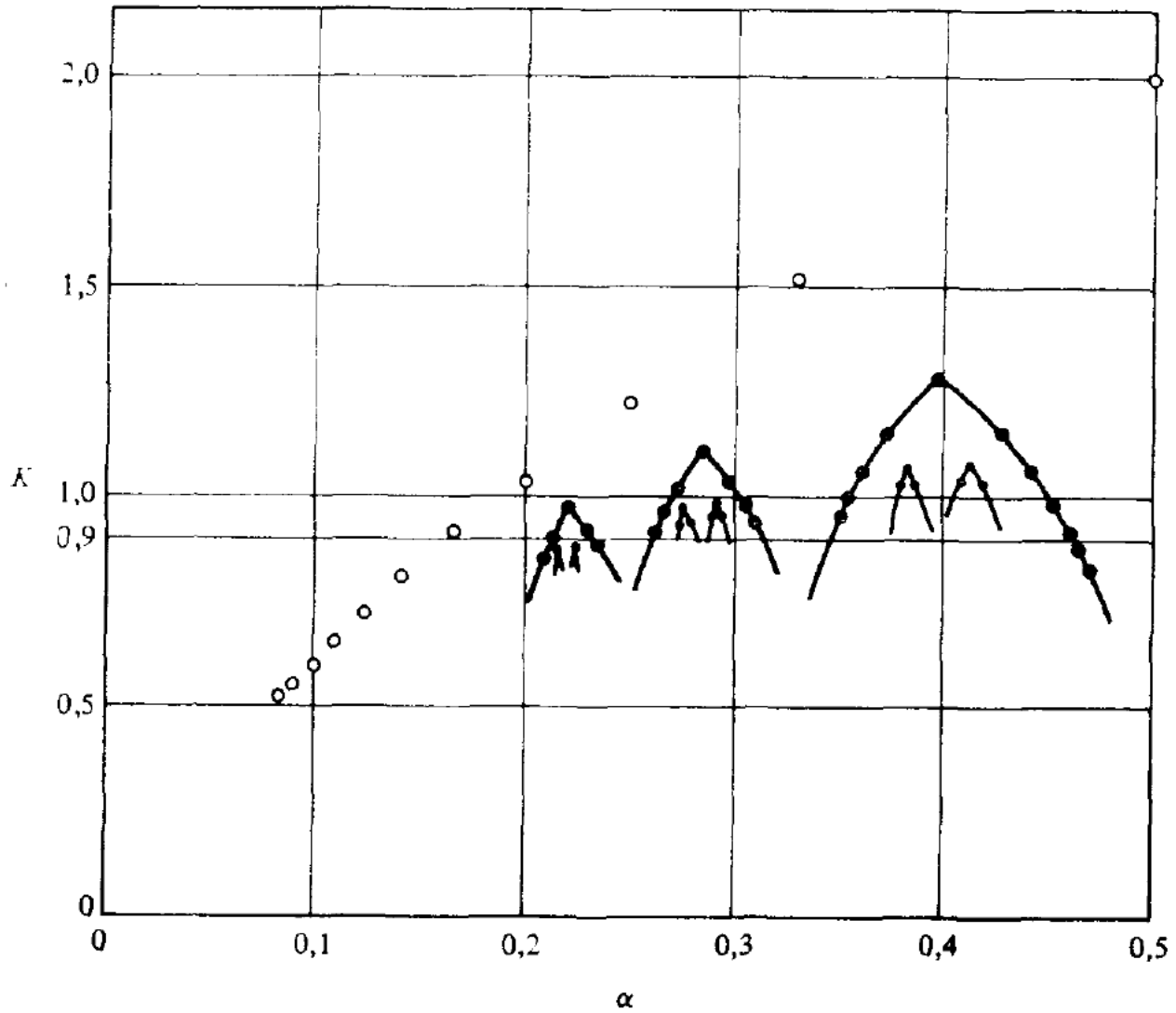


Рис. 4.10. Критические значения K для устойчивости трех поколений периодических точек стандартного отображения (по данным работы [364]). Видна фрактальная структура функции $K(\alpha)$.

бражения для трех первых поколений периодических точек. За исключением $n = 1$ (целый резонанс), значения $K(\alpha_1)$ для первого поколения (кружки на рисунке) ложатся на гладкую кривую, симметричную относительно $\alpha_1 = 1/2$. Зависимости $K(\alpha)$ для второго и третьего поколений имеют аналогичную форму, но на более мелких масштабах по α. Подобная масштабная инвариантность характерна для фракталов (см. п. 7.1в).

Шмидт и Билек предположили, что максимальные значения $K(\alpha_l)$ в разных поколениях связаны соотношением

$$\frac{K_l - K_{l+1}}{K_{l-1} - K_l} = \Delta_l, \tag{4.4.14}$$

где Δ_l для больших l не зависит от l. Тогда из фрактальной диаграммы можно найти условия разрушения инвариантных кривых между любыми резонансами по относительно небольшому числу максимумов $K(\alpha_l)$ первых поколений. Соотношение (4.4.14) представляется правдоподобным по аналогии с последовательностью бифуркаций как в диссипативных, так и в гамильтоновых системах (см. п. 7.2б и дополнение Б). Шмидт и Билек сравнили предсказания существования нескольких инвариантных кривых на основе фрактальной диаграммы на рис. 4.10 с прямым численным моделированием и получили хорошее согласие.

В заключение вкратце обсудим применение описанного метода в других задачах. В простейшем виде этот метод был использован еще Лансфордом и Фордом [286] в задаче Хенона и Хейлеса (см. п. 1.4а). Они исследовали отображение на поверхности сечения для полной энергии $E = 1/12$ и $E = 1/8$ (см. рис. 1.13, *б* и *в*), используя линию симметрии $p_y = 0$, проходящую через основной резонанс. Критерием устойчивости служило условие $f < 1$, где средний вычет определяется как $f = |R|^{2/Q}$. Система резонансов высоких гармоник и их периодических точек задавалась соотношением

$$\alpha_n = \frac{1}{m \pm 1/n} = \frac{r_n}{s_n},$$

где целое m — фиксированное число, а n пробегает все целые положительные значения больше 1. Поскольку такой выбор α_n не дает сходимости к какому-либо иррациональному значению α, величина f изменялась в широких пределах, принимая максимальные значения вблизи целых резонансов, где $1/\alpha_n$ — целое число. При исследовании области вблизи резонанса пятой гармоники ($\alpha_n = 1/5$) оказалось, что для $E = 1/12$ величина f падает ниже 1. В противоположность этому для $E = 1/8$ величина f остается больше 1, что означает разрушение инвариантных кривых в этой области. Позднее Грин [166] установил, что разрушение инвариантных кривых вблизи этого резонанса происходит при $E = 0{,}118 < 1/8$. Мы видим, что даже такие трудные для аналитического исследования задачи, как задача Хенона—Хейлеса, все же поддаются решению описанным выше методом.

§ 4.5. Метод ренормализации для двух резонансов

Перейдем теперь к описанию метода [117, 118], позволяющего исследовать разрушение инвариантных кривых между двумя произвольными резонансами. Этот метод основан на изучении структуры фазовой плоскости вблизи инвариантной кривой на все более мелком масштабе. При правильном выборе исследуемой инвариантной кривой можно определить таким путем переход к сильной (или «глобальной») стохастичности.

Основой метода является последовательная ренормализация исходного гамильтониана таким образом, что каждый новый гамильтониан сохраняет свою форму, но при этом описывает резонансы все более и более высокого порядка. На каждом этапе ренормализации принимаются во внимание только два наиболее важных резонанса, лежащие по обе стороны от исследуемой инвариантной кривой. Если параметр перекрытия этих резонансов стремится к нулю в процессе ренормализации, то инвариантная кривая существует.

Следуя Эсканде и Довейлу, рассмотрим гамильтониан для частицы, взаимодействующей с двумя волнами:

$$H_w = \frac{p^2}{2m} - V_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) - V_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t), \tag{4.5.1}$$

и введем новые переменные

$$\psi = k_1 x - \omega_1 t,$$
$$I = \frac{p/m - v_1}{v_2 - v_1}, \tag{4.5.2}$$
$$\Omega = k_1 (v_2 - v_1),$$

где $v_1 = \omega_1/k_1$ и $v_2 = \omega_2/k_2$ — фазовые скорости волн. В новых переменных гамильтониан (4.5.1) примет вид

$$H_1 = \frac{I^2}{2} - M \cos\psi - P \cos k(\psi - \Omega t), \tag{4.5.3}$$

где

$$k = \frac{k_2}{k_1} \tag{4.5.4}$$

равно отношению волновых векторов,

$$M = \frac{V_1}{m(v_2 - v_1)^2} \tag{4.5.5}$$

характеризует «основной» резонанс, а

$$P = \frac{V_2}{m(v_2 - v_1)^2} \tag{4.5.6}$$

— возмущение. Гамильтониан (4.5.3) описывает движение маятника, возмущенного волной с частотой Ω. Именно такая форма гамильтониана и будет сохраняться при ренормализации. Для невозмущенной системы ($P = 0$) с гамильтонианом $H_0(J)$ переменные действия J и фазы θ определяются формулами (1.3.10) и (1.3.11), а частота вращения $\omega(J)$ — соотношением (1.3.13). В предельном случае равномерного вращения ($M = 0$)

$$\omega(J) = J = I.$$

Исследуем теперь условия существования инвариантной кривой с обратным числом вращения

$$\frac{1}{\alpha} = Q(J) = \frac{k\Omega}{\omega(J)} \tag{4.5.7}$$

в присутствии возмущения. При этом гамильтониан принимает вид

$$H = H_0(J) - P\cos k[\psi(J, \theta) - \Omega t]. \tag{4.5.8}$$

В случае вращения

$$\psi = \theta + \chi(J, \theta),$$

где χ — периодично по θ с периодом 2π и выражается через эллиптические функции. Это позволяет разложить H в ряд Фурье

$$H = H_0(J) - P\sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(J)\cos[(k+n)\theta - k\Omega t]. \tag{4.5.9}$$

Вторичные резонансы между гармониками частоты вращения $\omega(J_n)$ и основной частотой возмущения $k\Omega$ удовлетворяют условию

$$(k+n)\omega(J_n) - k\Omega = 0, \tag{4.5.10}$$

причем для них

$$Q_n = \frac{k\Omega}{\omega(J_n)} = k + n. \tag{4.5.11}$$

На рис. 4.11 приведен пример таких резонансов ($k = 2$) как в исходных переменных I, ψ, так и в переменных J, θ. Центр основного M-резонанса расположен при $J_m = 0$, а режим вращения фазы ψ начинается выше его сепаратрисы для $J > J_s = 4\sqrt{M}/\pi$. Возмущающий P-резонанс ($n = 0$) расположен около $J_p \approx I$ (точнее, $\omega(J_p) = \Omega$). На рисунке также приведено несколько вторичных резонансов с $n \geqslant 1$ [см. (4.5.10)], гармоника которых по θ равна $Q_n = k + n$ [см. (4.5.9)].

Рассмотрим инвариантную кривую вблизи $J = J_0$, расположенную между резонансами M и P, с

$$Q(J_0) = \frac{k\Omega}{\omega(J_0)}. \tag{4.5.12}$$

Пусть[1)]

$$Q > k + 1, \tag{4.5.13}$$

так что кривая лежит между вторичными резонансами n и $n - 1$ (см. рис. 4.11), где $n > 1$ — целая часть

$$z = Q - k = n + \delta k, \tag{4.5.14}$$

а $\delta k = \{z\}_f$ — дробная часть z. В дальнейшем нам будет удобнее задавать n и δk, а не Q.

[1)] Если же $Q < k + 1$, то, переобозначив резонансы в (4.5.1), получим $Q > k + 1$.

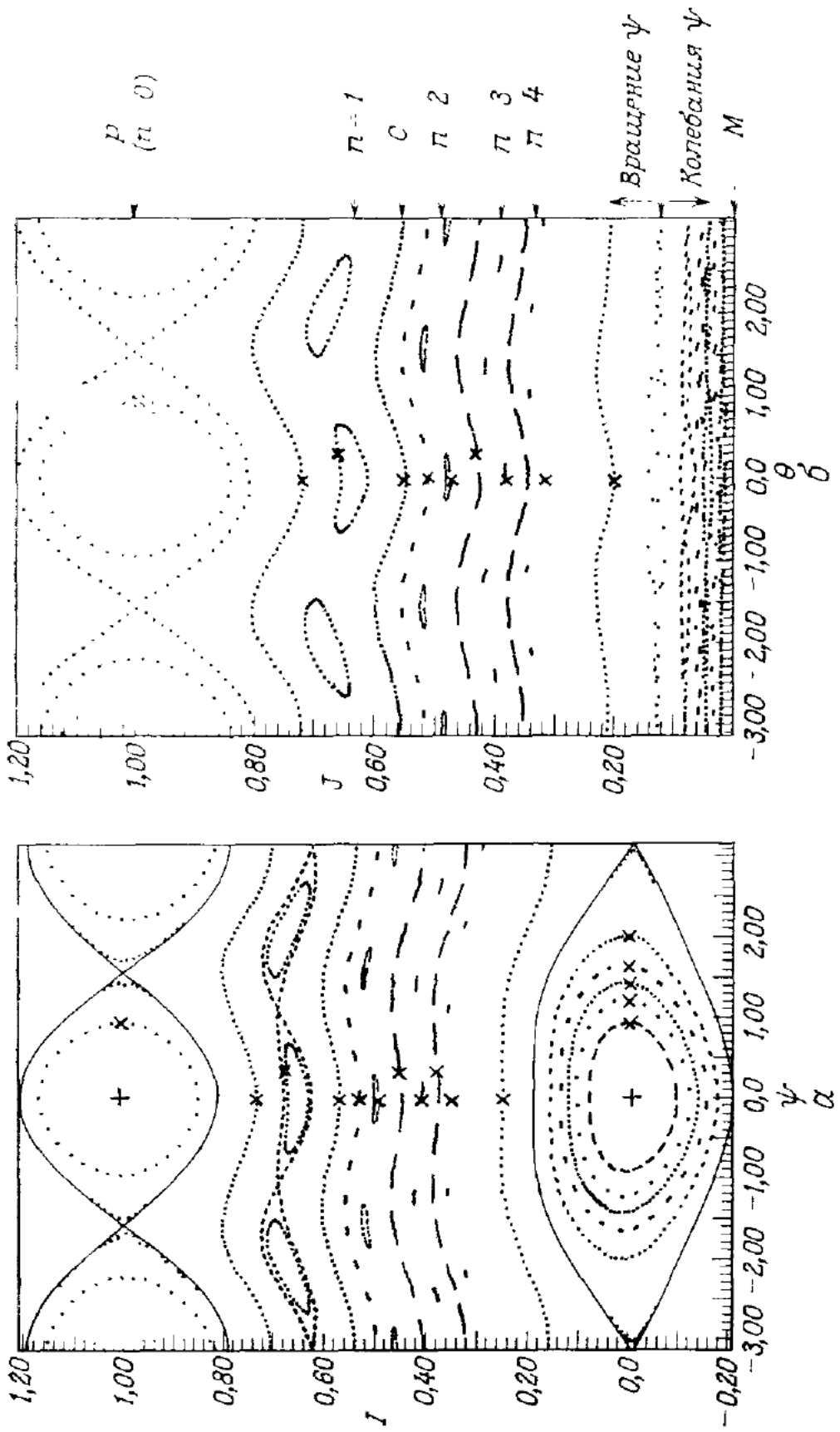


Рис. 4.11. Поверхность сечения системы (4.5.3) с двумя резонансами $(M; P)$ и параметрами $X/Y = 1$, $S = 0{,}4$, $k = 2$, $\Omega = 1$ (по данным работы [117]).

а — в исходных переменных I, ψ; *б* — в переменных J, θ; C — инвариантная кривая. Горизонтальная стрелка справа указывает значение J_s.

Для получения ренормализованного гамильтониана, соответствующего значению Q, пренебрежем в (4.5.9) всеми вторичными резонансами, кроме n и $n+1$. Так как рассматриваемая система не вырождена, то изменение переменной действия мало (см. п. 2.4а), и можно разложить H_0 по $\Delta J = J - J_0$ до квадратичных членов включительно:

$$H \approx H_0(J_0) + \omega(J_0)\Delta J + \frac{1}{2} G(J_0)(\Delta J)^2 -$$
$$- PU_n(J_0)\cos[(k+n)\theta - k\Omega t] - PU_{n+1}(J_0)\cos[(k+n+1)\theta - k\Omega t], \tag{4.5.15}$$

где G — обычный параметр нелинейности:

$$G = \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2}\right)_0. \tag{4.5.16}$$

Выберем в качестве основного резонанса $\overline{M}$ наиболее близкий к Q вторичный резонанс и обозначим оставшийся резонанс через $\overline{P}$. Произведем каноническое преобразование к таким новым переменным $\overline{I}$, $\overline{\psi}$, чтобы ренормализованный гамильтониан

$$\overline{H} = \frac{\overline{I}^2}{2} - \overline{M}\cos\psi - \overline{P}\cos\bar{k}(\overline{\psi} - \overline{\Omega}t) \tag{4.5.17}$$

принял вид исходного (4.5.3). При этом

$$\overline{\psi} = (k+n+\lambda)\theta - k\Omega t, \tag{4.5.18}$$

$$\overline{\Omega} = \frac{(2\lambda - 1)k\Omega}{(k+n+1-\lambda)}, \tag{4.5.19}$$

$$\bar{z} \equiv \bar{n} + \delta\bar{k} = \frac{(1-\lambda-\delta k)}{(\delta k - \lambda)}, \tag{4.5.20а}$$

$$\bar{k} = \frac{(k+n+1-\lambda)}{(k+n+\lambda)}, \tag{4.5.20б}$$

$$\overline{M} = PU_{n+\lambda}\beta^2 G, \tag{4.5.20в}$$

$$\overline{P} = PU_{n+1-\lambda}\beta^2 G, \tag{4.5.20г}$$

где снова $\bar{n}$ и $\delta\bar{k}$ — целая и дробная части

$$\bar{z} = \overline{Q} - \bar{k}, \tag{4.5.21}$$

$\lambda(\delta k)$ — единичная ступенчатая функция:

$$\lambda(\delta k) = \begin{cases} 0, & \delta k < \frac{1}{2}, \\ 1, & \delta k \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.5.22}$$

и

$$\beta = \frac{(k+n)(k+n+1)}{k}.$$

Уравнения (4.5.20) определяют ренормализационную группу $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}:(\delta k,\ n,\ k,\ M,\ P)\to(\overline{\delta k},\ \overline{n},\ \overline{k},\ \overline{M},\ \overline{P}),$$

т. е. отображение в пространстве параметров, которое допускает последовательные итерации. Аналитическое исследование этого пятимерного (негамильтонова) отображения связано с большими трудностями. Эсканде и Довейл замечают, что $\overline{\delta k}$ и $\overline{n}$ зависят только от δk, и исследуют неподвижные точки одномерного отображения

$$\overline{\delta k} = \left\{\frac{(1-\lambda-\delta k)}{(\delta k-\lambda)}\right\}_f, \tag{4.5.23}$$

которое получается из (4.5.20а). Для неподвижных точек δk_n^λ имеем

$$\delta k_n^0 = \frac{1}{2}\left((n^2+2n+5)^{1/2}-n-1\right) = [n+1,\ n+1,\ n+1,\ \ldots], \tag{4.5.24а}$$

$$\delta k_n^1 = \frac{1}{2}\left((n^2+4n)^{1/2}-n\right) = [1,\ n,\ 1,\ n,\ \ldots], \tag{4.5.24б}$$

где скобки [ ] означают разложение в непрерывную дробь. В этих неподвижных точках с

$$Q = Q_n^\lambda = k+n+\delta k_n^\lambda \tag{4.5.25}$$

отображение $\mathcal{T}$ переходит в трехмерное отображение

$$\mathcal{M}_n^\lambda:(k,\ X,\ Y)\to(\overline{k},\ \overline{X},\ \overline{Y}),$$

где $X = 2\sqrt{M}/\Omega$ и $Y = 2\sqrt{P}/\Omega$ имеют смысл относительной полуширины резонансов. Отображение $\mathcal{M}_n^\lambda$ имеет две притягивающие точки: $(k_n^\lambda,\ 0,\ 0)$ и $(k_n^\lambda,\ \infty,\infty)$ [117], где k_n^λ — устойчивая неподвижная точка одномерного отображения (4.5.20б). Подставляя $\overline{k} = k = k_n^\lambda$ в (4.5.20б) и используя (4.5.24), получаем для устойчивого (положительного) корня:

$$k_n^\lambda = \delta k_n^\lambda + 1 - \lambda. \tag{4.5.26}$$

Если итерации отображения $\mathcal{M}_n^\lambda$ для начальных $(k,\ X,\ Y)$ и выбранного n (и соответствующего ему λ) сходятся к первой притягивающей точке, то значения X и Y в процессе ренормализации стремятся к нулю и инвариантная кривая должна существовать. Если же итерации сходятся ко второй притягивающей точке, то инвариантная кривая, по-видимому, разрушена. На рис. 4.12 кривые $Y(X)$ показывают границу между двумя областями притяжения при фик-

сированном k. При заданном отношении X/Y эти кривые дают максимальное (в зависимости от n и λ, а следовательно, и от Q_n^λ) значение параметра перекрытия резонансов $S = X + Y$, для которого между резонансами M и P еще существует инвариантная кривая. Цифры в скобках указывают значения n, для которых

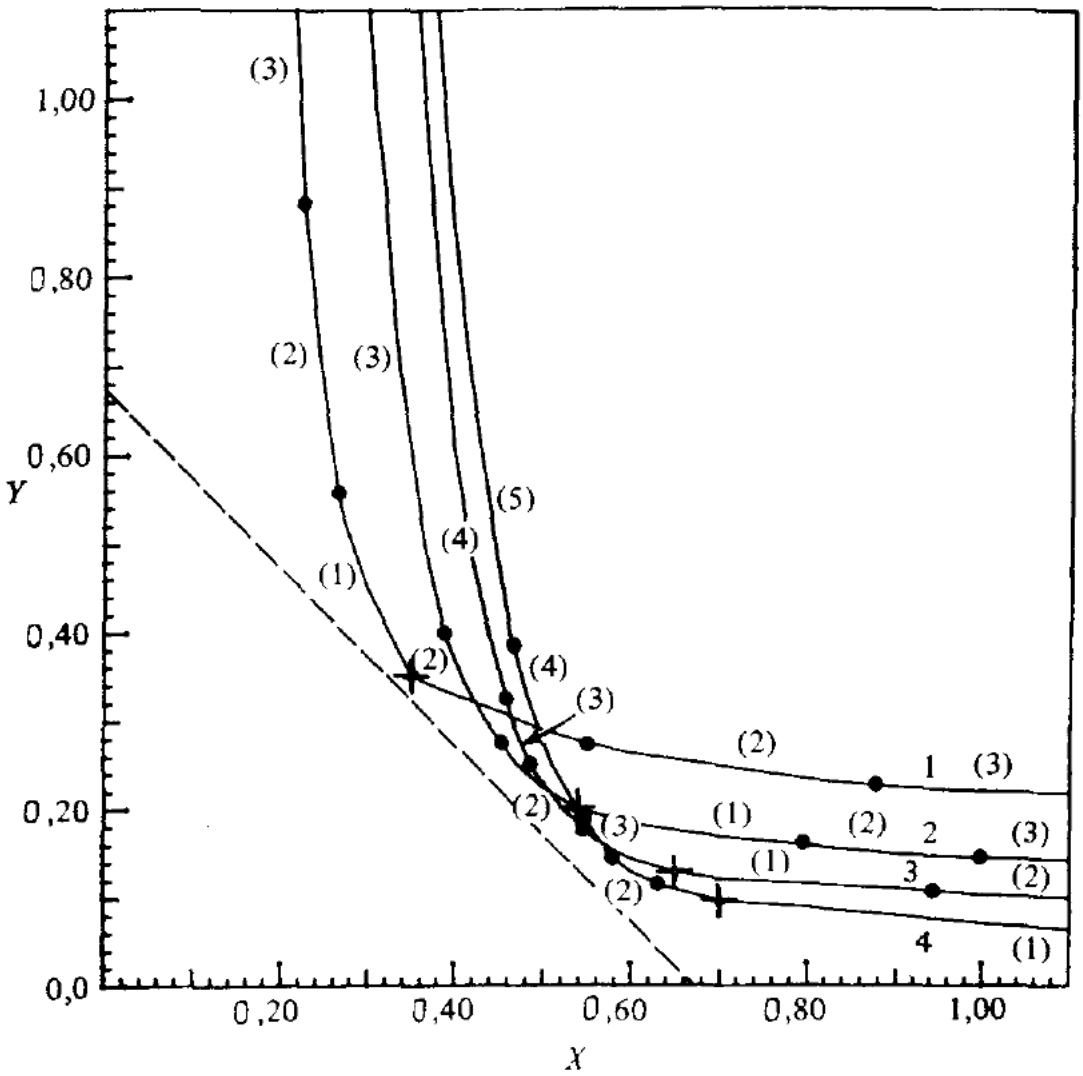


Рис. 4.12. Зависимость Y от X для $\lambda = 1$ и $k = 1, 2, 3, 4$ (по данным работы [117]).

Числа в круглых скобках дают значения n.

достигается максимум S. Слева от крестов на каждой из кривых величина Q_n^λ определяется согласно (4.5.25), а справа резонансы M и P меняются местами, поэтому вместо (4.5.25) имеем

$$Q_n^\lambda = k + (n + \delta k_n^\lambda)^{-1}.$$

Кривые $Y(X)$ непрерывно зависят от k, например, кривая с $k = 3/2$ расположена примерно посередине между кривыми с $k = 1$ и $k = 2$. Можно показать, что (k, X, Y) и $(1/k, Y, X)$ определяют одну и ту же систему. Поэтому рис. 4.12 представляет также слу-

чан с $k = 1/2$; $1/3$; $1/4$. Для сравнения пунктирная прямая показывает правило двух третей [1]): $S = 2/3$.

Эсканде и Довейл сравнили свои теоретические предсказания для границы стохастичности с результатами численного моделирования системы (4.5.3). Для X/Y в интервале 1—5 и k в интервале $1 \div 4$ предсказанные критические значения S оказались на $3 \div 10$ % ниже численных [2]). Было проведено также сравнение с результатами Грина для стандартного отображения, гамильтониан которого можно записать в виде ($k = 1$; $\Omega = 1$):

$$H = \frac{I^2}{2} - \frac{S^2}{16} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(\psi - mt). \tag{4.5.27}$$

Критическое значение Грина $K = 0{,}9716$ соответствует $S = 2\sqrt{K}/\pi = 0{,}6275$. Если оставить только два резонанса, так что

$$H = \frac{I^2}{2} - \frac{S^2}{16} \cos\psi - \frac{S^2}{16} \cos(\psi - t), \tag{4.5.28}$$

то из данных на рис. 4.12 (для $X = Y$ и $k = 1$) получаем $S = 0{,}70$ или $K = 1{,}21$ при

$$Q = Q_1^1 = 2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \qquad \alpha = \frac{1}{Q} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \alpha_g.$$

Это — одна из двух инвариантных кривых «золотого сечения», найденных Грином. Как и ожидалось, критическое значение S (или K) для двух резонансов больше, чем для отображения, которое имеет бесконечное число резонансов. Численное моделирование системы (4.5.28) дает $S = 0{,}74$. Это не противоречит полученному на рис. 4.12 значению $S = 0{,}70$, если учесть, что точность численного моделирования непрерывной системы значительно хуже, чем для отображения.

Хотя описанный метод ренормализации и дает достаточно точное значение границы стохастичности, он является приближенным. Основная погрешность связана с тем, что на каждом шаге ренормализации учитываются только два из бесконечного числа вторичных резонансов. Это ясно видно из сравнения системы (4.5.27) с бесконечным числом резонансов и (4.5.28) с двумя резонансами. В этом крайнем случае влияние дополнительных резонансов приводит к заметному снижению критического значения с $S = 0{,}74$ до $S = 0{,}63$. Другие источники ошибок, такие, как разложение только до квадратичных членов в (4.5.15) или учет только некоторых значений Q_n^λ, менее существенны.

---

[1]) Существенно новый эффект, обнаруженный с помощью ренормализации, состоит в значительном повышении критического параметра перекрытия S при $X \gg Y$ или $X \ll Y$. Это связано с «отталкиванием» слабого резонанса сильным (подробнее см. в [117, 464]).— *Прим. ред.*

[2]) См. примечание редактора на с. 248.— *Прим. ред.*

Обобщение метода на автономные системы с двумя степенями свободы и амплитудами M и P, зависящими от импульсов, а также на области внутри резонансов, является относительно несложным [118]. Последнее обобщение позволит по-новому исследовать бифуркации периодических траекторий.

§ 4.6. Вариационные методы

Опишем теперь вкратце предложенный Персивалем [328, 330, 331] метод нахождения инвариантного тора, когда он существует. Метод основан на некотором вариационном принципе, похожем на примененный в п. 2.6б в случае периодических траекторий. Здесь также удобно использовать уравнения Лагранжа [330, 331, 228].

Следуя Персивалю [331], рассмотрим лагранжиан $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ автономной системы с N степенями свободы. Зададим инвариантный тор с помощью вектора частот $\boldsymbol{\omega}$, а траекторию на нем — с помощью координат $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\theta})$, где $\boldsymbol{\theta}$ — угловые переменные на торе. Тогда вариационный принцип можно сформулировать в виде

$$\delta\left\langle L\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}}}{\partial\boldsymbol{\theta}},\quad \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}}\right)\right\rangle = \delta\langle L\rangle = 0, \tag{4.6.1}$$

причем $\boldsymbol{\omega}$ при варьировании остается фиксированным. Здесь $\boldsymbol{\omega}\cdot\partial\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}}/\partial\boldsymbol{\theta} = \dot{\boldsymbol{q}}$, а символ $\langle\ \rangle$ означает усреднение по всем угловым переменным. Следует обратить внимание на близкое соответствие между выражениями (4.6.1) для инвариантного тора и (2.6.25) для периодической траектории. Выполняя варьирование, получаем уравнения Лагранжа:

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = 0. \tag{4.6.2}$$

Если $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\theta})$ является решением (4.6.2), то $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{\theta}_0)$ определяет на торе траекторию с начальной координатой $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\theta}_0)$ и скоростью $\boldsymbol{\omega}\cdot\partial\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}}/\partial\boldsymbol{\theta}_0$.

При численном решении задачи разлагаем $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}}$ в многомерный ряд Фурье по угловым переменным

$$\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\boldsymbol{m}} Q_{\boldsymbol{m}} \exp(i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\theta}) \tag{4.6.3}$$

и оставляем некоторое конечное число членов. Подставляя (4.6.3) в (4.6.1) и проводя варьирование по коэффициентам Фурье, получаем систему алгебраических уравнений для $Q_{\boldsymbol{m}}$, которую можно решить итерированием. Метод решения аналогичен описанному в п. 2.6б, и мы не будем его здесь повторять.

Этот метод применялся Персивалем и его учениками к некоторым нелинейным задачам молекулярной динамики, в частности

для вычисления квазиклассических колебательных уровней энергии многоатомных молекул [332, 333, 329]. Персиваль [331] также использовал этот метод при нахождении перехода к глобальной стохастичности для стандартного отображения. Он получил, что инвариантная кривая с $\alpha = \alpha_g$ разрушается при $K = 0{,}9716$. При этом критерием разрушения служила расходимость итераций для коэффициентов Фурье. Хотя полученное им значение K находится в прекрасном согласии с результатом Грина, Персиваль отмечает, что расходимость итераций может объясняться и появлением резонансных знаменателей. Подробности этих исследований можно найти в цитированных выше работах.

* § 4.7. Заключение

В табл. 4.2 сравниваются различные критерии перехода от *локальной* к *глобальной* стохастичности для стандартного отображения. Критерии расположены в порядке возрастания их эффективности. Поскольку не существует полной аналитической теории перехода к стохастичности, то чем эффективнее критерий, тем более существен в нем элемент численного анализа, необходимого для получения критического значения K. Поэтому все критерии представлены также через более физическую характеристику — число вращения $\alpha_0 = 1/Q_0$ для целого резонанса [1]), которое легко определяется как численно, так и аналитически. Тот факт, что переход к глобальной стохастичности почти точно совпадает с $\alpha_0 = 1/6$, может помочь более глубокому пониманию этого явления. Для стандартного отображения критерий $\alpha_0 = 1/6$ приводит с помощью (4.1.31) к критическому значению параметра перекрытия

$$\frac{2\Delta I_{\text{макс}}}{\delta I} \approx \frac{2}{3}. \tag{4.7.1}$$

Если перекрываются резонансы несколько разной ширины, как, например, для отображения Улама, то «правило двух третей» (4.7.1) можно обобщить следующим образом:

$$\frac{(\Delta I_{\text{макс}})_1 + (\Delta I_{\text{макс}})_2}{\delta I_{1,2}} \approx \frac{2}{3}. \tag{4.7.2}$$

Для отображения Улама численно найденная граница стохастичности на рис. 3.15 согласуется с условием (4.7.2). Если же соседние резонансы значительно отличаются по ширине, то оценки, полученные для стандартного отображения, неприменимы. В случае

[1]) Это утверждение спорно, поскольку α_0 характеризует центр резонанса, тогда как граница стохастичности определяется окрестностью сепаратрисы. Приближенное совпадение критического K с $Q_0 = 6$ остается необъясненным и справедливо, возможно, только для стандартного отображения. Во всяком случае, при перекрытии двух резонансов (§ 4.5) $Q_0 = 2k/X$ и изменяется в широких пределах (см. рис. 4.12).— *Прим. ред.*

Таблица 4.2. Граница стохастичности для стандартного отображения [а)]

Критерий	K	Q_0 [б)]
1. Линейная устойчивость целых резонансов	4	2
2. Перекрытие целых резонансов	$(\pi/2)^2$	3—4
3. Уточненный критерий перекрытия	1,2в)	5—6
4. Перекрытие вторичных резонансов	1,2	5—6
5. Ренормализация для двух резонансов [г)] ($\alpha=\alpha_g$)	1,2	5—6
6. Численные данные для стандартного отображения и отображения Улама	1,0	6
7. Вариационный метод ($\alpha=\alpha_g$)	0,9716	6
8. Линейная устойчивость периодических точек с $\alpha_n \to \alpha_g$	0,9716	6

а) $I_{n+1}=I_n+K\sin\theta_n$; $\theta_{n+1}=\theta_n+I_{n+1}$.

б) Q_0—номер гармоники вторичного резонанса;

$\cos(2\pi/Q_0)=1-K/2$.

в) 1,06 с эвристическими поправками [70].

г) α—число вращения «последней» (самой устойчивой) инвариантной кривой между целыми резонансами; $\alpha_g=(\sqrt{5}-1)/2$ — «золотое сечение».

двух резонансов достаточно эффективную оценку можно получить графически из рис. 4.12. Из данных на рисунке можно найти также число вращения $\alpha \approx (k+n)^{-1}$ (вообще говоря, $\alpha \neq \alpha_g$), а значит, и значение J для последней инвариантной кривой.

Результаты, полученные для отображения Улама с двумя гармониками возмущения произвольной амплитуды [202] (см. 6.5.1), показывают, что даже в случае значительной разницы амплитуд правило двух третей «работает» удивительно хорошо. Критерий двух резонансов (рис. 4.12) в этом случае также дает вполне хорошие результаты. Однако, поскольку в системе имеется много различных резонансов, нужно очень аккуратно выбирать в интересующей нас области фазового пространства два наиболее существенных из них.

Глава 5

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И ДИФФУЗИЯ

§ 5.1. Введение

В области глобальной стохастичности, где не существует ограничивающих движение инвариантных поверхностей, полное описание динамики системы, как правило, невозможно. В этом случае, однако, можно использовать статистическое описание и исследовать эволюцию средних величин, а не отдельных траекторий [62, 424]. Такой подход лежит в основе статистической механики (см., например, [327]).

Методы статистического описания, обсуждаемые в этой главе, существенно опираются на ряд математических результатов, рассмотрение которых выходит за рамки этой монографии. Однако определенное представление об этих результатах все же необходимо. Математическая сторона дела изложена в книге Арнольда и Авеза [14] [1]). Мы же обсудим эти вопросы в более доступной форме (§ 5.2). Там же кратко затронуты вопросы «случайности в детерминированных системах» и влияния ошибок округления на результаты численного моделирования хаотического движения. В качестве физического введения в эту область можно рекомендовать обзоры Форда [133], Берри [26] и Хеллемана [180] [2]).

Перечислим некоторые основные вопросы, возникающие при исследовании стохастичности в динамических системах. Каким образом можно однозначно определить, что изолирующие интегралы движения отсутствуют? Какие величины необходимы для описания стохастического движения? Насколько численное моделирование соответствует поведению реальной системы? При каких условиях можно ограничиться изучением диффузии только в пространстве действий? Какое влияние на диффузию оказывает внешний шум? И наконец, как изменяются все эти свойства при увеличении числа степеней свободы?

В течение главным образом последнего десятилетия эти вопросы изучались рядом исследователей. Среди них Хенон и Хейлес, Заславский, Чириков с сотр., Фрёшле, Форд с сотр., Гальгани с сотр. и многие другие. В своей пионерской работе [188] по численному изучению стохастичности для двух связанных осцилляторов Хенон и Хейлес писали: «Проверка показала, что . . . в области,

---

[1]) См. также [486].— *Прим. ред.*

[2]) См. также [340, 444, 481, 488].— *Прим. ред.*

заполненной [инвариантными] кривыми, расстояние [между близкими траекториями] растет медленно, приблизительно линейно [со временем], а . . . в эргодической области это расстояние возрастает быстро, приблизительно экспоненциально». Дальнейшие исследования подтвердили этот результат более строго, связав экспоненциальную расходимость траекторий с энтропией Колмогорова и характеристическими показателями Ляпунова. Вычисление этих характеристик движения стало стандартным методом проверки на стохастичность. Эти вопросы будут подробно рассмотрены в § 5.2 и 5.3.

Для многих задач важной характеристикой движения является функция распределения в пространстве переменных действия. Исследование эволюции распределения значительно упрощается, если ее описание удается свести к диффузионному уравнению. Такой подход использовался Либерманом и Лихтенбергом [274] и другими авторами и будет описан в § 5.4.

Поправки к коэффициентам переноса, возникающие из-за нарушения приближения хаотических фаз, можно учесть с помощью представления Фурье (п. 5.4г). Воздействие внешнего шума на динамику системы рассмотрено в § 5.5.

§ 5.2. Основные понятия

* 5.2а. Эргодичность

Для отображения T среднее по времени значение любой функции $f(\boldsymbol{x})$ в фазовом пространстве определяется следующим образом:

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n \boldsymbol{x}). \tag{5.2.1}$$

Можно показать, что для почти всех $\boldsymbol{x}$: а) функция $\bar{f}(\boldsymbol{x})$ существует; б) функция $\bar{f}$ является *инвариантной*, т. е. не изменяется вдоль траектории:

$$\bar{f}(T^n \boldsymbol{x}) = \bar{f}(\boldsymbol{x}),$$

и в) фазовые средние функций $\bar{f}(\boldsymbol{x})$ и $f(\boldsymbol{x})$ совпадают. Фазовое среднее определяется соотношением

$$\langle f \rangle = \int_{\mathcal{M}} f(\boldsymbol{x}) d\mu, \tag{5.2.2}$$

где $\mathcal{M}$ — фазовое пространство системы размерности M, а μ — инвариантная мера, т. е. $d\mu = P(\boldsymbol{x})\, d^M x$, где $P(\boldsymbol{x})$ — инвариантное распределение. Для гамильтоновых систем в канонических переменных $\boldsymbol{x}$ функция $P = 1$. Метод получения инвариантных распределений в диссипативных системах описан в § 7.3. Динамическая система называется эргодической, если для почти всех $\boldsymbol{x}$

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \langle f \rangle. \tag{5.2.3}$$

Из этого определения ясно, что для эргодической системы среднее по времени не может зависеть от $\boldsymbol{x}$. Из произвольности функции $f(\boldsymbol{x})$ следует, что эргодичность имеет место только в том случае, когда траектория попадает во все области фазового пространства, т. е. подходит сколь угодно близко к любой его точке бесконечное число раз. Отметим, что обратное утверждение неверно [1]). Если, например, система имеет инвариантные поверхности, то она не является эргодической и называется обычно *разложимой* [2]), хотя у нее могут быть и стохастические области.

Свойство эргодичности зависит от того, на каком подпространстве оно определено. Так, автономная гамильтонова система не может быть эргодической во всем фазовом пространстве из-за точного сохранения энергии. Однако можно говорить о ее эргодичности на энергетической поверхности. Если существуют и другие интегралы движения, то система может быть эргодической только на подпространстве, определяемом всеми этими интегралами. В некотором смысле эргодичность оказывается универсальным свойством, и основная задача сводится к определению подпространства, на котором она существует.

Рассмотрим свойство эргодичности на примере движения на торе, задаваемом отображением

$$T(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \omega_1,\ \theta_2 + \omega_2), \qquad \mathrm{mod}\, 2\pi, \tag{5.2.4}$$

где $\alpha = \omega_1/\omega_2$ — иррациональное число. Покажем, что в этом случае движение является эргодическим на торе. Для этого разложим временно́е среднее $\bar{f}(\boldsymbol{x})$ в двойной ряд Фурье и сравним коэффициенты разложения функции $\bar{f}(\boldsymbol{x})$:

$$a_{\boldsymbol{k}} = \int\limits_{\mathcal{M}} \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\,\bar{f}(\boldsymbol{x})\,d\mu$$

и ее образа $\bar{f}(T\boldsymbol{x})$:

$$b_{\boldsymbol{k}} = \int\limits_{\mathcal{M}} \exp\left[-i\boldsymbol{k}\cdot(\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\omega})\right]\bar{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})\,d\mu = \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega})\,a_{\boldsymbol{k}},$$

где $\tilde{\boldsymbol{x}} = T\boldsymbol{x}$. Из инвариантности функции $\bar{f}$ следует, что для любого $\boldsymbol{k} \neq 0$ коэффициенты $a_{\boldsymbol{k}} = b_{\boldsymbol{k}} = 0$, если $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega} \neq 0$. Отсюда получаем, что для иррационального α ($\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega} \neq 0$) только $a_0 \neq 0$, и функция $\bar{f}(\boldsymbol{x})$ есть константа, как и требуется для эргодичности.

Физически отображение (5.2.4) соответствует отображению поворота на поверхности сечения $\theta_2 = \mathrm{const}$ (индекс 1 опущен):

$$J_{n+1} = J_n, \qquad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha. \tag{5.2.5}$$

---

[1]) Интересным примером подобных всюду плотных, но не эргодических траекторий является диффузия Арнольда (см. п. 6.1а).— *Прим. ред.*

[2]) На эргодические компоненты (см. ниже).— *Прим. ред.*

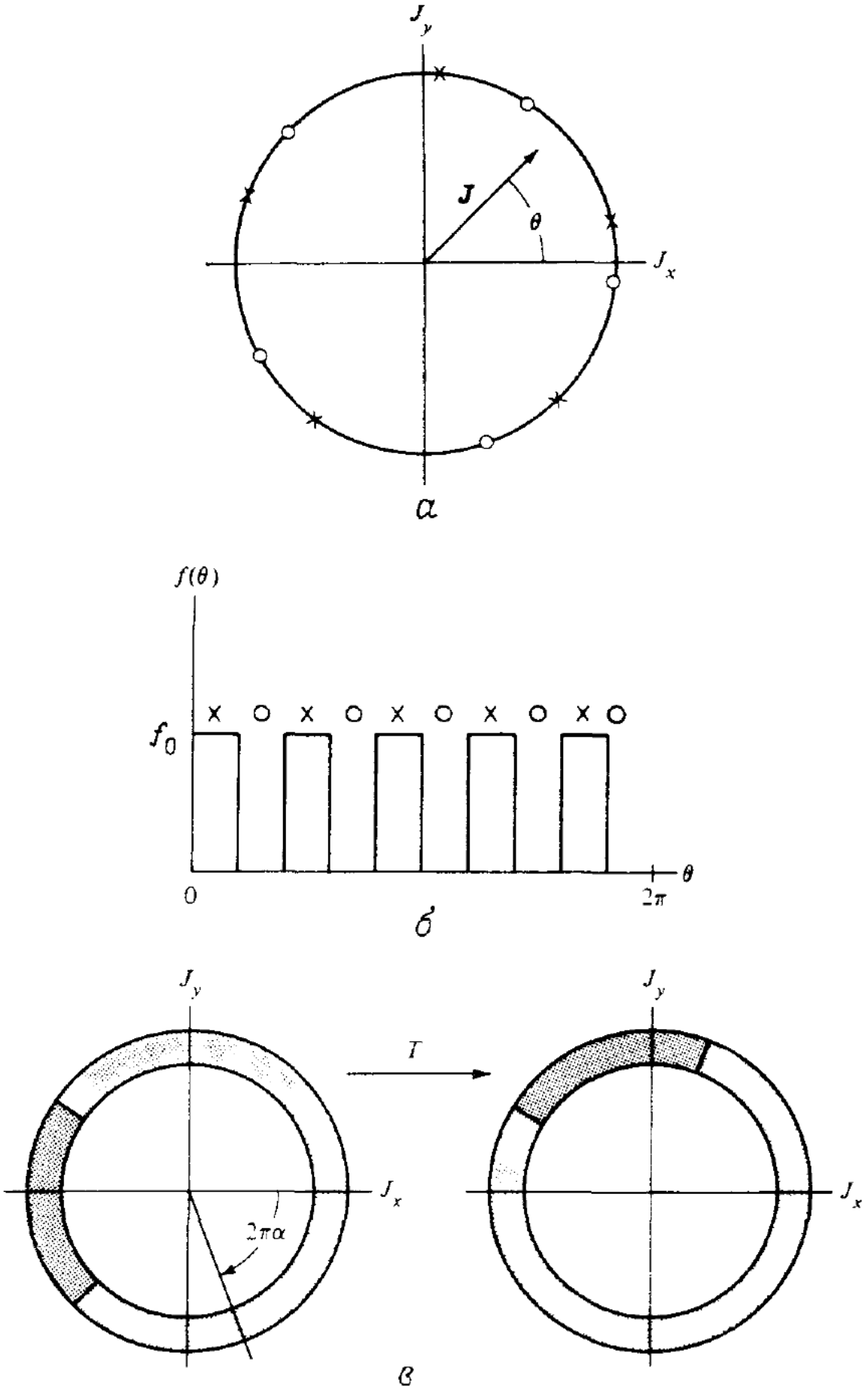


Рис. 5.1. Эргодические свойства отображения поворота.

а — две периодические траектории (× и ○) с рациональным числом вращения $\alpha(J) = 2/5$; эргодичность на инвариантной кривой $J = \text{const}$ отсутствует; *б* — начальная функция распределения $f(\theta, 0)$, для которой временное среднее $\overline{f(\theta, t)}$ зависит от θ; *в* — эргодическое движение на инвариантной кривой с иррациональным числом вращения α, однако «серые» и «темные» траектории не перемешиваются.

Оно изображено на рис. 5.1, *а* для $\alpha = 1/5$ (рациональное число) и двух начальных условий (кружки и кресты). Выбрав $f(\theta)$, как показано на рис. 5.1, *б*, легко видеть, что $\bar{f} = 0$ для кружков и $\bar{f} = f_0$ для крестов. Таким образом, движение в этом случае не эргодично. Для иррационального α траектория покрывает всю окружность и $\bar{f}(x) = \langle f \rangle = f_0/2$, т. е. движение является эргодическим на окружности.

Отображение (5.2.4) соответствует движению интегрируемой гамильтоновой системы на инвариантном торе (θ_1, θ_2). Можно сказать, что это движение эргодично на торе, но не эргодично во всем фазовом пространстве. Из рассмотренного примера квазипериодического движения ясно, что эргодичность еще не означает стохастичность. С другой стороны, наше определение эргодичности позволяет считать эргодическим стохастическое движение и в некоторой ограниченной области фазового пространства, например в стохастическом слое. Однако такое определение может оказаться не очень удобным в том случае, когда область стохастичности содержит много островков устойчивости [1]).

* 5.2б. Характеристические показатели Ляпунова

Показатели Ляпунова играют важную роль в теории гамильтоновых и диссипативных динамических систем. Они дают вычислимую количественную меру степени стохастичности. Помимо этого, существует тесная связь между показателями Ляпунова и другими характеристиками случайности, такими, как энтропия Колмогорова (п. 5.2в) или фрактальная размерность (п. 7.1в).

Грубо говоря, показатели Ляпунова характеризуют среднюю скорость экспоненциальной расходимости близких траекторий. Такая характеристика стохастичности была введена Хеноном и Хейлесом [188] [2]) и в дальнейшем исследовалась Заславским и Чириковым [444], Фрёшле и Шейдекером [141—143] и Фордом [133].

Теория показателей Ляпунова [262] использовалась для анализа стохастического движения Оселедецем [323]. Связь показателей Ляпунова с энтропией Колмогорова рассматривалась Бенеттином и др. [19] и была установлена Песиным [334]. Метод вычисления показателей Ляпунова развит Бенеттином и др. [20] и описан в § 5.3. Здесь же мы обсудим их свойства, следуя в основном

[1]) Все эти разнообразные случаи охватываются общим понятием эргодической компоненты движения. Под эргодичностью же в физике понимается, как показывает само название, эргодичность на энергетической поверхности.— *Прим. ред.*

[2]) Речь идет об использовании этого свойства в численных экспериментах. Общие соображения о связи случайности с экспоненциальной неустойчивостью движения высказывались еще Пуанкаре [489]; эта связь была строго доказана в работах Хедлунда [490] и Хопфа [491] и широко использовалась Крыловым [241].— *Прим. ред.*

работам Бенеттина и др. [18—20]. Математические доказательства можно найти в цитированной литературе.

Пусть динамическая система задана уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(x), \qquad i = 1, \ldots, M. \tag{5.2.6}$$

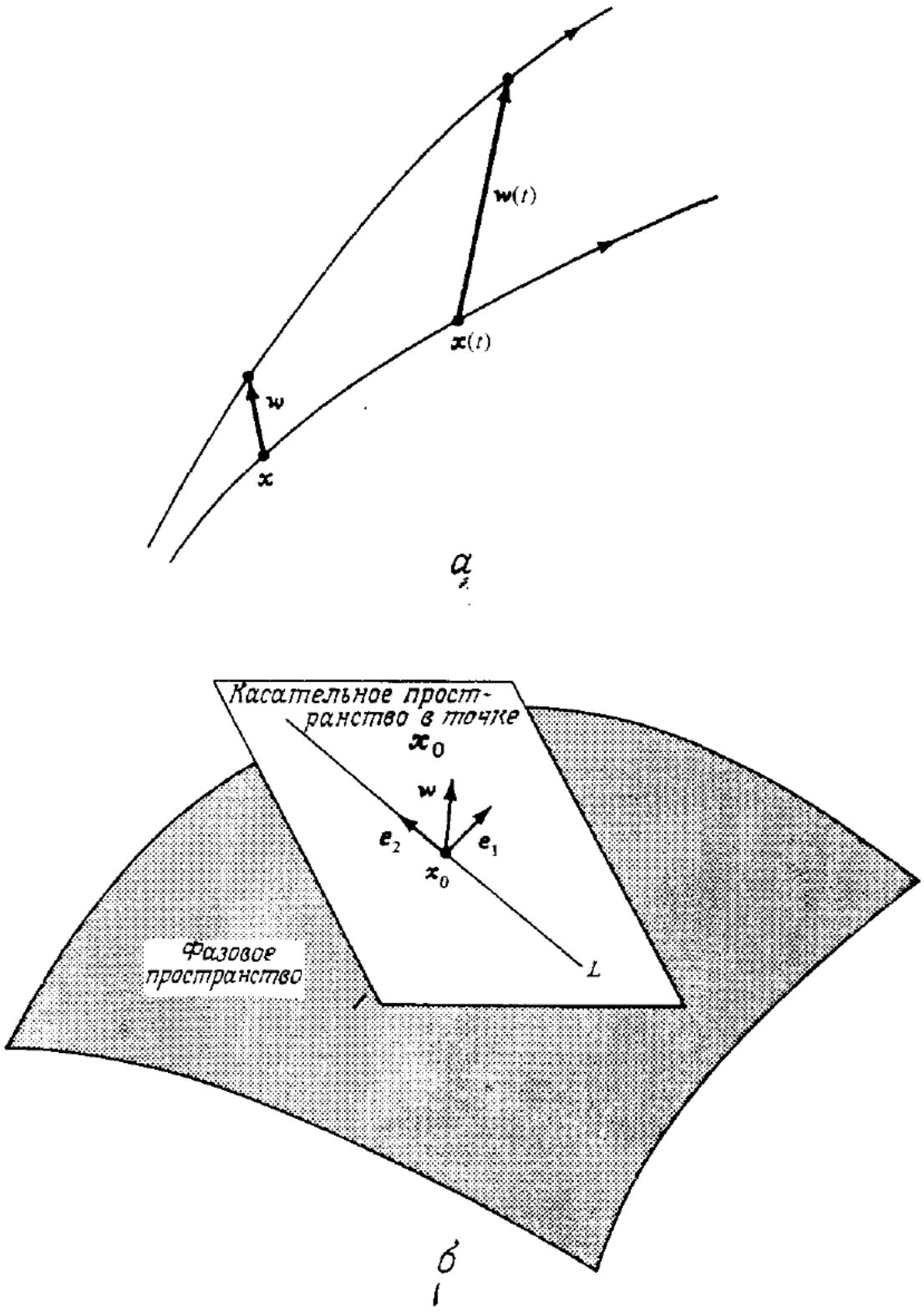


Рис. 5.2. Характеристические показатели Ляпунова (по данным работы [18]).

а — две близкие расходящиеся траектории; $\boldsymbol{w}(t) = \Delta \boldsymbol{x}(t)$ — касательный вектор; *б* — касательное пространство, построенное на собственных векторах $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ с показателями Ляпунова σ_1 и σ_2; для любого вектора $\boldsymbol{w}$, непараллельного $\boldsymbol{e}_2$, $\sigma(\boldsymbol{w}_0) = \sigma_1$, а для $\boldsymbol{w}$, параллельного $\boldsymbol{e}_2$, $\sigma(\boldsymbol{w}_0) = \sigma_2 < \sigma_1$.

Рассмотрим две близкие траектории с начальными условиями $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}_0$ (рис. 5.2, *а*). Их временна́я эволюция задает касательный вектор $\Delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ с длиной

$$d(\boldsymbol{x}_0, t) = |\Delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)|.$$

Для удобства введем обозначение $\boldsymbol{w} = \Delta\boldsymbol{x}$. Динамику $\boldsymbol{w}$ можно определить, линеаризуя уравнения (5.2.6):

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \mathsf{M}(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{w}, \tag{5.2.7а}$$

где

$$\mathsf{M} = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{5.2.7б}$$

— матрица Якоби для V. Введем среднюю скорость экспоненциальной расходимости близких траекторий:

$$\sigma(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w}_0) = \lim_{\substack{t\to\infty \\ d(0)\to 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{d(\boldsymbol{x}_0, t)}{d(\boldsymbol{x}_0, 0)}. \tag{5.2.8}$$

Можно показать, что предел скорости σ существует и она ограничена. Далее, существует полная система M фундаментальных решений $\{\boldsymbol{e}_i\}$ уравнений (5.2.7а), для каждого из которых скорость σ имеет определенное (вообще говоря, различное) значение:

$$\sigma_i(\boldsymbol{x}_0) = \sigma(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{e}_i). \tag{5.2.9}$$

Это и есть характеристические показатели Ляпунова. Они не зависят от выбора метрики фазового пространства [323], и их можно упорядочить по величине: $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_M$.

В частном случае периодической траектории уравнения (5.2.7) задают некоторое линейное отображение на периоде τ, которое можно записать в виде

$$\boldsymbol{w}_{n+1} = \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{w}_n. \tag{5.2.10}$$

Как было показано в § 3.3, матрица A имеет M собственных значений, вообще говоря, комплексных:

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_M|.$$

Обозначим соответствующие собственные векторы через $\boldsymbol{e}_i$. Тогда для $\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{e}_i$ из (5.2.10) следует

$$\boldsymbol{w}_n = \lambda_i^n \boldsymbol{e}_i. \tag{5.2.11}$$

Отсюда, согласно (5.2.8), получаем

$$\sigma(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{\tau} \ln|\lambda_i| = \sigma_i. \tag{5.2.12}$$

Кроме того, из (5.2.11) следует, что для

$$\boldsymbol{w}_0 = c_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + c_M\boldsymbol{e}_M$$

динамика вектора $\boldsymbol{w}_n$ определяется первым ненулевым коэффициентом c_i. Если, например, $c_1 \neq 0$, то $\sigma(\boldsymbol{w}_0) = \sigma_1$, а если $c_1 = 0$, но $c_2 \neq 0$, то $\sigma(\boldsymbol{w}_0) = \sigma_2$ и т. д. Иначе говоря, каждый показатель Ляпунова определяет скорость σ в некотором подпространстве с размерностью на единицу меньшей, чем предыдущий. Следовательно, для почти всех $\boldsymbol{w}$ значение $\sigma = \sigma_1$. Это свойство иллюстрируется на рис. 5.2, *б*.

Обобщение понятий собственных значений и собственных векторов на непериодические траектории было дано Оселедецем [323]. Возможность такого обобщения связана с тем, что непериодические траектории можно приближать периодическими с достаточно большим периодом.

Для любой непрерывной траектории, заданной дифференциальными уравнениями [например, (5.2.6)], по крайней мере один из показателей Ляпунова, соответствующий собственному вектору вдоль траектории, равен нулю. В случае гамильтоновой системы показатели обладают следующей симметрией:

$$\sigma_i = -\sigma_{2N-i+1}, \tag{5.2.13}$$

где $2N = M$, а N — число степеней свободы. Для периодической траектории это соотношение можно получить из симметрии собственных значений (3.3.21). Отсюда вытекает, в частности, что у гамильтоновой системы по крайней мере два показателя Ляпунова равны нулю. Однако на энергетической поверхности ($M = 2N-1$) один из них, соответствующий смещению перпендикулярно поверхности, отсутствует.

Обобщенные показатели Ляпунова. Показатели Ляпунова для векторов $\boldsymbol{w}$ называют также показателями первого порядка. Оселедец [323] обобщил это понятие [1]) для описания средней скорости экспоненциального роста p-мерного объема V_p, построенного на векторах $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_p$ ($p \leqslant M$). Тогда величина

$$\sigma^{(p)}(\boldsymbol{x}_0, V_p) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{V_p(\boldsymbol{x}_0, t)}{V_p(\boldsymbol{x}_0, 0)} \tag{5.2.14}$$

есть показатель Ляпунова порядка p. Оселедец [323], а также Бенеттин и др. [20] показали, что $\sigma^{(p)}(\boldsymbol{x}_0, V_p)$ выражается через сумму p показателей первого порядка. Аналогично тому как для почти всех $\boldsymbol{w}$ справедливо соотношение $\sigma(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w}) = \sigma_1(\boldsymbol{x}_0)$, так и для почти всех V_p величина $\sigma^{(p)}$ определяется суммой p наибольших показателей

$$\sigma^{(p)} = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p. \tag{5.2.15}$$

Это соотношение используется для численного определения пока-

[1]) Обобщенные показатели Ляпунова использовались и ранее, см., например, [378, 496].— *Прим. ред.*

зателей Ляпунова (см. § 5.3). При $p = M$ получаем среднюю скорость экспоненциального роста фазового объема:

$$\sigma^{(M)} = \sum_{i=1}^{M} \sigma_i(\boldsymbol{x}_0). \tag{5.2.16}$$

Для системы с инвариантной мерой (в частности, для гамильтоновых систем)

$$\sum_{i=1}^{M} \sigma_i(\boldsymbol{x}_0) = 0,$$

в то время как для диссипативной системы эта сумма должна быть отрицательной (см. § 7.1).

Отображения. В случае M-мерного отображения

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n) \tag{5.2.17}$$

выражение для $\sigma^{\text{от}}$ получается из (5.2.8) заменой t на n. Вместо этого можно ввести собственные значения $\lambda_i(n)$ матрицы

$$\mathsf{A}_n = [\mathsf{M}(\boldsymbol{x}_n) \cdot \mathsf{M}(\boldsymbol{x}_{n-1}) \ . \ . \ . \ \mathsf{M}(\boldsymbol{x}_1)]^{1/n}, \tag{5.2.18}$$

где $\mathsf{M} = \partial \boldsymbol{F}/\partial \boldsymbol{x}$ — матрица Якоби для $\boldsymbol{F}$. Тогда показатели Ляпунова равны

$$\sigma_i^{\text{от}} = \lim_{n\to\infty} \ln|\lambda_i(n)|. \tag{5.2.19}$$

Показатели Ляпунова для $(M-1)$-мерного отображения на поверхности сечения Пуанкаре пропорциональны показателям для непрерывной траектории в M-мерном фазовом пространстве:

$$\sigma_i^{\text{от}}(\boldsymbol{x}_0) = \bar{\tau}\sigma_i(\boldsymbol{x}_0), \tag{5.2.20}$$

где $i = 1, \ldots, M-1$ («лишний» показатель для траектории равен нулю). Коэффициент пропорциональности $\bar{\tau}$ равен среднему интервалу времени между последовательными прохождениями траектории через поверхность сечения. В случае автономной гамильтоновой системы ($M = 2N$) размерность отображения есть $M-2$, и, таким образом, исключаются оба нулевых показателя исходной системы.

5.2в. Основные свойства стохастичности

Перемешивание. Понятие перемешивания является по существу очень простым. Возьмем сосуд, содержащий, например, 20 % рома и 80 % пепси-колы, причем вначале распределение рома в сосуде произвольно, скажем, сплошной слой. Если теперь начать размешивать жидкость, то естественно ожидать, что после достаточно длительного размешивания любой сколь угодно малый объем жидкости будет содержать «приблизительно» 20 % рома. Формализация подобного процесса и приводит к понятию *перемешивания*.

Перемешивание подразумевает некоторое «огрубление» фазового пространства, т. е. исследование его малых, но конечных областей [1]).

Можно показать [14], что перемешивание влечет за собой эргодичность. Однако обратное неверно: из эргодичности не следует перемешивание. Это сразу видно на примере отображения на торе (5.2.4), как показано на рис. 5.1, *в*. Разделим траектории на две группы — «серые» и «темные». Ясно, что в процессе движения они будут сохранять свое относительное расположение даже при иррациональном α, когда каждая траектория покрывает весь тор. Это и означает отсутствие перемешивания.

При $t \to \infty$ система с перемешиванием приближается к равновесному состоянию: $f(\boldsymbol{x}) \to \langle f \rangle$. Покажем это на примере «отображения пекаря»

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x_n \\ y_n/2 \end{pmatrix}, & 0 < x_n < 1/2, \\ \begin{pmatrix} 2x_n - 1 \\ (y_n + 1)/2 \end{pmatrix}, & 1/2 \leqslant x_n < 1, \end{cases} \tag{5.2.21}$$

которое качественно обсуждалось в § 1.4. Следуя Форду [133] и Берри [26], покажем, что «огрубленная» функция распределения приближается к равновесной функции (константе). Из (5.2.21) получаем отображение для f:

$$f_{n+1}(x, y) = \begin{cases} f_n\left(\frac{x}{2}, \ 2y\right), & 0 < y < 1/2, \\ f_n\left(\frac{x+1}{2}, \ 2y - 1\right), & 1/2 \leqslant y < 1. \end{cases} \tag{5.2.22}$$

Так как f быстро расслаивается по y, то для огрубления f_n проведем усреднение по этой переменной:

$$g_n(x) = \int_0^1 f_n(x, y)\, dy.$$

Как мы увидим в § 5.4, это эквивалентно интегрированию по быстроосциллирующей фазе. Проведя усреднение для (5.2.22), получим

$$g_{n+1}(x) = \int_0^{1/2} f_n\left(\frac{x}{2}, \ 2y\right) dy + \int_{1/2}^{1} f_n\left(\frac{x+1}{2}, \ 2y - 1\right) dy =$$

---

[1]) Понятие «огрубление» относится к функции распределения, а не к фазовому пространству, которое в классической механике является непрерывным. Более того, эта непрерывность и есть источник случайности динамических траекторий (см. примечание редактора на с. 307). Правильнее было бы сказать, что перемешивание является интегральным, а не локальным свойством движения, которое формально определяется условием (см., например, [486]): $\langle f(T^n \boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x}) \rangle \to \langle f(\boldsymbol{x}) \rangle \langle g(\boldsymbol{x}) \rangle$ при $n \to \pm\infty$, где f, g — любые (неогрубленные) функции.— *Прим. ред.*

$$=\frac{1}{2}\left[g_n\left(\frac{x}{2}\right)+g_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]. \qquad (5.2.23)$$

Таким образом, отображение для огрубленной функции g сводится к усреднению g по двум половинам фазового квадрата. Это приводит в конце концов к однородной по x функции g, как и должно быть при перемешивании [1]).

Интуитивно ясно, что рассматривавшиеся в предыдущих параграфах стохастические системы являются перемешивающимися (в пределах стохастической компоненты движения). Однако это очень трудно строго доказать в конкретных случаях. Синаю [377] удалось сделать это для системы твердых шариков (см. п. 1.4а). Доказательство основано на рассеянии пучка траекторий при столкновении шариков (см. рис. 1.15, *а*). Хотя этот частный результат и не доказывает наше предположение о перемешивании для типичной системы, близкой к интегрируемой, однако он оправдывает подобные эмпирические обобщения, получаемые методом численного моделирования.

К-системы. К-системы называются по имени Колмогорова, который ввел это понятие в работе [230] [2]). Эти системы имеют положительную КС-энтропию (энтропию Колмогорова). КС-энтропия (по имени Крылова [241], Колмогорова [230] и Синая [376, 378]) определялась первоначально [230] посредством построения специального разбиения фазового пространства. В момент времени $t=0$ разделим пространство на множество $\{A_i(0)\}$ малых ячеек конечной меры и рассмотрим их эволюцию обратно по времени на единичном временно́м интервале [3]). В результате получим новое множество $\{A_i(-1)\}$. Каждый элемент пересечения этих двух множеств $B(-1)=\{A_i(0)\cap A_j(-1)\}$ имеет, как правило, меньшую меру, чем элемент $A_i(0)$. Продолжая этот процесс, построим элементы множества

$$B(-2)=\{A_i(0)\cap A_j(-1)\cap A_k(-2)\}$$

и т. д. Можно показать, что для того чтобы мера элемента $B(-t)$ экспоненциально уменьшалась при $t\to\infty$, должно выполняться условие

$$h_A(\{A_i(0)\})=-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{R_t}\mu[B_i(-t)]\ln\mu[B_i(-t)]>0,$$

---

[1]) Если переменные x канонические, что в данном примере выполняется.— *Прим. ред.*

[2]) Сам Колмогоров назвал их квазирегулярными, имея в виду свойства регулярного (типичного) случайного процесса. По поводу определения К-системы, или К-свойства движения см. примечание редактора на с. 301.— *Прим. ред.*

[3]) Эволюция крупноструктурной (огрубленной) функции распределения $A_i(t)$ назад по времени соответствует движению по траекториям вперед по времени [ср. (5.2.21) и (5.2.22)].— *Прим. ред.*

где R_t — число элементов $B(-t)$, а $\mu[B_i(-t)]$ — мера элемента B_i. Величина h_A имеет смысл средней скорости экспоненциального уменьшения $\mu(B_i)$. Тогда КС-энтропия h есть максимум (верхняя грань) h_A по всем измеримым начальным разбиениям фазового пространства [1]).

Так как КС-энтропия положительна только в случае экспоненциального уменьшения средней меры элемента B (назад по времени), то неудивительно, что она связана со средней скоростью экспоненциальной расходимости близких траекторий (вперед по времени), т. е. с показателями Ляпунова. Явное выражение для этой связи было получено Песиным [335], и его можно записать в виде

$$h = \int\limits_{\mathscr{M}} \left[\sum_{\sigma_i(\boldsymbol{x})>0} \sigma_i(\boldsymbol{x}) \right] d\mathscr{M}. \tag{5.2.24}$$

Здесь суммирование производится по всем положительным показателям Ляпунова, а интеграл берется по некоторой инвариантной области фазового пространства. Вообще говоря, КС-энтропия понимается как некоторая характеристика одной стохастической компоненты движения. В этом случае значения σ_i не зависят от $\boldsymbol{x}$ и интеграл по $\mathscr{M}$ равен единице. Отсюда

$$h = \sum_{\sigma_i>0} \sigma_i. \tag{5.2.25}$$

Для автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы положительным может быть только σ_1, откуда

$$h = \sigma_1. \tag{5.2.26}$$

При другой интерпретации [19] соотношение (5.2.24) относится ко всей (компактной) области фазового пространства. В этом случае для системы с двумя степенями свободы h определяет скорость экспоненциальной расходимости близких траекторий, усредненную по всей выбранной области фазового пространства. На регулярных компонентах движения $\sigma_1 = 0$. Положим для простоты, что на всех стохастических компонентах σ_1 одинаково и равно $\bar{\sigma}_1$. Тогда из (5.2.24) получаем

$$h = \mu_s \bar{\sigma}_1, \tag{5.2.27}$$

где μ_s — суммарная мера стохастических компонент. В § 5.3 мы увидим, как использовать эти соотношения для численного определения КС-энтропии, а также в качестве критерия стохастичности.

---

[1]) Если не только $h>0$, но и $h_A>0$ для любого конечного разбиения $\{A_i(0)\}$, то движение обладает К-свойством [378], которое оказывается, таким образом, более сильным, чем положительность КС-энтропии. Грубо говоря, К-система характеризуется однородностью процесса перемешивания.— *Прим. ред.*

Следует, однако, отметить, что, вообще говоря, разные стохастические компоненты имеют различные значения σ_1. Поэтому, применяя соотношение (5.2.24) к целой области фазового пространства, надо брать правильное среднее значение σ_1.

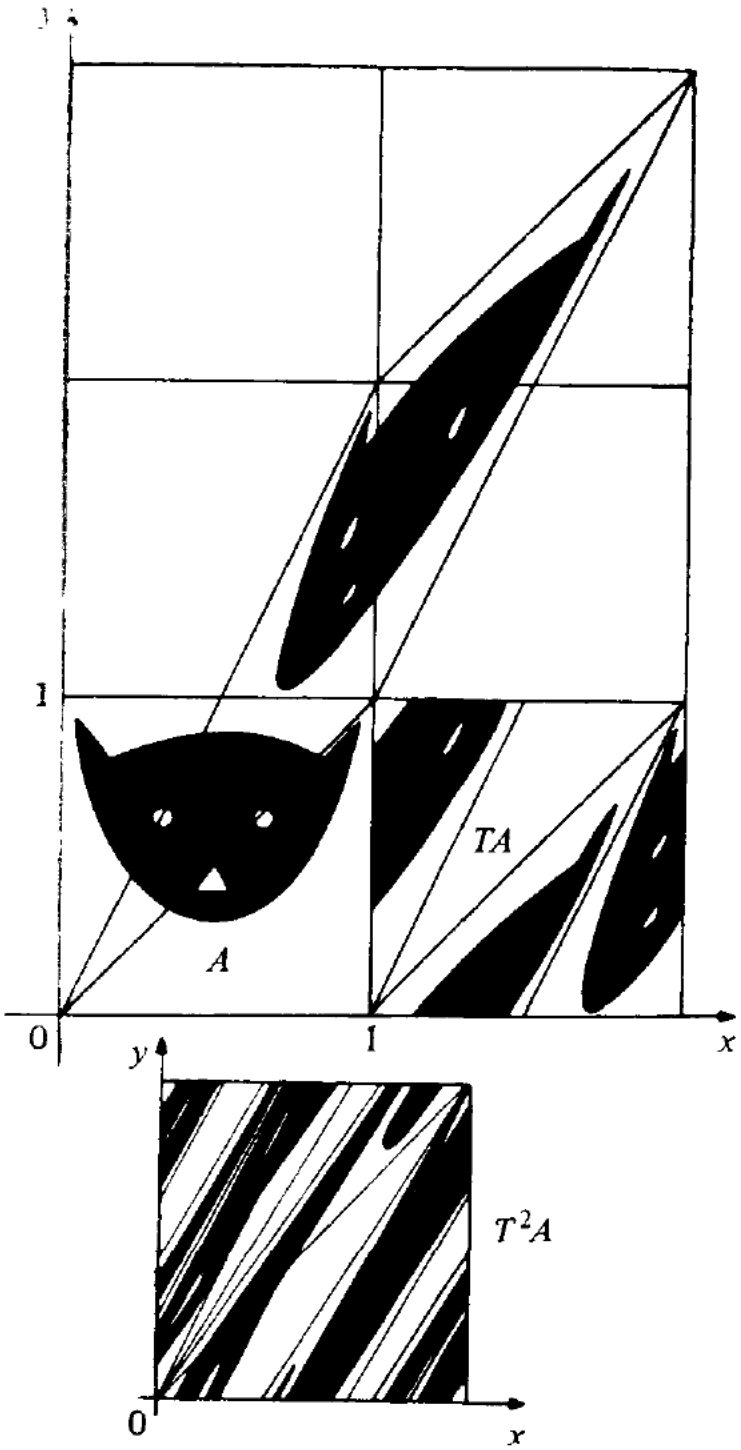


Рис. 5.3. Отображение Арнольда на торе (по данным работы [14]).

Область «кот» A трансформируется в TA и затем в T^2A.

Системы Аносова [1]). Эти системы введены и изучались Аносовым [8, 9]. Они характеризуются линейным касательным пространством, которое разлагается на три компоненты:

1) составляющая вдоль траектории с нулевым показателем Ляпунова;

2) поперечное пространство, в котором траектории расходятся экспоненциально со скоростью, ограниченной снизу равномерно по начальным условиям и времени;

3) поперечное пространство, в котором траектории сближаются экспоненциально со скоростью, ограниченной сверху, и тоже равномерно по начальным условиям [2]) и времени.

Это очень сильные условия, и гамильтоновы системы, близкие к интегрируемым, никогда им не удовлетворяют. Системы Аносова структурно устойчивы [8], т. е. при действии малого возмущения они остаются системами Аносова.

Рассмотрим свойства этих

---

[1]) В оригинале C-systems, т. е. (У-системы. Это менее распространенный сейчас термин, который ввел Аносов — автор этих систем. Буква У происходит от слова *условия*, которым должны удовлетворять эти системы; они перечислены ниже в тексте.— *Прим. перев.*

[2]) Имеются в виду начальные условия как в касательном, так и в основном фазовом пространстве. В приведенном виде условия относятся только к обратимым во времени системам, подробнее см. [8, 9, 14].— *Прим. ред.*

систем на простом, хотя и нефизическом примере, который часто используется математиками. Следуя Арнольду, возьмем отображение T на торе вида

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{mod}\ 1. \tag{5.2.28}$$

Отображение T совпадает со своим касательным отображением A, причем $\det \mathsf{A} = 1$, т. е. оба отображения сохраняют площадь. На рис. 5.3, взятом из [14], показано преобразование тора вместе с изображением знаменитого арнольдовского кота. Ясно видно расслоение фазового пространства и перемешивание. Используя результаты п. 3.3в, найдем собственные значения и векторы этого отображения. Из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

получаем собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \tag{5.2.29}$$

а из уравнения (3.3.7) — собственные векторы

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \left(\frac{2}{5-\sqrt{5}}\right)^{1/2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\check{x} + \check{y}\right), \\ \zeta_2 &= \left(\frac{2}{5+\sqrt{5}}\right)^{1/2} \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\check{x} + \check{y}\right). \end{aligned} \tag{5.2.30}$$

Растяжение происходит вдоль направления ζ_1, а сжатие — вдоль ортогонального направления ζ_2. При этом, конечно, $\lambda_1 = 1/\lambda_2$, что следует просто из сохранения площади. Чтобы подчеркнуть экспоненциальный характер растяжения, можно записать собственные значения в виде

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm\sigma}, \tag{5.2.31}$$

где $\sigma = \ln\left[(3+\sqrt{5})/2\right]$ одинакова для всех начальных условий. Поэтому показатель Ляпунова $\sigma_1(\boldsymbol{x}) = \sigma > 0$ и не зависит от $\boldsymbol{x}$. Следовательно, отображение (5.2.28) является системой Аносова, а значит [378], и К-системой. Его энтропия

$$h = \sigma_1 = \ln\left[(3+\sqrt{5})/2\right].$$

Сдвиги Бернулли. В качестве заключительного примера рассмотрим системы, называемые бернуллиевскими. Пусть фазовое пространство разбито на M ячеек, каждая из которых помечена своим символом a_i и характеризуется вероятностью p_i попадания в нее траектории движения. Предположим, что состояние системы ме-

няется каждую секунду. Тогда динамическое движение описывается некоторой последовательностью символов [1]). Рассмотрим теперь такое отображение, которое сдвигает любую последовательность на один элемент влево. Например, подбрасывая монету, мы получаем последовательность вида [2])

$$0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ldots,$$

где символы 0 и 1 соответствуют двум сторонам монеты. Для сдвига Бернулли с числом символов M значение энтропии последовательности длины n дается стандартным выражением [3])

$$H_T = -n\sum_{i=1}^{M} p_i \ln p_i.$$

Максимум энтропии достигается для разбиения с $p_i = 1/M$ и равен

$$H_T = n \ln M.$$

Сдвиг Бернулли можно задать простым отображением:

$$x_{n+1} = Mx_n, \quad \mathrm{mod}\ 1.$$

При этом каждая итерация дает новый член последовательности Бернулли. КС-энтропия этого отображения легко вычисляется и равна $h = \ln M$, а $H_T = hn$. Таким образом, КС-энтропия определяет скорость роста H_T со «временем» n. При $n \to \infty$ энтропия H_T неограниченно возрастает.

Общая картина взаимосвязи между различными свойствами случайного движения представлена на рис. 5.4. Стрелки между прямоугольниками указывают направление импликации. Так, например, К-системы обладают свойствами перемешивания и эргодичности [4]). Наиболее сильные статистические свойства динамической

---

[1]) Это — так называемая символическая траектория.— *Прим. ред.*

[2]) Это не очень удачный пример, поскольку подбрасывание монеты не является чисто динамическим процессом. Пример сдвига Бернулли в динамической системе см. ниже в тексте и (5.2.32).— *Прим. ред.*

[3]) Это выражение заимствовано из теории вероятностей и справедливо при условии, что попадания траектории в различные ячейки статистически независимы. Динамическая система называется бернуллиевской, или сдвигом Бернулли, если она обеспечивает выполнение этого условия для некоторого определенного разбиения (фазового пространства), которое тоже называется бернуллиевским. Хотя это свойство кажется на первый взгляд очень сильным (максимальным?), на самом деле это не совсем так из-за сингулярности бернуллиевских разбиений в большинстве случаев (см. [497]).— *Прим. ред.*

[4]) В дополнение к связям на рис. 5.4 отметим, что система Аносова является также и бернуллиевской, точнее — всякий перемешивающий поток Аносова с гладкой инвариантной мерой является бернуллиевским [498, 499].— *Прим. ред.*

случайности [1]) расположены в верхней части рисунка, а наиболее слабые — внизу. Основная характеристика каждого свойства приведена справа, а примеры соответствующих систем—слева.

Системы, близкие к интегрируемым, такие, как модели Хенона—Хейлеса или ускорения Ферми, для которых характерно наличие

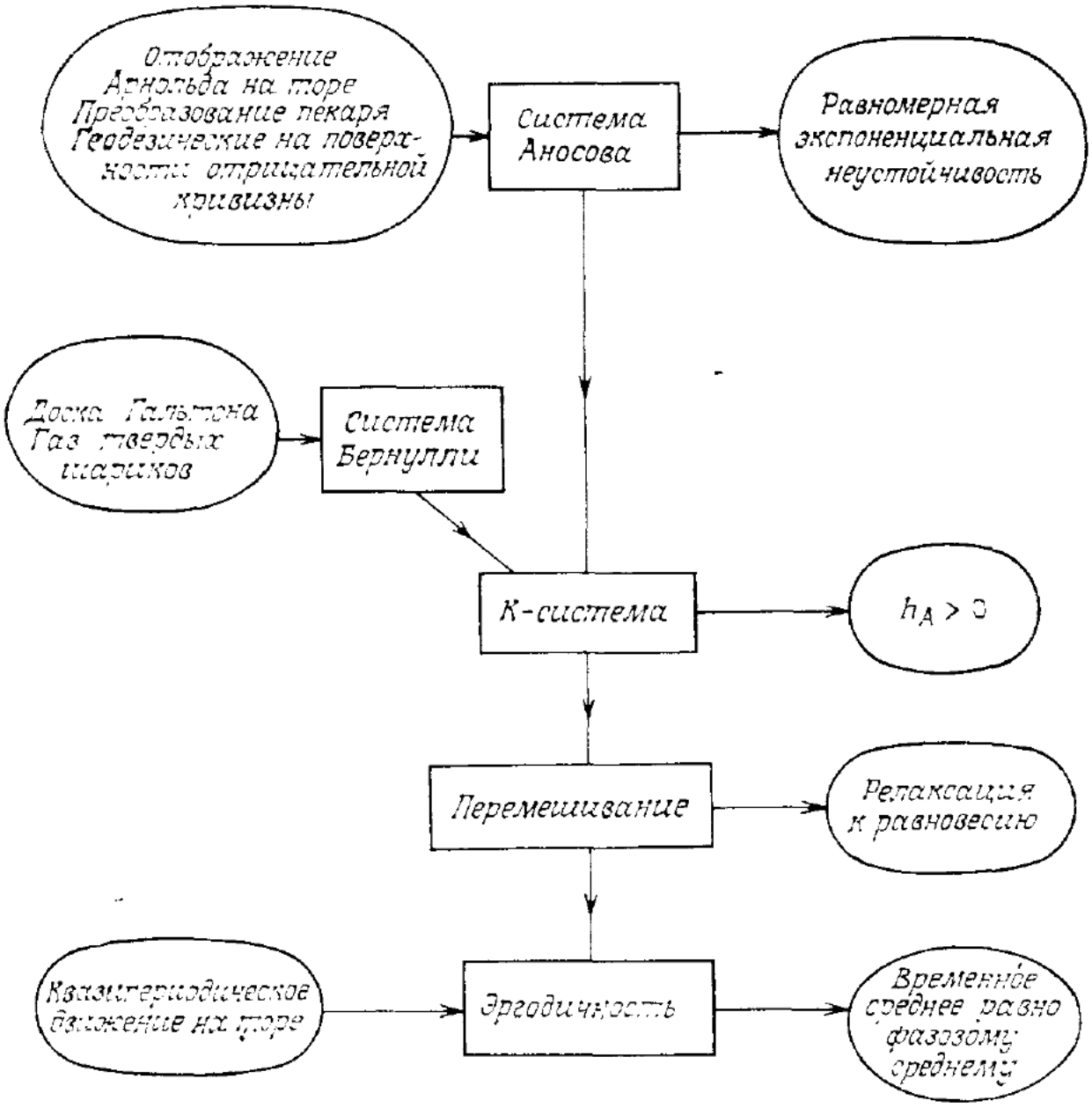


Рис. 5.4. Взаимосвязь между различными статистическими свойствами случайного движения.

областей как регулярного, так и стохастического движения, не обладают в полной мере ни одним из свойств, перечисленных

[1]) Согласно современной алгоритмической теории динамических систем [448], которая кратко обсуждается ниже в п. 5.2г, свойство случайности лежит как бы в другой плоскости. Формально алгоритмическая случайность эквивалентна положительности КС-энтропии ($h > 0$), т. е. это свойство слабее К-свойства (см. прим. ред. на с. 301). Однако оно обладает иным качеством: полностью исключает возможность динамического описания системы ввиду принципиальной непредсказуемости отдельных траекторий.— *Прим. ред.*

на рис. 5.4. Однако вблизи гомоклинных точек движение локально эквивалентно преобразованию пекаря, что приводит к случайному поведению типа сдвига Бернулли. Кроме того, как мы увидим в § 5.3, результаты численного моделирования убедительно показывают, что стохастические компоненты в таких системах (например, стохастический слой) имеют положительную КС-энтропию, а следовательно, и определенные статистические свойства.

5.2г. Случайность и ее численное моделирование

Случайные последовательности. В каком смысле поведение детерминированной динамической системы может оказаться случайным? Прежде всего значительные усилия были направлены на выяснение смысла самого понятия случайности [231, 338] (популярное изложение см. в работе [61]) [1]). Интуитивно ясно, что случайная последовательность некоторых символов не должна подчиняться никакой закономерности. Можно придумать различные тесты, например на частоту появления определенных символов в последовательности, пар символов и т. д., которые должна выдерживать случайная последовательность. В том случае, если последовательность выдерживает все тесты, ее можно считать «случайной»[2]).

Современное определение случайности основывается на том, что информация, заключенная в случайной последовательности, не может быть «сжата», т. е. представлена в более компактной форме. Так, не существует правила вычисления случайной последовательности, которое было бы существенно короче, чем просто ее копирование. Эти идеи можно формализовать следующим образом. Определим вначале минимальную длину программы (число бит) K_C вычисления N бит последовательности S_N на некоторой ЭВМ. Величина K_C зависит от ЭВМ, но ее можно представить в виде суммы

$$K_C = K_N(S) + C_C,$$

где $C_C \geqslant 0$ зависит только от ЭВМ, но не от S_N, а *сложность* $K_N(S)$ зависит только от последовательности S_N. Ясно, что значение сложности заключено между некоторой постоянной (любая программа должна иметь хотя бы одну команду) и максимальным

$$K_N^{\text{макс}}(S) = N,$$

когда ЭВМ просто копирует заданную последовательность.

---

[1]) См. также сборник [495], обзор [492] и популярную статью [449]. — *Прим. ред.*

[2]) Такое определение случайности по Мартин-Лёфу [493] (см. также [492]) представляется слишком узким по крайней мере для теории динамических систем, поскольку оно включает в себя максимальные статистические свойства, в частности полную независимость (бернуллиевость). Критику такого определения случайности см. в работе [500]. — *Прим. ред.*

Можно показать, что последовательности с максимальной сложностью действительно существуют [1]). Рассмотрим теперь некоторый вычислимый тест на случайность. Тогда можно доказать следующую теорему: последовательность выдерживает все вычислимые тесты на случайность тогда и только тогда, когда она имеет положительную сложность [2]), т. е.

$$K(S) \equiv \lim_{N\to\infty} (K_N(S)/N) > 0.$$

Сопоставим каждой последовательности точку на отрезке [0, 1]. Тогда меру множества последовательностей можно определить как меру соответствующих действительных чисел [3]). Можно доказать, что по этой мере почти все последовательности случайны, т. е. множество неслучайных последовательностей имеет меру нуль [4]).

Посмотрим теперь, как случайная последовательность возникает из детерминированного уравнения. Возьмем, например, следующее одномерное отображение на отрезке [0, 1]:

$$x_{n+1} = 10x_n, \quad \mathrm{mod}\ 1 \tag{5.2.32}$$

с начальным условием

$$0 \leqslant x_0 < 1.$$

Разделим «фазовое пространство» $0 \leqslant x_0 < 1$ на десять ячеек с номерами $a_i = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Тогда, например, для начального условия $x_0 = 0{,}157643\ldots$ отображение (5.2.32) генерирует последовательность

$$\{a_i\} = 1,\ 5,\ 7,\ 6,\ 4,\ 3\ \ldots.$$

Является ли она случайной? Ответ зависит от того, случайно ли начальное условие x_0. Из упомянутой выше теоремы следует, что почти все x_0 случайны, а значит, и рассматриваемая последовательность почти наверняка случайна. Оказывается, что движение вблизи гомоклинных точек в стохастическом слое случайно, а регулярное движение на инвариантных поверхностях не является случайным [5]).

---

[1]) И даже составляют большинство из всех последовательностей данной длины [231].— *Прим. ред.*

[2]) Это не теорема, а другое возможное (и более приемлемое для теории динамических систем) определение случайности (см. примечание редактора на с. 306). Впервые такое определение в эквивалентной форме было предложено Алексеевым (см. [501], с. 75, определение А и обзор [448]).— *Прим. ред.*

[3]) То есть просто как длину на отрезке, или более формально, как меру Лебега.— *Прим. ред.*

[4]) Подчеркнем, что возможность случайных траекторий в классической механике связана, таким образом, с непрерывностью фазового пространства. Заметим, что в квантовой механике и при численном моделировании это уже не так (см. ниже и [77]).— *Прим. ред.*

[5]) Подобные заключения можно получить из теоремы Алексеева — Брудно (см. [448, 494]), согласно которой упомянутая выше удельная сложность равна КС-энтропии: $K(S) = h$.— *Прим. ред.*

Ошибки округления. При исследовании гамильтоновых отображений с их сложной структурой хаотического и регулярного движения широко используется численное моделирование, причем число итераций отображения достигает многих миллионов. Возникает вопрос: в какой степени численное моделирование с конечной точностью арифметических операций, ошибками округления и прочим «шумом» соответствует реальной динамике системы? Существенное влияние этих ошибок на такие характеристики движения, как распределение в фазовом пространстве, мера стохастической компоненты и другие, легко определить, изменяя точность счета. Фактически такие проверки составляют неотъемлемую часть любого численного эксперимента. Так, например, Грин [165] исследовал влияние ошибок округления на определение границы стохастичности и нашел, что оно пренебрежимо мало (см. п. 4.4а). Бенеттин и др. [17] показали, что для систем Аносова численные ошибки несущественны при вычислении временны́х средних, например, показателей Ляпунова. Однако системы Аносова структурно устойчивы, и вопрос о влиянии численных ошибок на другие системы остается пока открытым [1]).

С другой стороны, конечная точность счета кардинально меняет некоторые свойства движения. Даже для регулярной траектории ошибка в начальных условиях растет, вообще говоря, линейно со временем, а для хаотических траекторий она растет экспоненциально быстро. Если мантисса чисел на ЭВМ имеет N двоичных разрядов, то начальные условия полностью забываются через $n_m \sim 2^N$ итераций для регулярной траектории и всего через $n_m \sim N$ итераций для хаотической траектории. В обоих случаях система окажется далеко от своего начального положения, если после n_m итераций в одну сторону по времени сделать столько же итераций в обратную сторону.

Более серьезная теоретическая проблема заключается в том, что при этом смазывается четкое различие между хаотическими и регулярными траекториями. Например, в случае двумерного гамильтонова отображения имеется конечное число состояний системы $M = 2^{2N}$, и после $n \leqslant M$ итераций система обязательно вернется в одно из предыдущих состояний. В результате *все* траектории такой системы оказываются периодическими. Это остается справедливым и для диссипативных систем. В каком смысле можно считать движение такой системы случайным?

Этот вопрос исследовался Ренно [341], которая использовала целочисленное отображение [2])

---

[1]) Структурная устойчивость здесь не помогает, поскольку ошибки округления не удовлетворяют требуемой гладкости возмущения (см. ниже по тексту).— *Прим. ред.*

[2]) Следует подчеркнуть, что это отображение моделирует прежде всего типичный эффект «экспериментальной установки» (ЭВМ), который отсутст-

$$a_{i+1} = a_i + b_i + \left[\frac{m}{2\pi}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{m} b_i\right)\right], \quad \mathrm{mod}\ m,$$

$$b_{i+1} = b_i - \left[\frac{Km}{2\pi}\left(\sin\frac{2\pi}{m} a_{i+1} + 1 - \cos\frac{2\pi}{m} a_{i+1}\right)\right], \quad \mathrm{mod}\, m, \tag{5.2.33}$$

где $[X]$ — целая часть X, K — параметр «стохастичности», а a и b — целые числа в интервале

$$-m/2 \leqslant a, \quad b \leqslant m/2.$$

Это — взаимно-однозначное отображение $M = m^2$ точек плоскости (a, b) на себя. Оно не содержит округления или каких-либо других численных ошибок [1]). Для m, кратного 4, и $K < 4$ отображение имеет две неподвижные точки: (0, 0) и $(-m/4, 0)$. Первая устойчива при малых K, вторая неустойчива. Для $K = 1{,}3$ и $m = 400$ имеются 48 относительно коротких периодических траекторий, заполняющих некоторую кольцевую область вокруг неподвижной устойчивой точки (0, 0). Кроме того, имеются 9 очень длинных траекторий, которые довольно однородно покрывают бо́льшую часть фазового квадрата и соответствуют, по-видимому, «хаотическому» движению. Для $K = 10$ имеются только 12 (длинных) траекторий, представляющие «хаотическое» движение.

Ренно определила «случайность» периодических траекторий следующим образом. Имеется всего $M!$ взаимно-однозначных отображений M точек на себя. Приписав одинаковую вероятность $1/M!$ каждому из этих отображений, получим «случайное» отображение [2]). Такое отображение обладает следующими статистическими свойствами:

1. Вероятность траектории длины n, выходящей из данной точки (a, b), равна $1/M$ и не зависит от n.
2. Средняя длина траектории равна $(M + 1)/2$.
3. Среднее число всех траекторий приблизительно равно $\ln M + \gamma$, где $\gamma = 0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера.

Численное моделирование отображения (5.2.33) при $K = 1{,}3$ и $K = 10$ с $300 \leqslant m \leqslant 800$ подтвердило эти свойства «случайного»

вует в исходной динамической системе классической механики. Поэтому вводимые ниже понятия стохастичности и случайности для отображения (5.2.33) являются не более чем имитацией, которую нужно четко отличать от настоящей случайности в непрерывном фазовом пространстве. Любопытно отметить, что целочисленные отображения качественно моделируют некоторые квантовые эффекты (см. [77]).— *Прим. ред.*

[1]) Точнее «ошибки» округления (взятие целой части) явно включены в отображение.— *Прим. ред.*

[2]) В таком определении скрыта следующая эргодическая гипотеза: статистика траекторий для данного (типичного) отображения [например, (5.2.33)] приблизительно совпадает со статистикой всех $M!$ отображений.— *Прим. ред.*

отображения. Эти результаты служат подтверждением того, что хаотическое движение, наблюдаемое в гамильтоновых системах, является следствием их динамики, а не конечной точности счета. Последняя приводит, напротив, к периодичности движения. Численные эксперименты, в которых точность счета изменялась, также подтверждают этот вывод.

§ 5.3. Определение показателей Ляпунова и КС-энтропии

Напомним (см. рис. 5.2) определение характеристического показателя Ляпунова σ для траектории $\boldsymbol{x}(t)$ и близкой к ней $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{w}$ — касательный вектор:

$$\sigma(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w}_0) = \lim_{\substack{t\to\infty \\ d(0)\to 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d(0)}. \tag{5.2.8}$$

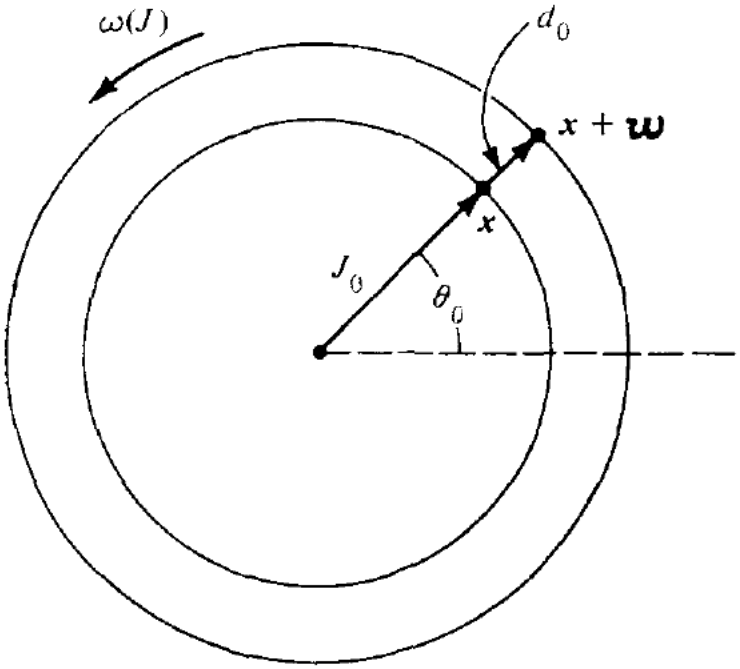


Рис. 5.5. Линейный рост расстояния $d(t)$ между близкими траекториями в интегрируемой системе на примере отображения поворота.

В системах, близких к интегрируемым, аналитический и численный расчет показателей σ (особенно максимального $\sigma = \sigma_1$) широко используется в качестве критерия стохастичности. Отметим прежде всего [57], что в интегрируемых гамильтоновых системах все σ равны нулю. Рассмотрим в качестве примера движение на торе [в проекции на плоскость (J, θ) см. рис. 3.1, *а*]:

$$J(t) = J_0, \tag{5.3.1а}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(J)\,t. \tag{5.3.1б}$$

Как показано на рис. 5.5, траектории в этом случае представляют собой окружности, а расходимость близких траекторий оказывается максимальной, когда вектор $\boldsymbol{w} = (\Delta J, 0)$, т. е. направлен вдоль радиуса. Для двух близких траекторий имеем

$$\theta_1(t) = \theta_0 + \omega_0 t, \tag{5.3.2а}$$

$$\theta_2(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \omega_0' d_0 t, \tag{5.3.2б}$$

где ω_0' — производная по J. Расстояние между траекториями равно

$$d^2(t) = J_0^2(\theta_2 - \theta_1)^2 + d_0^2 = d_0^2\left[(\omega_0' J_0 t)^2 + 1\right] \tag{5.3.3}$$

и при больших t растет линейно со временем. Тогда из (5.2.8) имеем

$$\sigma_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \ln\left[(\omega_0' J_0 t)^2 - 1\right] = 0. \tag{5.3.4}$$

С другой стороны, в хаотической области

$$d(t) \sim d_0 e^{\sigma_1(x)t}, \tag{5.3.5}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d}{d_0} = \sigma_1 > 0. \tag{5.3.6}$$

5.3а. Аналитические оценки

Для достаточно простой динамической системы, в которой области устойчивости занимают пренебрежимо малую часть фазового пространства, максимальный показатель Ляпунова σ_1 можно получить аналитически. Для стандартного отображения при больших K это было сделано Чириковым [70]. Линеаризовав стандартное отображение вблизи некоторой точки, не обязательно неподвижной, получим из характеристического уравнения при больших K наибольшее из двух собственных значений в виде

$$\lambda^+ = K\,|\cos\theta|. \tag{5.3.7}$$

Так как вся фазовая плоскость считается стохастической, то величина σ_1 (и h) определяется просто усреднением $\ln\lambda^+$. В данном случае это эквивалентно усреднению по θ и дает

$$\sigma_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|K\cos\theta|\,d\theta = \ln\frac{K}{2}. \tag{5.3.8}$$

Этот аналитический результат сравнивался с численным значением σ_n, полученным для начальных условий на стохастической компоненте. При $K \approx 6$, когда еще можно ожидать количественного согласия с (5.3.8), Чириков получил [1]) $\sigma_n/\sigma_1 = 1{,}02$.

Как мы видели в § 4.1, в стандартном отображении островки устойчивости существуют при сколь угодно больших K. С увеличением K эти островки уменьшаются, но поскольку они могут существовать вокруг периодических точек произвольно большого периода, то возникает вопрос, не занимают ли они значительную часть фазовой плоскости, что привело бы к неправильному значению КС-энтропии (5.3.8) даже для больших K. Чириков исследовал этот вопрос двумя методами. В первом квадрат $2\pi \times 2\pi$ разделялся на 100×100 ячеек и вычислялась доля μ_s ячеек, в которые попадала траектория с начальными условиями на стохастической компоненте. Ясно, что такое «огрубление» может давать правильные результаты только для относительно малых значений K, когда

[1]) Более полные аналитические и численные данные по КС-энтропии для различных отображений приведены в работе [73].— *Прим. ред.*

островки устойчивости достаточно велики. Во втором методе выбиралось некоторое число, скажем $N = 100$, траекторий со случайными начальными условиями и определялась доля μ_r тех из них, для которых численное значение КС-энтропии близко к нулю. Естественно ожидать, что $\mu_s + \mu_r \approx 1$. Результаты этих численных экспериментов представлены в табл. 5.1. Чириков пришел к заключению, что мера устойчивых областей с увеличением K стремится к нулю [1]), так что при больших K возможно простое статистическое описание движения.

Таблица 5.1. Численное определение меры стохастической (μ_s) и регулярной (μ_r) компонент стандартного отображения (по данным работы [70], табл. 5.3)

K	8,888	6,59	6,21	5	4	3	2	1	0,5
μ_s	—	—	—	0,98	0,92	0,89	0,79	0,44	—
μ_r	$<10^{-4}$	0,0099	0,004	0,014	0,08	0,11	0,19	0,52	0,96

5.3б. Численные методы

Удобным практическим критерием стохастичности в заданной области фазового пространства служит численное определение показателей Ляпунова. Максимальный показатель σ_1 широко использовался в качестве критерия стохастичности в ряде работ (см., например, [19, 41—43, 73, 133, 371]).

Вычисление σ_1. Ранее было показано (п. 5.2б), что $\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_0) = \sigma_1(\boldsymbol{x})$ для почти всех касательных векторов $\boldsymbol{w}_0$. Поэтому для вычисления σ_1 начальный вектор $\boldsymbol{w}_0$ можно выбирать произвольно. Интегрируя совместно уравнения (5.2.6) и (5.2.7), находим величину

$$d(t) = |\boldsymbol{w}(t)|,$$

где для удобства принято $d_0 = d(0) = 1$. Трудности возникают в том случае, когда $|\boldsymbol{w}|$ растет экспоненциально, что приводит к переполнению и другим численным ошибкам. Чтобы избавиться от этих неприятностей, выберем определенный интервал времени τ, как показано [2]) на рис. 5.6, и будем перенормировывать

[1]) Согласно данным работы [73], $\mu_r \sim \exp(-C\sqrt{K})$, где $C \sim \text{const}$, за исключением специальных значений K, близких к (4.1.14).— *Прим. ред.*

[2]) Фактически на рис. 5.6 показан другой метод вычисления σ_1 — по двум близким траекториям системы (5.2.6), а не по одной траектории и линеаризованному уравнению (5.2.7), как в тексте. Использование линеаризованного уравнения имеет то преимущество, что его решение не зависит от модуля $|\boldsymbol{w}|$. Однако в некоторых специальных случаях удобнее интегрировать две траектории (см., например, [470]).— *Прим. ред.*

$|\boldsymbol{w}|$ на единицу в конце каждого такого интервала [1]). Таким способом будем последовательно вычислять величины

$$d_k = |\boldsymbol{w}_{k-1}(\tau)|, \tag{5.3.9а}$$

$$\boldsymbol{w}_k(0) = \frac{\boldsymbol{w}_{k-1}(\tau)}{d_k}, \tag{5.3.9б}$$

где $\boldsymbol{w}_k(\tau)$ получается интегрированием (5.2.6), (5.2.7) на интервале τ с начальными значениями $\boldsymbol{x}(k\tau)$, $\boldsymbol{w}_k(0)$. Если ввести величину

$$\sigma_n = \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^{n} \ln d_i, \tag{5.3.10}$$

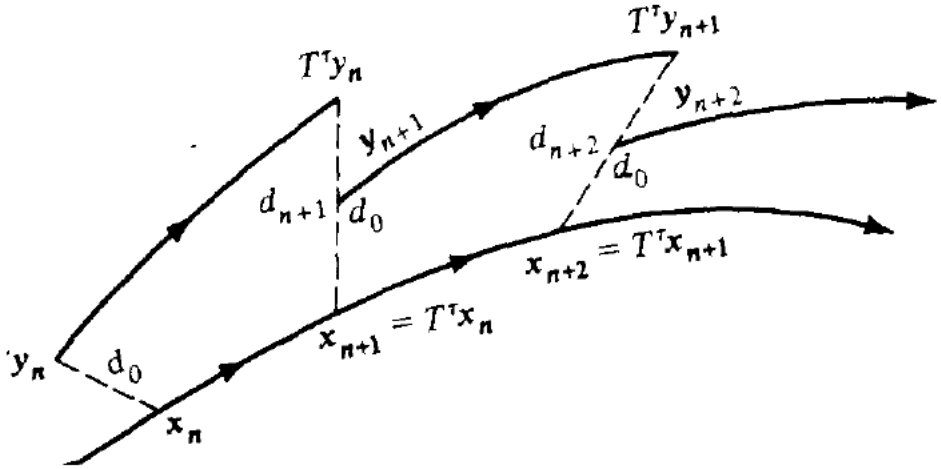


Рис. 5.6. Схема вычисления максимального показателя Ляпунова (по данным работы [19]).
$y = x + w$, τ — конечный интервал времени.

то из (5.2.8) получаем

$$\sigma_1 = \lim_{n\to\infty} \sigma_n. \tag{5.3.11}$$

Для регулярного движения $\sigma_1 = 0$, в то время как на стохастической компоненте $\sigma_1 > 0$ и не зависит от $\boldsymbol{x}$. Описанный метод применим как для непрерывных траекторий, так и для отображений.

Следуя работе Бенеттина и др. [19], проиллюстрируем использование этого метода на примере модели Хенона—Хейлеса (п. 1.4а). На рис. 5.7 приведена зависимость σ_n от $n\tau$ для шести траекторий с энергией $E = 0{,}125$ (см. рис. 1.13). Три траектории (*1—3*) находятся, очевидно, в области устойчивого движения, тогда как три другие (*4—6*) — в широкой стохастической области, которая хорошо видна на рис. 1.13. Как и следовало ожидать, для первых траекторий с увеличением n величина σ_n, очевидно, стремится к

[1]) То есть сокращать длину вектора $\boldsymbol{w}$ ($|\boldsymbol{w}| \to d_0 = 1$), не изменяя его направления (см. [73]).— *Прим. ред.*

нулю [1]), а для вторых, по-видимому,— к одному и тому же значению [2]) σ_1.

Используя этот метод, Бенеттин с соавторами нашли зависимость σ_1 от энергии E в областях стохастического и регулярного движения (рис. 5.8). В последнем случае $\sigma_n \to 0$ (черточки на оси абсцисс). Сплошная кривая соответствует подгонке значений $\sigma_1 > 0$ к экспоненциальной зависимости. Используя соотно-

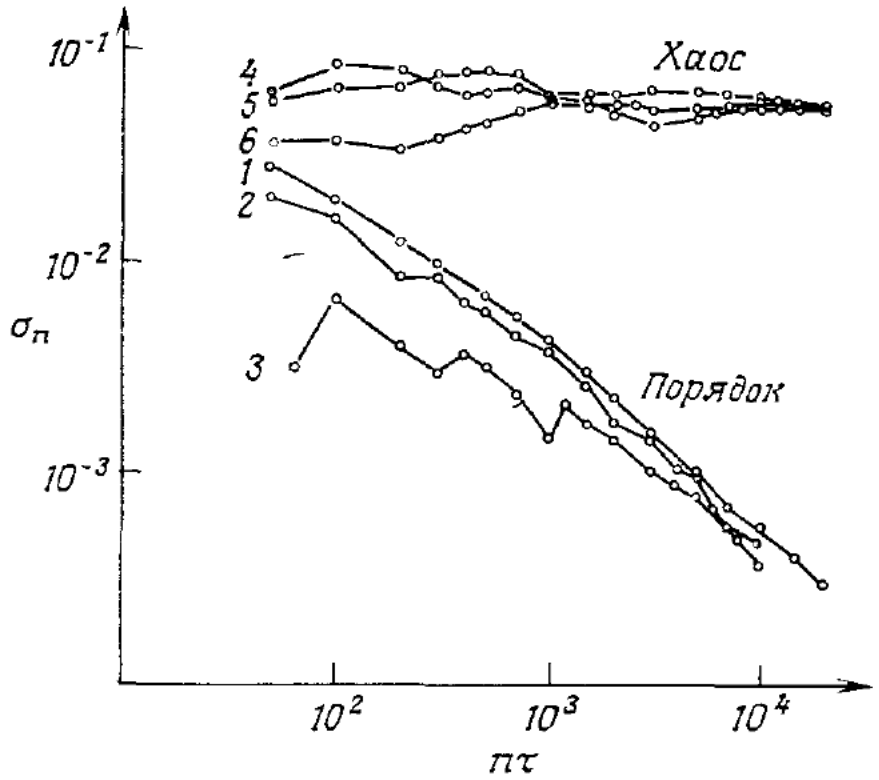


Рис. 5.7. Зависимость показателя σ_n от времени для траекторий на регулярной (1—3) и стохастической (4—6) компонентах (по данным работы [19]).

шение (5.2.27) и зависимость $1-\mu_s$ от E, полученную Хеноном и Хейлесом [188], Бенеттин с соавторами вычислили КС-энтропию $h(E)$ (пунктирная кривая на рис. 5.8). Они высказывают предположение, что $h(E) > 0$ для всех $E > 0$, что согласуется с нашими общими представлениями о свойствах движения, хотя и не видно из рис. 5.8 из-за различных приближений при вычислении σ_1. Это указывает на некоторый присущий методу недостаток. Возможно, например, что одна из траекторий на рис. 5.7, которая кажется регулярной, на самом деле лежит в узком стохастическом слое. Такую траекторию одинаково трудно обнаружить как непосредственно, так и при помощи настоящего метода, поскольку выход на очень низкое плато σ_1 может оказаться за пределами фактической

[1]) Грубо говоря, как $1/n\tau$ [см. (5.3.4)].— *Прим. ред.*

[2]) Вообще говоря, это не всегда так (см., например, [73], рис. 3). В данном примере близкие значения σ_n указывают на принадлежность всех трех траекторий к одной и той же стохастической компоненте.— *Прим. ред.*

длительности счета [1]). Мы вернемся к этим вопросам в гл. 6 при обсуждении более сложного движения в многомерных системах.

Вычисление всех показателей Ляпунова [2]). Следуя Бенеттину и др. [20] [3]), покажем, каким образом вычисляется полный набор показателей Ляпунова в M-мерном фазовом пространстве. Ясно, что любая попытка определить σ_2, σ_3 и т. д., выбирая касательный вектор w вдоль векторов e_2, e_3 и т. д. (см. рис. 5.2), обречена на неудачу из-за неустойчивости этих направлений, так что любые ошибки повернут в конце концов $w(t)$ вдоль e_1. Вместо этого выберем начальный базис из p ортонормированных касательных векторов и численно определим p-мерный объем $V_p(t)$, заданный этими векторами. Отсюда можно найти показатель Ляпунова $\sigma_1^{(p)}$ порядка p (5.2.14). Проделав эту процедуру для $p = 1, 2, \ldots, M$, из (5.2.15) определим все показатели σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_M$. Здесь, однако, возникает следующая трудность. В процессе движения углы между касательными векторами, вообще говоря, экспоненциально уменьшаются и численные ошибки резко возрастают. Поэтому в дополнение к перенормировке длины векторов w необходимо также периодически ортогонализовать их. При этом новые векторы должны лежать в том же подпространстве, что и старые.

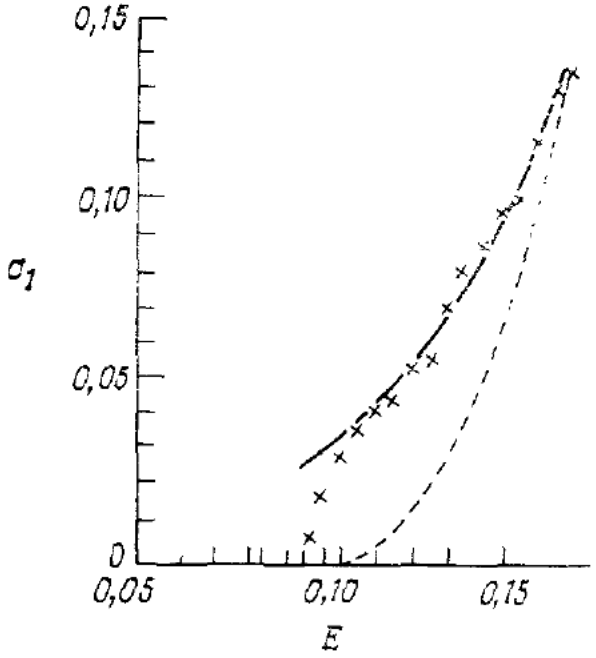


Рис. 5.8. Зависимость максимального показателя σ_1 от энергии на стохастической (крестики) и регулярной (черточки на оси абсцисс) компонентах (по данным работы [19]).

Сплошная кривая — экспоненциальная интерполяция для $\sigma_1 > 0$; пунктирная кривая — КС-энтропия, пересчитанная по σ_1.

Оказывается, что такую процедуру одновременного вычисления всех p-мерных объемов можно свести к расчету эволюции M векторов и их специальной ортогонализации по методу Грама—

---

[1]) Заметим, что хотя действительно таким методом нельзя установить регулярность движения (интегрируемость) в некоторой области фазового пространства, однако вполне можно обнаружить хаотическую (случайную) компоненту движения, т. е. неинтегрируемость. В некотором смысле этот численный метод дополняет аналитический метод обратной задачи рассеяния (см. примечание редактора на с. 56), который позволяет, наоборот, доказать только интегрируемость.— *Прим. ред.*

[2]) Заметим, что для критерия стохастичности нужен по существу только максимальный показатель σ_1 ввиду неравенства $h \geqslant \sigma_1 > 0$. Иначе говоря, точное значение КС-энтропии h, которое требует знания всех показателей, несущественно.— *Прим. ред.*

[3]) См. также [502].— *Прим. ред.*

Шмидта. Вспомним, что $w_{k-1}(\tau)$ — касательный вектор $w_{k-1}(0)$ через время τ. Вычислим сначала для каждого временно́го интервала τ следующие величины:

$$d_k^{(1)} = \left| w_{k-1}^{(1)}(\tau) \right|, \tag{5.3.12а}$$

$$w_k^{(1)}(0) = \frac{w_{k-1}^{(1)}(\tau)}{d_k^{(1)}}. \tag{5.3.12б}$$

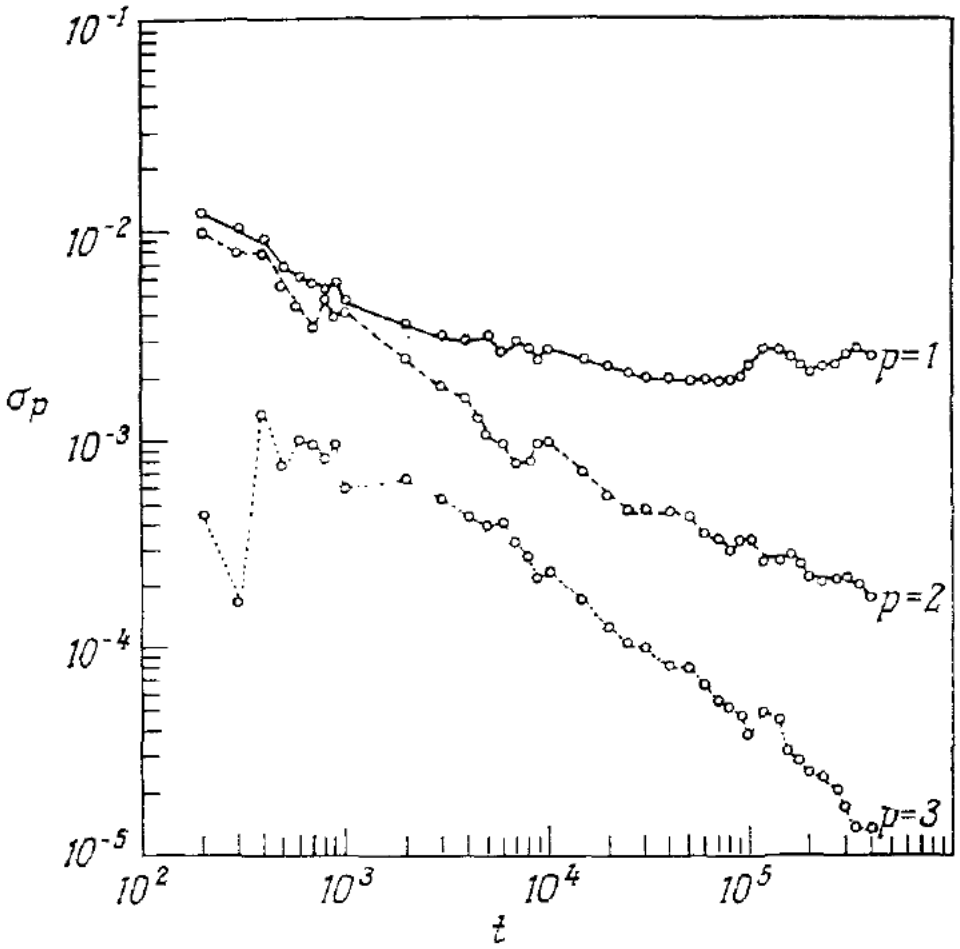


Рис. 5.9. Все три положительных показателя Ляпунова для модели Контопулоса (см. текст) (промежуточная область) (по данным работы [20]).

Затем для $j=2, \ldots, M$ найдем последовательно величины

$$u_{k-1}^{(i)}(\tau) = w_{k-1}^{(j)}(\tau) - \sum_{i=1}^{j-1} \left(w_k^{(i)}(0) \cdot w_{k-1}^{(j)}(\tau) \right) w_k^{(i)}(0), \tag{5.3.12в}$$

$$d_k^{(j)} = \left| u_{k-1}^{(j)}(\tau) \right|, \tag{5.3.12г}$$

$$w_k^{(j)}(0) = \frac{u_{k-1}^{(j)}(\tau)}{d_k^{(j)}}. \tag{5.3.12д}$$

Тогда в течение $(k-1)$-го интервала времени τ объем V_p возрастает в $d_k^{(1)} d_k^{(2)} \ldots d_k^{(p)}$ раз. Отсюда, согласно (5.2.14), получаем

$$\sigma_1^{(p)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^{n} \ln \left(d_i^{(1)} d_i^{(2)} \ldots d_i^{(p)} \right). \tag{5.3.13}$$

Вычитая $\sigma_1^{(p-1)}$ из $\sigma_1^{(p)}$ и используя (5.2.15), находим p-й показатель Ляпунова

$$\sigma_p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^{n} \ln d_i^{(p)}. \qquad (5.3.14)$$

Это соотношение фактически и используется при численном моделировании.

Бенеттин и др. [20] нашли таким способом все показатели Ляпунова для нескольких гамильтоновых систем, включая 4- и 6-мерные отображения. Мы приведем их результаты для системы с тремя степенями свободы, которая исследовалась Контопулосом и др. [93]:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(p_3^2 + q_3^2) + q_1^2 q_2 + q_1^2 q_3.$$

Движение этой системы ограничено при $H < 0{,}097$. Для $H = 0{,}09$ фазовое пространство разделяется, грубо говоря, на три области: большая область стохастичности с $\sigma_1 \approx 0{,}03$; $\sigma_2 \approx 0{,}008$ и $\sigma_3 \approx 0$; область регулярного движения ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) и промежуточная область. На рис. 5.9 представлены результаты вычисления первых трех показателей Ляпунова для начальных условий в промежуточной области. Видно, что сходимость имеет место для $\sigma_1 \approx 3 \times 10^{-3}$ и $\sigma_3 = 0$, соответствующего направлению вдоль траектории. Поведение показателя σ_2 не вполне ясно.

Как мы увидим в § 6.2, эти результаты на самом деле обманчивы. Действительно, в системе с тремя степенями свободы первая и третья области должны быть связаны слабой диффузией Арнольда, благодаря которой траектория переходит из одной области в другую. Поэтому, по-видимому, и для промежуточной области $\sigma_1 \approx 0{,}03$, а $\sigma_2 \approx 0{,}008$, что противоречит данным на рис. 5.9. Это еще раз указывает на основную трудность численного определения показателей Ляпунова: не существует *априорного* условия для определения достаточного числа итераций n. Поэтому при численном моделировании необходимо использовать и другие методы, такие, например, как метод сечения Пуанкаре [1]).

§ 5.4. Диффузия в пространстве действий

В областях фазового пространства, где движение полностью или в основном стохастично (исключая небольшие изолированные островки устойчивости), его можно описывать с помощью функции распределения, зависящей только от переменных действия (или скоростей) [2]). Эта задача представляет большой практический ин-

---

[1]) См. примечание редактора на с. 315.— *Прим. ред.*

[2]) Возможность усреднения по фазам при статистическом описании зависит не только от стохастичности движения, но и от наличия в задаче двух разных масштабов времени: быстрого перемешивания (по фазам) и медленной диффузии (по переменным действия) (см. ниже по тексту). Такие масштабы были введены Боголюбовым (см. [447], т. 2, с. 99).— *Прим. ред.*

терес. Так, например, в задаче Ферми основная цель заключалась в нахождении возможного механизма ускорения космических лучей. При этом динамика фаз частиц по отношению к ускоряющим их полям не представляет сама по себе интереса и требуется только для определения среднего ускорения и энергетического распределения. Аналогично и для электронного или ионно-циклотронного резонансного нагрева плазмы физический интерес представляет скорость нагрева и распределение по энергии.

В этом параграфе мы рассмотрим возмущенное отображение поворота:

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon f(u_{n+1}, \psi_n), \tag{5.4.1а}$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + 2\pi\alpha(u_{n+1}) + \varepsilon g(u_{n+1}, \psi_n), \tag{5.4.1б}$$

где u, ψ — переменные действие — угол невозмущенного движения. В п. 5.4а дан вывод уравнения Фоккера—Планка для функции распределения $P(u, n)$ и обсуждаются условия его применимости. В п. 5.4б в приближении хаотических фаз вычисляются коэффициенты переноса. В качестве иллюстрации используются упрощенное и точное отображения Улама. В п. 5.4в получены стационарная и нестационарные функции распределения. Корреляционные поправки к коэффициентам переноса рассмотрены в п. 5.4г.

* 5.4а. Уравнение Фоккера—Планка [1])

Рассмотрим эволюцию функции распределения $P(u, n)$, ограничившись, естественно, областью сплошной стохастичности (без островков устойчивости). Примером может служить область $u \lesssim u_s$ (см. п. 3.4а и б, рис. 1.14, 3.12 и 3.13) для упрощенной модели Улама:

$$u_{n+1} = |u_n + f(\psi_n)|, \tag{5.4.2а}$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \frac{\Theta M}{u_{n+1}}, \quad \mathrm{mod}\ \Theta, \tag{5.4.2б}$$

где Θ — интервал периодичности по фазе (1 или 2π). Пусть эволюция $P(u, n)$ в такой области описывается как некоторый марковский процесс по u [424] [2]):

$$P(u, n+\Delta n) = \int P(u-\Delta u, n)\, W_t(u-\Delta u, n, \Delta u, \Delta n)\, d(\Delta u). \tag{5.4.3}$$

Здесь $W_t(u, n, \Delta u, \Delta n)$ — вероятность перехода $u \to u + \Delta u$ за

[1]) В отечественной литературе его чаще называют уравнением Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК), поскольку строгий вывод этого уравнения, условия его применимости и ковариантная формулировка даны в работах Колмогорова [503, 504].— *Прим. ред.*

[2]) См. также [62, 505].— *Прим. ред.*

«время» Δn. Предположим также, что $\Delta n \gg 1$ и $\Delta u \ll P/(dP/du)$, т. е. существует такое Δn, что [для модели (5.4.2)]

$$1 \ll \Delta n \ll \left(\frac{f_{\text{макс}}}{P}\frac{dP}{du}\right)^{-2}. \tag{5.4.4}$$

Тогда можно разложить PW_t по первому аргументу. С точностью до членов второго порядка по Δu получим

$$P(u-\Delta u)\,W_t(u-\Delta u) = P(u)\,W_t(u) - \frac{\partial(PW_t)}{\partial u}\Delta u + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(PW_t)}{\partial u^2}(\Delta u)^2.$$

Подставляя это выражение в (5.4.3) и учитывая нормировку

$$\int W_t(u,\ n,\ \Delta u,\ \Delta n)\,d(\Delta u) = 1,$$

находим уравнение ФПК

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial u}(BP) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}(DP), \tag{5.4.5}$$

где средняя скорость [1])

$$B(u) = \frac{1}{\Delta n}\int \Delta u\, W_t(u,\ n,\ \Delta u,\ \Delta n)\,d(\Delta u), \tag{5.4.6}$$

а коэффициент диффузии

$$D(u) = \frac{1}{\Delta n}\int (\Delta u)^2\, W_t(u,\ n,\ \Delta u,\ \Delta n)\,d(\Delta u). \tag{5.4.7}$$

Соотношение между коэффициентами переноса. Следуя Ландау [250], покажем, что для гамильтоновых систем [2])

$$B = \frac{1}{2}\frac{dD}{du}. \tag{5.4.8}$$

---

[1]) Имеется в виду скорость изменения переменной u. В оригинале — friction coefficient (коэффициент трения) — менее удачный термин, поскольку такое «трение» существует и в гамильтоновых системах.— *Прим. ред.*

[2]) Впервые соотношение такого рода было получено Эйнштейном в теории броуновского движения (см., например, [505], § 21). В работе Ландау использовался принцип детального равновесия, который не всегда выполняется даже и в автономной гамильтоновой системе (см. [506]). Вывод в в тексте основан на независимости вероятности перехода от фазы ψ (аналогично работе Крылова и Боголюбова, см. [447], т. 2, с. 5). Поскольку u, ψ — канонические переменные, то в последнем случае равновесное $P(u) = \text{const}$, и (5.4.8) сразу следует из (5.4.5). Такой метод получения коэффициента B оказывается наиболее удобным (см., например, [505, 464]). Значение соотношения вида (5.4.8) состоит в том, что прямое вычисление B возможно только во втором порядке теории возмущений, в то время как для D достаточно первого порядка.— *Прим. ред.*

Это позволяет записать уравнение ФПК в виде

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D}{2}\frac{\partial P}{\partial u}\right).$$

Для доказательства (5.4.8) запишем изменение u с точностью до членов, квадратичных по Δt:

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \dot{u}\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{u}(\Delta t)^2,$$

где

$$\dot{u} = -\frac{\partial H}{\partial \psi},$$

$$\ddot{u} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \psi^2}\dot{\psi} - \frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial u}\dot{u} - \frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial t}.$$

Из уравнений Гамильтона получаем

$$\ddot{u} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \psi^2}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial u}\frac{\partial H}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial t} = -\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\frac{\partial H}{\partial u}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right).$$

Отсюда для $\Delta u = u(t+\Delta t) - u(t)$ во втором порядке по Δt имеем

$$\Delta u = -\frac{\partial H}{\partial \psi}\Delta t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial H}{\partial t}\right)\right].$$

Усредняя по ψ, получаем

$$\langle \Delta u \rangle_\psi = \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial}{\partial u}\left\langle\left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^2\right\rangle_\psi.$$

Остальные члены исчезают из-за периодичности H по ψ. Аналогично во втором порядке по Δt:

$$(\Delta u)^2 = \dot{u}^2(\Delta t)^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^2(\Delta t)^2.$$

Усреднение по ψ дает

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle_\psi = (\Delta t)^2\left\langle\left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^2\right\rangle_\psi.$$

Сравнивая выражения для $\langle \Delta u \rangle_\psi$ и $\langle (\Delta u)^2 \rangle_\psi$, получаем соотношение (5.4.8).

Условия применимости уравнения ФПК. Вероятность перехода W_t зависит, конечно, не только от переменной действия u, но и от фазы ψ. Однако при достаточно большом $\Delta n \gg n_c$, где n_c — время

релаксации функции распределения по фазе, можно усреднить по ψ: $W_t(u, \psi) \to W_t(u) = \langle W_t(u, \psi)\rangle_\psi$.

Для выяснения условий такого приближения найдем прежде всего направления собственных векторов системы (5.4.2), используя линеаризованное отображение (см. п. 3.3б) с матрицей

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & f' \\ -\rho & 1-\rho f' \end{pmatrix},$$

где $\rho = \Theta M/u^2$. Для собственных векторов получаем

$$(\Delta u,\ \Delta\psi) \propto (f',\ \lambda_{1,2} - 1), \tag{5.4.9}$$

где собственные значения даются выражением (3.3.52). При $\lambda_1 \approx |\rho f'| \gg 1$ собственный вектор растяжения направлен почти по фазе ($f' \sim 1$). Последнее условие выполняется тем лучше, чем меньше u по сравнению с $u_s = (\Theta M)^{1/2}/2$.

Для оценки n_c предположим, что начальное распределение сосредоточено в узком интервале $\Delta\psi(0)$, а $\Delta u(0) = 0$. Тогда, $\Delta\psi(n) \approx \lambda_1^n \Delta\psi(0) \approx \rho^n \Delta\psi(0)$. Положив $\Delta\psi(n_c) \sim \Theta$, найдем

$$n_c \approx \frac{\ln[\Theta/\Delta\psi(0)]}{\ln\rho}, \tag{5.4.10}$$

т. е. n_c слабо зависит от начального распределения. Напротив, распределение по u остается локализованным в пределах $\Delta u(n_c) \sim \Theta/\lambda_1 \sim (u/u_s)^2 \ll u$. Поэтому можно ожидать, что при $\Delta n \gg n_c$ эволюция распределения $P(u)$ описывается уравнением ФПК[1]) с коэффициентами B и D из (5.4.6) и (5.4.7). Остаточные корреляции, однако, сохраняются по крайней мере в течение одного периода отображения. Их влияние будет рассмотрено в п. 5.4г.

Для $u > u_s$ существуют островки устойчивости, движение в которых не описывается уравнением (5.4.5). Для стохастической же компоненты, окружающей островки, простое усреднение по ψ уже неприменимо, поскольку при данном u допустимы не все значения фазы.

* 5.4б. Коэффициенты переноса

Вычислим коэффициенты переноса (5.4.6) и (5.4.7) и сравним их с результатами численного моделирования. Для отображения Улама (3.4.4) в простейшем случае[2]) $n \equiv \Delta n = 1$, и в предположении

[1]) Фактически для этого нужно (см. примечание редактора на с. 317), чтобы корреляционный масштаб времени n_c был бы много короче диффузионного масштаба $n_D \sim u^2/D \sim u^2$ [$D \sim f^2 \sim 1$, см. (5.4.2)]. Поскольку $u \lesssim u_s \sim M^{1/2}$ и $n_c \sim 1$, грубое условие диффузионного описания есть $M \gg 1$.— *Прим. ред.*

[2]) Формально при этом нарушается первое условие (5.4.4), однако оно нужно только для перехода к дифференциальному уравнению (5.4.5), но не для вычисления D.— *Прим. ред.*

о равнораспределении по фазе получаем

$$B = \int_0^1 d\psi \Delta u = 0, \qquad D = \int_0^1 d\psi\, (\Delta u)^2 = \frac{1}{12},$$

где $\Delta u\,(\psi) = \psi - 1/2$.

Этот результат, полученный в приближении случайных фаз [1]), сравнивается на рис. 5.10 с численными данными по зависимости D от n при различных начальных значениях скорости u. Значения D

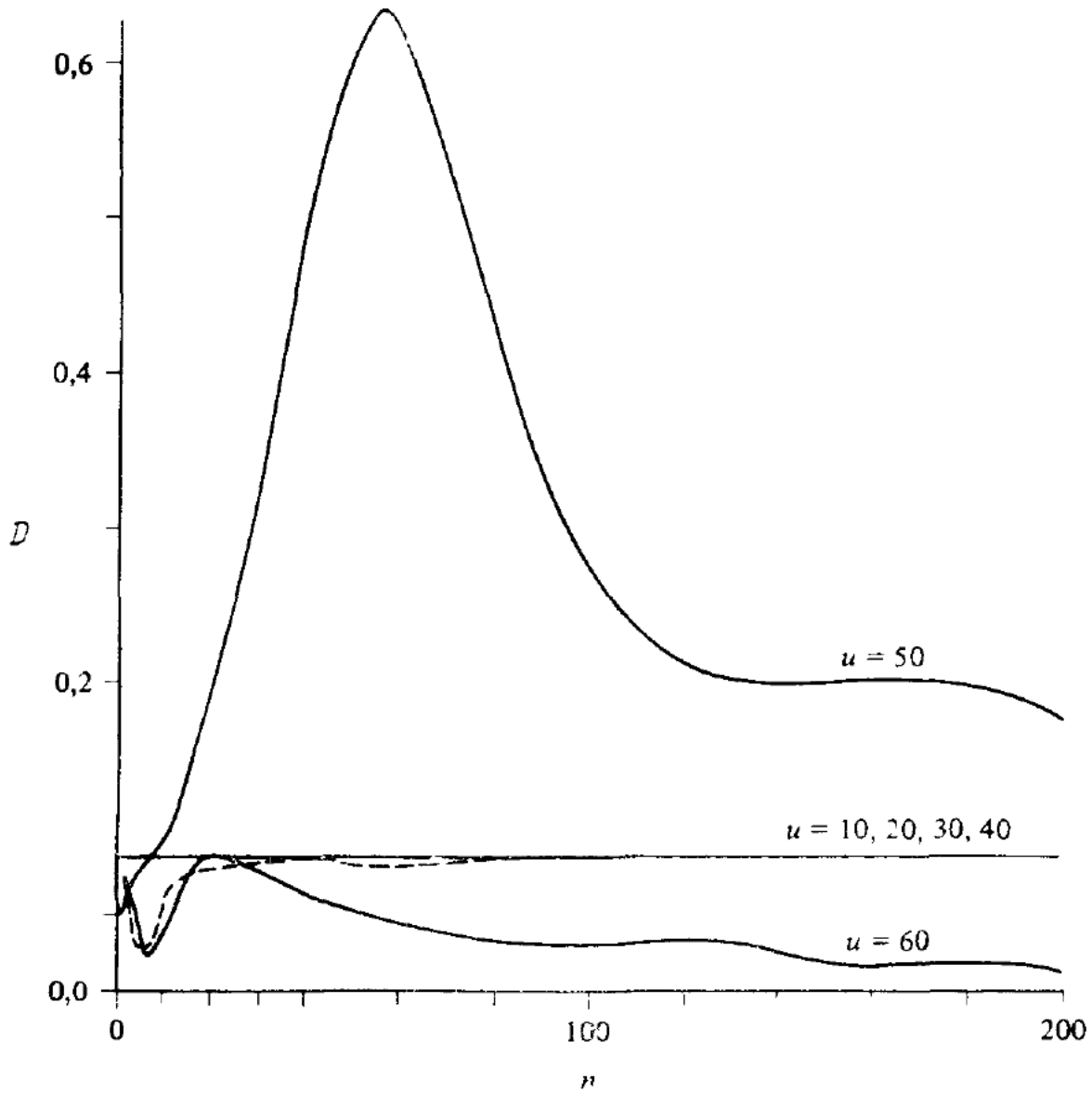


Рис. 5.10. Зависимость коэффициента диффузии D от времени для отображения (3.4.4) (по данным работы [274]).

$M = 10^1$; 10^3 траекторий с различными начальными условиями: сплошные кривые — однородное распределение по фазе; пунктирная кривая — $\Delta\psi = 10^{-3}$; $u = 30$.

находились по 1000 траекториям отображения (3.4.4) с $M = 10^4$, что соответствует $u_s = 50$. Для $u = 10$, 20, 30, 40 и однородного начального распределения траекторий по фазе вклад корреляций

[1]) Этот популярный, но неудачный термин означает на самом деле не просто случайность фазы ψ, но еще и полную статистическую независимость ее последовательных значений $\psi\,(n)$, что эквивалентно условию $n_c = 0$.— *Прим. ред.*

оказывается пренебрежимо малым, и $D(u, n) = D(u, 1) = 1/12$. Однако для $u = 50$ корреляции существенно влияют на зависимость D от n даже при $n \geq 200$. При $u = 60$ наблюдается другой эффект, связанный с тем, что часть траекторий оказывается в устойчивых областях и не дает вклада в диффузию. Наконец, в случае неравномерного начального распределения по фазе наблюдается некоторый переходный процесс, показанный пунктирной кривой на рис. 5.10 для $u = 30$ и начальной ширины распределения $\Delta\psi = 10^{-3}$. Оценка (5.4.10) дает в этом случае $n_c \approx 3$, что соответствует по порядку величины данным рис. 5.10.

При учете смещения стенки величины u, ψ не являются каноническими переменными (п. 3.4а). Перейдем поэтому к каноническим переменным E, θ. Для функции распределения по «энергии» $E = u^2$ уравнение ФПК имеет вид

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial E}(\overline{B}\overline{P}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial E^2}(\overline{D}\overline{P}), \tag{5.4.11}$$

где

$$\overline{B}(E) = \frac{1}{\Delta n}\int \Delta E \overline{W}_t d(\Delta E), \tag{5.4.12}$$

$$\overline{D}(E) = \frac{1}{\Delta n}\int (\Delta E)^2 \overline{W}_t d(\Delta E); \tag{5.4.13}$$

здесь $\overline{W}_t$ — вероятность перехода (см. п. 5.4а). Из (3.4.2а) и определения E получаем ($-F' = f$; $\Delta n = 1$):

$$\Delta E = 2E^{1/2} f + f^2.$$

Для случайных и независимых значений канонической фазы θ вероятность

$$\overline{W}_t d(\Delta E) = \frac{d\theta}{2\pi},$$

а из (3.4.2в)

$$d\psi_c = d\theta - \frac{1}{2} E^{-1/2} f d\psi_c.$$

Если, кроме того, функция $f(\psi_c)$ нечетна по ψ_c, то

$$\overline{B} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2f^2 d\psi_c. \tag{5.4.14}$$

Аналогичные вычисления дают

$$\overline{D} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (4Ef^2 + 3f^4)\, d\psi_c. \tag{5.4.15}$$

Для отображения (3.4.4) $f = \psi_c/2\pi$, откуда $\overline{B} = 1/6$ и $\overline{D} = E/3 +$

$+ 3/80$, что удовлетворяет соотношению (5.4.8). Обратный переход к переменным u, ψ дает

$$D = \overline{D}/4E, \quad B = (\overline{B} - D)/(2E^{1/2}).$$

Выражения $B = (24u)^{-1}$ и $D = 1/12$ были получены впервые Израйлевым и Ждановой [209] непосредственно из точного отображения (3.4.1) [1]). Отметим, что соотношение (5.4.8) в этом случае не выполняется из-за неканоничности переменных u и ψ. Более детальное описание дано в работе Лихтенберга и др. [272].

* 5.4в. Стационарные и нестационарные решения

Для получения стационарного решения уравнения ФПК введем полностью отражающие стенки при $u = 0$ и $u = u_s$. Буквально, это, конечно, неправильно из-за проникновения траекторий в область $u > u_s$. Однако поскольку этот процесс происходит медленно, то можно ожидать, что для значений u, достаточно малых по сравнению с u_s, решение с выбранными граничными условиями будет близко к истинному. Положив в (5.4.5) $\partial/\partial n = 0$, найдем решение в виде

$$P(u) = P(u_0)\, D(u_0)\, D^{-1}(u) \exp \int_{u_0}^{u} 2B(u')\, D^{-1}(u')\, du'. \quad (5.4.16)$$

Для $B = 0$ и $D = 1/12$ распределение оказывается однородным $P(u) = \text{const}$, а для $B = (24u)^{-1}$ и $D = 1/12$ — линейным: $P(u) = Cu$. Эти результаты согласуются с численными экспериментами Либермана и Лихтенберга ([274], рис. 12) и Израйлева и Ждановой, ([209], рис. 3). На рис. 5.11 представлены численные результаты [274] для упрощенного (сплошная кривая) и точного (пунктирная кривая) отображений Улама с $f = \psi - 1/2$. Отклонения распределений от ожидаемых в области $u < u_s = M^{1/2}/2 \approx 16$ связаны с недостаточной для установления квазиравновесного состояния длительностью счета, а также с просачиванием траекторий в область больших скоростей. С ростом u $(u > u_s)$ островки устойчивости быстро становятся преобладающими. Для точного отображения при переходе к каноническим переменным E, θ получаем однородное распределение $\overline{P}(E) = P(u)\,(du/dE) = \text{const}$.

В некоторых случаях можно также найти решение и нестационарного уравнения ФПК. Для упрощенного отображения Улама $D = 1/12$, $B = 0$ и (5.4.5) переходит в обычное диффузионное уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{1}{24} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}. \quad (5.4.17)$$

---

[1]) Небольшое различие между $D = 1/12$ и точным выражением $D = 1/12 + 3/320\, E$ [см. (5.4.15)] есть поправка второго порядка к скорости диффузии опять-таки из-за неканоничности переменных u, ψ в (3.4.1). Обычно такая поправка не учитывается.— *Прим. ред.*

В случае точного отображения, подставляя в (5.4.5) $D = 1/12$, $B = (24u)^{-1}$, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{1}{24} \frac{\partial}{\partial u} \left[u \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{P}{u} \right) \right]. \tag{5.4.18}$$

Решение этого уравнения с начальным условием $P(u, 0) = \delta(u)$ имеет вид

$$P(u, n) = \frac{12u}{n} \exp\left(-\frac{6u^2}{n} \right). \tag{5.4.19}$$

Оно справедливо, конечно, лишь до тех пор, пока траектории не начнут проникать в область $u > u_s$. Решение полной задачи с учетом переходной области с островками устойчивости оказывается очень сложным, и его можно получить только численно.

Хотя рассмотренная задача представляет сильно идеализированную модель, аналогичные результаты можно найти и для реальных динамических систем. Примером может служить задача об электрон-циклотронном нагреве в магнитных ловушках. Она подробно исследована Егером и др. [212] и Либерманом и Лихтенбергом [275]. Было показано, что нагрев можно приближенно описать системой уравнений, аналогичной (3.4.8).

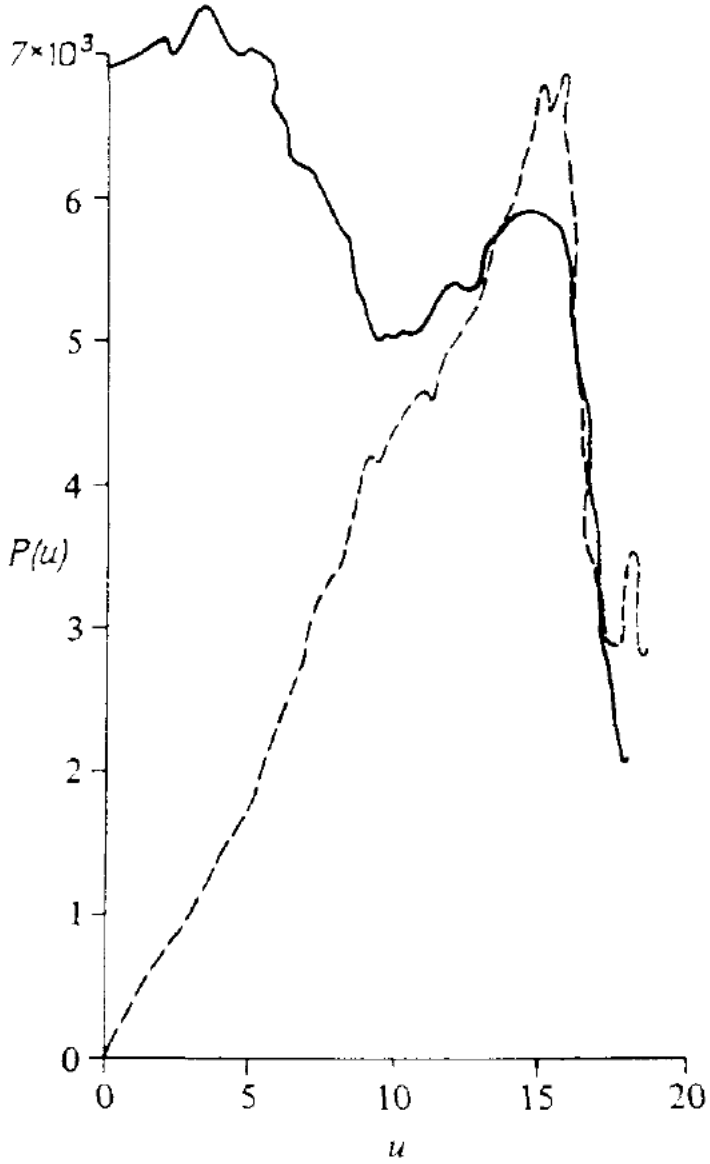


Рис. 5.11. Сравнение распределений по скорости $P(u)$ (по данным работы [274]). Сплошная кривая — упрощенное отображение Улама (3.4.4); пунктирная кривая — точное отображение Улама (3.4.1); $M = 10^3$.

5.4г. Корреляционные поправки к коэффициентам переноса [1])

В п. 5.4б коэффициенты переноса были получены в приближении хаотических фаз на одной итерации отображения ($\Delta n = 1$). Однако, как было отмечено в п. 5.4а, уравнение ФПК справедливо

[1]) В оригинале — higher-order transport corrections (поправки высшего порядка к коэффициентам переноса). Принятый в переводе термин более явно отражает природу этих поправок.— *Прим. перев.*

только при $\Delta n \gg n_c$, где n_c — число итераций, за которое происходит перемешивание по фазе. Поэтому необходимо оценить поправки к коэффициентам переноса за счет корреляций на интервале $\Delta n \sim n_c$.

Впервые такие поправки были получены для стандартного отображения Речестером и Уайтом [345] и другим методом Речестером и др. [346]. Однако их техника использует введение дополнительного внешнего шума, и мы отложим ее обсуждение до следующего параграфа. Как показано в работе [3], эти же методы можно использовать и без введения шума.

Хотя такая техника применялась пока только к довольно простым системам типа стандартного отображения, она является весьма интересной, и мы изложим ее достаточно подробно, следуя Абарбанелю. Он показал также [2], что этот же метод можно применить к задаче о взаимодействии частицы с волной большой амплитуды (п. 2.2б). Поскольку, как обсуждалось в п. 4.1б (см. также [272]), стандартное отображение локально описывает широкий класс систем, можно надеяться, что полученные для него результаты будут качественно применимы и в более общем случае.

Представление Фурье. Для одной итерации стандартного отображения

$$\Delta I_1 = K \sin \theta_0 \tag{5.4.20}$$

и коэффициенты переноса равны

$$F_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta I_1 d\theta_0 = 0, \tag{5.4.21а}$$

$$D_1 = \frac{D}{2} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta I_1)^2 d\theta_0 = \frac{K^2}{4}. \tag{5.4.21б}$$

Это приближение часто называют квазилинейным [1]).

Для получения корреляционных поправок вычислим коэффициент диффузии

$$D_n = \frac{\langle (\Delta I_n)^2 \rangle_{I_n, \theta_n}}{2n}. \tag{5.4.22}$$

Введем вероятность W перехода $I_0, \theta_0 \to I_n, \theta_n$ за n итераций. Тогда

$$D_n = \frac{1}{2n} \int W(I_n, \theta_n, n \mid I_0, \theta_0, 0)(I_n - I_0)^2 dI_n d\theta_n. \tag{5.4.23}$$

---

[1]) Множитель 1/2 в уравнении ФПК (5.4.5) включен здесь в определение квазилинейного коэффициента диффузии.

Нам потребуется свойство рекуррентности:

$$W(I,\ \theta,\ n\,|\,I_0,\ \theta_0,\ 0)=\int dI'd\theta' W(I,\ \theta,\ n\,|\,I',\ \theta',\ n-1)\times$$
$$\times W(I',\ \theta',\ n-1\,|\,I_0,\ \theta_0,\ 0), \qquad (5.4.24)$$

где из уравнений отображения

$$W(I,\ \theta,\ n\,|\,I',\ \theta',\ n-1)=\delta(I-I'-K\sin\theta')\,\delta(\theta-\theta'-I'-K\sin\theta'). \qquad (5.4.25)$$

Вычисление D_n непосредственно из (5.4.23) — (5.4.25) быстро становится слишком громоздким. Такую процедуру можно провести для $n=2$; она приводит к интересным осцилляциям D_2 в зависимости от I_0, хотя и не ясно, какое значение мог бы иметь этот эффект. Для бо́льших n необходимо найти метод, который становился бы проще с ростом n. Как мы увидим, это можно сделать с помощью фурье-представления.

Представим W в виде ряда Фурье по θ и интеграла Фурье по I:

$$W(I,\ \theta,\ n\,|\,I_0,\ \theta_0,\ 0)=\sum_m\int dq\exp(im\theta+iqI)\,a_n(m,\ q), \qquad (5.4.26)$$

где коэффициенты a_n зависят также от I_0 и θ_0.

Нас интересует значение D_n при больших n. Поскольку I_n растет как $\sqrt{n}$, то для $n\gg 1$ в (5.4.23) можно сохранить только член с I_n^2:

$$D_n=\frac{1}{2n}\int d\theta dI I^2 W(I,\ \theta,\ n\,|\,I_0,\ \theta_0,\ 0). \qquad (5.4.27)$$

После подстановки (5.4.26) в (5.4.27) и интегрирования по θ остается только член с $m=0$. Замена I^2 на $-\partial^2 e^{iqI}/\partial q^2$ и двойное интегрирование по частям (по q) приводит к выражению

$$D_n=-\frac{2\pi}{2n}\int dq dI e^{iqI}\frac{\partial^2}{\partial q^2}[a_n(0,\ q)]. \qquad (5.4.28)$$

Интеграл по I дает $2\pi\delta(q)$. После интегрирования по q получаем

$$D_n=-\frac{4\pi^2}{2n}\left.\frac{\partial^2 a_n(0,\ q)}{\partial q^2}\right|_{q=0}. \qquad (5.4.29)$$

Выведем теперь рекуррентное соотношение для a_n, которое потребуется нам для вычисления (5.4.29). Из (5.4.26)

$$a_n(m,\ q)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\theta dI\exp(-im\theta-iqI)\,W(I,\ \theta,\ n\,|\,I_0,\ \theta_0,\ 0). \qquad (5.4.30)$$

Для $n=0$ положим

$$W=\delta(I-I_0)\,\delta(\theta-\theta_0), \qquad (5.4.31)$$

$$a_0=\frac{1}{(2\pi)^2}\exp(-iqI_0-im\theta_0). \qquad (5.4.32)$$

При $n>0$, подставляя (5.4.24) в (5.4.30), получаем

$$a_n(m, q)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\theta dI \exp(-im\theta-iqI)\times$$

$$\times\int d\theta' dI'\delta(I-I'-K\sin\theta')\,\delta(\theta-\theta'-I'-K\sin\theta')\times$$

$$\times\int dq'\sum_{m'}\exp(im'\theta'+iq'I')\,a_{n-1}(m', q'). \qquad (5.4.33)$$

Интегрируя по θ и I', находим

$$a_n(m, q)=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{m'}\int dq' d\theta' dI a_{n-1}(m', q')\times$$

$$\times\exp[-im(\theta'+I)-iqI+iq'(I-K\sin\theta')+im'\theta']. \qquad (5.4.34)$$

Интегрирование по I дает

$$2\pi\delta(-m-q+q'),$$

что позволяет взять интеграл по q':

$$a_n(m, q)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m'}\int d\theta' a_{n-1}(m', \tilde{q})\times$$

$$\times\exp\left[i(m'-m)\theta'-i\tilde{q}K\sin\theta'\right], \qquad (5.4.35)$$

где

$$\tilde{q}=q+m. \qquad (5.4.36)$$

Используя разложение

$$\exp(i\tilde{q}K\sin\theta')=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_l(|\tilde{q}|K)\exp(il\theta'\operatorname{sgn}(\tilde{q})),$$

где $\operatorname{sgn}(x)=1$ для $x\geqslant 0$ и $\operatorname{sgn}(x)=-1$ для $x<0$, а $\mathcal{J}_l$ — функция Бесселя, получаем после интегрирования по θ'

$$a_n(m, q)=\sum_{l, m'}\mathcal{J}_l(|\tilde{q}|K)\,\delta_k(m'-m-l\operatorname{sgn}(\tilde{q}))\,a_{n-1}(m', \tilde{q}). \qquad (5.4.37а)$$

Здесь $\delta_k(m)=1$ при $m=0$ и $\delta_k(m)=0$ при $m\neq 0$. Проведя суммирование по m', находим рекуррентные соотношения:

$$a_n(m_n, q_n)=\sum_{l_n}\mathcal{J}_{l_n}(|q_{n-1}|K)\,a_{n-1}(m_{n-1}, q_{n-1}), \qquad (5.4.37б)$$

$$m_n=m_{n-1}-l_n\operatorname{sgn}(q_{n-1})\quad [\text{из } \delta_k \text{ в } (5.4.37а)], \qquad (5.4.38а)$$

$$q_n=q_{n-1}-m_n\quad [\text{из } (5.4.36)]. \qquad (5.4.38б)$$

Итерируя (5.4.37б) n раз, получаем выражение для a_n через a_0:

$$a_n(m_n, q_n)=\sum_{l_n, \ldots, l_1}\mathcal{J}_{l_n}\mathcal{J}_{l_{n-1}}\ldots\mathcal{J}_{l_1}a_0(m_0, q_0). \qquad (5.4.39)$$

Фурье-траектории. Согласно (5.4.38), набор n целых чисел $\{l_n, \ldots, l_1\}$ определяет некоторую траекторию на плоскости

Фурье (m, q). Из (5.4.29) следует, что в коэффициент диффузии D_n дают вклад только те из них, которые оканчиваются в точке $m_n = 0$ и $q_n = 0$. Типичная траектория показана на рис. 5.12, *а*.

Аргументы функций Бесселя равны $K|q_i|$, и если $q_i \neq 0$, то при $K \to \infty$ $\mathcal{J}_l \sim K^{-1/2}$. Поэтому при больших K основной вклад дают члены с $q_i \to 0$. Наибольший [1]) из них соответствует всем $l_i = 0$. Согласно (5.4.38), его фурье-траектория длины n является неподвижной точкой вблизи начала координат (рис. 5.12, *б*). В этом случае

$$a_n(0, q) = \frac{1}{(2\pi)^2}[\mathcal{J}_0(Kq)]^n e^{-iql_0}. \qquad (5.4.40)$$

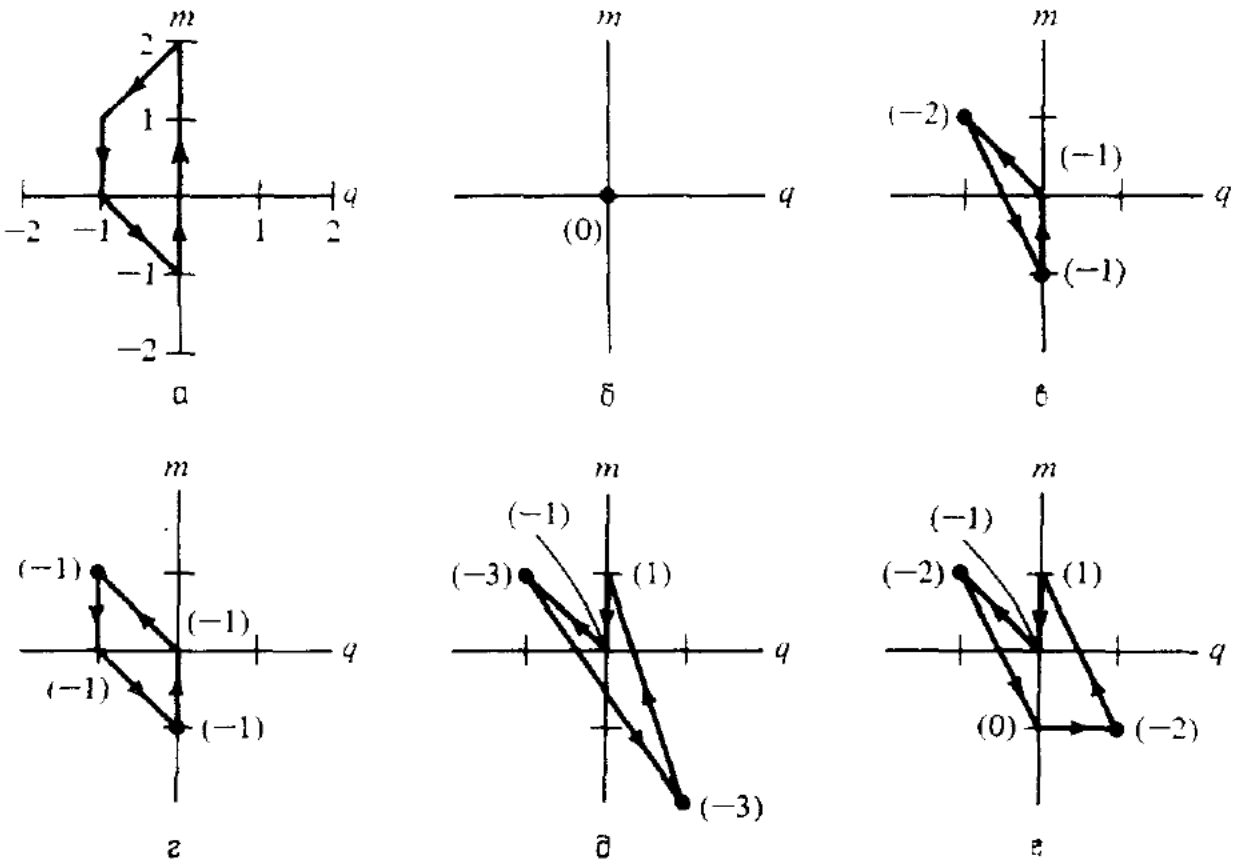


Рис. 5.12. Фурье-траектории.

а — типичная траектория, оканчивающаяся в точке $(m, q) = (0, -0)$; *б* — квазилинейная неподвижная точка $(0, -0)$; *в* — траектория поправки порядка $K^{-1/2}$; *г*–*е* — траектории поправок порядка K^{-1}. Числа в скобках указывают значения l_n в соответствующих точках (m, q).

Подставляя это выражение в (5.4.29) и разлагая $\mathcal{J}_0$ до квадратичных членов, получим при $n \gg 1$

$$D_n = D_1 = \frac{K^2}{4},$$

т. е. квазилинейный результат (5.4.21б) [2]).

---

[1]) Это не очевидно заранее из-за взятия производной в (5.4.29). Поэтому необходимо проанализировать также члены с $l = 1$ и $l = 2$ (см. ниже).— *Прим. ред.*

[2]) Формально он не зависит от n, однако выражение (5.4.29) получено в предположении $n \gg 1$.— *Прим. ред.*

Для вычисления поправок к этому значению рассмотрим другие фурье-траектории. Главные поправки соответствуют траекториям, наименее уклоняющимся от начала координат. Имеются две траектории, возвращающиеся в начало координат через три шага [1]), начиная с произвольного номера r. Из (5.4.38) [2]) имеем $m_1 + m_2 = 0$ или $m_1 = \pm 1$; $m_2 = \mp 1$. Первая из траекторий показана на рис. 5.12, *в*. Значения l для $q_r = 0^+$ получаются из (5.4.38а) и указаны на рисунке. Вклад этой траектории в величину a_n определяется из (5.4.39):

$$a_n = \frac{1}{(2\pi)^2} [\mathcal{J}_0(Kq)]^{n-3} \mathcal{J}_{-1}(K|q_r|) \times$$
$$\times \mathcal{J}_{-2}(K|q_{r+1}|\mathcal{J}_{-1}(K|q_{r+2}|) e^{-iql_0}.$$

Учитывая, что $|q_r| = |q_{r+2}| = q$ и $|q_{r+1}| = 1$, получаем

$$a_n = \frac{1}{(2\pi)^2} [\mathcal{J}_0(Kq)]^{n-3} [\mathcal{J}_1(Kq)]^2 \mathcal{J}_2(K) e^{-iql_0}. \qquad (5.4.41)$$

Вторая траектория получается поворотом первой (рис. 5.12, *в*) на 180° и дает точно такой же вклад в a_n. Для больших n существует $2n$ траекторий, соответствующих $r = 1, 2, \ldots, n_0$. Суммируя их вклады и оставляя в разложении (5.4.41) по q только члены с q^2, находим

$$a_n(0, q) = \frac{2n}{(2\pi)^2} \frac{K^2 q^2}{4} \mathcal{J}_2(K). \qquad (5.4.42)$$

Вместе с (5.4.40) это дает

$$D_n = \frac{K^2}{2} \left[\frac{1}{2} - \mathcal{J}_2(K) \right]. \qquad (5.4.43)$$

В пределе больших K и n второй член дает малую поправку к квазилинейному приближению. Действительно, из асимптотического представления $\mathcal{J}_2(K)$

$$D_n = \frac{K^2}{2} \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi K}} \cos\left(K - \frac{5\pi}{4} \right) \right] \qquad (5.4.44)$$

видно, что поправка имеет порядок $K^{-1/2}$.

Аналогичным образом можно найти траектории, дающие поправки $\sim K^{-1}$. К ним относятся траектории на рис. 5.12, *г*, *д*, *е*, получающиеся из них поворотом на 180°. Окончательный результат с точностью до поправок порядка K^{-1} включительно имеет вид

$$D_n = \frac{K^2}{2} \left[\frac{1}{2} - \mathcal{J}_2(K) + \mathcal{J}_2^2(K) + \mathcal{J}_3^2(K) - \mathcal{J}_1^2(K) \right]. \qquad (5.4.45)$$

---

[1]) Из (5.4.38) легко видеть, что возврат через два шага невозможен.— *Прим. ред.*

[2]) Траектории с $|m_1| > 1$ дают меньшие поправки.

Он был получен Речестером и Уайтом [345] (без члена $\mathcal{J}_2^2$)[1]). Заметим также, что разность $\mathcal{J}_3^2 - \mathcal{J}_1^2$ имеет порядок K^{-2} и превышает точность (5.4.45).

Речестер и Уайт получили также численную зависимость коэффициента D_{50} от K по 3000 траекторий. Их результаты представ-

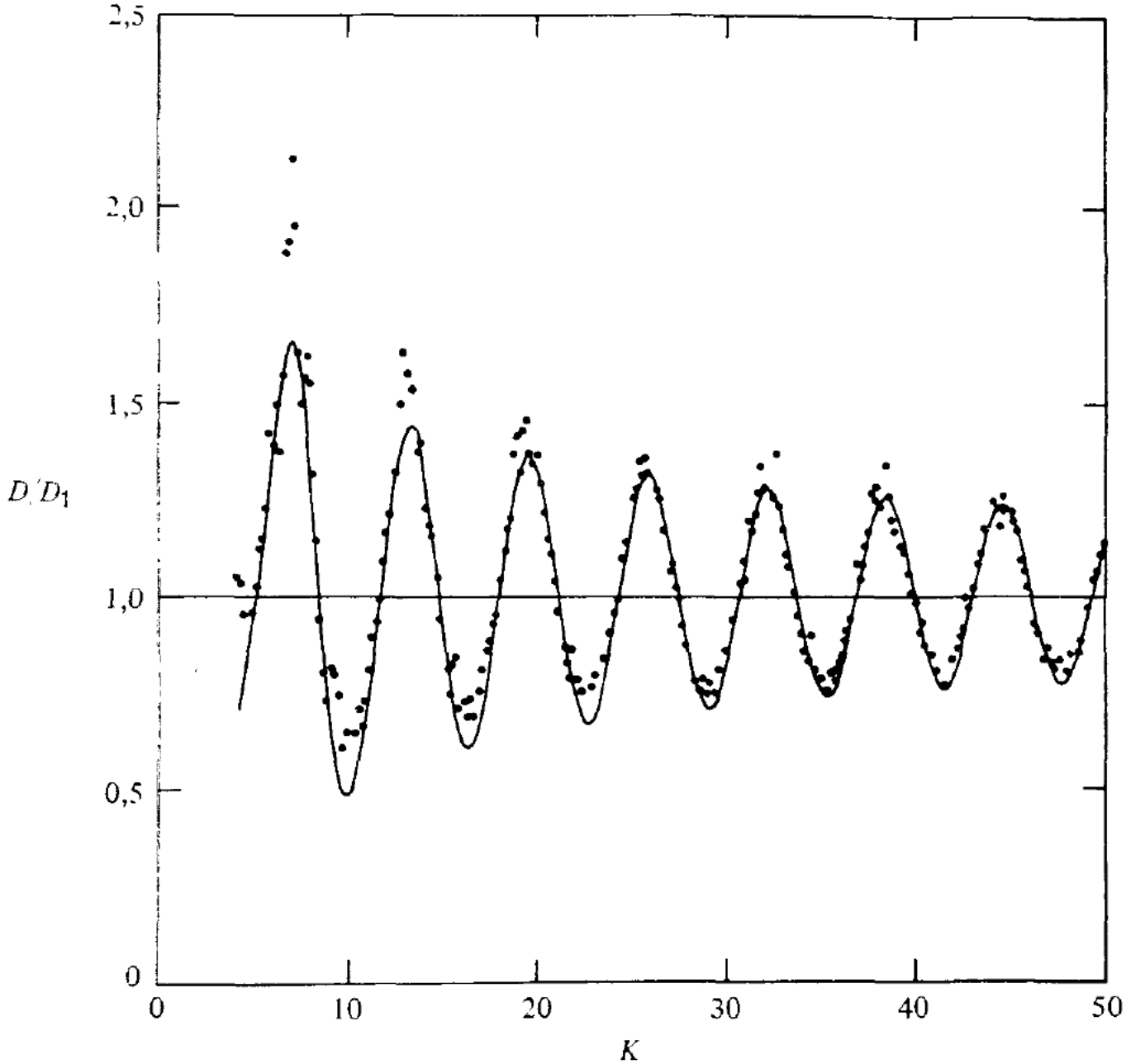


Рис. 5.13. Зависимость скорости диффузии D/D_1 от параметра K стандартного отображения (по данным работы [345]).
Точки — численный эксперимент; кривая — теория.

лены на рис. 5.13. Точки соответствуют численным значениям D_{50}, нормированным на квазилинейный коэффициент диффузии $K^2/4$. Сплошная кривая соответствует зависимости (5.4.45) без слагаемого [2]) $\mathcal{J}_2^2$. Осцилляции в зависимости $D(K)$ впервые были заме-

[1]) Эта ошибка была исправлена авторами в работе [346].— *Прим. ред.*

[2]) Для больших K основной эффект от этого члена сводится к небольшому сдвигу кривой вверх. Отметим, что численный счет производился в присутствии малого внешнего шума (см. § 5.5).

чены Чириковым [70]. Следует ожидать, что при $K<4$ роль областей устойчивости станет существенной и необходимо будет учитывать большее число фурье-траекторий. Для $K<1$ стохастические области ограничены и $D_n \to 0$ при $n \to \infty$. Чтобы сгладить сингулярности, связанные со сложной структурой фазовой плоскости, Речестер и Уайт ввели небольшой внешний шум, влияние которого мы рассмотрим в следующем параграфе. Можно надеяться, что такой подход обеспечит сходимость суммы по всем фурье-траекториям и позволит в принципе найти точное значение D. Здесь возникает, однако, другая трудность. Карни и соавторы [223] показали, что $D \to \infty$ для тех значений K, при которых существуют ускорительные режимы движения (см. п. 4.1б). Связано это с тем, что для некоторых начальных условий величина I изменяется со временем монотонно, а не диффузионно, т. е. значительно быстрее, и соотношение (5.4.45) становится неприменимым (см. также [54]) [1]). В стандартном отображении ускорительные режимы появляются при $K \geqslant 2\pi$. Их влияние видно на рис. 5.13 как повышение D вблизи нескольких первых максимумов. Аналогичные результаты были получены Кари и Мейсом [53] для другого отображения.

§ 5.5. Влияние внешнего шума

5.5а. Введение

В § 5.4 было показано, что сильное перекрытие резонансов приводит к *внутренней диффузии* с такой же скоростью, как если бы фазы возмущения были случайными. Это эквивалентно сильной *внешней диффузии*, вызываемой посторонним по отношению к системе источником шума. Для задачи о взаимодействии волна — частица, например, это соответствует большому числу сильных нескоррелированных волн, как предполагается в квазилинейной теории. Таким образом, в пределе сильной стохастичности внутренняя и внешняя диффузии похожи друг на друга [2]).

---

[1]) Асимптотический характер описанного метода (вычисления D_n при $n \to \infty$) обманчив. На самом деле реально [например, в (5.4.45)] можно учесть лишь несколько близких ($n \sim 1$) корреляций $C(n) = \langle \sin\theta_0 \sin\theta_n \rangle$. Как показано в работе [54] (см. также [464]) прямым вычислением $C(n)$, соотношение (5.4.45) включает фактически только две из них: $C(2) = -\mathcal{J}_2/2$ и $C(4) \approx \mathcal{J}_2^2/2$ ($C(1) = 0$; $C(3) = (\mathcal{J}_3^2 - \mathcal{J}_1^2)/2 \sim |K|^{-2}$). Вопрос об асимптотическом поведении $C(n)$ при $n \to \infty$ является очень сложным. При наличии границы стохастичности в фазовом пространстве (например, островки устойчивости) корреляции затухают очень медленно, как $C(n) \propto n^{-p}$; $p<1$. При этом простое диффузионное описание может оказаться неприменимым, если $D_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Сумма (5.4.39) в этом случае расходится. Обсуждение этих вопросов см. в работах [507, 508, 485] и в предисловии редактора перевода.— *Прим. ред.*

[2]) Наиболее существенное отличие между ними — сохранение энергии в случае внутренней диффузии в автономной системе.— *Прим. ред.*

Однако в том случае, когда внешнее случайное воздействие мало по сравнению с внутренним возмущением в самой системе, необходимо исследовать их совместное действие. Если, например, слабый внешний шум действует на систему в устойчивой области, то траектория движения не останется, конечно, на гладкой инвариантной кривой. Однако скорость изменения интегралов движения будет определяться при этом, вообще говоря, лишь слабым шумом [1]). Такая устойчивость существенна как для реальных физических систем, всегда подверженных действию шума, так и при численном моделировании с его неустранимыми ошибками счета.

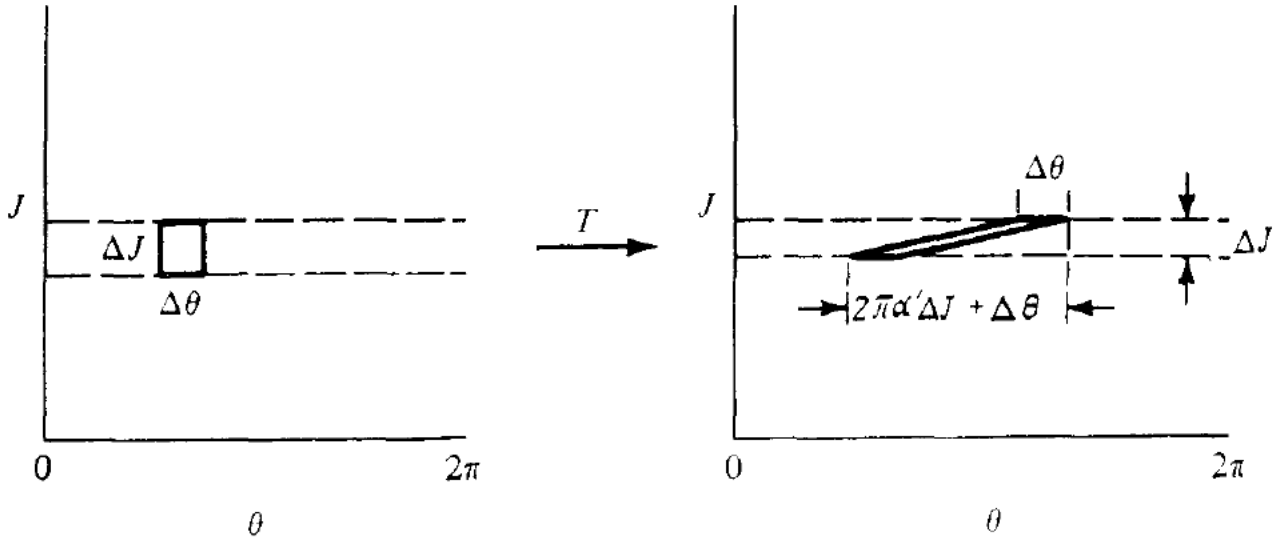


Рис. 5.14. Расплывание фазовой ячейки для интегрируемой системы на примере отображения поворота.

Линейный сдвиг происходит вдоль инвариантных кривых (пунктирные линии); ср. рис. 5.5.

Описанная выше устойчивость основана на том, что малое возмущение приводит к расходимости близких траекторий в основном вдоль, а не поперек инвариантных поверхностей. Покажем это на примере отображения поворота (3.1.8)

$$J_{n+1} = J_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha\,(J_{n+1}).$$

Пусть (рис. 5.14) близкие начальные условия равны J и $J + \Delta J$. Тогда

$$\theta_1'(J) = \theta_0 + 2\pi\alpha\,(J),$$

$$\theta_1\,(J + \Delta J) = \theta_0 + 2\pi\alpha\,(J + \Delta J) \approx \theta_0 + 2\pi\alpha\,(J) + 2\pi\alpha'\Delta J.$$

Таким образом, продольный (по отношению к инвариантной кривой $J = \text{const}$) размер параллелограмма на рисунке

$$\theta_1\,(J + \Delta J) - \theta_1\,(J) = 2\pi\alpha'\Delta J$$

растет линейно с n, в то время как поперечный размер ΔJ остается

[1]) Вообще говоря, это не так, см. п. 6.3б.— *Прим. ред.*

неизменным. Грин [165] получил аналогичный результат для другого примера, показав, что начальный круг ошибок преобразуется в сильно вытянутый эллипс, большая ось которого направлена вдоль инвариантной кривой.

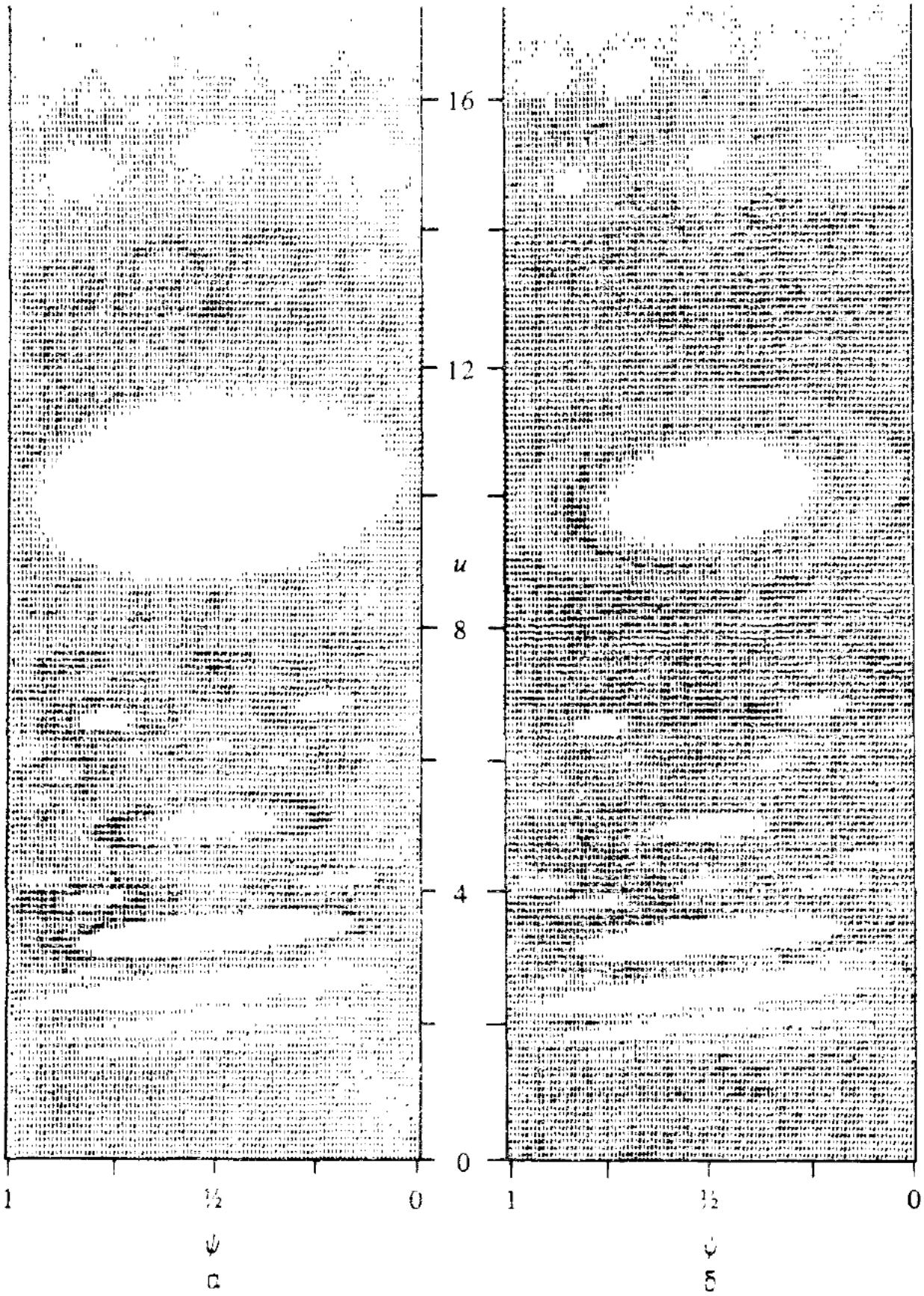


Рис. 5.15. Фазовая плоскость (u, ψ) для отображения Улама со слабым внешним шумом (5.5.1) (по данным работы [274]).

Случайный скачок фазы $\Delta\psi$ равномерно распределен в интервале $|\Delta\psi| < 0{,}005$; $M = 10$; *а* — 10 240 итераций; *б* — 20 480 итераций для одной траектории.

Указанное обстоятельство позволяет получать миллионы итераций отображения без значительной диффузии инвариантных кривых [1]). Тем не менее эта диффузия налагает некоторые ограничения на точность определения границы стохастичности.

Для двумерных отображений Либерман и Лихтенберг [274] численно исследовали медленную диффузию под действием шума на примере упрощенного отображения Улама (3.4.4):

$$u_{n+1} = | u_n + \psi_n - 1/2 |, \tag{5.5.1а}$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + M/u_{n+1} + \Delta\psi, \qquad \mathrm{mod}\ 1, \tag{5.5.1б}$$

где $\Delta\psi$ — дополнительный случайный сдвиг фазы. Если $\Delta\psi$ принимает любые значения во всем интервале [0, 1], то движение сведется к случайным блужданиям независимо от динамического фазового сдвига M/u_{n+1}. Именно это и наблюдалось при численном моделировании. Для $\Delta\psi \ll 1$, что соответствует слабому случайному возмущению, области устойчивости также постепенно заполняются траекторией. Это, однако, происходит значительно медленнее, чем само движение в этих областях. На рис. 5.15 показан пример такого движения для $-0{,}005 < \Delta\psi < 0{,}005$. При таком слабом шуме время диффузии в глубь островков устойчивости значительно превышает период колебаний внутри них. Как видно из рис. 5.15, мелкие островки почти заполнены траекторией, а крупные — лишь немного деформированы. Интересно отметить, что более заполненные зоны возникают внутри устойчивых областей. Это является следствием вре́менного «захвата» траектории в этой области под действием шума. Такие зоны повышенной плотности появляются и в стохастической компоненте вокруг островков устойчивости. На достаточно большом временно́м интервале, определяемом статистикой заполнения, все эти неоднородности должны исчезнуть.

5.5б. Диффузия в присутствии резонансов

За достаточно большое время резонансы могут оказать сильное влияние на диффузию даже под действием слабого шума. Так, например, если в системе есть большие (неперекрывающиеся) резонансы, то малое внешнее возмущение может перевести траекторию с нерезонансной инвариантной кривой на резонансную. Пусть время между внешними «толчками» велико по сравнению с периодом фазовых колебаний. Тогда следующий толчок может произойти уже

---

[1]) Пример подобной диффузии вследствие ошибок округления приведен в работе [73, § 5]. Любопытно отметить, что скорость диффузии оказалась на два порядка меньше, чем для случайных ошибок той же величины. — *Прим. ред.*

на другой стороне резонанса. При этом характерный коэффициент диффузии в окрестности резонанса значительно возрастет [1]):

$$D \sim (\Delta I)^2/\tau, \tag{5.5.2}$$

где ΔI — ширина резонанса, а τ — время между двумя случайными толчками. Однако если значительные области фазового пространства не содержат больших резонансов, то, как будет видно, малая скорость нерезонансной диффузии существенно подавляет глобальную диффузию.

Скорость диффузии. В присутствии слабого случайного возмущения скорость диффузии для стандартного отображения была получена аналитически Речестером и Уайтом [345] и Речестером и др. [346]. В последней работе был введен метод фурье-траекторий, описанный в предыдущем параграфе. Покажем, как следует видоизменить метод п. 5.4г, чтобы учесть случайное возмущение. Введем в стандартное отображение случайное изменение фазы ξ:

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n, \tag{5.5.3а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} + \xi_n, \tag{5.5.3б}$$

где ξ имеет гауссово распределение с дисперсией σ:

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma}\right). \tag{5.5.4}$$

Тогда вероятность перехода (5.4.25) принимает вид

$$W(I, \theta, n \mid I', \theta', n-1) = \int d\xi p(\xi) \delta(I - I' - K \sin \theta') \times$$
$$\times \delta(\theta - \theta' - I' - K \sin \theta' - \xi). \tag{5.5.5}$$

Подставив это выражение в (5.4.33) и проинтегрировав по θ и I', получим (5.4.34) с дополнительным множителем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} p(\xi)\, d\xi = \exp\left(-\frac{1}{2} m^2 \sigma\right). \tag{5.5.6}$$

В результате вместо (5.4.37б) приходим к следующему рекуррентному соотношению:

$$a_n(m_n, q_n) = \sum_{l_n} \mathcal{J}_{l_n}(|q_{n-1}| K) \exp\left(-\frac{1}{2} m_n^2 \sigma\right) a_{n-1}(m_{n-1}, q_{n-1}). \tag{5.5.7}$$

---

[1]) Нижеследующее выражение в точности совпадает с оценкой Будкера (см. [509], с. 50), который первым обратил внимание на такой механизм динамического усиления диффузии. Впоследствии это явление получило название неоклассической диффузии, теория которой была развита Галеевым и Сагдеевым [510].— *Прим. ред.*

Используя фурье-траектории, изображенные на рис. 5.12, *б—е*, получаем коэффициент диффузии

$$D_n = \frac{K^2}{2}\left[\frac{1}{2} - \mathcal{J}_2(K)\,e^{-\sigma} + \mathcal{J}_2^2(K)\,e^{-2\sigma} + \mathcal{J}_3^2(K)\,e^{-3\sigma} - \mathcal{J}_1^2(K)\,e^{-\sigma}\right], \tag{5.5.8}$$

который обобщает соотношение (5.4.45), учитывая влияние внешнего шума при $K \gg 1$.

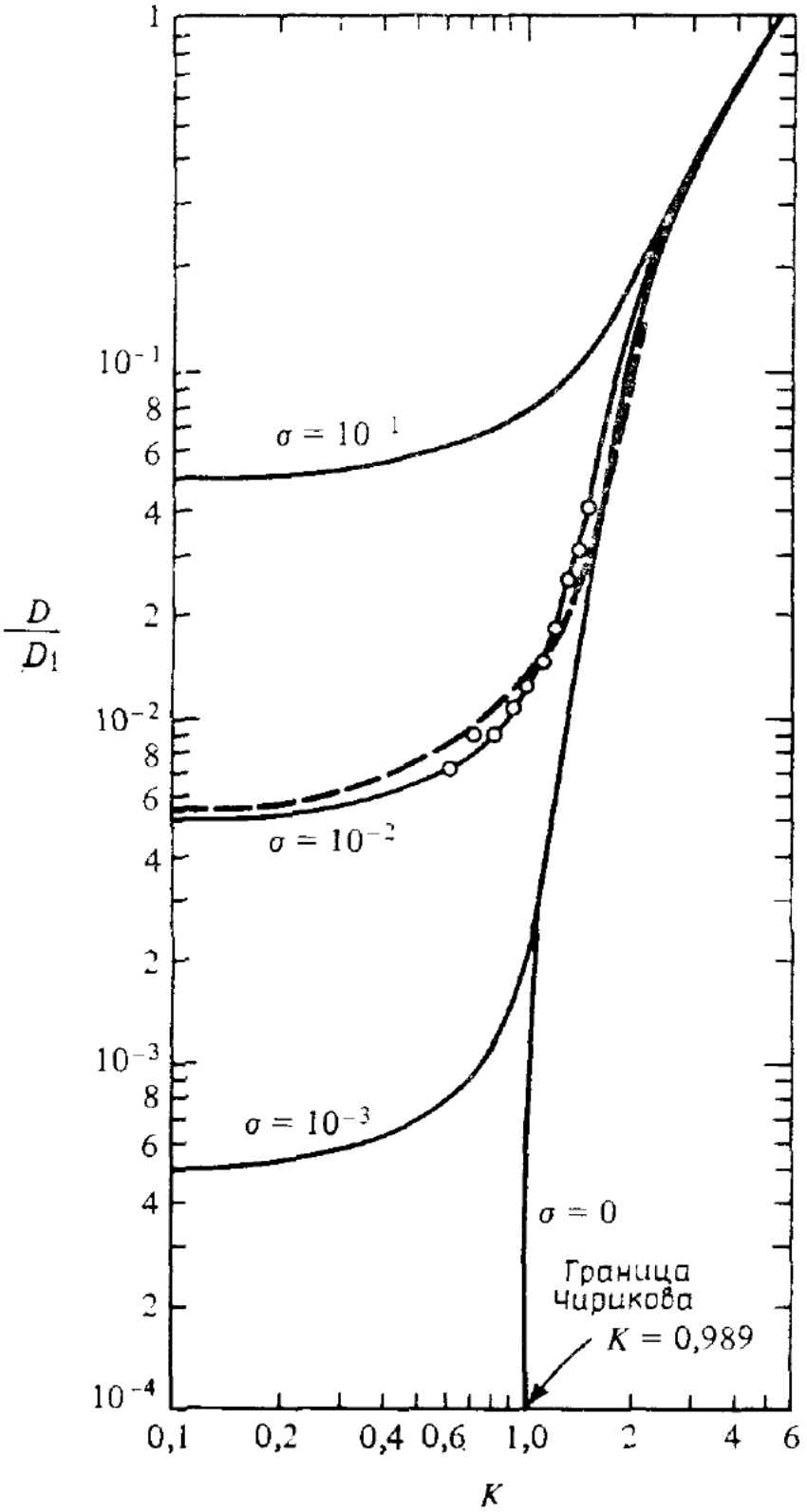


Рис. 5.16. Зависимость скорости диффузии D/D_1 от K для различных условий внешнего шума σ (по данным работы [346]).

Сплошные кривые — метод фурье-траекторий; пунктирная кривая — оценка (5.5.14); кружки — численный счет ($\sigma = 10^{-2}$).

Более интересным является случай $K \ll 1$. Речестер и др. [346] показали, что в низшем порядке по K вклад в коэффициент диффузии дают только фурье-траектории с $l = 0$ и $l = 1$, причем для

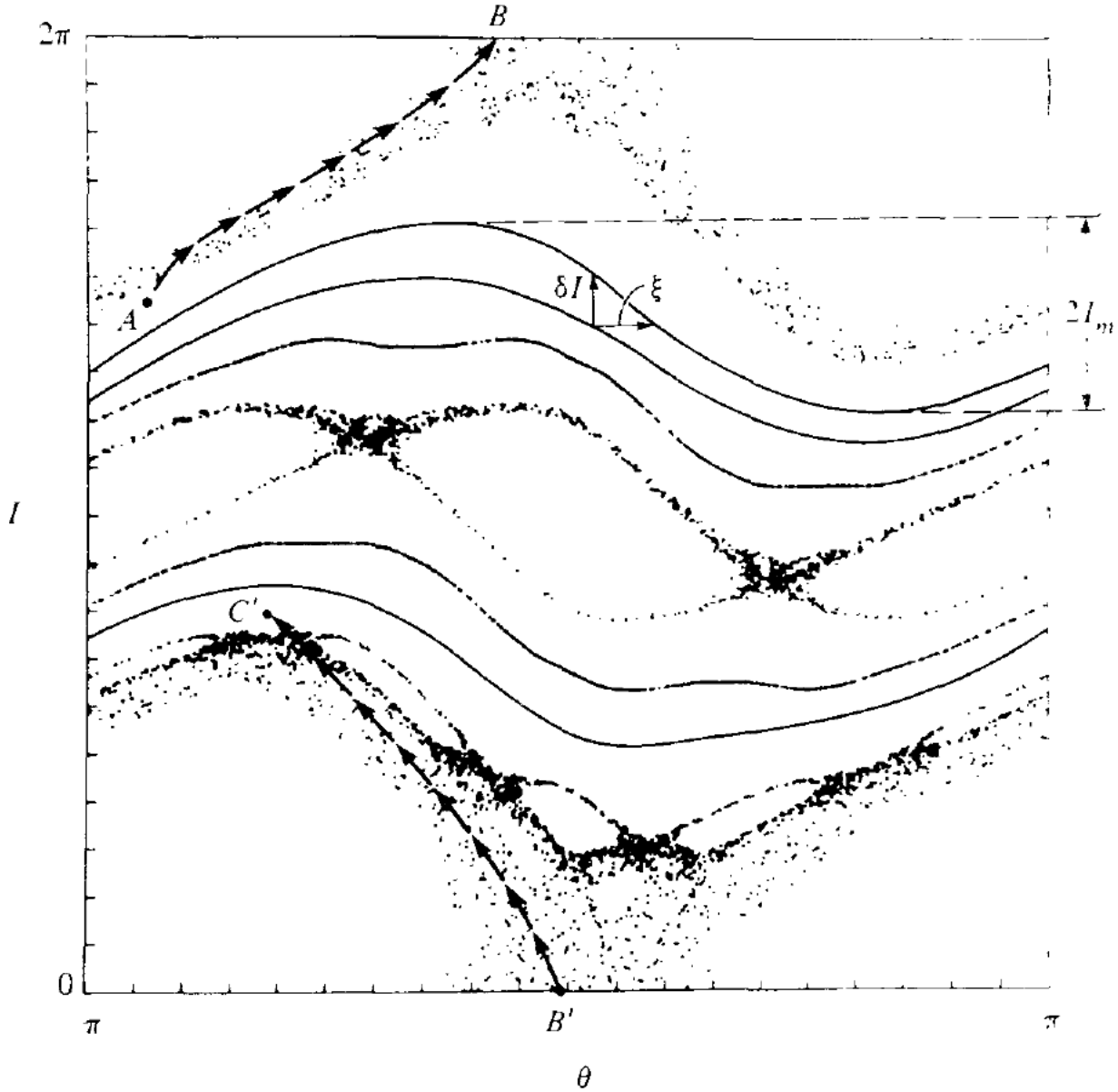


Рис. 5.17. Фазовая плоскость стандартного отображения.
Стрелками показана типичная траектория, приводящая к усилению внешней диффузии при $K \lesssim 1$.

$n \gg (2/K)^2$ эти траектории должны начинаться и заканчиваться в точке $m = 0$, $q = 0$. В результате они получили

$$\frac{D_n}{D_1} = \operatorname{th}\left(\frac{\sigma}{2}\right), \tag{5.5.9}$$

где $D_1 = K^2/4$ — квазилинейный коэффициент диффузии. Для определения поправок к D_n было проведено численное суммирование по многим фурье-траекториям. На рис. 5.16 эти результаты (сплошные кривые) сравниваются с данными численного моделирования (кружки). Для малых K значения D сходятся к (5.5.9), а для больших K величина D не зависит от σ. Для нас представляет интерес область $K \lesssim 1$, где инвариантные кривые препятствуют развитию внутренней глобальной стохастичности.

Качественно эти результаты можно получить из следующих простых соображений (рис. 5.17). Прежде всего заметим, что изменение фазы θ на величину $\xi \ll 1$ приводит, как это следует из (5.5.3), к изменению действия

$$\delta I = | I_m \cos\theta | \xi. \tag{5.5.10}$$

Усреднение по распределению (5.5.4) и по θ дает

$$\langle (\delta I)^2 \rangle = \frac{1}{2} I_m^2 \sigma. \tag{5.5.11}$$

Принимая $I_m \approx K/2$, получаем коэффициент диффузии

$$D \approx \langle (\delta I)^2 \rangle = \frac{K^2}{8} \sigma, \tag{5.5.12}$$

что совпадает при малых σ и K с (5.5.9) [1]).

Вообще говоря, необходимо еще учесть усиление диффузии на резонансах. Пусть, например, траектория попадает под действием шума в стохастический слой целого резонанса в точке A, затем идет вдоль слоя $A \to B\ (B') \to C'$ и покидает резонанс в точке C'. Если полупериод фазовых колебаний T (3.5.23) мал по сравнению с $1/\sigma$ (что справедливо для малых σ и $K \sim T \sim 1$), то область фазового пространства, в которой идет диффузия, сокращается на ширину резонанса. Заметим, что диффузия траектории $A \to C'$ может идти либо наружу от резонанса, как рассмотрено выше, либо внутрь резонанса. В последнем случае средняя скорость диффузии падает. Таким образом, имеются две группы траекторий: быстрые, проходящие резонанс, и медленные, которые захватываются в резонанс. В качестве простой оценки примем, что отношение средних скоростей диффузии для двух групп траекторий обратно пропорционально квадрату интервала диффузии

$$\frac{D_f}{D_s} = \frac{(2\pi)^2}{(2\pi - 2K^{1/2})^2}, \tag{5.5.13}$$

где, согласно (4.1.29), ширина целого резонанса на рис. 5.17 равна $2K^{1/2}$, и мы пренебрегаем влиянием других резонансов. Примем далее, что половина траекторий, попадающих на границу резонанса (в точке A), совершает полпериода фазовых колебаний (от A до C') и половина из них выходит из резонанса (в точке C'). Таким образом, четверть всех траекторий проходит резонанс и попадает в группу быстрых траекторий. Эффективный коэффициент диффузии равен

$$D_{\text{эфф}} = \frac{1}{4} D_f + \frac{3}{4} D_s. \tag{5.5.14}$$

Используя для D_s выражение (5.5.12), получаем с учетом (5.5.13) результат, показанный на рис. 5.16 пунктирной кривой. Несмотря на грубость оценки, она дает разумные значения даже для $K \gtrsim 1$,

[1]) Приведенная оценка справедлива лишь по порядку величины, и ее совпадение с (5.5.9) случайно [см. ниже (5.5.18)].— *Прим. ред.*

где внутренняя стохастичность становится глобальной. Связано это с тем, что если K незначительно превышает критическое значение $K = 1$, то средняя скорость диффузии по-прежнему определяется шумом, поскольку внутренняя диффузия является очень медленной. Другой более эффективный механизм усиления внешней диффузии резонансами будет рассмотрен в п. 6.3б.

Усреднение коэффициента диффузии. Согласно оценке (5.5.14), средняя скорость диффузии близка к медленной между резонансами, если только они не занимают значительную часть фазового пространства. Это связано с непрерывностью диффузионного потока, так что градиент плотности больше там, где локальная скорость диффузии меньше, и обратно. Рассмотрим некоторый стационарный поток Γ в области ΔI с переменным коэффициентом диффузии. В каждом небольшом интервале с постоянной скоростью диффузии имеет место следующее соотношение для функции распределения P:

$$-\Gamma = D(I)\frac{dP}{dI} \equiv \langle D\rangle\left\langle\frac{dP}{dI}\right\rangle. \tag{5.5.15}$$

Последнее равенство определяет средние по области значения D и dP/dI. Таким образом,

$$\frac{1}{\langle D\rangle}\frac{dP}{dI} = \frac{1}{D(I)}\left\langle\frac{dP}{dI}\right\rangle, \tag{5.5.16}$$

и усреднение по интервалу ΔI дает

$$\frac{1}{\langle D\rangle}\frac{1}{\Delta I}\int\frac{dP}{dI}dI = \left\langle\frac{dP}{dI}\right\rangle\frac{1}{\Delta I}\int\frac{dI}{D(I)},$$

или

$$\frac{1}{\langle D\rangle} = \frac{1}{\Delta I}\int\limits_{\Delta I}\frac{dI}{D(I)}. \tag{5.5.17}$$

Это соотношение показывает, что $\langle D\rangle$ определяется в основном теми областями, в которых величина $1/D$ максимальна, т. е. $D(I)$ минимальна.

Возвращаясь к оценке скорости медленной диффузии (5.5.12), мы видим, что ее можно сделать более аккуратно, если найти зависимость $I_m(I)$ и усреднить по I:

$$\frac{1}{\langle D_s\rangle} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dI}{\frac{1}{2}I_m^2(I)\,\sigma}. \tag{5.5.18}$$

В заключение подчеркнем различие между усреднением диффузии по различным траекториям и усреднением по фазовому пространству. В первом случае усредняется сам коэффициент диффузии D, а во втором — его обратное значение $1/D$.

Глава 6

МНОГОМЕРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

*§ 6.1. Резонанс многомерных колебаний

В системах, близких к интегрируемым, резонансы окружены, как мы уже знаем, стохастическими слоями. Однако в случае двух степеней свободы сохранение энергии ограничивает движение вдоль слоя. В поперечном же направлении слои изолированы друг от друга инвариантными поверхностями.

Системы с тремя и более степенями свободы отличаются двумя существенными особенностями:

1. Стохастические слои пересекаются друг с другом, образуя в фазовом пространстве единую всюду плотную «паутину».

2. Сохранение энергии не препятствует движению вдоль слоев в пределах энергетической поверхности. Поэтому за достаточно большое время траектория, переходя от слоя к слою, охватывает всю энергетическую поверхность, подходя сколь угодно близко к любой ее точке.

Основной механизм внутренней диффузии вдоль стохастических слоев называется *диффузией Арнольда* по имени открывшего ее В. И. Арнольда [12]. Диффузия Арнольда является универсальной в том смысле, что не существует критической величины возмущения, необходимой для ее возникновения, хотя скорость диффузии стремится к нулю при уменьшении возмущения. Численные исследования проведены во многих работах (см., например, [68, 139—143]); сравнение с теоретическими моделями в простейшем случае взаимодействия трех резонансов обсуждается в работах [68, 70, 146] [1]).

Хотя обычно диффузию Арнольда рассматривают в отсутствие перекрытия резонансов [2]) [70], похожая диффузия происходит и при перекрытии группы резонансов, причем в последнем случае скорость диффузии резко возрастает [3]). Хорошей иллюстрацией обоих режимов является модельная задача о колебаниях шарика между плоской и периодически гофрированной в двух направлениях стенками. Эта система, похожая на отображение Улама с дополнительной степенью свободы, была исследована Теннисоном и др. [406].

---

[1]) См. также работу [475].— *Прим. ред.*

[2]) Имеются в виду первичные резонансы.— *Прим. ред.*

[3]) Однако она перестает быть универсальной, т. е. появляется порог по возмущению (см. ниже п. 6.2г).— *Прим. ред.*

Примером диффузии вдоль слоя перекрывающихся резонансов является *модуляционная диффузия* (п. 6.2г). В этом случае медленные колебания одной из основных частот приводят к появлению «боковых» резонансов, которые могут перекрываться в определенной области параметров. Эта диффузия не универсальна, т. е. существует определенная величина возмущения, ниже которой боковые резонансы не перекрываются. Интересно отметить, что перекрытие возможно, даже если частота модуляции мала по сравнению с модулируемой частотой. Этот результат, казалось бы, противоречит интуитивному представлению об адиабатическом поведении в таком случае [1]). Возможно, что модуляционная диффузия существенна для динамики пучков в накопительных кольцах [211, 404] [2]).

Диффузия вдоль стохастических слоев может быть связана не только с внутренней динамикой системы, но и с внешним шумом, эффект которого значительно усиливается на резонансах (§ 6.3). Подобная диффузия рассматривалась Чириковым [71] и Теннисоном [405]. Важным примером диффузии в многомерной системе в присутствии шума является движение частиц в тороидальных магнитных полях. Мы рассмотрим эту задачу в § 6.4 и проведем сравнение теоретических выводов с результатами численного моделирования.

В § 6.5 кратко обсуждаются системы с очень большим числом степеней свободы, среди которых есть примеры как регулярного, так и стохастического поведения.

* 6.1а. Геометрия резонансов

Рассмотрим интегрируемую систему с N степенями свободы, гамильтониан которой имеет вид

$$H_0 = H_0(\boldsymbol{I}),$$

где $\boldsymbol{I}$—N-мерный вектор переменных действия. Движение в $2N$-мерном фазовом пространстве $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\theta})$ происходит по поверхности N-мерного тора и определяется N-мерным вектором фаз $\boldsymbol{\theta}$, канонически сопряженным вектору $\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{I}(t) = \boldsymbol{I}_0, \quad \boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I})\, t + \boldsymbol{\theta}_0, \tag{6.1.1}$$

где $\omega_j(\boldsymbol{I}) = \partial H_0/\partial I_j$ — невозмущенные частоты.

Пространство переменных действия. На рис. 6.1 представлено «N-мерное» пространство переменных действия. Невозмущенная

---

[1]) См. примечание редактора на с. 367.— *Прим. ред.*

[2]) Следует различать модуляционную диффузию вдоль резонансов многомерной системы (п. 6.2г) от понижения порога перекрытия и последующей диффузии поперек резонансов вследствие низкочастотной модуляции в системе. Обе цитированные работы относятся именно ко второму (более простому) эффекту, который рассматривался также в работах [68, 467]. — *Прим. ред.*

энергетическая поверхность определяется в этом пространстве с помощью условия $H_0(I) = \alpha$. Если, например,

$$H_0 = \sum_{j=1}^{N} I_j^2, \tag{6.1.2}$$

то эта поверхность является сферой.

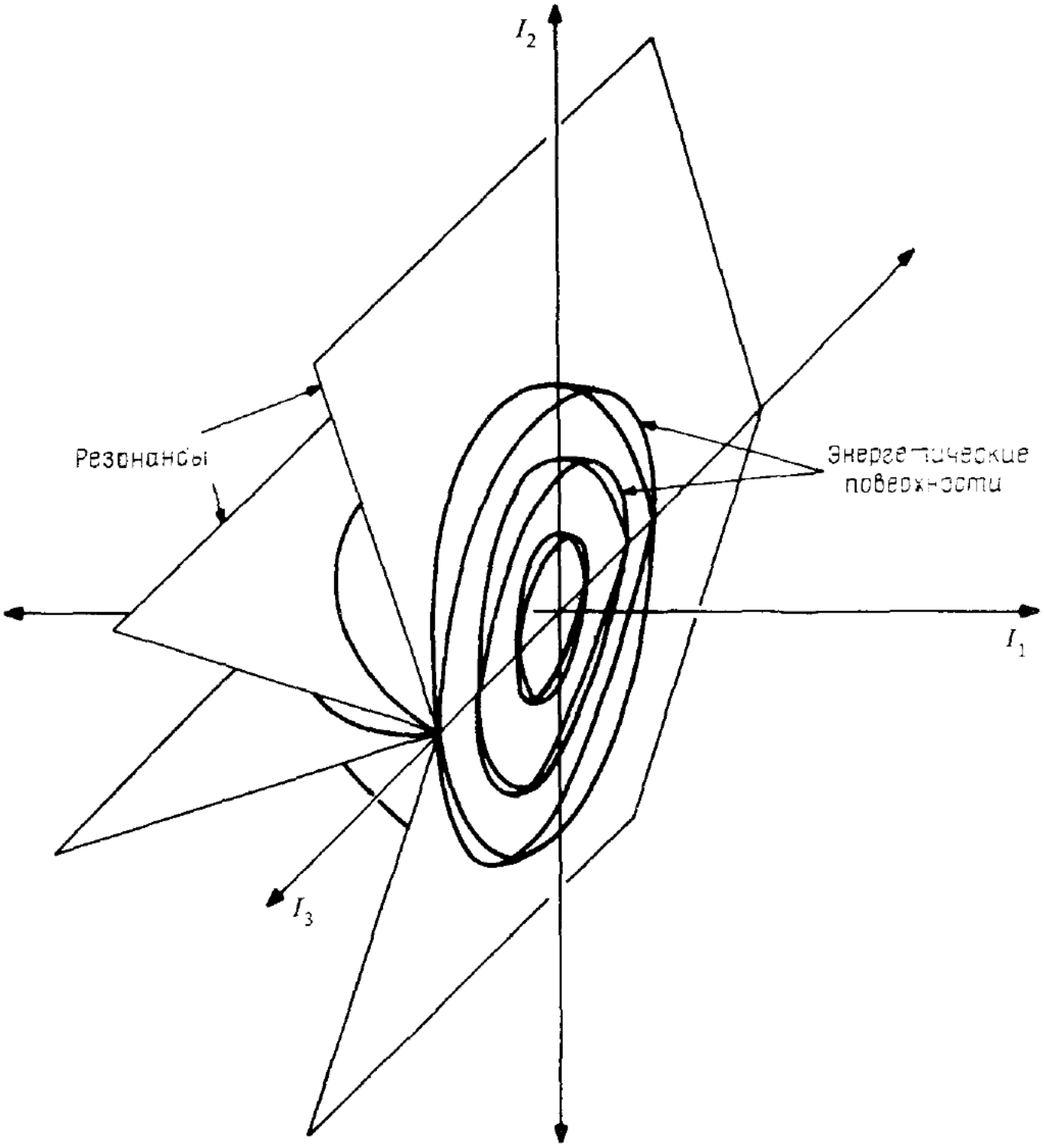


Рис. 6.1. Пространство переменных действия невозмущенного гамильтониана (6.1.2) (по данным работы [276]).
Показаны энергетические поверхности (сферы) и резонансные поверхности (плоскости).

Определим $(N-1)$-мерную резонансную поверхность посредством условия

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\omega}(I) = 0, \tag{6.1.3}$$

где $\boldsymbol{m}$ называется вектором резонанса и имеет целочисленные компоненты. Так как $\boldsymbol{m}$ может быть любым, то резонансные поверхности всюду плотны в пространстве переменных действия. Для квадратичного гамильтониана (6.1.2) несколько резонансных поверхностей показано на рис. 6.1.

Рассмотрим теперь влияние малого периодического по θ возмущения:

$$H = H_0(\boldsymbol{I}) + \varepsilon H_1(\boldsymbol{I}, \theta), \qquad H_1 = \sum_k V_k(\boldsymbol{I})\, e^{i\boldsymbol{m}_k\cdot\theta}, \tag{6.1.4}$$

где суммирование производится по всем $\boldsymbol{m}_k$. Уравнения Гамильтона для $\boldsymbol{I}$ имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{I}} = -\partial H/\partial\theta = -i\varepsilon \sum_k \boldsymbol{m}_k V_k e^{i\boldsymbol{m}_k\cdot\theta}. \tag{6.1.5}$$

Следовательно, каждая компонента возмущения возбуждает колебания $\boldsymbol{I}$ в направлении $\boldsymbol{m}_k$. Для большинства компонент колебания не будут резонансными, т. е. $\boldsymbol{m}_k\cdot\theta(t) \neq \mathrm{const}$, поэтому соответствующая амплитуда колебаний $\boldsymbol{I}$ будет порядка ε. Однако для некоторых $k = R$ возможен резонанс:

$$\boldsymbol{m}_R\cdot\theta(t) = \theta_R = \mathrm{const}, \tag{6.1.6}$$

где θ_R — резонансная фаза. Тогда амплитуда колебаний в направлении $\boldsymbol{m}_R$ имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$ (§ 2.4).

В качестве примера на рис. 6.2 изображены некоторые из резонансных и энергетических поверхностей для гамильтониана

$$H_0 = I_1^2 + (6I_2)^2. \tag{6.1.7}$$

В этом случае, согласно (6.1.3), резонансными поверхностями являются линии:

$$m_1 I_1 + 36 m_2 I_2 = 0. \tag{6.1.8}$$

Отметим, что так как при резонансе

$$\boldsymbol{m}_R \cdot \frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{I}} = 0, \tag{6.1.9}$$

то вектор $\boldsymbol{m}_R$ лежит на невозмущенной энергетической поверхности. Вообще говоря, вектор $\boldsymbol{m}_R$ не перпендикулярен резонансной поверхности (см. пунктирный прямоугольник на рис. 6.2). Именно в этом случае резонанс существенно усиливает действие внешнего шума (§ 6.3). Из рис. 6.2 видно также, что резонансные поверхности не пересекаются на поверхности постоянной (ненулевой) энергии. Эта особенность типична для систем с двумя степенями свободы.

Для трех и более степеней свободы резонансные поверхности, вообще говоря, пересекаются, как показано на рис. 6.3, *а* для гамильтониана (6.1.2) с $N = 3$. Резонансными поверхностями являются здесь плоскости, проходящие через начало координат и пересекающиеся по прямым линиям. Они пересекают также сферические поверхности постоянной энергии $H_0(I) = \alpha$ и пересекаются между собой на этих поверхностях. В местах пересечения возможны переходы с одного резонанса на другой. Пересечения резонансов с энергетической поверхностью образуют сложную единую сеть, или паутину Арнольда, часть которой показана на рис. 6.3, *б* для резонансов с $|m_j| \leqslant 2$.

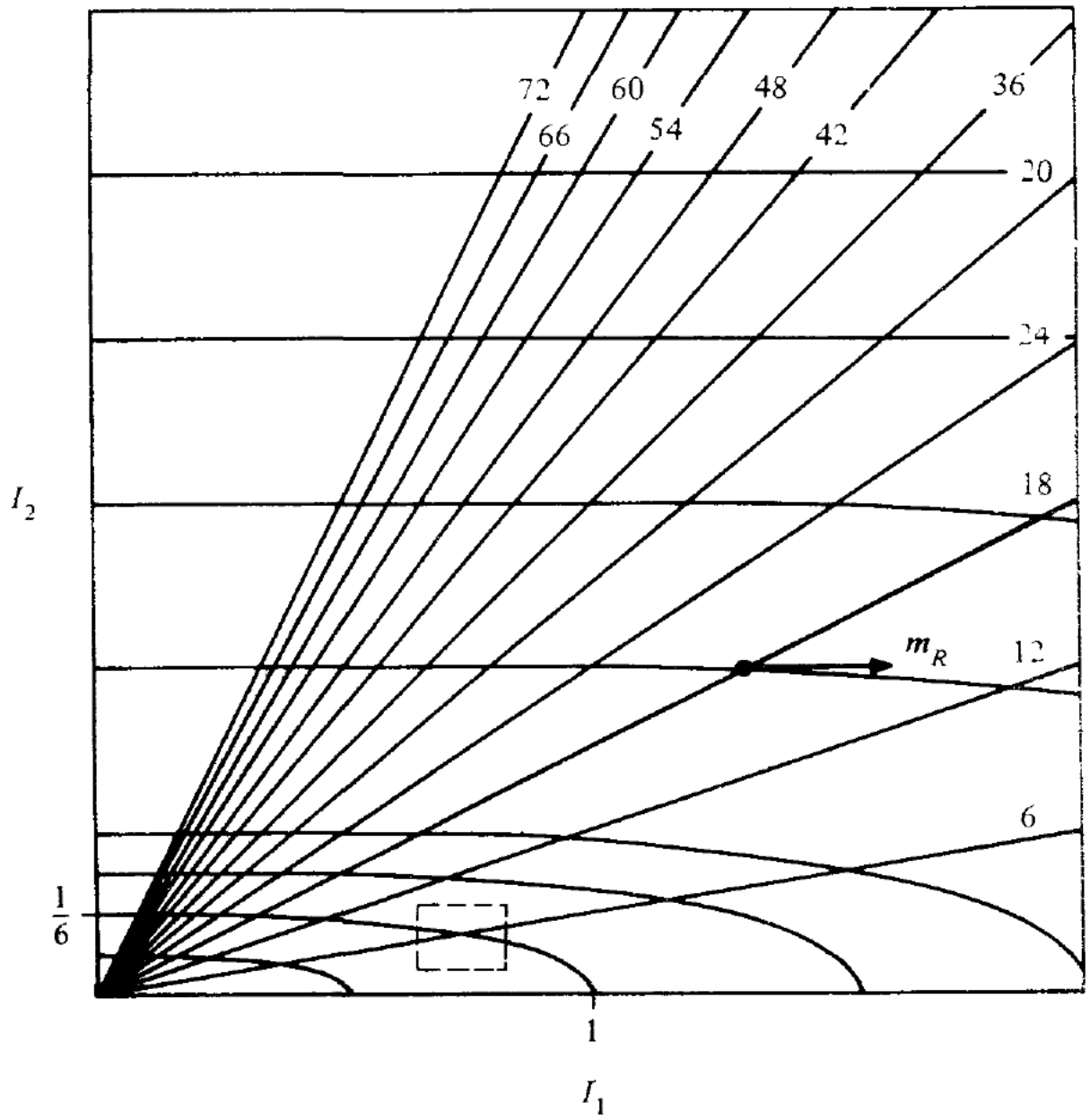
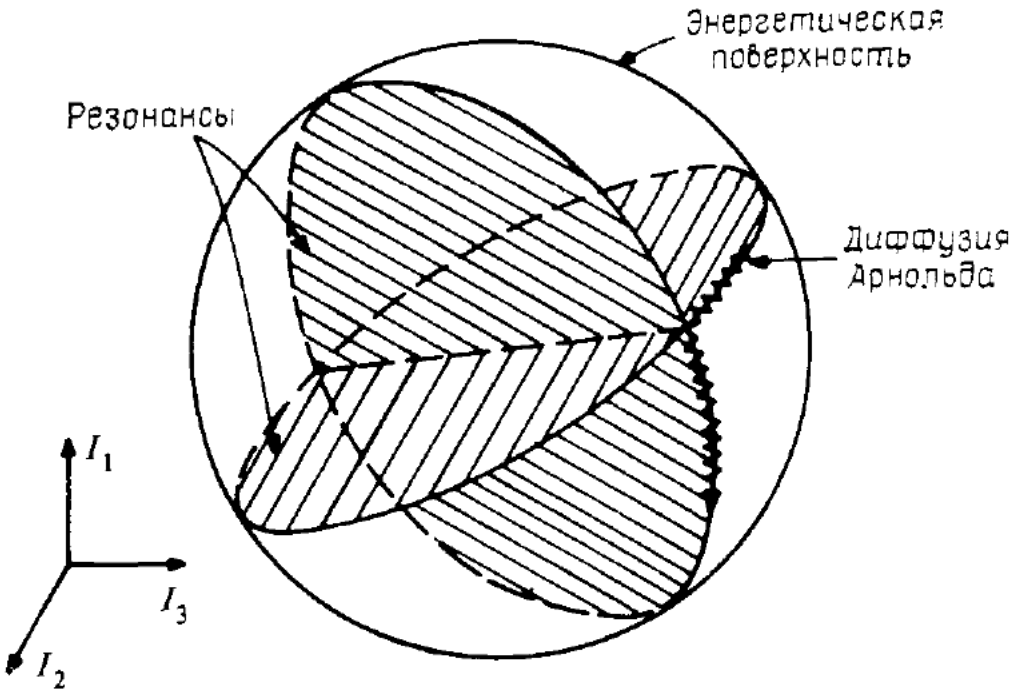


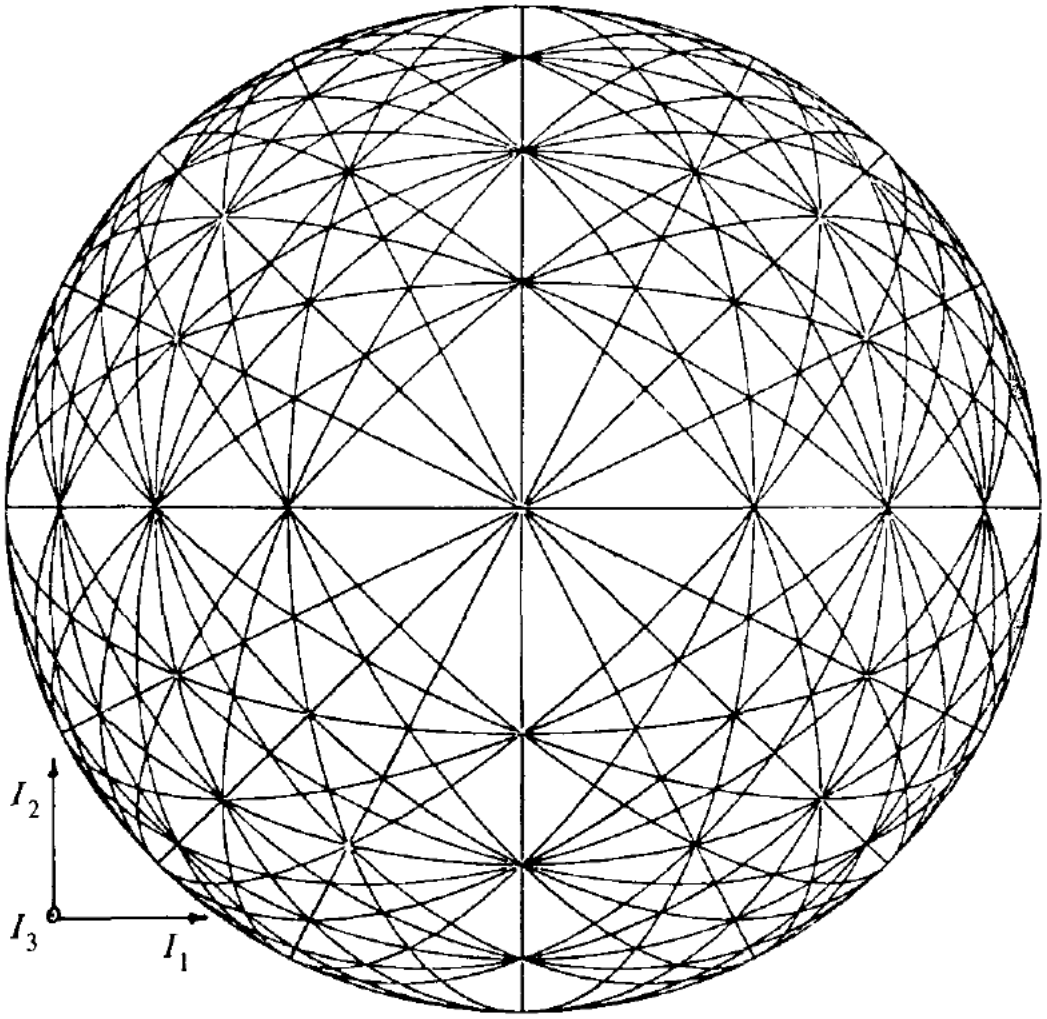
Рис. 6.2. Линии резонансов (прямые) и линии постоянной энергии (эллипсы) для гамильтониана (6.1.7) (по данным работы [405]).

Числа на прямых — значения m_1 в (6.1.8) при $m_2 = 1$. Обведенная пунктиром область показана в увеличенном виде на рис. 6.16.

В $2N$-мерном фазовом пространстве резонансы (6.1.3) образуют $(2N-1)$-мерные поверхности. Инвариантные же поверхности, определяемые соотношением $I = \text{const}$, являются N-мерными. Усло-



а



б

Рис. 6.3. Топология диффузии Арнольда.

а — диффузия (волнистая линия) переходит с одной резонансной поверхности на другую по линии пересечения их с энергетической поверхностью (по данным работы [276]); *б* — «паутина» Арнольда на энергетической поверхности; показаны только некоторые из резонансов (по данным работы [406]).

вие пересечения стохастических слоев можно получить теперь геометрически. Если $N \geqslant 3$, то $(2N-1)$-мерные резонансные поверхности не изолированы друг от друга N-мерными инвариантными поверхностями (см. рис. 1.16). Схема стохастического слоя представлена также на рис. 1.17, где резонансная переменная $I_R = J_1$ характеризует фазовые колебания на резонансе, а остальные $(N-1)$ переменные действия представлены величиной $J_2 = I_S$ и описывают движение *вдоль* слоя.

Особенность движения вдоль стохастического слоя можно пояснить следующим образом. Пусть полная энергия сохраняется, так что

$$\Delta H = \Delta H_0 + \varepsilon H_1 = 0,$$

причем для резонансной переменной

$$\Delta I_R \sim \varepsilon^{1/2}. \tag{6.1.10}$$

Тогда для трех степеней свободы

$$\frac{\partial H_0}{\partial I_R}\Delta I_R + \frac{\partial H_0}{\partial I_{S_1}}\Delta I_{S_1} + \frac{\partial H_0}{\partial I_{S_2}}\Delta I_{S_2} \sim \varepsilon. \tag{6.1.11}$$

Изменения переменных I_{S_1} и I_{S_2} вдоль слоя могут быть большими и ограничены [с учетом (6.1.10)] только условием

$$\frac{\partial H_0}{\partial I_{S_1}}\Delta I_{S_1} + \frac{\partial H_0}{\partial I_{S_2}}\Delta I_{S_2} \sim \varepsilon^{1/2}.$$

В случае же двух степеней свободы ($\Delta I_{S_2} \equiv 0$) из (6.1.10) и (6.1.11) следует

$$\Delta I_S \sim \varepsilon^{1/2},$$

т. е. смещение вдоль стохастического слоя мало.

* 6.1б. Примеры диффузии Арнольда

Возможность неограниченного движения вдоль резонанса доказана Арнольдом [12] на примере гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\left(I_R^2 + I_S^2\right) + \varepsilon\left(\cos\theta_R - 1\right)\left(1 + \mu\sin\theta_S + \mu\cos t\right).$$

При $\mu = 0$ и $\varepsilon \neq 0$ существуют два интеграла движения:

$$H_R = \frac{1}{2} I_R^2 + \varepsilon\cos\theta_R = \text{const},$$

причем последний из них описывает резонанс. Возмущение ($\mu \neq 0$) приводит к образованию стохастического слоя вокруг сепаратрисы этого резонанса. Так как возмущение изменяет как I_R, так и I_S, то возникает хаотическое движение вдоль стохастического слоя (по I_S). Роль третьей степени свободы играют здесь переменные t и $-H$ (п. 1.2б).

Арнольд высказал предположение, что движение вдоль резонансов является типичным свойством многомерных нелинейных колебаний, однако строгое доказательство этого отсутствует [1]). Недавно Холмс и Марсден [197], используя метод Мельникова [299] (см. § 7.3 ниже), показали существование диффузии Арнольда у большого класса гамильтоновых систем, близких к интегрируемым.

Первые численные эксперименты по хаотическому движению в многомерных системах были выполнены Фрёшле и сотр. [2]). В частности, в работах Фрёшле [139, 140] исследовалось число изолирующих интегралов движения в системах с тремя степенями свободы. Оказалось, что в зависимости от начальных условий существуют либо два интеграла, либо ни одного (кроме энергии). Этот результат находится в согласии с гипотезой Арнольда, что движение происходит либо по инвариантному тору, либо по стохастическим слоям. Это значит, что в общем случае N степеней свободы имеется либо $N-1$, либо ни одного интеграла движения, кроме энергии. Аналогичные соображения высказывались Фрёшле [139] и были подтверждены численными экспериментами [141—143] для $N = 3$ и $N = 4$.

Модельная задача. Рассмотрим трехмерные колебания шарика между двумя упругоотражающими неподвижными стенками, одна из которых плоская ($z = h$), а другая ($z \approx 0$) — гофрированная как по x, так и по y (рис. 6.4, *а*). Положение системы на четырехмерной поверхности сечения задается значениями координат x_n и y_n и углов $\alpha_n = \operatorname{arc\,tg}(v_x/v_z)$ и $\beta_n = \operatorname{arc\,tg}(v_y/v_z)$ непосредственно перед n-м отражением от гофрированной стенки, где $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости шарика (рис. 6.4, *б*). Считая гофрировку слабой ($a \ll h$, $ak \ll 1$), можно записать упрощенное отображение (ср. п. 3.4а) в явном виде

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n - 2a_x k_x \sin k_x x_n + \mu k_x \gamma_c, \\ x_{n+1} &= x_n + 2h \operatorname{tg} \alpha_{n+1}, \end{aligned} \tag{6.12a}$$

---

[1]) Основная трудность здесь — получение достаточно эффективных аналитических критериев неинтегрируемости, поскольку в полностью интегрируемой системе диффузия Арнольда, конечно, отсутствует (см. примечание редактора на с. 315). Одним из возможных критериев является пересечение сепаратрис, которое было открыто и использовалось еще Пуанкаре [337, п. 226] и интенсивно изучается в последнее время (см., например, [197, 479, 480, 483, 484, 511]). Однако использование этого критерия ограничено в самом интересном (для диффузии Арнольда) случае очень слабого возмущения (см. примечание редактора на с. 240).— *Прим. ред.*

[2]) Это, конечно, не так. Достаточно вспомнить знаменитую работу Ферми, Паста и Улама [127], в которой фактически наблюдалось и хаотическое движение (см. рис. 5—7), хотя основное внимание авторов было привлечено к регулярным колебаниям в многомерной нелинейной системе. Хаотический аспект этой задачи исследовался позднее во многих работах (см., например, [135, 208]).— *Прим. ред.*

$$\beta_{n+1} = \beta_n - 2a_y k_y \sin k_y y_n + \mu k_y \gamma_c, \qquad (6.1.12б)$$
$$y_{n+1} = y_n + 2h \operatorname{tg} \beta_{n+1}.$$

Здесь $\gamma_c = \sin(k_x x_n + k_y y_n)$, a_x, a_y — амплитуды гофрировки только по x и только по y соответственно, а μ — удвоенная амплитуда косой гофрировки, связывающей движение по x и y.

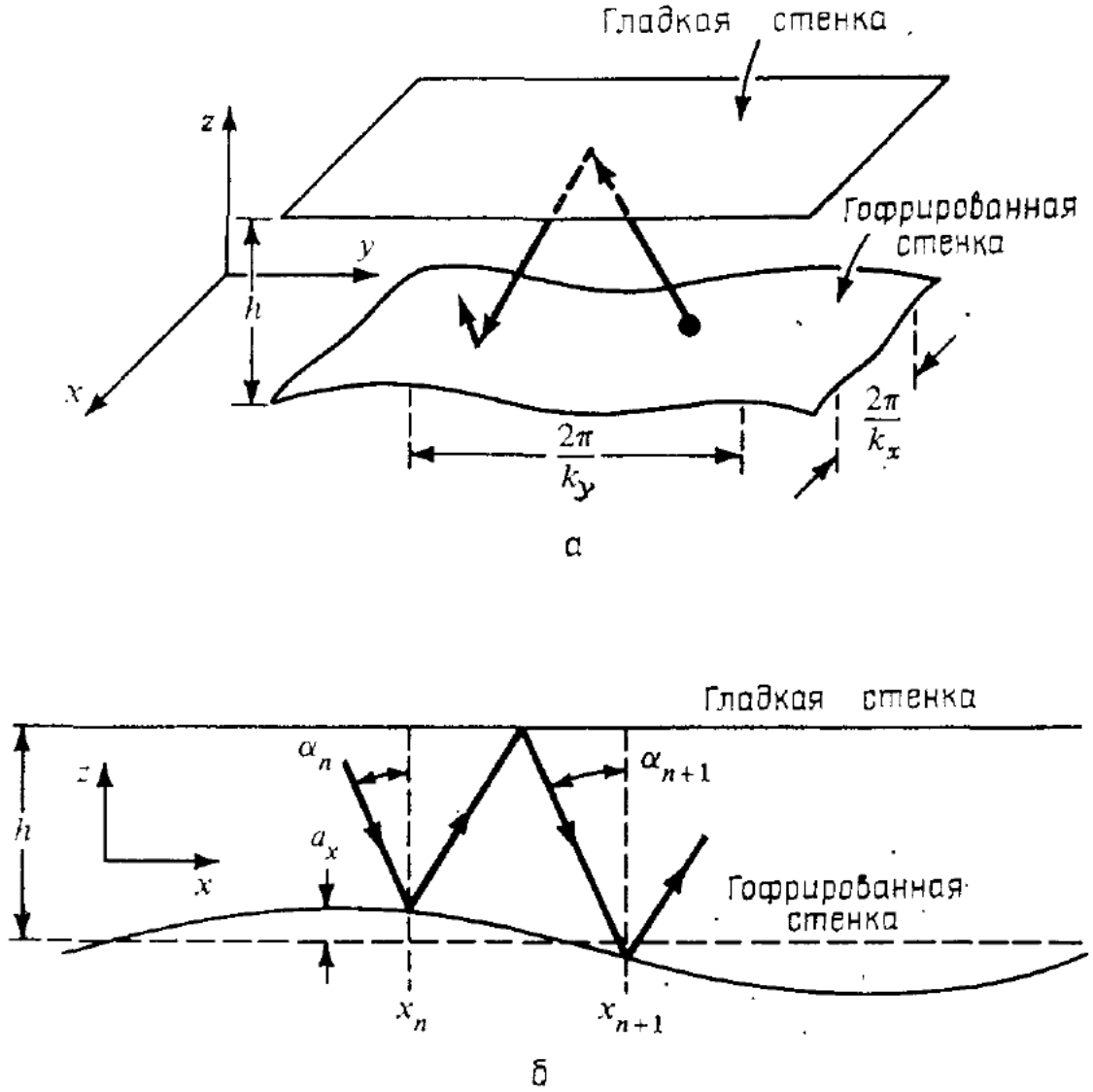


Рис. 6.4. Модельная задача (по данным работы [406]).
а — колебания шарика между гладкой и гофрированной стенками; *б* — проекция движения на плоскость (x, z).

Если $\mu = 0$, то отображение (6.1.12) описывает независимое движение в плоскостях (x, z) и (y, z). На рис. 6.5 показаны различные траектории на поверхности сечения (α, θ). Мы видим обычную картину для систем с двумя степенями свободы: резонансные и нерезонансные инвариантные кривые и стохастические области. Центр целого резонанса при $\alpha = \theta = 0$ соответствует устойчивым колебаниям шарика вдоль оси z в одном из минимумов «потенциальной ямы» стенки. Инвариантные кривые вокруг этого центра соответствуют «адиабатическим» колебаниям вдоль оси x, медленным по сравнению с колебаниями по z. Имеются две основные стохастические области. Толстый стохастический слой расположен в районе

$\alpha \approx \pm \pi/2$. Он возникает вследствие перекрытия целых резонансов, при которых за один период колебаний по z траектория проходит несколько периодов гофрировки по x, как показано на рис. 6.5. Тонкий стохастический слой, отделенный при данных значениях параметров от толстого слоя инвариантными кривыми, расположен в окрестности сепаратрисы целого резонанса $\alpha = 0$. Движение

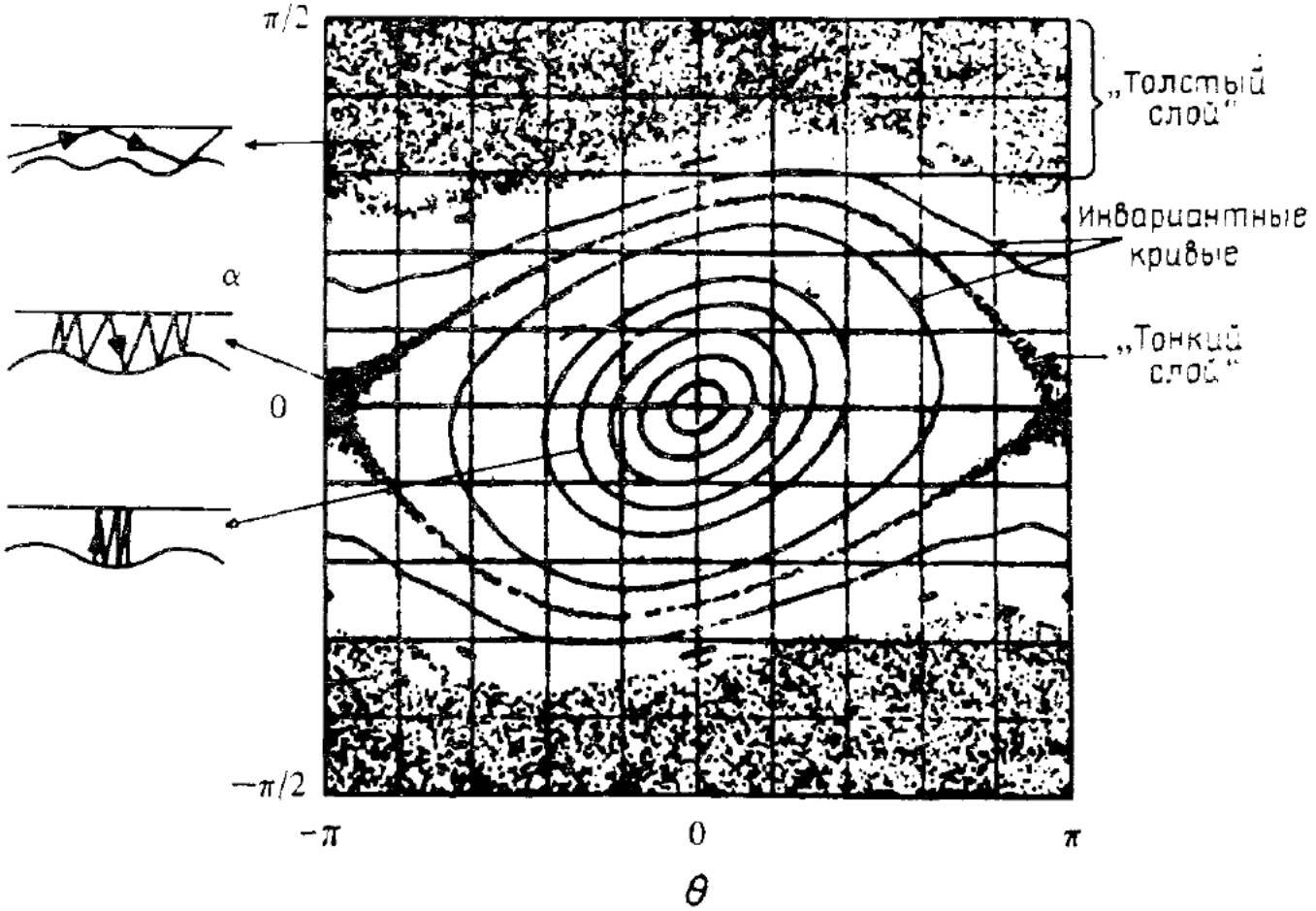


Рис. 6.5. Фазовая плоскость (α, θ) модели (6.1.12) (по данным работы [406]). $\mu = 0$; $\theta = k_x x$; отношение $\lambda_x : h : a_x$ равно 100 : 10 : 2; $\lambda_x = 2\pi\, k_x$; 15 траекторий по 10^3 итераций.

в нем происходит вблизи максимума потенциальной ямы гофрированной стенки и охватывает как колебания, так и пролет в соседние ямы.

Типичный пример диффузии Арнольда в присутствии связи показан на рис. 6.6. Четырехмерная поверхность сечения (α, x, β, y) представлена здесь двумя проекциями (α, x) и (β, y), которые для удобства совмещены на рисунке. Начальные условия выбраны внутри резонанса по x и в пределах тонкого стохастического слоя по y. Численное моделирование показывает, что движение по y остается внутри стохастического слоя, пока колебания по x не достигнут своей сепаратрисы. Последовательные стадии диффузии по x под действием стохастических колебаний по y показаны на рис. 6.6, *б—г*. Это и есть диффузия Арнольда, поскольку на поверхности сечения она идет вдоль стохастического слоя резонанса по y. При дальнейшем движении диффузия охватывает бо́льшую часть

плоскости (α, x). В частности, наблюдались переходы диффузии из одного стохастического слоя (y-резонанса) в другой (x-резонанса), а также в толстый слой. Эти эффекты показаны на рис. 6.7 в проекции (α, β) для $x \approx y \approx 0$. Траектория случайно блуждает по тонким и толстым слоям, проводя бо́льшую часть времени в последних.

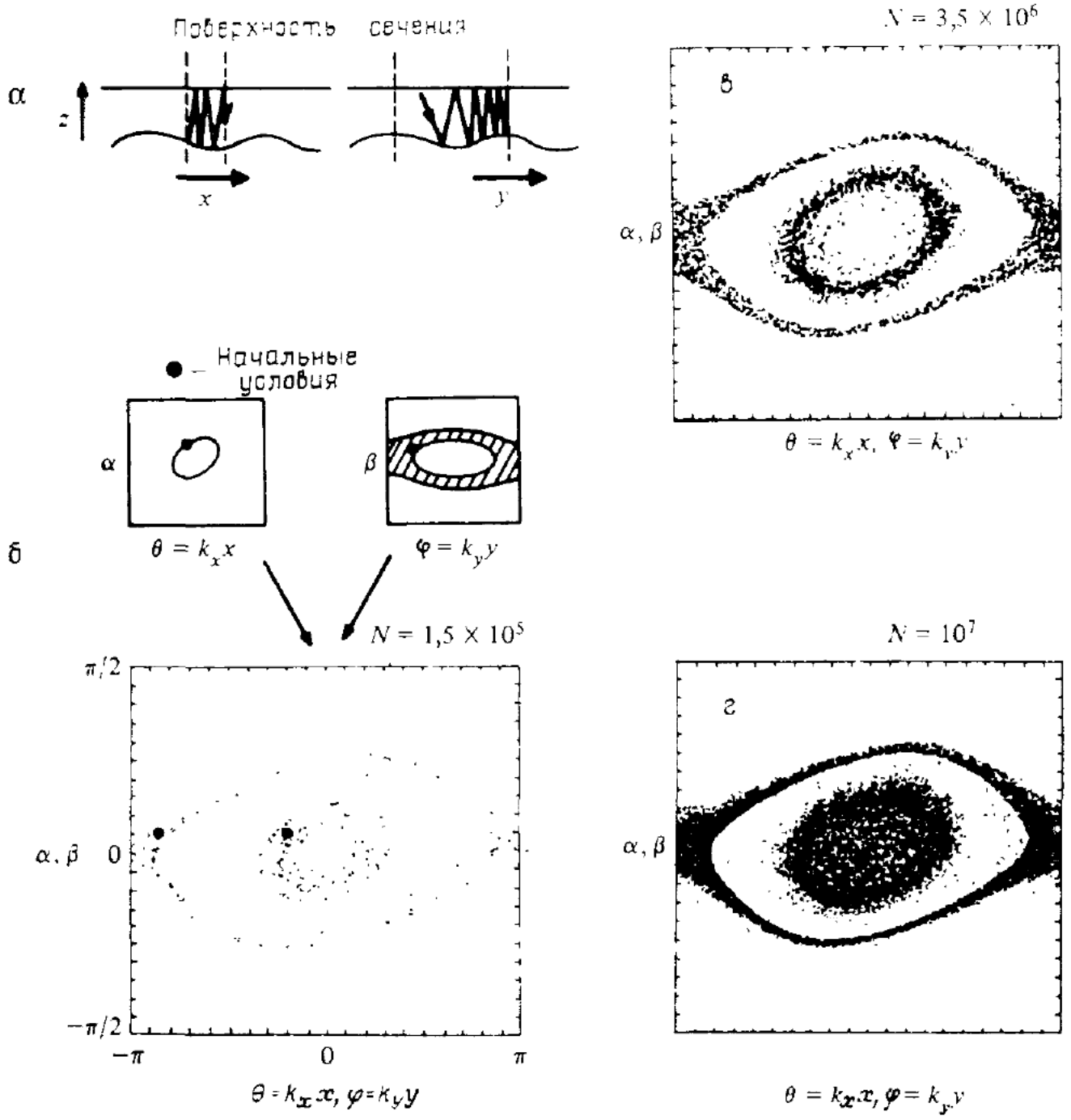


Рис. 6.6. Диффузия в тонком слое (по данным работы [406]).
μ $h = 0{,}004$; отношения $\lambda_x : h : a_x$ и $\lambda_y : h : a_y$ равны 100 : 10 : 2.

Это, однако, еще не все. Вспомним, что система резонансных поверхностей является всюду плотной в пространстве переменных действия. Рассмотрим, например, резонанс связи

$$m_1\omega_x + m_2\omega_y = 0,$$

где ω_x, ω_y — частоты колебаний, а m_1, m_2 — целые числа; на рис. 6.7 показан резонанс, соответствующий $m_1 = -m_2$. Стохасти-

ческий слой этого резонанса также является составной частью паутины Арнольда. Для начальных условий в этом слое и $x \approx y \approx 0$ быстрые колебания шарика по оси z кажутся вначале устойчивыми. Однако это не так. После достаточно большого числа отражений мы можем обнаружить, что шарик движется почти вдоль стенок. В типичном случае диффузия идет вначале по резонансу связи,

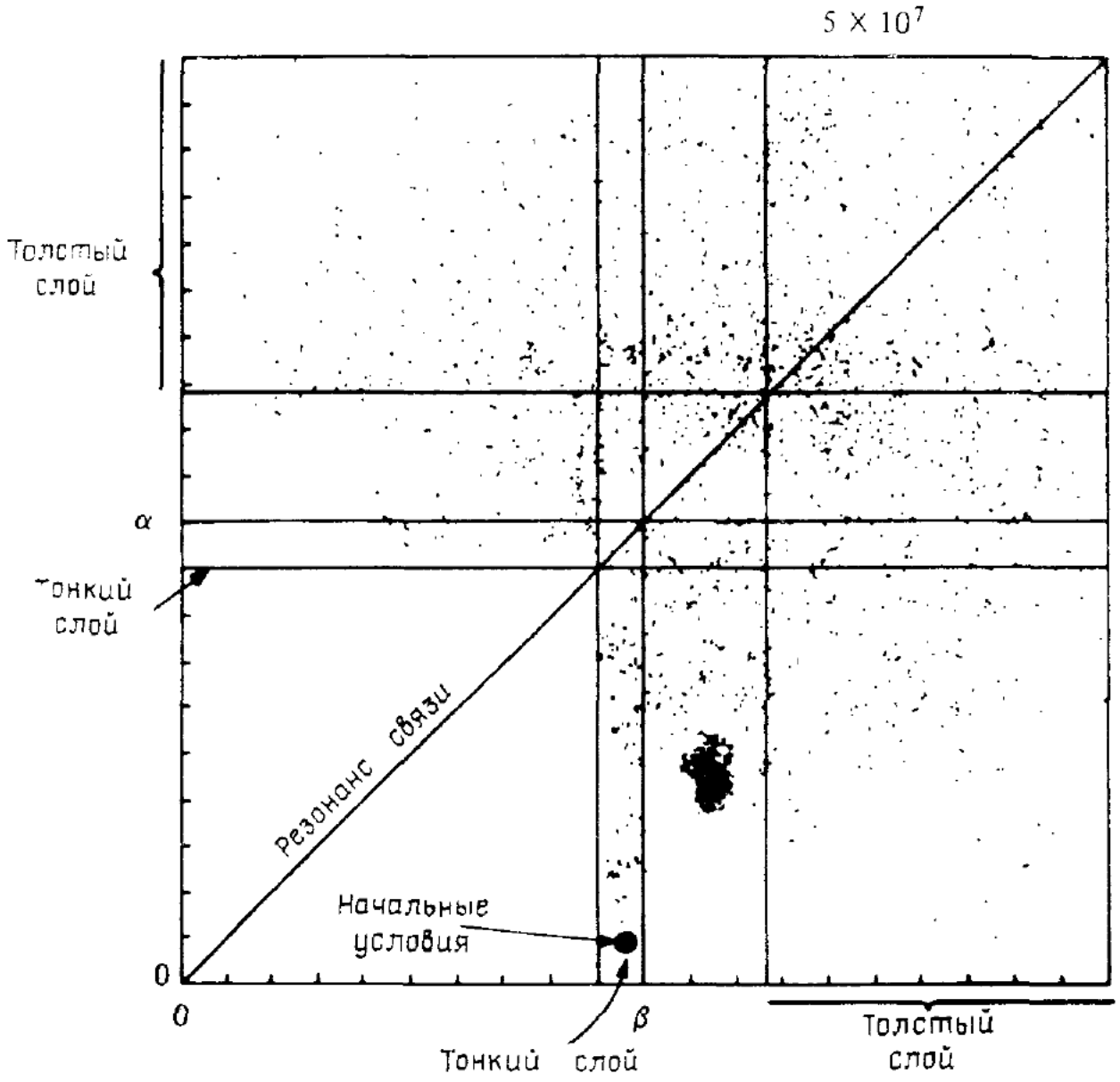


Рис. 6.7. То же, что и на рис. 6.6 в проекции на плоскость (α, β) (по данным работы [276]).
$x \approx y \approx 0$: 5×10^7 итераций.

затем по тонким стохастическим слоям и, наконец, по толстым слоям. При этом шарик лишь изредка будет возвращаться в окрестность начального положения вблизи $x = y = 0$, поскольку подавляющая часть паутины Арнольда состоит из толстых стохастических слоев. Остальные же области вроде резонансов связи, где движение кажется регулярным, составляют пренебрежимо малую (но всюду плотную!) часть стохастической паутины. Эта удивительная картина является характерной для диффузии Арнольда.

§ 6.2. Скорость диффузии вдоль резонансов

Первые теоретические оценки диффузии Арнольда были получены Чириковым [68, 70] и его сотр. [1]). Теннисон и др. [406] и Либерман [273] рассчитали скорость диффузии для модельной задачи, описанной в п. 6.1б. Теоретический анализ основан на разделении исходной системы с тремя степенями свободы на две подсистемы, каждая из которых рассматривается в первом приближении независимо. Мы будем называть такой подход *моделью стохастической накачки* [2]). В простейшем случае при этом учитывается взаимодействие только трех резонансов. Пусть, например, ведущий резонанс, вдоль которого идет диффузия Арнольда, связан, скажем, со степенью свободы 2. Взаимодействие между степенями свободы 1 и 2, описываемое гамильтонианом

$$H_{\perp}(I_1,\ I_2,\ \theta_1,\ \theta_2) \approx \text{const}, \tag{6.2.1}$$

приводит к интенсивному хаотическому движению поперек стохастического слоя ведущего резонанса. Взаимодействие же между степенями свободы 2 и 3 с гамильтонианом

$$H_{\parallel}(I_2,\ I_3,\ \theta_2,\ \theta_3) \approx \text{const} \tag{6.2.2}$$

вызывает более слабую диффузию Арнольда. Подсистемы (6.2.1) и (6.2.2) рассматриваются последовательно. Сначала из (6.2.1) находятся величины $\theta_2(t)$ и $I_2(t)$, характеризующие движение в стохастическом слое. Затем они подставляются в (6.2.2), что дает возможность найти стохастическое изменение $I_3(t)$, определяющее диффузию Арнольда.

Основная трудность при использовании этого метода состоит в выяснении, какие именно резонансы определяют диффузию вдоль и какие — поперек стохастического слоя. В случае трех резонансов ведущим можно считать любой из них, что просто определяет область начальных условий движения. Наиболее сильный из оставшихся задает диффузию поперек слоя, а более слабый вызывает диффузию Арнольда [3]).

* 6.2а. Расчет диффузии в модели стохастической накачки

Покажем, как оценить скорость диффузии Арнольда на примере системы, описываемой отображением (6.1.12). Мы рассмотрим три различных режима диффузии с последовательно уменьшающейся скоростью. Первый режим соответствует диффузии по α вдоль толстого стохастического слоя в плоскости $(\beta,\ y)$. Диффузия происходит вследствие связи со случайным движением по y. Второй режим

---

[1]) См. работу [146].— *Прим. ред.*

[2]) Stochastic pump model. Этот механизм, по-видимому, впервые обсуждался кратко в работе [139].— *Прим. ред.*

[3]) Обсуждение такого «распределения ролей» между резонансами см. в работе [70, § 7.2].— *Прим. ред.*

аналогичен первому, за исключением того, что диффузия по α идет вдоль тонкого стохастического слоя y-резонанса. Наконец, третий режим отвечает диффузии вдоль резонанса связи.

Найдем прежде всего гамильтониан для отображения (6.1.12). Как и в п. 3.1в, преобразуем разностные уравнения (6.1.12) в дифференциальные с помощью δ-функции. В результате получаем неавтономный гамильтониан с двумя степенями свободы:

$$H(\alpha, x, \beta, y, n) = -2h \ln\cos\alpha - 2h \ln\cos\beta - 2\delta_1(n)\, C(x, y), \qquad (6.2.3)$$

где

$$C(x, y) = a_x \cos k_x x + a_y \cos k_y y - (1/2)\,\mu \cos(k_x x + k_y y), \qquad (6.2.4)$$

$$\delta_1(n) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) = 1 + 2\sum_{q=1}^{\infty} \cos(2\pi n q). \qquad (6.2.5)$$

Диффузия в толстом слое. Выберем начальные значения β и y внутри толстого стохастического слоя, а α и x вблизи центра целого резонанса. При отсутствии связи между степенями свободы ($\mu = 0$) движение в плоскости (α, x) происходит по инвариантной кривой (рис. 6.5). При включении связи происходит медленная диффузия по α и x.

Перейдем к новым переменным $\theta = k_x x$, $\varphi = k_y y$, $\bar{\alpha} = \alpha/k_x$, $\bar{\beta} = \beta/k_y$ и представим гамильтониан H в виде суммы $H = H_x + H_y$, где

$$H_y = -2h \ln\cos\beta - 2\delta_1(n)\, a_y \cos\varphi, \qquad (6.2.6а)$$

$$H_x \approx h\alpha^2 - 2a_x \cos\theta + \mu\cos(\theta + \varphi(n)). \qquad (6.2.6б)$$

Здесь для удобства мы сохранили старые переменные α и β в новом гамильтониане. В (6.2.6б) использовано приближение $-\ln\cos\alpha \approx \alpha^2/2$ при $\alpha^2 \ll 1$, $\delta_1 \approx 1$ при $\omega_x^2 = 4ahk^2 \ll 1$, а φ считается явной функцией n. Последнее допущение наиболее серьезно, поскольку при этом пренебрегается влиянием связи на движение по y. В результате мы получили два неавтономных гамильтониана с одной степенью свободы каждый [1]). Теперь можно решить уравнение движения независимой подсистемы (6.2.6а) и найти «стохастическую накачку» $\varphi(n)$. Подставив ее в (6.2.6б), найдем движение в плоскости (α, θ), которое и дает диффузию Арнольда.

В толстом слое, где имеется много перекрывающихся резонансов, фаза φ хаотизуется за время порядка одной итерации отображения [2]). Поэтому с хорошей точностью можно считать, что после-

---

[1]) В этом случае говорят иногда о полутора степенях свободы.— *Прим. ред.*

[2]) Дело не в перекрытии резонансов, а в масштабе времени релаксации, в качестве которого можно принять грубо обратную величину КС-энтропии. Последнюю легко оценить, поскольку подсистема (6.2.6а) сводится локально к стандартному отображению с параметром $K = -4k_y^2 a_y h/\cos^2\beta$. — *Прим. ред.*

довательные значения фазы φ являются случайными и независимыми, причем переход между ними имеет характер «скачка». Изменение H_x определяется уравнением Гамильтона

$$\frac{dH_x}{dn} = \frac{\partial H_x}{\partial n}.$$

Используя (6.2.6б), можно записать производную в виде

$$\frac{\partial H_x}{\partial n} = \frac{d}{dn}[\mu\cos(\theta+\varphi)] - \mu\frac{\partial\theta}{\partial n}\sin[\theta+\varphi(n)]. \qquad (6.2.7)$$

Первый член в выражении справа описывает малые ограниченные колебания. Считая колебания по θ малыми

$$\theta = \theta_0\cos(\omega_x n + \chi_0), \qquad (6.2.8)$$

где $\omega_x = 2\pi/T = 2k_x(a_x h)^{1/2}$, проинтегрируем второй член в уравнении (6.2.7) по периоду отображения:

$$\Delta H_x = \int\limits_m^{m+1} dn\mu\theta_0\omega_x\sin[\omega_x n + \chi_0]\sin[\theta+\varphi(n)].$$

При $\omega_x \ll 1$ подынтегральное выражение постоянно, поэтому

$$\Delta H_x = \mu\theta_0\omega_x\sin[\omega_x m + \chi_0]\sin[\theta+\varphi(m)]. \qquad (6.2.9)$$

Возводя это выражение в квадрат и усредняя как по χ_0, так и по φ, получаем [1])

$$\langle(\Delta H_x)^2\rangle = \frac{1}{4}\mu^2\theta_0^2\omega_x^2.$$

В результате находим скорость диффузии в толстом слое

$$D_1 = \frac{1}{2}\langle(\Delta H_x)^2\rangle = \frac{1}{8}\mu^2\theta_0^2\omega_x^2. \qquad (6.2.10)$$

С изменением H_x в процессе диффузии параметры μ и ω_x остаются постоянными. Величина же θ_0 растет с H_x, а вместе с ней и скорость диффузии.

На рис. 6.8, *а—в* теоретические значения D_1 (сплошные линии) сравниваются с результатами численного моделирования. Начальные условия для 100 траекторий были одинаковыми в плоскости (α, x) и случайными в пределах толстого слоя плоскости (β, y). Для каждой траектории просчитывалось 500 итераций отображения. Вычислялись среднеквадратичные значения безразмерной энергии $\langle\alpha^2\rangle = [h^{-2}\langle(\Delta H_x)^2\rangle n]^{1/2}$, которые и сравнивались

[1]) Усреднение по фазе χ_0, которая является постоянной интегрирования в (6.2.8), требует пояснения. На самом деле усреднять нужно по траектории, т. е. по времени m. Для иррационального ω_x при $\omega_x m \gg 1$ это формально эквивалентно усреднению по χ_0. Разумеется, диффузионный характер движения связан только с присутствием случайной фазы $\varphi(m)$, иначе колебания H_x были бы квазипериодическими.— *Прим. ред.*

с теорией. На рис. 6.8 каждый треугольник представляет результат усреднения четырех независимых (по начальным условиям) вариантов счета. Согласие с теорией достаточно хорошее, хотя она и несколько завышает систематически скорость диффузии. Это различие объясняется, возможно, тем, что значения фазы $\varphi(m)$ не полностью независимы.

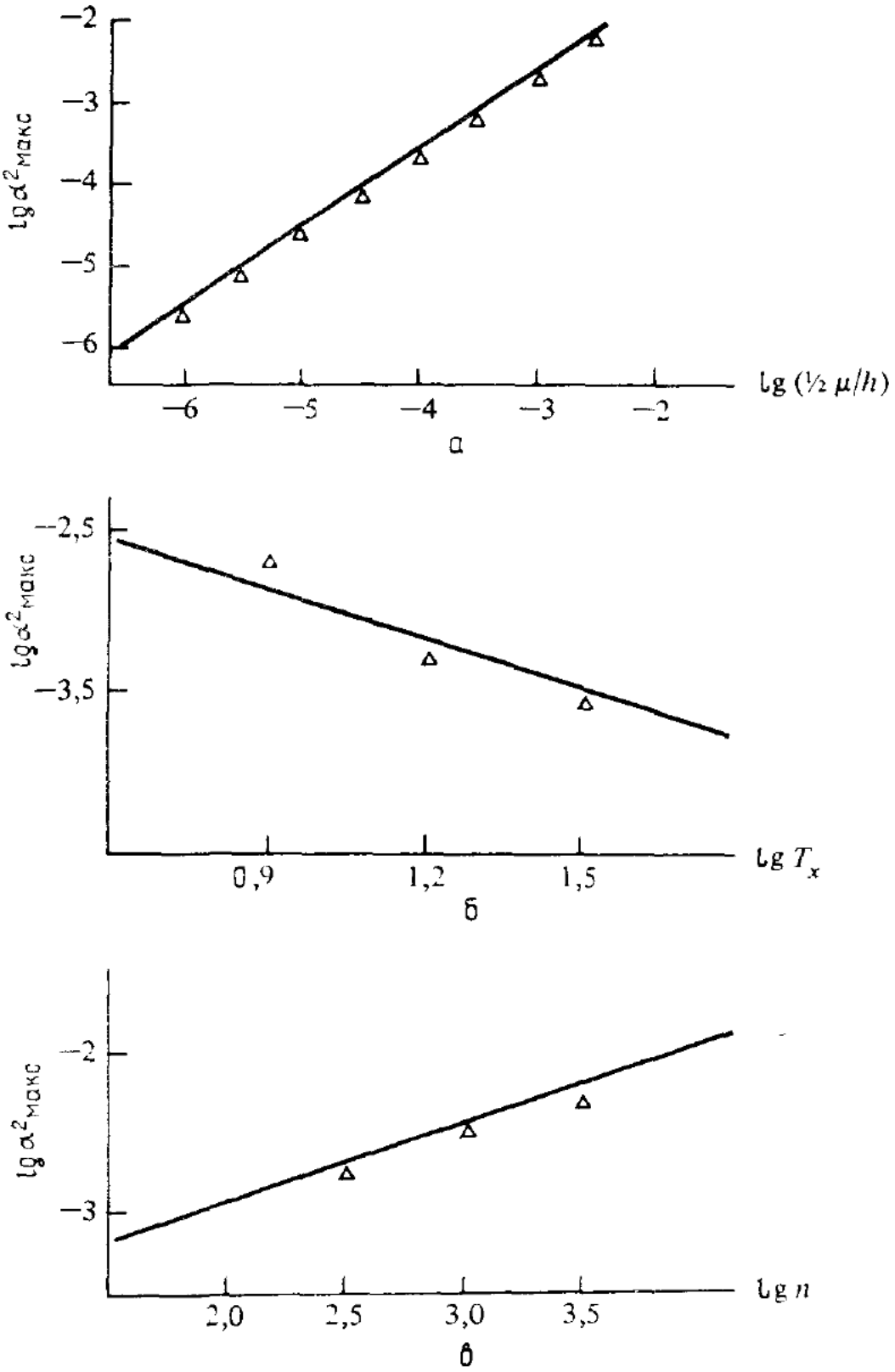


Рис. 6.8. Диффузия в толстом слое (по данным работы [406]).

Сплошные линии — теория; треугольники — численные данные (статистический разброс для 100 траекторий лежит в пределах высоты треугольников); $\mu/h = 2 \times 10^{-4}$; $n = 500$; $\lambda_x : h : a_x = 100 : 10 : 1$; $\lambda_y : h : a_y = 100 : 10 : 1{,}7$ (кроме переменных величин).

Диффузия в тонком слое. В этом случае начальные условия на плоскости (α, x) мы выбираем, как и в толстом слое, вблизи центра резонанса, а в плоскости (β, y) — в тонком стохастическом слое резонанса. Как и в толстом слое, диффузия в плоскости (α, x) обусловлена слабой связью со стохастическим движением в плоскости (β, y). Однако скорость диффузии оказывается значительно меньше.

Действуя прежним методом, мы оставим теперь, однако, в функции $\delta_1(n)$ в (6.2.6а) только члены с $q = 0$ и $q = 1$ из разложения (6.2.5) [ср. (4.1.26)]. Используя, кроме того, приближение $-\ln\cos\beta \approx \beta^2/2$, $\beta^2 \sim a_y/h \ll 1$, запишем гамильтониан (6.2.6а) в виде

$$H_y = h\beta^2 - 2a_y\cos\varphi - 4a_y\cos 2\pi n\cos\varphi. \qquad (6.2.11)$$

Здесь первые два члена определяют сепаратрису резонанса в плоскости (β, y), а третий приводит к образованию тонкого стохастического слоя в ее окрестности. Чтобы найти функцию $\varphi(n)$ для (6.2.11), будем исходить из уравнения (6.2.7), пренебрегая первым членом в его правой части:

$$\frac{dH_x}{dn} = -\mu\frac{d\theta}{dn}\sin[\theta + \varphi(n)], \qquad (6.2.12)$$

где $\theta(n)$ определяется соотношением (6.2.8). Примем, далее, что на одном полупериоде фазовых колебаний $\varphi(n)$ определяется движением по невозмущенной сепаратрисе (см. п. 1.3а) [1]):

$$\varphi_1(n) = 4\,\mathrm{arctg}\,(e^{\omega_y n}) - \pi. \qquad (6.2.13)$$

Обозначив $s = \omega_y n$, $Q_0 = \omega_x/\omega_y$ и записав фазу χ_0 в (6.2.8) как $\chi_0 = Q_0 s_0 - \pi/2$, получим из (6.2.12)

$$\Delta H_x = -\mu\theta_0 Q_0 \int_{-\infty}^{\infty} P(s)\,ds,$$

где

$$P(s) = \cos[Q_0(s+s_0)]\sin\{\theta_0\sin[Q_0(s+s_0)] + \varphi\}.$$

При $\theta_0 \ll 1$

$$P(s) = \cos[Q_0(s+s_0)]\sin\varphi, \qquad (6.2.14)$$

и мы приходим к интегралу Мельникова—Арнольда (п. 3.5а):

$$\mathscr{A}'_m = 2\int_0^{s_1}\cos\left[\frac{m}{2}\varphi(s) - Q_0 s\right], \qquad (6.2.15)$$

который понимается в смысле его среднего значения по s_1 при

[1]) Поясним, что получаемое таким образом регулярное асимптотическое решение $\varphi_1(n)$, которое только и используется ниже для вычисления скорости диффузии, не совпадает с решением $\varphi(n)$ для подсистемы (6.2.11). Различие между ними сводится к хаотизации $\varphi(n)$, которая учитывается в (6.2.19) неявно, со ссылкой на сепаратрисное отображение.— *Прим. ред.*

$s_1 \to \infty$. В рассматриваемом случае $m = 2$, и мы получаем

$$\Delta H_x = \frac{1}{2}\mu_0\theta_0 Q_0 \sin(Q_0 s_0)\,[\mathscr{A}_2(Q_0) - \mathscr{A}_2(-Q_0)], \qquad (6.2.16)$$

где, согласно (3.5.18),

$$\mathscr{A}_2(\pm Q_0) = 4\pi Q_0 e^{\pm\pi Q_0{}^2}/\mathrm{sh}(\pi Q_0). \qquad (6.2.17)$$

В результате находим

$$\Delta H_x = 4\pi\mu\theta_0 Q_0^2 \sin(Q_0 s_0)\,\mathrm{sh}\,(\pi Q_0/2)/\mathrm{sh}\,(\pi Q_0). \qquad (6.2.18)$$

Из свойств сепаратрисного отображения (п. 3.5б) мы знаем, что величина $Q_0 s_0$ хаотизуется на полупериоде фазовых колебаний T_y. Усредняя по фазе $Q_0 s_0$, получаем

$$\langle (\Delta H_x)^2\rangle_{s_0} = 8\pi^2\mu^2\theta_0^2 F(Q_0), \qquad (6.2.19)$$

где

$$F(Q_0) = Q_0^4/4\,\mathrm{ch}^2(\pi Q_0/2). \qquad (6.2.20)$$

На рис. 6.9 приведен график функции $F(Q_0)$ с максимумом при $Q_0 \approx 1{,}3$ и довольно резким падением в обе стороны от максимума [1]). Так, например, при изменении Q_0 в 4 раза скорость диффузии уменьшается на два порядка по сравнению с максимальной.

Для вычисления коэффициента диффузии необходимо найти средний полупериод $\langle T_y\rangle$ колебаний в тонком стохастическом слое. Вблизи сепаратрисы

$$T_y = \frac{1}{\omega_y}\ln\left|\frac{32}{w}\right|,$$

где $w = (H_y - H_s)/H_s \ll 1$, а $H_s = 2a_y$ — энергия на сепаратрисе. Чириков [70] показал, что $\langle T_y\rangle$ можно найти, усреднив $T_y(w)$ по w в пределах стохастического слоя $|w| \lesssim w_1$. Это дает

$$\langle T_y\rangle = \frac{1}{w_y}\left[\ln\left(\frac{32}{w_1}\right) + 1\right]. \qquad (6.2.21)$$

При слабой связи $\mu \ll a_y$ для полуширины стохастического слоя w_1 можно использовать соотношение (4.2.23).

Коэффициент диффузии в тонком слое равен

$$D_2 = \frac{\langle (\Delta H_x)^2\rangle_{s_0}}{2\langle T_y\rangle} \qquad (6.2.22)$$

или с учетом (6.2.19) и (6.2.21)

$$D_2 = 4\pi^2\mu^2\theta_0^2\omega_y F(Q_0)/\ln(32e/w_1). \qquad (6.2.23)$$

---

[1]) При $Q_0 \ll 1$ полученные выражения справедливы лишь при дополнительном условии $T_y\omega_x \gg 2\pi$, или $s_y = \omega_y T_y \gg 2\pi/Q_0$ (см. рис. 3.20, *в*), т. е. только в очень тонком стохастическом слое $w_1 \ll 32\exp(-2\pi/Q_0)$.— *Прим. ред.*

На рис. 6.10 эта теоретическая зависимость (сплошные линии) сравнивается с результатами численных экспериментов (треугольники). При счете использовалось 100 траекторий с одинаковыми начальными условиями в плоскости (α, x) и слегка различными в плоскости (β, y) внутри тонкого стохастического слоя. Теоретические кривые строились по формуле (6.2.23) с эмпирическим зна-

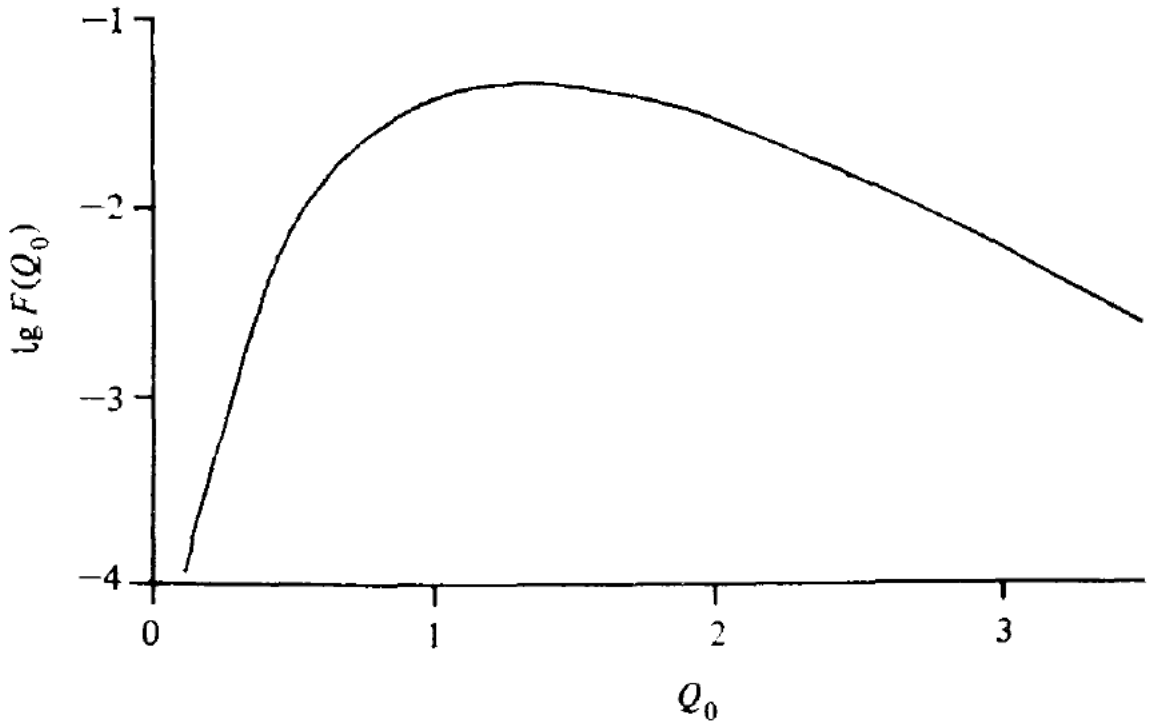


Рис. 6.9. Функция (6.2.20) для диффузии в тонком слое.

чением $\omega_1 = 0{,}191$. Как и в случае толстого слоя, теоретические значения лежат несколько выше численных. Возможно, что это различие вызвано неполной хаотизацией $\varphi(n)$ на полупериоде фазовых колебаний в стохастическом слое [1]).

6.2б. Диффузия по резонансу связи

Аналогичным образом можно было бы вычислить скорость диффузии Арнольда и по резонансу связи, например $\omega_x = \omega_y$. Соответствующие довольно сложные расчеты были выполнены Либерманом [273]. Здесь же, следуя работе Чирикова [70], мы рассмотрим более простую модель, иллюстрирующую как диффузию по резонансу связи, так и взаимодействие многих резонансов [72]. Гамильтониан этой модели имеет вид

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} - \mu xy - \varepsilon x f(t), \qquad (6.2.24)$$

[1]) Существенное снижение скорости диффузии по сравнению с оценкой (6.2.23), особенно заметное на рис. 6.10, *в*, объясняется медленной диффузией в относительно широкой периферической части стохастического слоя, а также фазовыми корреляциями из-за конечной ширины слоя (см. работу [70], § 7.2 и 7.6).— *Прим. ред.*

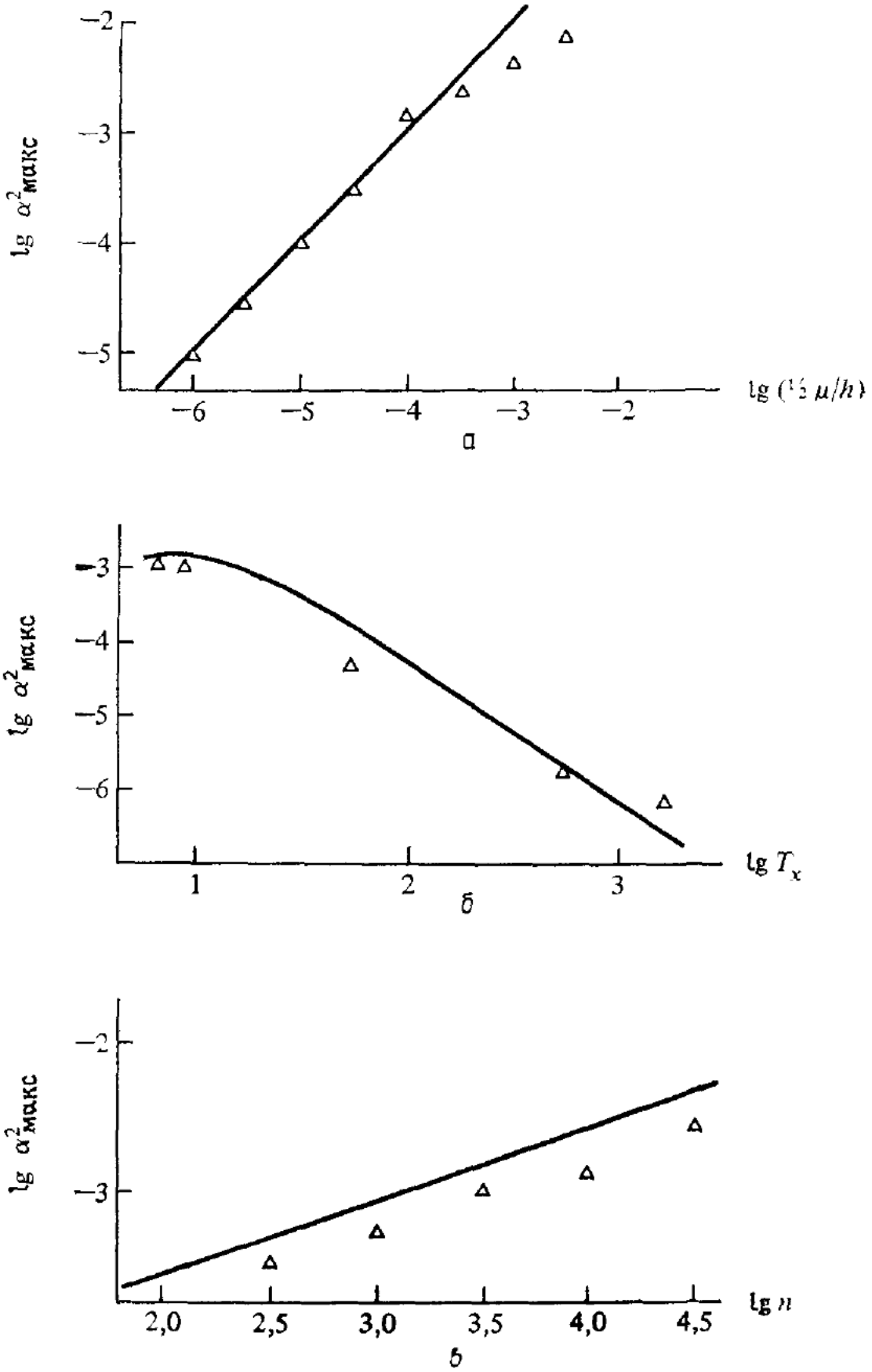


Рис. 6.10. Диффузия в тонком слое (по данным работы 406]).
Обозначения и параметры те же, что и на рис. 6.8, кроме $n = 2000$; $\lambda_y : h : a_y = 100 : 10 : 1,8$.

где t — время, а μ и ε — малые параметры. Эта система состоит из двух нелинейных осцилляторов со слабой линейной связью (параметр μ), причем на один из осцилляторов действует периодическая внешняя сила $\varepsilon f(t)$. Нас будет интересовать окрестность резонанса связи

$$\omega_x - \omega_y \approx 0, \tag{6.2.25}$$

где ω_x и ω_y — невозмущенные частоты нелинейных осцилляторов.

Переход к переменным действие—угол. Перейдем прежде всего к переменным действие — угол невозмущенной системы ($\mu = \varepsilon = 0$). Невозмущенный гамильтониан

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} \tag{6.2.26}$$

описывает два независимых осциллятора с сохраняющимися энергиями E_x и E_y. Выражение для переменной действия получается обычным образом

$$I_x = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{x_M} (2E_x)^{1/2} \left(1 - \frac{x^4}{4E_x}\right)^{1/2} dx, \tag{6.2.27}$$

где $x_M = (4E_x)^{1/4}$ — амплитуда x-колебаний. Вводя новую переменную $\xi = x/(4E_x)^{1/4}$, получаем

$$I_x = \frac{4}{\pi} E_x^{3/4} \int_0^1 (1 - \xi^4)^{1/2} d\xi = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} E_x^{3/4} \mathcal{K}(1/\sqrt{2}), \tag{6.2.28}$$

где $\mathcal{K}(1/\sqrt{2}) \approx 1{,}85$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Соотношение (6.2.28) устанавливает связь между переменной действия I и энергией E для каждого из осцилляторов $(E \propto I^{4/3})$. Отсюда новый невозмущенный гамильтониан

$$\overline{H}_0 = A\left(I_x^{4/3} + I_y^{4/3}\right), \tag{6.2.29}$$

где

$$A = \left(\frac{3\pi}{4\sqrt{2}\,\mathcal{K}(1/\sqrt{2})}\right)^{4/3} \approx 0{,}87.$$

Частоты колебаний равны

$$\omega_{x,y} = \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial I_{x,y}} = \frac{4}{3} A I_{x,y}^{1/3}. \tag{6.2.30}$$

Решение выражается через эллиптические функции (см., например, [70]) и имеет вид

$$\frac{x(t)}{x_M} = \mathrm{cn}(\omega t) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\mathcal{K}(1/\sqrt{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\omega t]}{\mathrm{ch}[\pi(n-1/2)]} \approx$$

$$\approx 0{,}95\cos\omega t+\frac{\cos 3\omega t}{23}+\frac{\cos 5\omega t}{(23)^2}+\ldots \qquad (6.2.31)$$

Независимо от амплитуды колебаний вклад гармоник очень мал и мы можем сохранить только первый член этого разложения. Введя угловую переменную $\theta=\omega t$, запишем полный гамильтониан в виде

$$\overline{H}=A\left(I_x^{4/3}+I_y^{4/3}\right)-\mu x_M(I_x)\,y_M(I_y)\cos\theta_x\cos\theta_y-$$
$$-\varepsilon x_M(I_x)\cos\theta_x f(t), \qquad (6.2.32)$$

где

$$x_M=(4A)^{1/4}I_x^{1/3}, \qquad y_M=(4A)^{1/4}I_y^{1/3} \qquad (6.2.33)$$

— амплитуды колебаний, полученные из сопоставления (6.2.26) и (6.2.29).

Вблизи резонанса связи разность $\theta_x-\theta_y$ является медленной функцией времени. Перейдем поэтому с помощью производящей функции

$$F_2=(\theta_x-\theta_y)\,I_1+(\theta_x+\theta_y)\,I_2$$

к новым переменным:

$$\psi_1=\theta_x-\theta_y, \quad \psi_2=\theta_x+\theta_y. \qquad (6.2.34а)$$

Тогда

$$I_x=\frac{\partial F_2}{\partial\theta_x}=I_1+I_2, \qquad I_y=\frac{\partial F_2}{\partial\theta_y}=-I_1+I_2. \qquad (6.2.34б)$$

В окрестности резонанса связи $I_x\approx I_y$, так что $I_1\ll I_2$. Выражая гамильтониан (6.2.32) через новые переменные (6.2.34) и разлагая невозмущенную часть по I_1, получаем выражение для нового гамильтониана

$$K=2AI_2^{4/3}+\frac{1}{2}GI_1^2-F\cos\psi_1-F\cos\psi_2-\varepsilon x_M(I_2)\times$$
$$\times\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)f(t), \qquad (6.2.35)$$

где

$$G(I_2)=\frac{8}{9}AI_2^{-2/3}, \qquad (6.2.36)$$

$$F(I_2)=\frac{1}{2}\mu x_M(I_2)\,y_M(I_2). \qquad (6.2.37)$$

Усреднение по быстрой фазе ψ_2 дает

$$\langle K\rangle=2AI_2^{4/3}+\frac{1}{2}GI_1^2-F\cos\psi_1. \qquad (6.2.38)$$

Отсюда видно, что $I_2\approx\text{const}$, $\omega_2=2\omega_x$, а переменные I_1, ψ_1

совершают медленные колебания на резонансе связи с частотой (для малых колебаний)

$$\omega_1 = \sqrt{FG} \propto \sqrt{\mu}. \tag{6.2.39}$$

Взаимодействие трех резонансов. Пусть внешняя сила имеет вид

$$f(t) = \cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t, \tag{6.2.40}$$

причем обе частоты близки к резонансу и удовлетворяют неравенству

$$\delta\omega = (\omega_x - \Omega_2) > (\Omega_1 - \omega_x) > 0, \tag{6.2.41}$$

т. е. частота ω_x находится между Ω_1 и Ω_2. Будем считать, что эти два резонанса и определяют поведение системы, причем более сильный [1]) резонанс (с частотой Ω_1) возбуждает движение поперек стохастического слоя, а более слабый (с частотой Ω_2) вызывает диффузию Арнольда вдоль слоя. В этом случае диффузию Арнольда удается рассчитать сравнительно просто (см. работу [70, § 7.5]). Нелинейность приводит также к резонансам в высших порядках, однако их вклад в диффузию очень мал. Опуская поэтому член $F \cos \psi_2$ в (6.2.35), представим гамильтониан в виде суммы

$$K = K_\perp + K_\parallel,$$

где

$$K_\perp = \frac{1}{2} G I_1^2 - F \cos \psi_1 - \varepsilon x_M \cos\left(\frac{\psi_1 + \omega_2 t}{2}\right) \cos \Omega_1 t, \tag{6.2.42}$$

$$K_\parallel = 2A I_2^{4/3} - \varepsilon x_M \cos\left(\frac{\psi_1(t) + \psi_2}{2}\right) \cos \Omega_2 t. \tag{6.2.43}$$

Эти выражения аналогичны соответственно (6.2.11) и (6.2.6б), и для определения скорости диффузии Арнольда по величине $dK_\parallel/dt$ можно использовать тот же метод. В результате находим [70]

$$D = \frac{2x_M^2 \omega_x^2}{\omega_1} \cdot \frac{e^{-\pi Q_0}}{\ln(32e/w_1)}, \tag{6.2.44}$$

где

$$Q_0 = \delta\omega/\omega_1.$$

Для модельной задачи в п. 6.1б получается аналогичное выражение [273], хотя вывод его значительно сложнее. Скорость диффузии экспоненциально уменьшается с увеличением расстройки ($\delta\omega$) и уменьшением связи (ω_1). Подчеркнем, что найденная скорость диффузии является локальной и изменяется в процессе диффузии.

---

[1]) Имеется в виду меньшая расстройка по частоте.— *Прим. ред.*

6.2в. Много резонансов

До сих пор при анализе диффузии Арнольда учитывались только три резонанса. Пока возмущение не слишком мало, полученные аналитические оценки хорошо согласуются с результатами численного моделирования. Однако для достаточно малого возмущения

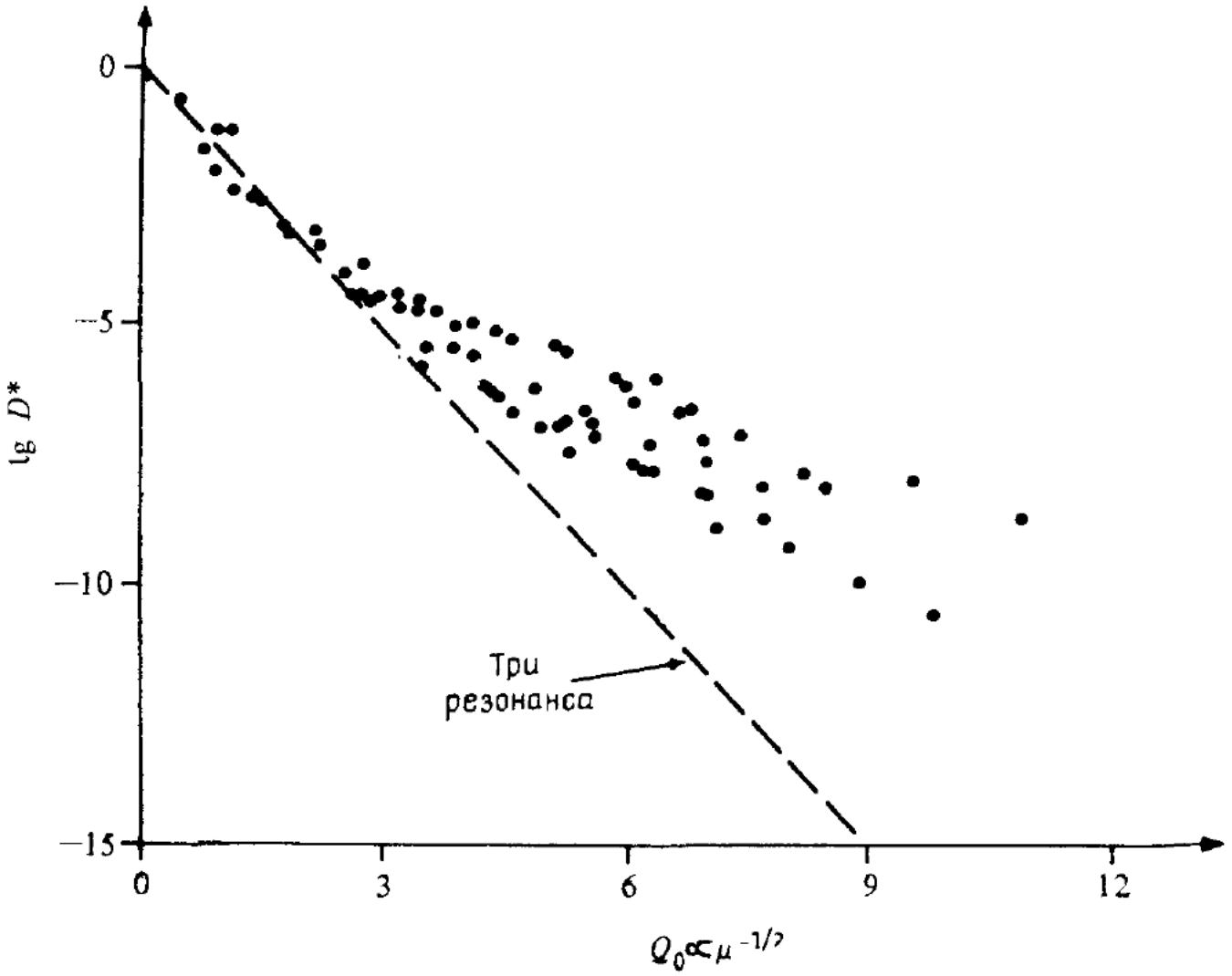


Рис. 6.11. Зависимость приведенной скорости диффузии Арнольда D^* от Q_0 (по данным работы [72]).

Точки — численное моделирование; пунктирная линия — теория в приближении трех резонансов.

теория значительно занижает скорость диффузии, поскольку в этом случае существенно взаимодействие многих резонансов. Такой режим диффузии называется областью Нехорошева по имени советского математика, впервые получившего строгую верхнюю границу для скорости диффузии Арнольда [314]. Однако его оценка существенно завышает, вообще говоря, порядок действительной скорости диффузии.

Взаимодействие многих резонансов исследовалось аналитически [70] и численно [72] для модели (6.2.24) с силой

$$f(t) = \frac{\cos \nu t}{1 - C \cos \nu t} \approx \sum_m \frac{2e^{-\sigma m}}{\sigma} \cos m\nu t, \qquad (6.2.45)$$

где $\sigma \approx (1-C^2)^{1/2} \ll 1$. Чтобы выделить наиболее важную экспо-

ненциальную зависимость, вычислялась приведенная [по (6.2.44)] скорость диффузии D^*, согласно формуле [1]),

$$D = \frac{\pi^2 x_M^2 \omega_x^2}{\omega_1 \ln (32e/\omega_1)} D^*.$$

Зависимость $\lg D^*$ от Q_0 в широком диапазоне показана на рис. 6.11 для $\omega_x = \omega_y = 4{,}5\nu$ и $\sigma = 0{,}1$. Аналитическая зависимость (6.2.44) (пунктирная кривая) для трех резонансов ($\omega_x = 4\nu$, $\omega_x = 5\nu$, $\omega_x = \omega_y$) хорошо согласуется с численными данными при малых Q_0, однако очень сильно занижает скорость диффузии для больших Q_0.

Это расхождение можно объяснить влиянием резонансов высоких гармоник $m\nu = k\omega_x$, в частности, за счет следующих членов разложения (6.2.31). Хотя их амплитуды малы, они расположены близко к резонансам $\omega_x = \omega_y = 4{,}5\ \nu$, т. е. для них расстройка $\delta\omega = m\nu - k\omega_x$ тоже мала и эффективное $Q_0 \sim 1$.

Приняв зависимость $D^*(Q_0)$ в виде

$$D^* = A \exp\left(-BQ_0^\gamma\right), \tag{6.2.46}$$

где A, B и γ — подгоночные параметры, Чириков и др. [72] получили из численных данных значение $\gamma \approx 1/2$, т. е. $-\lg D \propto \mu^{-1/4}$. Верхняя оценка Нехорошева [314] приводит к существенно меньшей величине γ (см. [70]). Для гамильтониана общего вида с N степенями свободы

$$H(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\boldsymbol{I}) + \mu H(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\theta}),$$

где μ — малый параметр, а функция $H_0(\boldsymbol{I})$ при $|\boldsymbol{I}| \to 0$ является положительно определенной квадратичной формой [2]), оценку Нехорошева можно записать в виде

$$\overline{|\dot{\boldsymbol{I}}|} \leqslant |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\boldsymbol{I}| \mu^{1+q} \exp(-1/\mu^q), \tag{6.2.47а}$$

$$q(N) = \frac{2}{3N^2 - N + 8}. \tag{6.2.47б}$$

Так как $Q_0 \propto 1/\omega_1 \propto \mu^{-1/2}$, то $\gamma = 2q$. Полагая в (6.2.47б) $N = 3$, находим $\gamma = 1/8$. Это приводит к слишком медленному уменьшению скорости диффузии с μ и не согласуется с численными результатами на рис. 6.11. По мнению Чирикова [70], более правильная оценка соответствует [3]) $q = 1/N$. При $N = 3$ это приводит к значению $\gamma = 2/3$, которое находится в разумном согласии с численными результатами.

---

[1]) В работе [72] использовалась несколько другая нормировка D^*. — *Прим. ред.*

[2]) Менее жесткое, но тоже достаточное условие состоит в том, чтобы энергетические поверхности $H_0(I) = \text{const}$ были всюду выпуклыми (см. [512]). Примером может служить гамильтониан (6.2.29). — *Прим. ред.*

[3]) Упрощенный вывод этого соотношения см. в работе [69]. — *Прим. ред.*

6.2г. Модуляционная диффузия

Обратимся теперь к модуляционной диффузии, при которой хаотическое движение происходит вдоль системы перекрывающихся резонансов, вызванных медленной модуляцией возмущения. Следуя Чирикову и др. [76], рассмотрим модельный гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} I_1^2 - k\cos(\theta_1 + \lambda \sin \Omega t) + \frac{1}{2} I_2^2 - \varepsilon \cos(\theta_1 - \theta_2), \qquad (6.2.48)$$

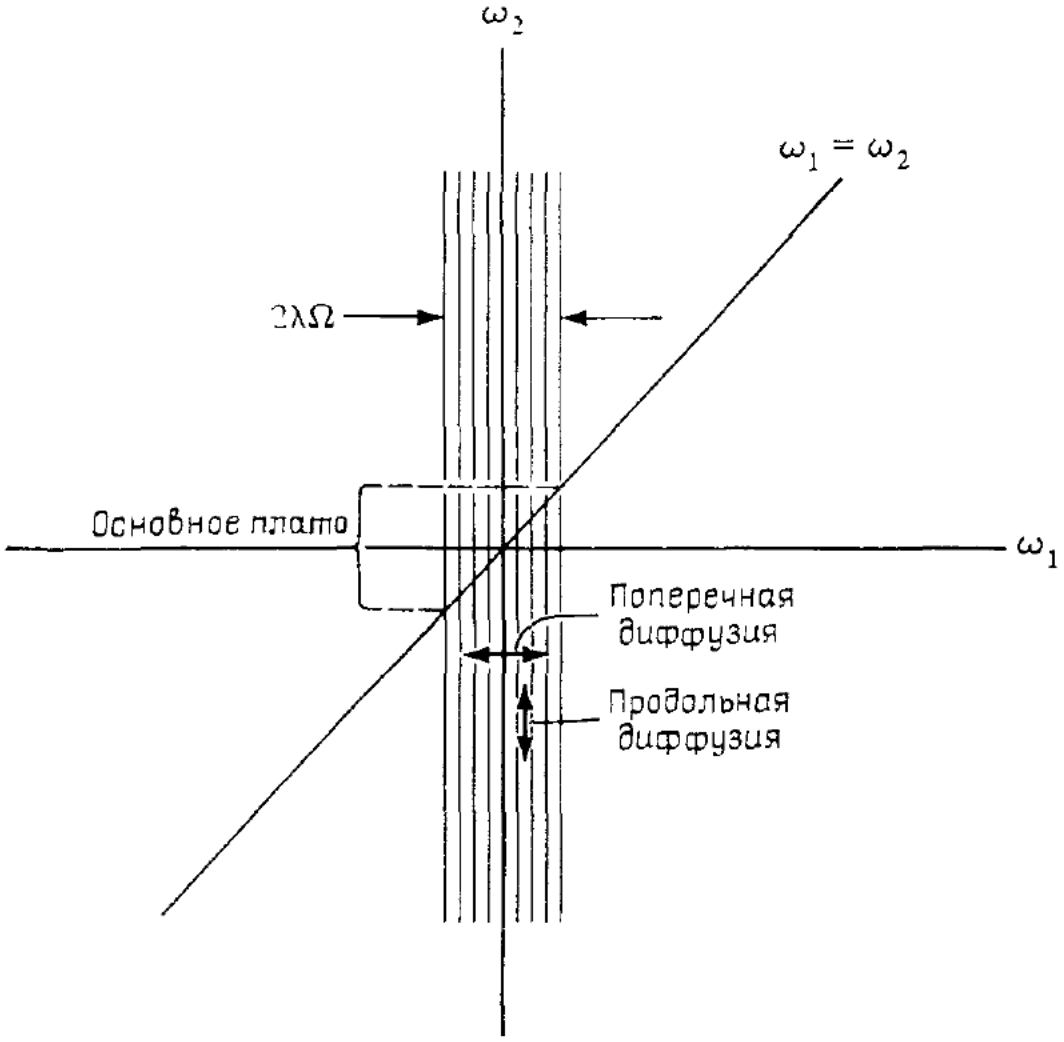


Рис. 6.12. Схема резонансов при модуляционной диффузии.

где λ и Ω — амплитуда и частота фазовой модуляции соответственно, а ε — малый параметр связи. Используя разложение

$$\cos(\theta_1 + \lambda \sin \Omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(\lambda) \cos(\theta_1 + n\Omega t), \qquad (6.2.49)$$

получаем мультиплет резонансов с центром в $\omega_1 = I_1 = 0$ и эффективной шириной приблизительно 2Ω, так как функции Бесселя $\mathcal{J}_n(\lambda)$ быстро убывают при $|n| \gtrsim \lambda$. Мультиплет показан на рис. 6.12 в виде нескольких вертикальных линий на плоскости частот ω_1, ω_2. Если резонансы мультиплета перекрываются, то возникает широкий стохастический слой, по которому и идет модуляционная диффузия.

Перекрытие в мультиплете. Движение внутри мультиплета описывается гамильтонианом

$$H_{\perp}=\frac{1}{2}I_1^2-k\sum_n \mathcal{J}_n(\lambda)\cos(\theta_1+n\Omega t). \qquad (6.2.50)$$

Действуя, как и в п. 2.4а, получим $G=1$ и $F=k\mathcal{J}_n(\lambda)$. Полная ширина сепаратрисы для каждого из резонансов мультиплета определяется формулой (2.4.31)

$$2\Delta I_{\text{макс}}=2\Delta\omega_{\text{макс}}=4(F/G)^{1/2}=4\sqrt{k|\mathcal{J}_n(\lambda)|}. \qquad (6.2.51)$$

Расстояние же между резонансами по частоте равно $\delta\omega=\Omega$. Используя правило двух третей (п. 4.1б) [1]), запишем условие перекрытия

$$\frac{2\Delta\omega_{\text{макс}}}{\Omega}>\frac{2}{3}. \qquad (6.2.52)$$

Подставляя (6.2.51) в (6.2.52) и принимая в качестве $\mathcal{J}_n(\lambda)$ среднеквадратичное значение $(\pi\lambda)^{-1/2}$, приводим условие (6.2.52) к виду

$$k\gtrsim\Omega^2\sqrt{\lambda}/20. \qquad (6.2.53)$$

Если движение, описываемое гамильтонианом (6.2.50), связано с третьей степенью свободы, то неравенство (6.2.53) есть также условие модуляционной диффузии. Если же возмущение меньше этой границы, то остается только диффузия Арнольда. Отметим неожиданное следствие оценки (6.2.53): чем меньше частота модуляции, тем ниже граница перекрытия по возмущению ($k\propto\Omega^2$). На первый взгляд это противоречит нашей интуиции об адиабатических возмущениях, согласно которой с ростом отношения частот влияние резонансов уменьшается [2]). Это противоречие разрешается, если принять во внимание, что стохастичность связана с прохождением резонанса, а это происходит только дважды за период модуляции $2\pi/\Omega$. Поэтому при $\Omega\to 0$ скорость диффузии также стремится к нулю.

Отметим, что поскольку ширина мультиплета уменьшается с уменьшением Ω при заданном λ, то при

$$k\gtrsim\Omega^2\lambda^{5/2}/13, \qquad (6.2.54)$$

ширина $\lambda\Omega<\Delta\omega_{\text{макс}}$. В этом случае весь мультиплет сливается в единый резонанс [3]), а скорость диффузии по стохастическому

---

[1]) В данном случае это правило не улучшает точность оценки, поскольку амплитуды и фазы соседних резонансов различны.— *Прим. ред.*

[2]) Эту интуицию следует подправить: при прохождении резонанса (вследствие модуляции), как и при прохождении частоты осциллятора через нуль, адиабатичность всегда нарушается независимо от скорости прохождения.— *Прим. ред.*

[3]) По этой причине оценка (6.2.54) неточна — ширину слившегося резонанса следует определять по полной амплитуде возмущения k [см. (6.2.48)], а не по амплитуде гармоники $k\mathcal{J}_n(\lambda)$ [см. (6.2.50)]. В результате получаем $k\gtrsim\Omega^2\lambda^2/16$.— *Прим. ред.*

слою этого резонанса падает. Три режима [1]) движения в модуляционном слое, определяемые неравенствами (6.2.53) и (6.2.54), схематически показаны на рис. 6.13.

Эти три режима были описаны Теннисоном [404] для модели взаимодействия встречных протонных пучков в проекте накопительного кольца Брукхейвенской лаборатории (США). В этой модели Теннисона использовалась модуляция частоты:

$$\frac{dJ_1}{dt} = k \sin \psi_1, \qquad \frac{d\psi_1}{dt} = J_1 + \bar{\lambda} \cos \Omega t, \tag{6.2.55}$$

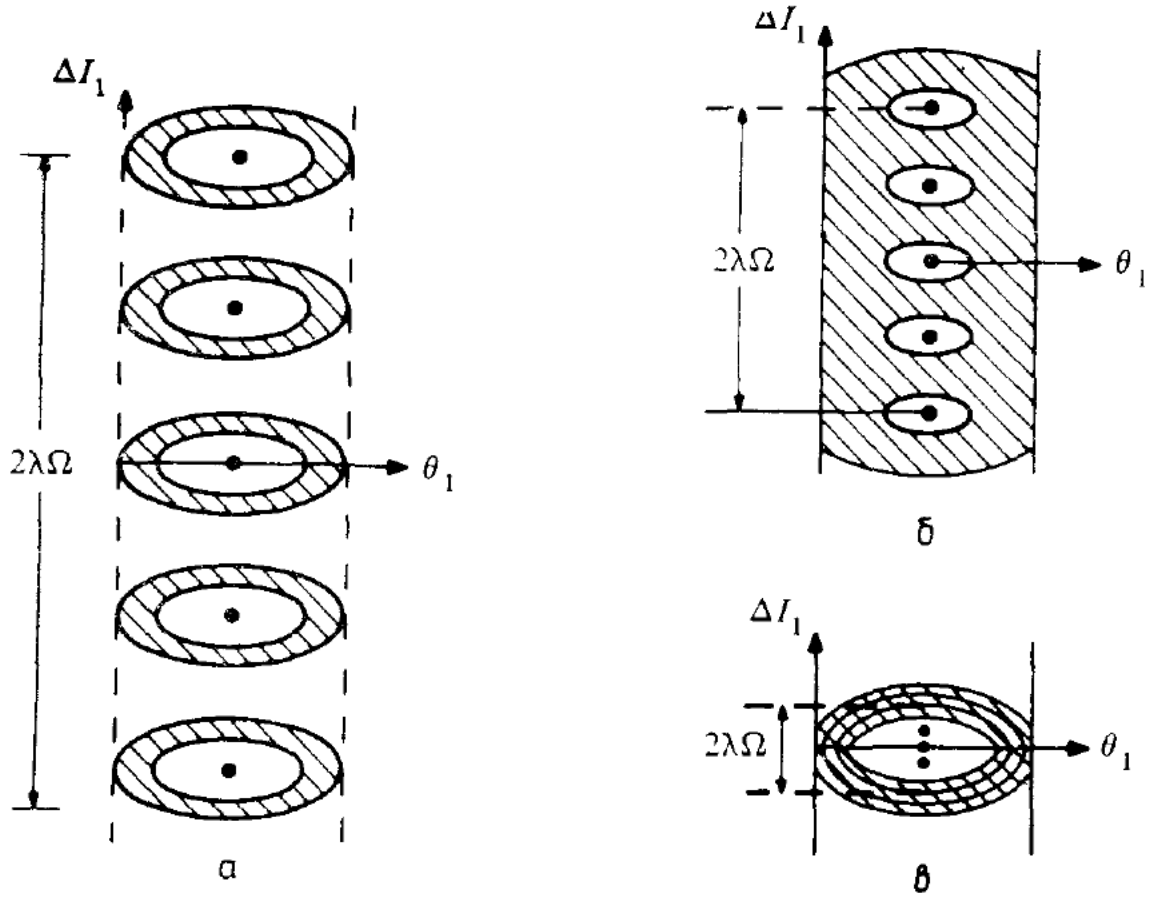


Рис. 6.13. Три режима движения внутри мультиплета в зависимости от частоты модуляции Ω (по данным работы [276]).

а — большая частота Ω, модуляционные резонансы не перекрываются, слабая диффузия Арнольда вдоль отдельных стохастических слоев; *б* — промежуточная частота Ω, резонансы перекрываются, сильная модуляционная диффузия вдоль широкого слоя; *в* — очень малая частота Ω, все резонансы сливаются в один, диффузия Арнольда вдоль единого стохастического слоя.

тогда как в рассмотренной выше модели (6.2.48) модулируется фаза:

$$\frac{dI_1}{dt} = k \sin(\theta_1 + \lambda \sin \Omega t), \qquad \frac{d\theta_1}{dt} = I_1. \tag{6.2.56}$$

Обе модели сводятся друг к другу путем замены переменных с производящей функцией

$$F = J_1(\theta_1 + \lambda \sin \Omega t),$$

[1]) Существует также и четвертый, промежуточный, режим захвата для $k \gtrsim \Omega^2\lambda$.

причем $\lambda = \bar{\lambda}/\Omega$. На рис. 6.14 показан эффект модуляции для стандартного отображения (при $K = 0{,}007$), что соответствует уравнениям (6.2.55), если заменить k на $K\delta_1(t)$, где $\delta_1(t)$ — периодическая δ-функция (3.1.33). При $\bar{\lambda} = 0$ (рис. 6.14, *а*) имеется единственный резонанс с шириной $2\Delta I_{\text{макс}} = 4K^{1/2}$. При $\bar{\lambda} = 0{,}63$ и последовательно уменьшающейся частоте Ω на рис. 6.14, *б* виден мультиплет неперекрывающихся резонансов; на рис. 6.14, *в* — частичное перекрытие резонансов; на рис. 6.14, *г* — полное перекрытие резонансов.

Диффузия вдоль мультиплета. Вернемся к гамильтониану (6.2.48). Диффузию вдоль перекрывающихся резонансов мультиплета (по I_2) можно вычислить в модели стохастической накачки. Продольная часть гамильтониана имеет вид

$$H_{\parallel} = \frac{1}{2} I_2^2 - \varepsilon \cos(\theta_1(t) - \theta_2). \tag{6.2.57}$$

Отсюда [ср. (6.2.7)]:

$$\frac{dH_{\parallel}}{dt} = -\varepsilon \frac{d}{dt} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \varepsilon \sin(\theta_1 - \theta_2) \frac{d\theta_2}{dt}.$$

Первый член приводит лишь к малым осцилляциям $H_{\parallel}$, которыми мы пренебрегаем. В результате получаем

$$\Delta H_{\parallel} \approx \varepsilon \int \sin\varphi \frac{d\theta_2}{dt} dt, \tag{6.2.58}$$

где фаза $\varphi(t) = \theta_1 - \theta_2$.

Для вычисления $\varphi(t)$ нужно невозмущенное движение $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$. Положив в (6.2.57) $\varepsilon = 0$, запишем решение в виде

$$\theta_2(t) = \omega_2 t - \chi_0 - \pi/2. \tag{6.2.59}$$

Получить $\theta_1(t)$ из (6.2.50) можно лишь приближенным методом. Считая k малым параметром возмущения, запишем (6.2.50) в виде

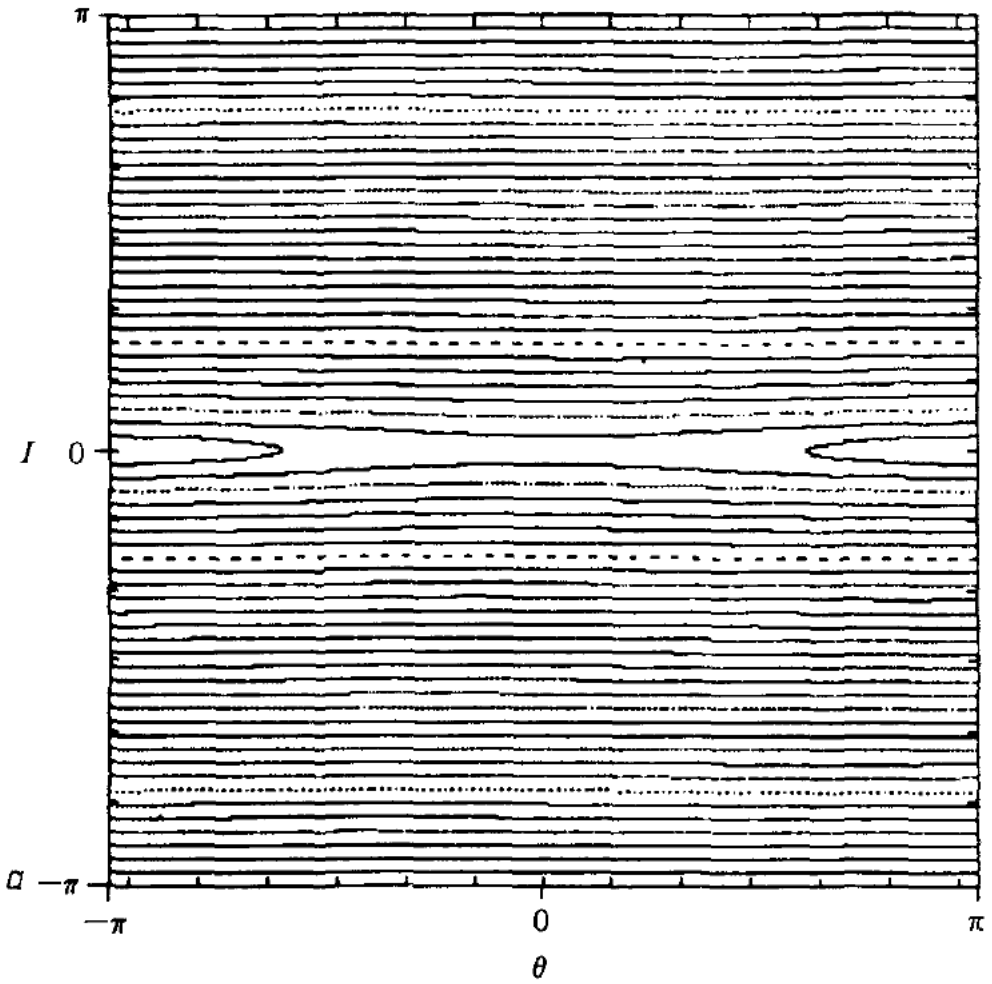
$$H_0 = \frac{1}{2} I_1^2 \tag{6.2.60а}$$

и

$$H_1 = -k \sum_n \mathcal{J}_n(\lambda) \cos(\theta_1 + n\Omega t). \tag{6.2.60б}$$

Используя каноническую теорию возмущений (п. 2.2б) и замечая, что $\langle H_1 \rangle = 0$, из (2.2.44) получаем в первом порядке по k: $\bar{H} = H_0$, $\bar{I}_1 = I_0 = \text{const}$, $\bar{\theta}_1 = I_0 t$, а для производящей функции — выражение [см. (2.2.45)]:

$$S_1 = k \sum_n \frac{\mathcal{J}_n(\lambda)}{n\Omega + \bar{I}_1} \sin(\theta_1 + n\Omega t). \tag{6.2.61}$$



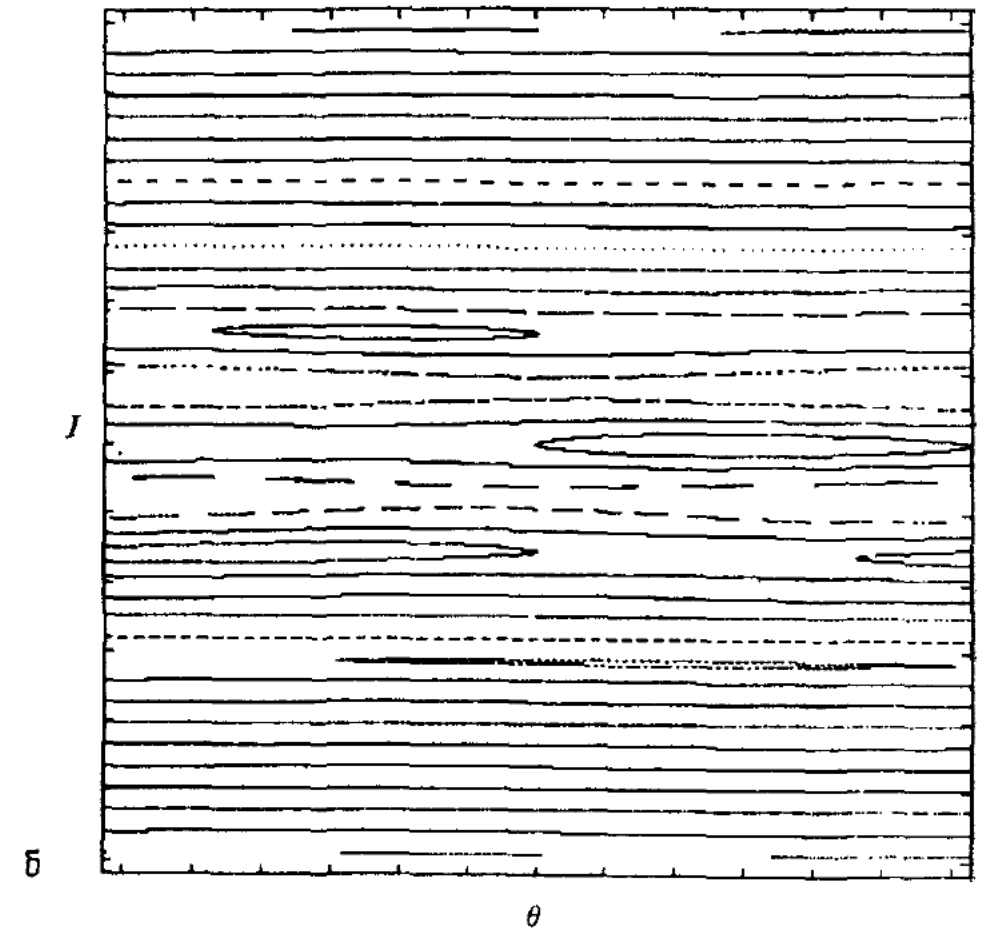
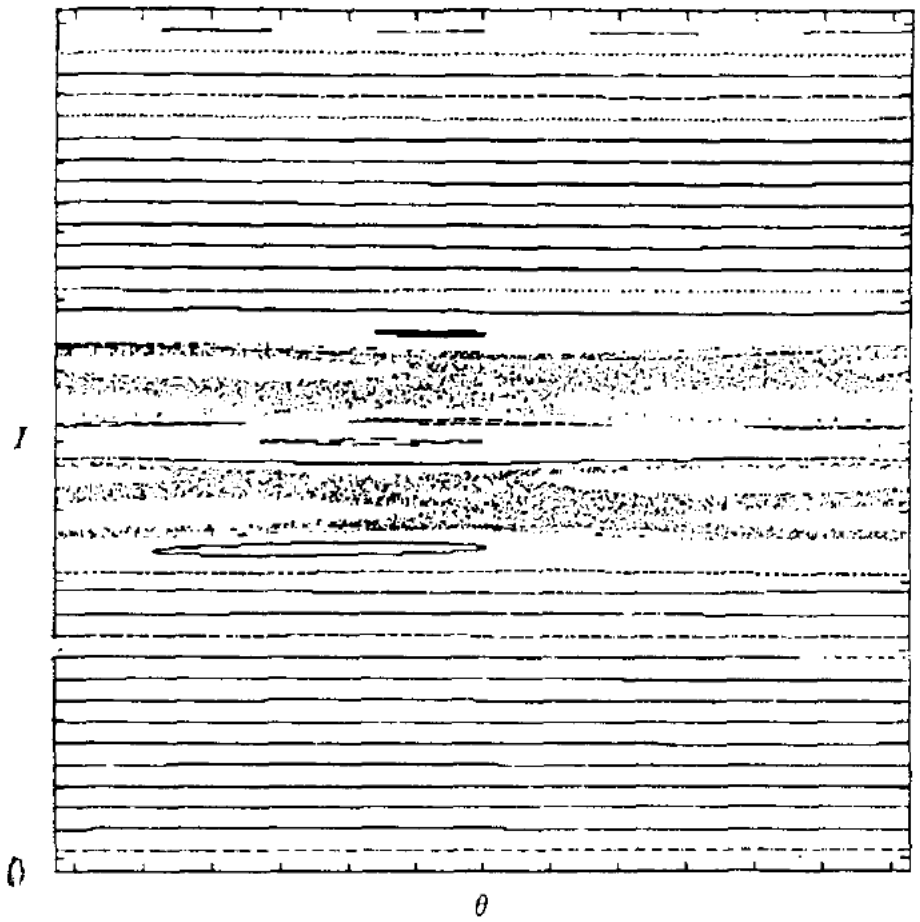
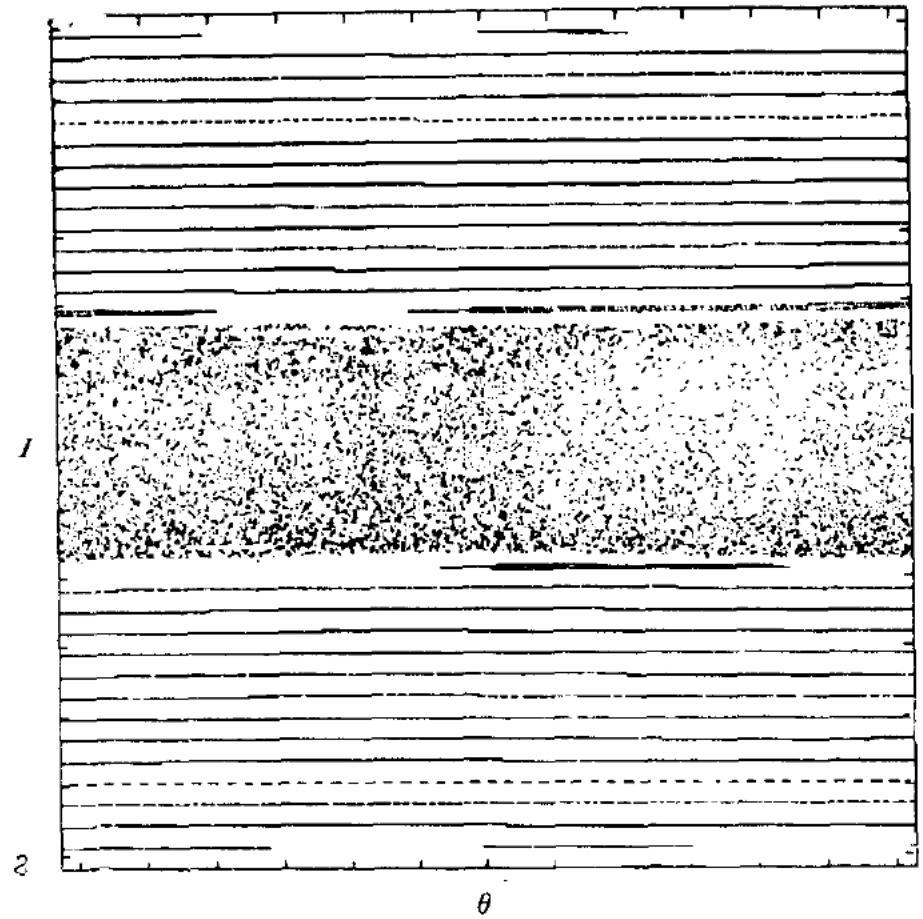


Рис. 6.14. Фазовая плоскость стандартного отображения при модуляции $K = 0.007$. *а* — модуляция отсутствует; *б—г* — частота модуляции последовательно





частоты.

уменьшается при постоянной амплитуде.

Подставляя в (6.2.60б) $\theta_1 = \overline{\theta}_1 = I_0 t$ и используя (6.2.61), находим

$$\theta_1(t) = I_0 t + k \sum_n \frac{\mathcal{J}_n(\lambda)}{(n\Omega + I_0)^2} \sin[(I_0 + n\Omega)t]. \qquad (6.2.62)$$

В качестве грубого приближения оставим в этой сумме один (наибольший) член с $n \approx \lambda$. Тогда

$$\varphi(t) \approx (I_0 - \omega_2)t + \chi_0 + \pi/2 + kR\mathcal{J}_\lambda(\lambda)/(I_0 + \lambda\Omega)^2 \times \\ \times \sin(I_0 + \lambda\Omega)t, \qquad (6.2.63)$$

где в подгоночном параметре R учитывается «эффективное» число членов в сумме (6.2.62). Выражение (6.2.63) является основным приближением при анализе движения в модуляционном слое.

Коэффициент модуляционной диффузии можно определить как

$$D(\omega_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \langle [\Delta H_{\parallel}(T)]^2 \rangle_{I_0,\ \chi_0}, \qquad (6.2.64)$$

где усреднение[1]) по I_0 производится по всей стохастической области $|I_0| < \lambda\Omega$. Подставляя сюда (6.2.58), получаем

$$D(\omega_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \frac{\varepsilon^2}{2\lambda\Omega} \left\langle \int_{-\lambda\Omega}^{\lambda\Omega} dI_0 \int_{-T}^{T} dt'' \omega_2 \sin\varphi(t'') \times \right. \\ \left. \times \int_{-T}^{T} dt' \omega_2 \sin\varphi(t') \right\rangle_{\chi_0}. \qquad (6.2.65)$$

Используя (6.2.63) и снова разлагая по функциям Бесселя, находим

$$\sin\varphi(t) = \sum_j A_j(I_0) \cos\{[(j+1)I_0 + j\lambda\Omega - \omega_2]t + \chi_0\}, \qquad (6.2.66а)$$

где

$$A_j(I_0) = \mathcal{J}_j\left[\frac{kR\mathcal{J}_\lambda(\lambda)}{(I_0 + \lambda\Omega)^2}\right]. \qquad (6.2.66б)$$

Интегрирование в (6.2.65) по t'' дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt'' \sin\varphi(t'') = \sum_j A_j(I_0) \cos\chi_0 \frac{2\pi}{j+1} \delta\left(I_0 + \frac{j\lambda\Omega}{j+1} - \frac{\omega_2}{j+1}\right). \qquad (6.2.67)$$

Интегрируя далее, сначала по I_0, а затем по t', получаем

$$D(\omega_2) = \frac{\varepsilon^2\omega_2^2}{2\lambda\Omega} \sum_j \frac{2\pi}{j+1} A_j^2\left(\frac{\omega_2 - j\lambda\Omega}{j+1}\right) \langle\cos^2\chi_0\rangle.$$

---

[1]) Усреднение по χ_0 требует пояснения. Фактически важна разность фаз $\varphi(0) = \chi_0 + \pi/2$ [см. (6.2.63)], которая, как и I_0, не является на самом деле постоянной вследствие стохастического движения при перекрытии резонансов в мультиплете.— *Прим. ред.*

Здесь сумма по j ограничена δ-функцией в (6.2.67):

$$j=\frac{\omega_2-I_0}{I_0+\lambda\Omega}.$$

При изменении I_0 от $-\lambda\Omega$ до $\lambda\Omega$ целое j изменяется от

$$l(\omega_2)=\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega_2}{\lambda\Omega}\right)\right] \tag{6.2.68}$$

до бесконечности. Аргумент функции Бесселя в (6.2.66б) обычно мал [1]), так что доминирующим является член с $j=l$. Опуская остальные члены и усредняя по χ_0, получаем окончательный результат

$$D(\omega_2)=\frac{\pi}{2}\,\frac{\varepsilon^2\omega_2^2}{(l+1)\,\lambda\Omega}\,\mathcal{J}_l^2\left[\frac{kR\,(l+1)^2\,\mathcal{J}_\lambda(\lambda)}{(\omega_2+\lambda\Omega)^2}\right]. \tag{6.2.69}$$

С ростом ω_2 величина l изменяется скачками, как это следует из (6.2.68). Соответственно график зависимости $D(\omega_2)$ имеет вид серии убывающих «плато» (рис. 6.15). Основное плато ($l=0$) соответствует частотам $0<\omega_2<\lambda\Omega$, а остальные расположены в интервалах

$$(2l-1)\,\lambda\Omega<\omega_2<(2l+1)\,\lambda\Omega. \tag{6.2.70}$$

На основном плато $\mathcal{J}_0\approx 1$ и коэффициент диффузии

$$D_{\text{пл}}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\varepsilon^2\omega_2^2}{\lambda\Omega}. \tag{6.2.71}$$

Относительно большая скорость диффузии объясняется тем, что внутри модуляционного слоя (см. рис. 6.12) выполняется условие точного резонанса $\omega_1=I_0=\omega_2$.

На рис. 6.15 представлены численные значения приведенного коэффициента диффузии

$$D_n=\frac{D}{\left(\varepsilon^2\omega_2^2/\Delta\omega\right)}, \tag{6.2.72}$$

как функции $\omega_2/\Delta\omega$. Здесь вместо $\lambda\Omega$ использована фактическая полуширина модуляционного слоя $\Delta\omega\approx 1{,}3\lambda\Omega$, $\lambda=10$, $\Omega=10^{-2}$, $k=5\times 10^{-4}$. Ясно видно основное плато со средним значением $D_n=1{,}6$, что хорошо согласуется с величиной $\pi/2$ из (6.2.71). При $\omega_2>\Delta\omega$ скорость диффузии резко падает, а затем, с ростом ω_2, уменьшается ступенчатым образом. Это как раз то, что предсказывает теория (6.2.69).

Для количественного сравнения с численными результатами необходимо определить параметр R. Это было сделано путем под-

---

[1]) Если $k\leqslant k_1\sim\Omega^2\lambda^{7/3}$ [см. (6.2.69), $\mathcal{J}_\lambda(\lambda)\sim\lambda^{-1/3}$], что почти совпадает с границей слияния резонансов мультиплета (6.2.54).— *Прим. ред.*

гонки формулы (6.2.69) к численным данным на краю двух последних плато ($l = 2$, $l = 3$). Подставив найденное значение $R \approx 5{,}3$ в (6.2.69), получим зависимость $D_n(\omega_2/\Delta\omega)$, представленную на рис. 6.15 сплошной линией. Если учесть, что в теории использовалось существенное упрощение (6.2.63), согласие можно считать

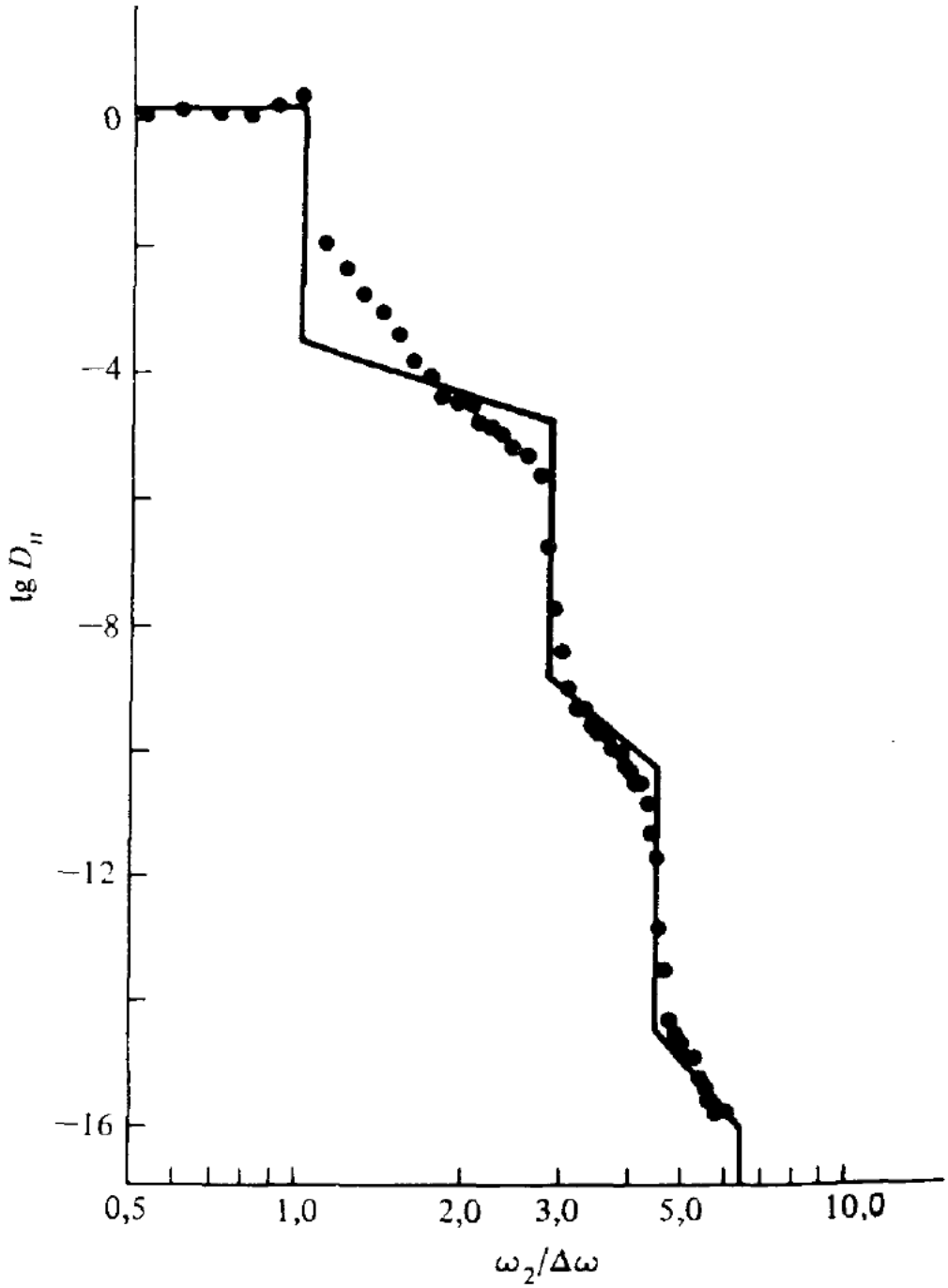


Рис. 6.15. Зависимость приведенного коэффициента диффузии D_n от величины $\omega_2/\Delta\omega$.

Точки — численные данные; сплошная линия — теория (6.2.69); $\lambda = 10$; $\Omega = 10^{-2}$; $k = 5 \times 10^{-4}$; $\Delta\omega = 1{,}3\ \lambda\Omega$.

вполне удовлетворительным. Отметим, что теория предсказывает резкий спад $D_n(\omega_2)$ после каждого плато и что все плато, кроме основного ($l = 0$), имеют некоторый наклон. В пределах каждого плато скорость диффузии спадает по закону

$$D_n(\omega_2) \propto \left(1 + \frac{\omega_2}{\Delta\omega}\right)^{-4l} \to \left(\frac{\omega_2}{\Delta\omega}\right)^{-4l},$$

где последнее выражение относится к $l \gg 1$. Все эти предсказания находятся в разумном согласии с численными данными [1]).

§ 6.3. Внешняя диффузия

Рассмотрим движение системы, близкой к интегрируемой, под действием внешнего шума. Резонансы в системе могут значительно усиливать внешнюю диффузию. В п. 5.5б мы уже познакомились с примером такого усиления классической диффузии за счет прохождения резонанса (см. рис. 5.17).

Ниже мы рассмотрим усиление классических процессов переноса вдоль резонансов. Усиление возможно даже для автономной системы с двумя степенями свободы в том случае, когда внешний шум не сохраняет энергию, и система может двигаться вдоль резонансов. Такой процесс был исследован Теннисоном в работе [405], основные результаты которой и представлены в п. 6.3а. Родственный процесс диффузии самого резонанса был рассмотрен Чириковым [71] и Коэном и Раулэндсом [80] (п. 6.3б) [2]).

6.3а. Резонансное каналирование диффузии [3])

Геометрическая картина. Вернемся к гамильтониану (6.1.7)

$$H_0 = I_1^2 + (6I_2)^2,$$

резонансные и энергетические поверхности (линии) которого показаны на рис. 6.2. На рис. 6.16 в увеличенном масштабе изображен участок рис. 6.2, ограниченный пунктиром. Введем резонансное возмущение

$$H_1 = V_R(I_1, I_2)\cos(6\theta_1 - \theta_2). \tag{6.3.1}$$

Вектор единственного резонанса $\boldsymbol{m}_R = (6, -1)$ определяет направление фазовых колебаний вдоль невозмущенной энергетической поверхности, как показано на рис. 6.16. Пунктиром показана полная ширина резонанса, ограничивающая максимальную амплитуду фазовых колебаний. Центр колебаний лежит на линии резонанса в точке A.

---

[1]) Как и в случае диффузии Арнольда, здесь существует область Нехорошева (п. 6.2в), в которой диффузия идет под действием комбинационных резонансов высоких гармоник. Для модуляционной диффузии такой режим наблюдался, по-видимому, в численных экспериментах [513].— *Прим. ред.*

[2]) Отметим также, что описанная выше модуляционная диффузия, и особенно диффузия Арнольда в тонком слое, становится практически интересной только в присутствии (слабого) внешнего шума, который распространяет такую диффузию на все начальные условия. Можно сказать также, что средняя скорость внешней диффузии резко возрастает за счет диффузии в стохастических слоях (см. [70, § 7.7]).— *Прим. ред.*

[3]) Авторы используют термин «resonance streaming» (резонансное течение).— *Прим. перев.*

Рассмотрим теперь влияние не сохраняющего энергию внешнего шума, который мы будем характеризовать мгновенным смещением системы из точки a в точку b на расстояние l (рис. 6.16). При этом центр колебаний сдвигается вдоль линии резонанса из точки A в точку B на расстояние

$$L = l\frac{\sin\chi}{\sin\psi}. \tag{6.3.2}$$

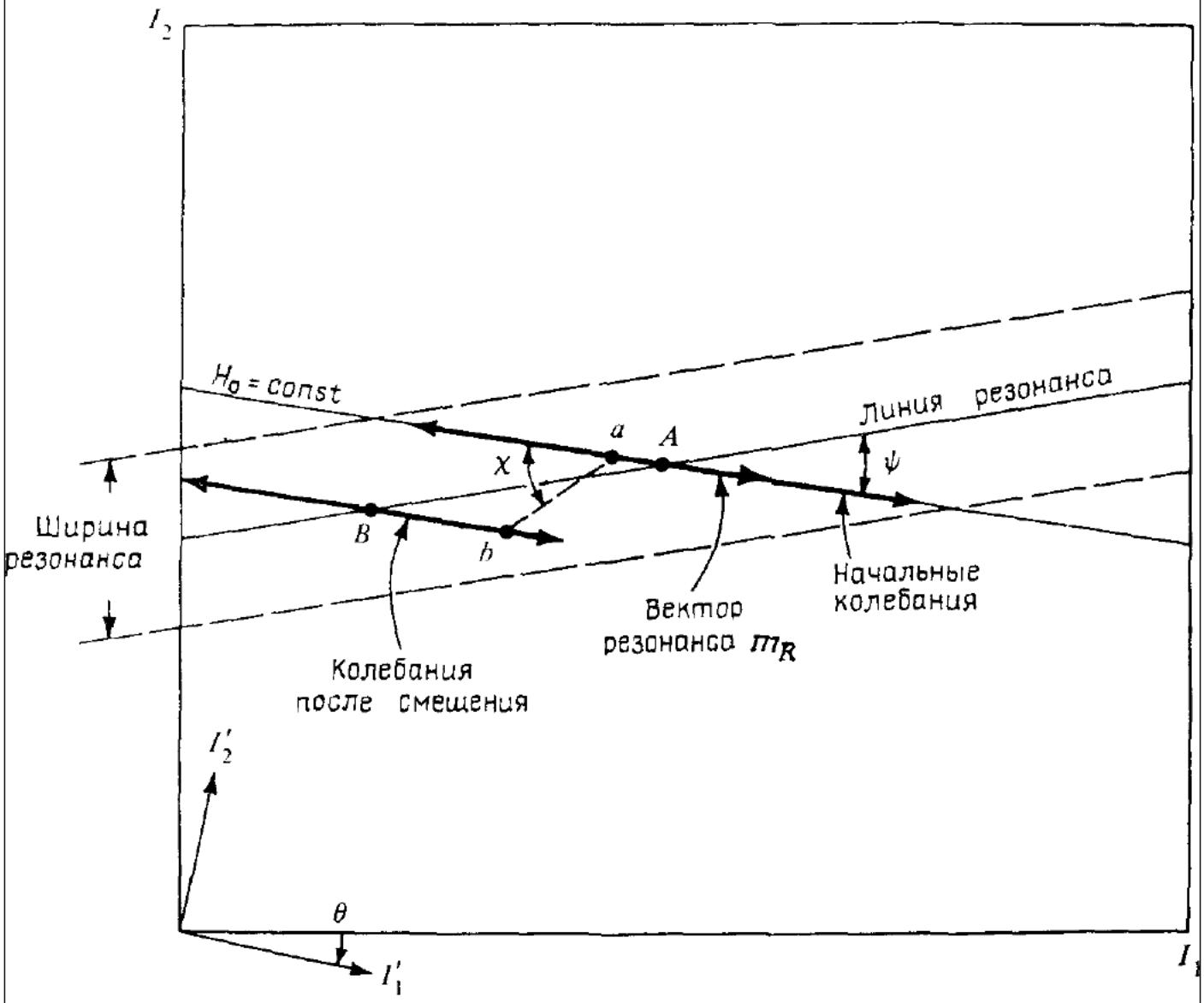


Рис. 6.16. Резонансное каналирование (по данным работы [405]).
Под действием внешнего шума система переходит из точки a в точку b, а центр фазовых колебаний смещается из точки A в точку B.

За много случайных смещений среднее от $\sin^2\chi$ будет порядка единицы, тогда как $\sin\psi \approx \text{const}$ локально. В результате при $\psi \ll 1$ скорость диффузии вдоль резонанса резко возрастает. Будем называть такую диффузию *резонансным каналированием*. Определим коэффициент диффузии вдоль резонанса формулой

$$D_{\text{кан}} = \frac{1}{2} R \langle L^2 \rangle,$$

где R — число случайных смещений системы в единицу времени. Сравним это с классической диффузией по нормали к энергетиче-

ской поверхности:

$$D_{\perp E} = \frac{1}{2} R \langle I^2 \sin^2 \chi \rangle. \tag{6.3.3}$$

Отсюда

$$D_{\text{кан}} = \frac{D_{\perp E}}{\sin^2 \psi}. \tag{6.3.4}$$

Расчет диффузии. Если коэффициент внешней диффузии D_0 не зависит от направления на плоскости (I_1, I_2), то $D_{\perp E} = D_0$ и $D_{\text{кан}} = D_0/\sin^2\psi$. В случае анизотропной диффузии предположим, что тензор внешней диффузии имеет вид

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

т. е. оси I_1 и I_2 совпадают с главными направлениями D. Тогда начальное распределение в виде δ-функции эволюционирует по закону [62]

$$F = \frac{1}{4\pi t (D_1 D_2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{I_1^2}{4D_1 t} - \frac{I_2^2}{4D_2 t}\right). \tag{6.3.5}$$

Введем новые переменные I_1', I_2', соответствующие повороту осей на угол θ, так что ось I_2' направлена перпендикулярно энергетической поверхности (рис. 6.16). Имеем

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \end{pmatrix}. \tag{6.3.6}$$

Подставляя это соотношение в (6.3.5) и интегрируя по I_1', получаем

$$\int F'(I_1', I_2', t)\, dI_1' \propto \exp\left(-\frac{(I_2')^2}{4D_{\perp E} t}\right),$$

где

$$D_{\perp E}^{-1} = \frac{\frac{1}{2}\left(D_1^{-2} + D_2^{-2}\right)\sin^2 2\theta + D_1^{-1} D_2^{-1} \cos^2 2\theta}{D_1^{-1}\cos^2\theta + D_2^{-1}\sin^2\theta} \tag{6.3.7}$$

— коэффициент диффузии по I_2'. Зная $D_{\perp E}$, из (6.3.4) находим $D_{\text{кан}}$.

Другой метод состоит в выборе таких новых переменных $\bar{I}$, в которых тензор диффузии становится изотропным. Иначе говоря, константы метрики g^{ij} нового пространства действий выбираются так, чтобы

$$D^{ij} = \bar{D}_0 g^{ij}, \tag{6.3.8}$$

где D^{ij} — компоненты исходного тензора внешней диффузии, а

$\bar{D}_0$ — коэффициент изотропной диффузии. Если, например,

$$\mathsf{D} = \bar{D}_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}, \tag{6.3.9}$$

то новые элементы длины равны

$$\begin{aligned} ds_1 &= dI_1/\sqrt{g^{11}} = dI_1, \\ ds_2 &= dI_2/\sqrt{g^{22}} = dI_2/6. \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

После этого можно, но не обязательно, сделать формальное преобразование к новым переменным

$$\bar{I}_1 = I_1, \quad \bar{I}_2 = \frac{1}{6} I_2. \tag{6.3.11}$$

В обоих случаях диффузия будет изотропной. Эти преобразования иллюстрируются на рис. 6.17 для невозмущенного гамильтониана

$$H_0 = I_1^2 + I_2^2 \tag{6.3.12}$$

и тензора диффузии (6.3.9). В новых переменных (6.3.11) невозмущенный гамильтониан (6.3.12) принимает вид

$$\bar{H}_0 = \bar{I}_1^2 + \frac{D_2}{D_1} \bar{I}_2^2 = \bar{I}_1^2 + (6\bar{I}_2)^2. \tag{6.3.13}$$

Замена переменных соответствует производящей функции

$$F_2 = \theta_1 \bar{I}_1 + 6\theta_2 \bar{I}_2, \tag{6.3.14}$$

откуда

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{I}_1} = \theta_1; \quad \bar{\theta}_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{I}_2} = 6\theta_2.$$

Старое условие резонанса $\omega_1 - \omega_2 = 0$ заменяется новым

$$6\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 = 0, \tag{6.3.15}$$

или в переменных действия

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} = \frac{\bar{I}_1}{6}. \tag{6.3.16}$$

Тем самым мы фактически пришли к модели невозмущенного гамильтониана (6.1.7). Используя (6.3.13) и (6.3.16), находим $\sin^2\psi = 4D_1D_2/(D_1 + D_2)^2$ и соответственно величину коэффициента диффузии центров колебаний в пространстве новых переменных

$$\frac{1}{\sin^2\psi} = \frac{\bar{D}_{\text{кан}}}{\bar{D}_0} = \frac{(D_1 + D_2)^2}{4D_1D_2} \approx 9{,}5.$$

Скорость диффузии в исходных переменных получается с помощью обратного преобразования переменных.

Следуя Теннисону [405], рассмотрим пример резонансного каналирования для гамильтониана

$$H = I_1^2 + (6I_2)^2 + V_R \cos(6\theta_1 - \theta_2) \tag{6.3.17}$$

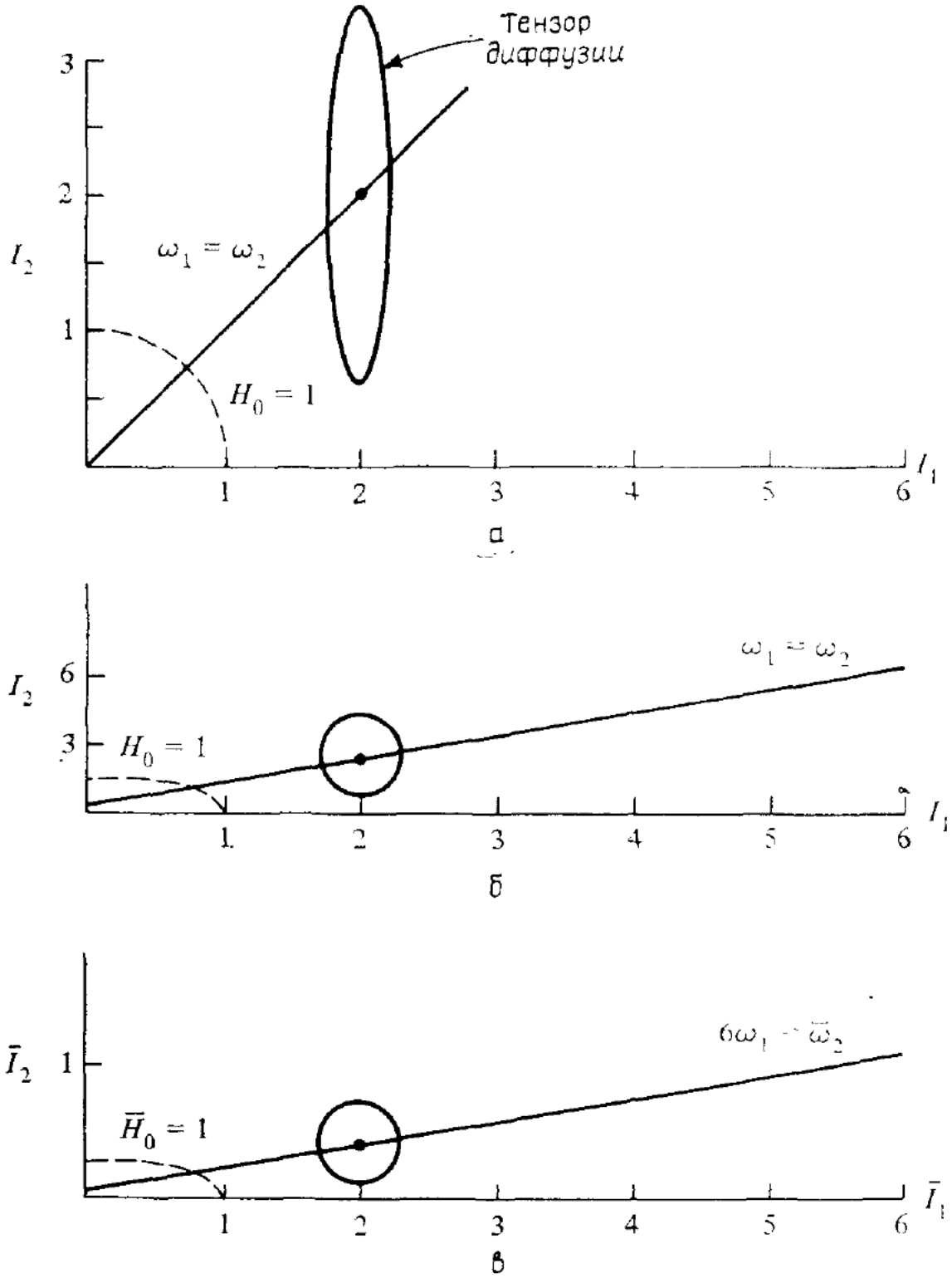


Рис. 6.17. Изменение масштаба и преобразование переменных для перехода к изотропной диффузии (см. текст).

Прямая линия — резонанс связи; пунктирная линия — линия постоянной энергии.

с $V_R = 10^{-5}$. Будем считать, что внешний шум вызывает периодические (с периодом $T = 1$) смещения $\Delta I_1 = 0$, $\Delta I_2 = 10^{-5} \sin r_n$, где r_n — случайные числа, равномерно распределенные в интервале $(0, 2\pi)$. На рис. 6.18 показаны последовательные положения системы, усредненные по интервалам $\Delta t = 500$ и соединенные пря-

мыми линиями. Начальные условия (точка I на рис. 6.18) выбирались на линии резонанса (пунктирная линия). В процессе диффузии траектория в конце концов выходит из резонанса и оканчивается в точке F. Диффузия вдоль резонанса и есть резонансное каналирование. Движение под острым углом к резонансной линии связано с прохождением резонанса (ср. рис. 5.17). Оно идет почти

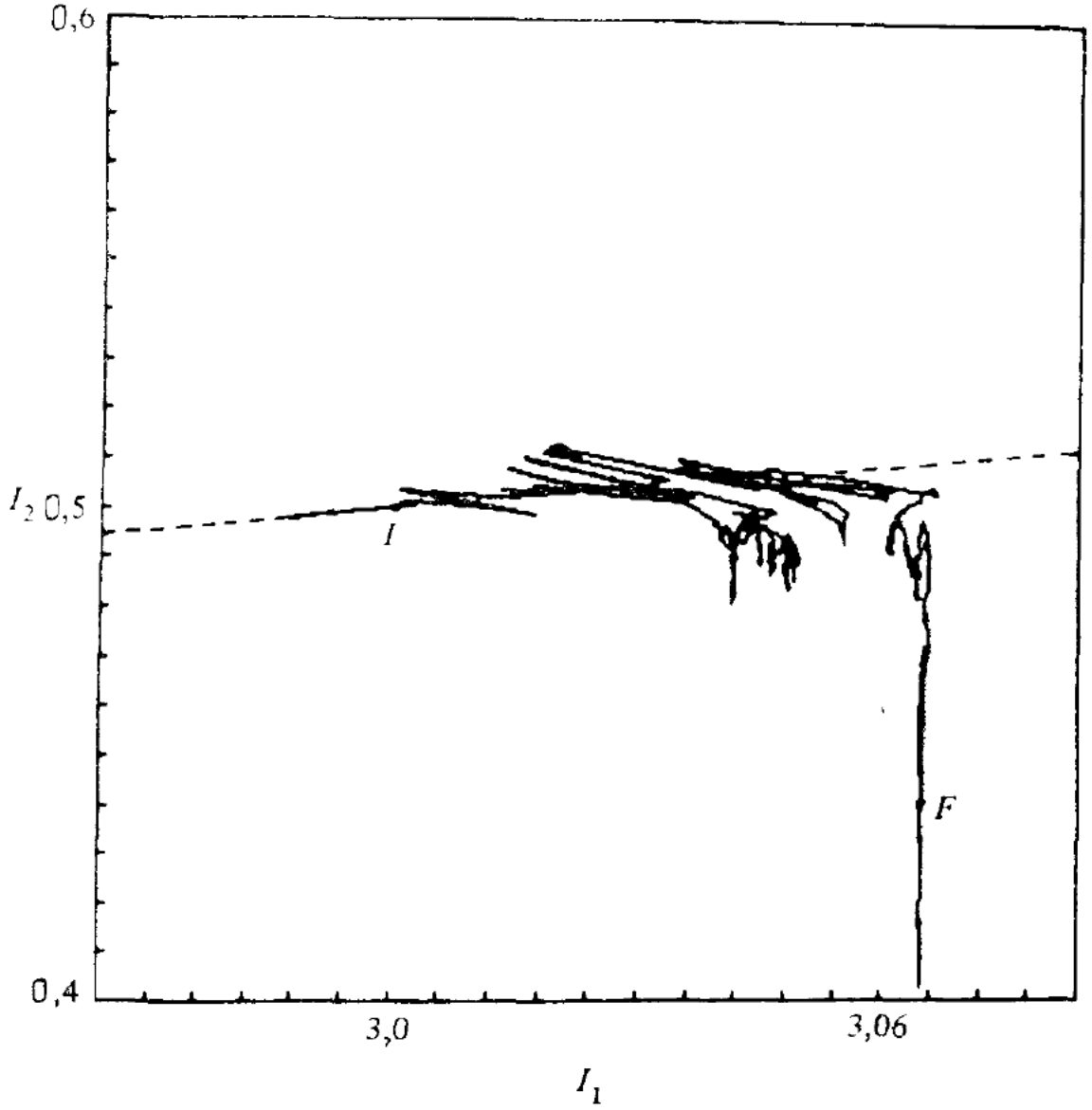


Рис. 6.18. Резонансное каналирование для модели (6.3.17) (по данным работы [405]).

Ломаная линия — численные данные для траектории движения, усредненной на интервалах $\Delta t \approx 500 \approx 3T_0$, где T_0 — период малых фазовых колебаний; I, F — начальная и конечная точки траектории; пунктирная линия — линия резонанса.

вдоль линии постоянной энергии. Наконец, вертикальное движение по обе стороны от точки F есть результат медленной классической диффузии по I_2 вдали от резонанса.

Резонансное каналирование возможно лишь для достаточно сильного (широкого) резонанса, когда время внешней диффузии поперек резонанса

$$\tau_D = \frac{(\Delta I_R)^2}{2D_{\perp R}}$$

велико по сравнению с периодом фазовых колебаний

$$\tilde{\omega}_R \tau_D > 2\pi. \tag{6.3.18}$$

Здесь ΔI_R и $D_{\perp R}$ — полная ширина резонанса и скорость внешней диффузии, перпендикулярная линии резонанса, а $\tilde{\omega}_R$ — частота фазовых колебаний. В примере Теннисона $\Delta I_R \approx 3 \times 10^{-3}$, $D_{\perp R} \approx 10^{-8}$, $\tau_D \approx 450$, $\tilde{\omega}_R \approx 0{,}03$, так что условие $\tilde{\omega}_R \tau_D \approx \approx 14 > 2\pi$ выполняется.

Резонансное каналирование при условии (6.3.18) соответствует так называемой *банановой* диффузии частиц в тороидальных магнитных ловушках при редких столкновениях. Такое название происходит от формы инвариантных кривых внутри резонанса (см. рис. 6.22, *а*) [1]). С ростом уровня шума условие (6.3.18) перестает выполняться и происходит переход к режиму, при котором скорость диффузии не зависит от величины шума,— к так называемому режиму *плато* [2]). Чириков [71] и Коэн и Раулэндс [80] исследовали этот режим на модели, описанной в п. 6.3б. Мы отложим обсуждение этого режима до § 6.4, где рассматривается диффузия частиц в тороидальных магнитных ловушках при наличии резонансов. Наконец, при еще большей интенсивности шума резонансная структура уже не играет никакой роли, и возникает третий режим чисто классической диффузии. В § 6.4 мы обсудим также и этот режим. Средняя скорость диффузии в системе со многими (неперекрывающимися) резонансами зависит также от доли фазового пространства, занятого резонансами.

Резонансное каналирование имеет место и в многомерных системах [405]. Внешняя диффузия усиливается вдоль резонансной поверхности в направлении проекции на нее вектора резонанса [3]) $\boldsymbol{m}_R$.

Теннисон [405] полагает, что такого типа диффузия может быть причиной «раздувания» встречных пучков в накопительных кольцах. Возможно также, что подобное усиление диффузии имеет место и в различных установках магнитного удержания и нагрева плазмы. Теннисон отметил также, что в диссипативных системах с затуханием по обеим степеням свободы резонансное каналирование может привести к быстрому увеличению одной из переменных действия. Он сравнивает это с движением парусной лодки против

---

[1]) В отечественной литературе используется также термин «диффузия Будкера», который первым предсказал и дал оценку такой диффузии (см. примечание редактора на с. 336 и [71]).— *Прим. ред.*

[2]) В отечественной литературе он называется также режимом Галеева—Сагдеева, которые построили теорию диффузии в этих условиях [510, 71]. В рассматриваемой задаче такой режим имеет место только в случае многих резонансов.— *Прим. ред.*

[3]) В отличие от двух степеней свободы усиление внешней диффузии возможно здесь, вообще говоря, и в том случае, когда внешний шум сохраняет энергию, например, при рассеянии частицы (см. работу [405], рис. 8).— *Прим. ред.*

ветра. Представим себе, что на рис. 6.16 лодка находится в точке a и может двигаться только вдоль линии резонанса. Пусть плоскость паруса параллельна вектору $\boldsymbol{m}_R$, а ветер, диссипативная сила, давит в направлении от a к b. Тогда если наклон линии резонанса отрицательный, то результирующая сила будет направлена от A к B, и лодка будет идти «на ветер» по I_2, хотя при этом полная энергия системы будет уменьшаться.

6.3б. Диффузия резонанса

Модельное отображение. Рассмотрим явное отображение поворота (3.1.17)

$$J_{n+1} = J_n + f(\mu)\sin\theta_n, \tag{6.3.19а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}, \mu), \tag{6.3.19б}$$

где J, θ — канонические переменные, а μ — дополнительный параметр. Вводя периодическую δ-функцию, эти уравнения можно записать в форме гамильтоновых дифференциальных уравнений типа (3.1.34). Пусть теперь изменение параметра μ описывается независимым уравнением

$$\mu_{n+1} = \mu_n + \zeta_n, \tag{6.3.20}$$

где ζ_n — случайная переменная. Тогда в системе (6.3.19) с $\mu = \mu_{n+1}$ возникает внешняя диффузия, аналогичная описанной в п. 6.3а. Такой подход использовался Чириковым [71] и Коэном и Раулэндсом [80] при исследовании процессов переноса в магнитных ловушках.

Для упрощения анализа линеаризуем отображение (6.3.19) по переменным J и μ в окрестности $\mu = \mu_0$ и неподвижной точки (J_0, θ_0), положив $\theta_0 = 0$ и определив J_0 из уравнения $\alpha(J_0, \mu_0) = k$, где k — целое число. В результате получаем расширенное стандартное отображение:

$$I_{n+1} = I_n + K\sin\theta_n, \tag{6.3.21а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} + P_{n+1}, \tag{6.3.21б}$$

$$P_{n+1} = P_n + \xi_n/\tau^{1/2}, \tag{6.3.21в}$$

где

$$I_n = 2\pi\frac{\partial\alpha}{\partial J_0}(J_n - J_0), \tag{6.3.22а}$$

$$P_n = 2\pi\frac{\partial\alpha}{\partial\mu_0}(\mu_n - \mu_0), \tag{6.3.22б}$$

$$K = 2\pi f(\mu_0)\frac{\partial\alpha}{\partial J_0}, \tag{6.3.23а}$$

$$\xi_n = 2\pi\frac{\partial\alpha}{\partial\mu_0}\tau^{1/2}\zeta_n. \tag{6.3.23б}$$

Здесь K — параметр стохастичности; ξ_n — нормированная случайная переменная: $\langle\xi_n\rangle = 0$ и $\langle\xi_n^2\rangle = 1$, а

$$\tau = \left(2\pi\sigma \frac{\partial\alpha}{\partial\mu_0}\right)^{-2} \tag{6.3.24}$$

— безразмерный параметр, характеризующий случайную величину ζ_n ($\langle\zeta_n^2\rangle = \sigma^2$). Иначе говоря, τ равно числу итераций отображения, за которое средний квадрат P становится равным единице:

$$\langle P^2\rangle = n/\tau. \tag{6.3.25}$$

Если $K \gg 1$, то резонансы перекрываются и диффузия по I определяется приближенно квазилинейным выражением (5.4.21б):

$$D_1 = \frac{\langle(\Delta I)^2\rangle}{2} = \frac{K^2}{4}. \tag{6.3.26}$$

В этом случае фаза θ является полностью стохастической, и диффузия не зависит от внешнего шума по параметру μ. При $\tau \ll 1$ внешний шум полностью хаотизирует θ за одну итерацию отображения, и скорость диффузии оказывается предельной (6.3.26) независимо от величины K. Нас, однако, интересует случай совместного действия резонансов и внешнего шума (ср. п. 6.3а), который имеет место при выполнении условий

$$K \ll 1; \qquad \tau \gg 1. \tag{6.3.27}$$

В этой области изменения переменных I и P за одну итерацию малы, так что разностные уравнения (6.3.21) можно аппроксимировать следующей системой дифференциальных уравнений [1]):

$$\frac{dI}{dn} = K\sin\theta, \tag{6.3.28а}$$

$$\frac{d\theta}{dn} = I + P, \tag{6.3.28б}$$

$$\frac{dP}{dn} = \xi/\tau^{1/2}. \tag{6.3.28в}$$

Диффузия резонанса. Уравнения (6.3.28а) и (6.3.28б) имеют гамильтониан

$$H = I^2/2 + P(n)\,I + K\cos\theta, \tag{6.3.29}$$

описывающий «блуждающий» резонанс с центром при $I = -P(n)$. Используя (6.3.25), получаем

$$\langle I^2\rangle = \langle P^2\rangle = \frac{n}{\tau}. \tag{6.3.30}$$

---

[1]) В отличие от отображения (6.3.21) уравнения (6.3.28) описывают единственный резонанс $I + P = 0$. — *Прим. ред.*

Локальный коэффициент диффузии внутри резонанса [1]) равен

$$D_r = \frac{\langle I^2 \rangle}{2n} = \frac{1}{2\tau}. \tag{6.3.31}$$

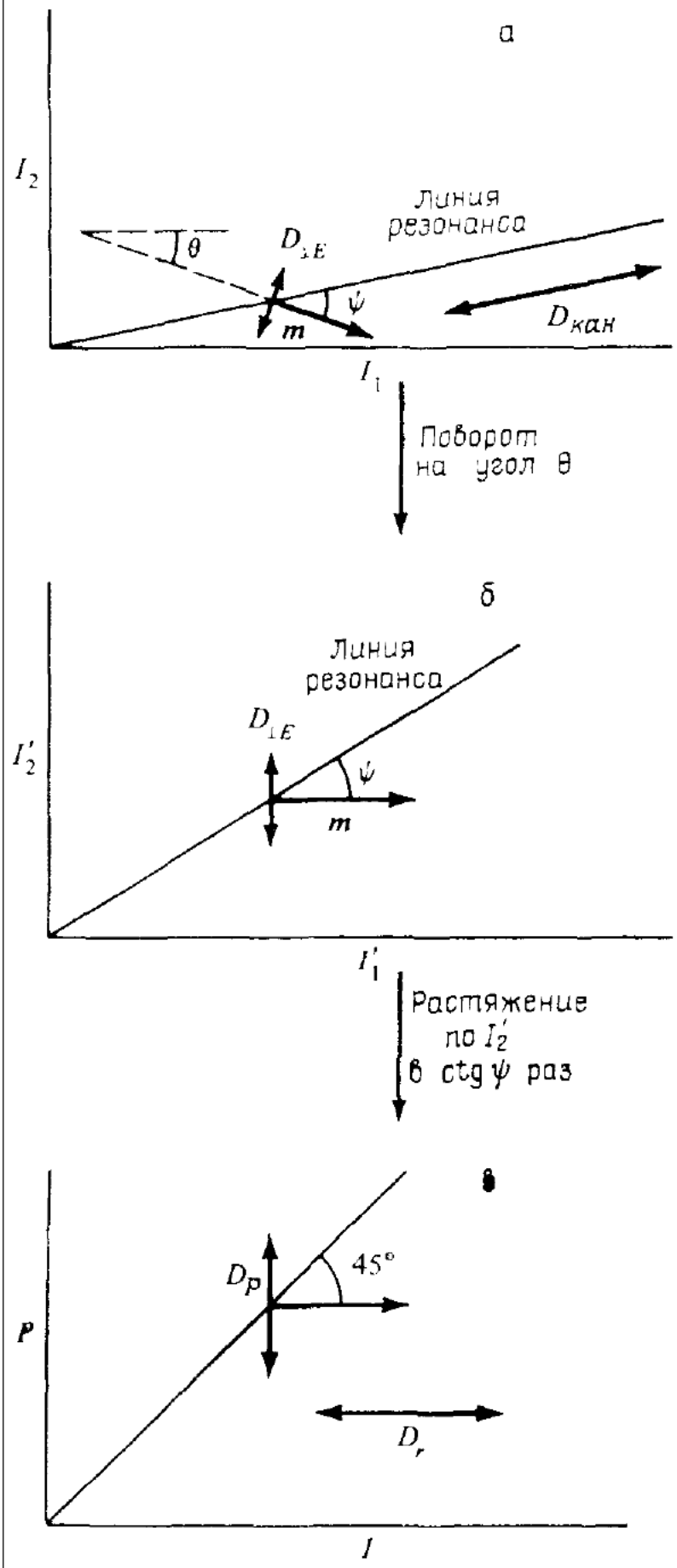


Рис. 6.19. Связь между резонансным каналированием (*а*) (п. 6.3а) и диффузией резонанса (*б*) (п. 6.3б).

Это выражение справедливо при условии, что траектория остается внутри резонанса в течение многих периодов фазовых колебаний, т. е. что параметр

$$S \equiv \omega_0 \tau_d \gg 1. \tag{6.3.32а}$$

Здесь ω_0 — частота фазовых колебаний, а τ_d — время внешней диффузии через резонанс. Поскольку ширина резонанса $\sim K^{1/2}$, то из (6.3.30) получаем оценку

$$\tau_d \sim K\tau.$$

С другой стороны, частота фазовых колебаний $\omega_0 \approx \approx K^{1/2}$, и условие (6.3.32а) принимает вид

$$S \sim K^{3/2}\tau \gg 1. \tag{6.3.32б}$$

Фактически замена переменных

$$P' = K^{-1/2} P,$$

$$I' = K^{-1/2} I,$$

$$n' = K^{1/2} n$$

показывает, что S является единственным параметром уравнений (6.3.28).

---

[1]) Точнее коэффициент диффузии вместе с резонансом. — *Прим. ред.*

Хотя локальный коэффициент диффузии представляет некоторый интерес и сам по себе, более важно знать среднюю скорость диффузии. Ее можно найти следующим образом. Если пренебречь диффузией вне резонанса (ср. п. 5.5б) [1]), то средняя скорость диффузии пропорциональна доле времени, проводимого траекторией внутри резонанса, которая в свою очередь пропорциональна фазовой площади, занимаемой резонансом. Используя гамильтониан (6.3.29) и учитывая периодичность исходного отображения (6.3.21) по I, получаем для относительной фазовой площади резонанса

$$f_r = \frac{4(2K)^{1/2}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\theta)^{1/2}d\theta}{(2\pi)^2} = \frac{4K^{1/2}}{\pi^2}.$$

Отсюда средний коэффициент диффузии

$$\langle D\rangle = D_r f_r = \frac{2}{\pi^2}\frac{K^{1/2}}{\tau}. \qquad (6.3.33)$$

Помимо диффузии вместе с резонансом происходит еще и диффузия внутри резонанса. Последний эффект был рассмотрен Коэном и Раулэндсом [81], которые получили поправку к (6.3.31) при $K \ll 1$:

$$D_r = \frac{1}{2\tau}\left(1 + \frac{1}{2-K/2}\right). \qquad (6.3.34)$$

Неясно, однако, справедлива ли эта поправка в случае длительной диффузии при многократном попадании в резонансы. Как бы то ни было, эта поправка составляет всего около 50 %. По-видимому, такого же порядка и другие ошибки, в частности, из-за приближений вблизи сепаратрисы [2]). Поэтому можно принять выражение (6.3.33) в качестве разумной оценки средней скорости диффузии.

Связь с резонансным каналированием. Сравним расчет коэффициента диффузии вдоль резонанса $D_{\text{кан}}$ в п. 6.3а с проведенным выше расчетом D_r. Мы покажем, что при некоторых упрощающих предположениях эти задачи можно связать друг с другом.

Рис. 6.19, *а* напоминает схему расчета $D_{\text{кан}}$. Внешняя диффузия с коэффициентом $D_{\perp E}$ перпендикулярно энергетической поверхности вызывает диффузию вдоль резонанса со скоростью

$$D_{\text{кан}} = D_{\perp E}/\sin^2\psi. \qquad (6.3.4)$$

[1]) Более подробно этот вопрос рассмотрен в работе [71].— *Прим. ред.*

[2]) По-видимому, имеется в виду нерезонансная диффузия вблизи резонанса. Согласно работе [71], эта поправка становится заметной только при $S \gtrsim 10^3$. С другой стороны, соотношение (6.3.33) совпадает с точностью лучшей 10 % с результатом Рютова и Ступакова [357], полученным ранее другим методом. Поэтому поправка Коэна и Раулэндса остается проблематичной. Если понимать ее как результат прохождения резонанса, то в рассматриваемом режиме Будкера ($S \gg 1$) прохождение является медленным, и средний эффект многих прохождений близок к нулю (см. [467]).— *Прим. ред.*

На рис. 6.19, *б* показано то же самое в новых переменных I_1', I_2', так что внешняя диффузия с коэффициентом $D_{\perp E}$ идет теперь по линии I_2', а вектор резонанса $\boldsymbol{m}$ направлен по I_1'. При этом величина $D_{\perp E}$ и угол ψ не изменяются. Наконец, на рис. 6.19, *в* мы еще раз переходим к новым переменным

$$P = I_2' \operatorname{ctg} \psi, \qquad I = I_1',$$

что эквивалентно растяжению масштаба по I_2' в $\operatorname{ctg} \psi$ раз.

Линия резонанса проходит теперь под углом 45°, а коэффициент внешней диффузии возрастает

$$D_P = D_{\perp E} \operatorname{ctg}^2 \psi. \tag{6.3.35}$$

Рассматривая P как параметр и используя (6.3.30), находим, что компонента диффузии по I равна $D_r = D_P$. Сравнивая (6.3.35) и (6.3.4), получаем

$$D_r = D_{\text{кан}} \cos^2 \psi. \tag{6.3.36}$$

Этим устанавливается соответствие между резонансным каналированием и диффузией резонанса [1]).

Аналогичные соотношения можно получить и для многих степеней свободы, используя *ортогональную метрику*, описанную Чириковым [70].

§ 6.4. Диффузия в тороидальных магнитных ловушках

Важным примером задачи о внутренней и внешней диффузии является задача об удержании плазмы в тороидальных магнитных ловушках. Диффундировать могут как сами магнитные линии, так и частицы поперек магнитного поля. Особый интерес представляет диффузия частиц с учетом их столкновений или внешнего шума. В зависимости от соотношения между шумом и динамикой частиц диффузия может быть либо одномерной (аналогично п. 5.5б), либо типа резонансного каналирования (§ 6.3). В п. 6.4а рассматриваются основные резонансные процессы в тороидальных магнитных ловушках. В п. 6.4б обсуждаются различные режимы внешней диффузии. Проведено сравнение случаев неподвижных и диффундирующих резонансов. В п. 6.4в приведен пример последнего случая, иллюстрирующий теорию, изложенную в п. 6.3б. В п. 6.4г кратко обсуждается самосогласованная задача, когда определяющие движение частиц поля сами зависят от динамики частиц.

6.4а. Динамика магнитных линий

Различные конфигурации магнитного поля. Простейшее (тороидальное) поле создается длинным прямолинейным проводником

[1]) Это соответствие является формальным и в общем случае несправедливо. Если, например, внешний шум сохраняет энергию (скажем, упругое рассеяние электрона на остаточном газе в магнитной ловушке), то $D_{\perp E} \equiv 0$, тогда как $D_r \neq 0$.— *Прим. ред.*

с током. В таком поле частицы дрейфуют поперек магнитных линий, поэтому оно не может служить для удержания плазмы. Добавление азимутального тока приводит к появлению второй компоненты поля, так называемого полоидального поля (рис. 6.20). Магнитные линии результирующего поля лежат на торе и напоминают фазовые траектории интегрируемой динамической системы на рис. 3.1, *а*.

Для удержания плазмы были разработаны различные установки. Среди них система с жестким токонесущим проводником

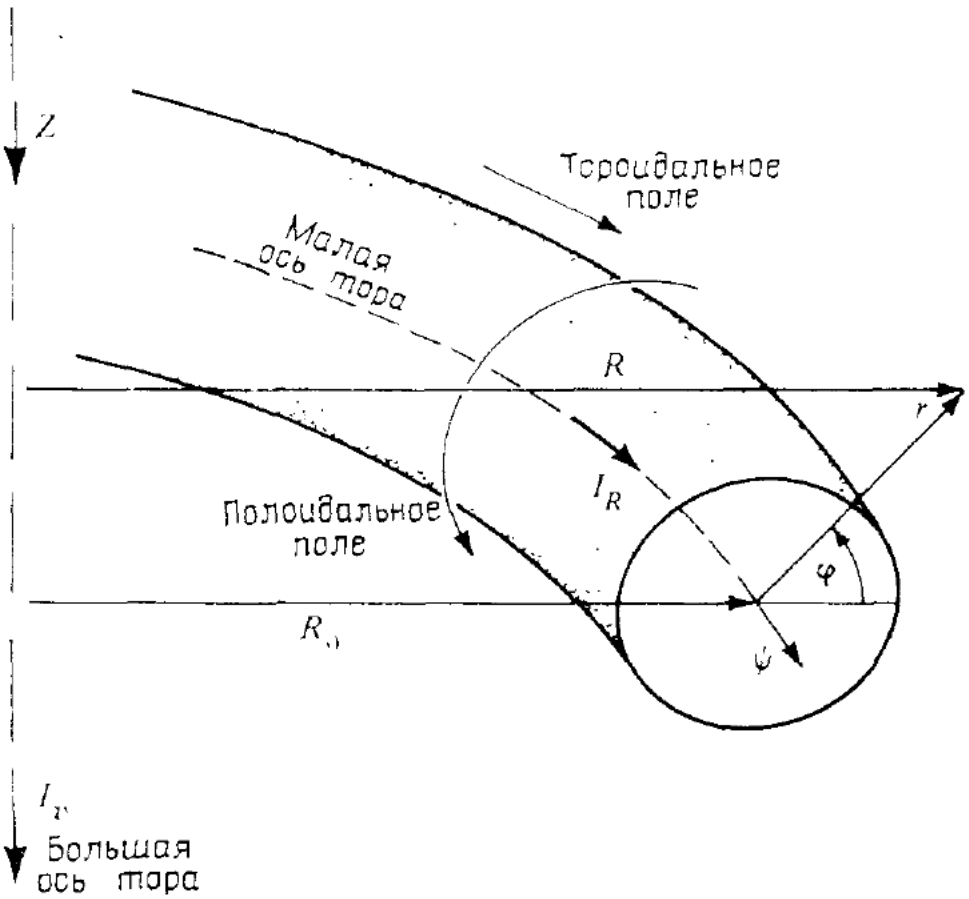


Рис. 6.20. Геометрия тороидального магнитного поля.

вдоль малой оси тора $r = 0$ и аксиальным полем (левитрон), система со спиральной обмоткой на торе $r = a$ (стелларатор) и система с тороидальным током в плазме (токамак).

Уравнения магнитных линий в таких системах можно записать в гамильтоновой форме (см., например, [137, 307, 349][1]). В случае азимутальной симметрии $\partial/\partial\psi \equiv 0$ (токамак и левитрон) получаются уравнения нелинейного осциллятора с одной степенью свободы, а интегралом движения является магнитный поток, ограниченный магнитной поверхностью (см. ниже). Нарушение азиму-

[1]) Это связано с «несжимаемостью» магнитного потока ($\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$), т. е. сохранением «фазового объема» этой динамической системы, который в данном случае является просто трехмерным объемом в обычном пространстве.— *Прим. ред.*

тальной симметрии приводит как бы к явной зависимости гамильтониана от «времениподобной» переменной ψ, а следовательно, и к очень сложному движению. В частности, магнитные поверхности разрушаются, образуется магнитная резонансная структура со стохастическими слоями в окрестности сепаратрис и в зависимости от величины возмущения возникает локальная или глобальная диффузия магнитных линий.

Магнитные поверхности. В тороидальной системе координат (r, φ, ψ) (рис. 6.20) магнитные линии определяются уравнениями

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\varphi}{B_\psi} = \frac{Rd\psi}{B}, \tag{6.4.1}$$

где r и $R = R_0 + r\cos\varphi$ — малый и большой радиусы линии поля; B_r и B_φ — полоидальные компоненты поля, а B_ψ — тороидальная компонента. Магнитное поле в токамаке можно приближенно представить в виде [389]

$$\boldsymbol{B} = \left(0,\ \frac{B_\varphi(r)}{h_s},\ \frac{B_0}{h_s}\right), \tag{6.4.2}$$

где $B_0 = B_\psi(R_0)$, а величина $h_s = 1 + \frac{r}{R_0}\cos\varphi$ описывает зависимость поля от угла φ. В левитроне для обеспечения равновесия плазмы необходимо аксиальное поле, которое вносит дополнительную зависимость от φ, значительно более сильную, чем в (6.4.2). Пренебрегая последней, можно представить поле левитрона в виде

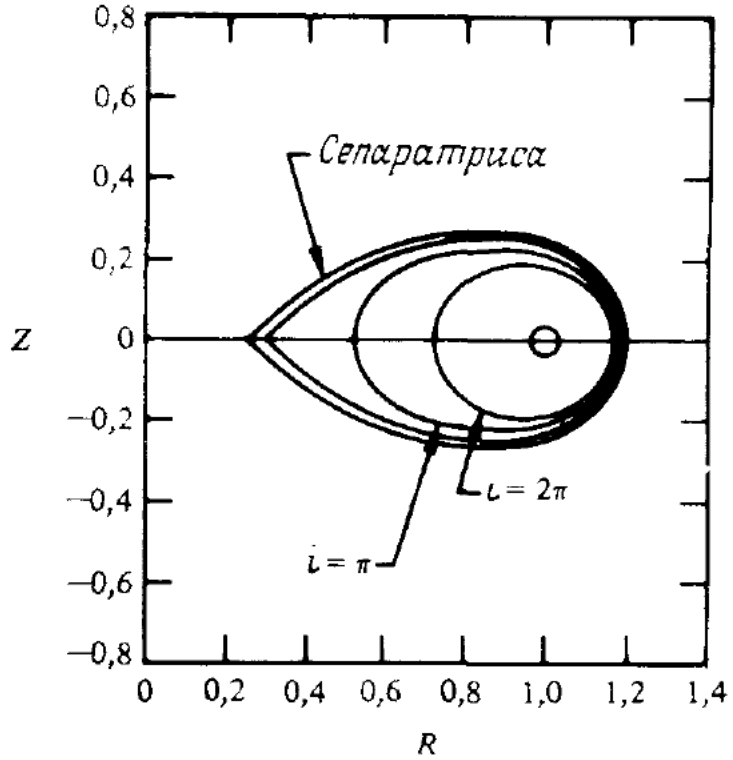


Рис. 6.21. Сечение магнитных поверхностей левитрона плоскостью $\psi = \text{const}$; $R_0 = 1$ (по данным работы [137]).

$$\boldsymbol{B} = \left(B_v \sin\varphi,\ \frac{B_0}{\beta r} + B_v\cos\varphi,\ B_0\right), \tag{6.4.3}$$

где B_v— аксиальное поле (направленное вверх на рис. 6.20), а $\beta = I_v/(I_R R_0)$ характеризует отношение аксиального I_v и азимутального I_R токов. Аксиальное поле ослабляет полоидальное на внутренней стороне тора, так что последнее обращается в нуль ($B_\varphi = 0$) в точке $\varphi = \pi$, $r = B_0/(\beta B_v)$. Магнитные линии полей (6.4.2) и (6.4.3), определяемые уравнениями (6.4.1), заполняют *магнитные поверхности*, охватывающие малую ось тора и вложенные друг в друга. Сечение магнитных поверхностей левитрона пло-

скостью $\psi = \text{const}$ показано на рис. 6.21. Обратим внимание на магнитную поверхность типа сепаратрисы, которая содержит неустойчивую периодическую траекторию с $B_\varphi = 0$.

Как мы увидим ниже, единственным существенным параметром невозмущенной магнитной поверхности является обычное число вращения α, или угол «прокручивания» магнитной линии за один оборот вокруг большой оси тора

$$\iota = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\psi} d\psi = 2\pi\alpha. \tag{6.4.4}$$

В случае токамака $h_s \approx 1$. Вводя переменную действия $\zeta = r^2/2$, приведем уравнения движения (6.4.1) к виду

$$\frac{d\zeta}{d\psi} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{\iota(\zeta)}{2\pi}$$

с гамильтонианом

$$H_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\zeta} \iota(\zeta)\, d\zeta = \text{const}. \tag{6.4.5}$$

Аналогично, для поля левитрона (6.4.3)

$$\frac{d\zeta}{dz} = B_v \sqrt{2\zeta} \sin\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{2\beta\zeta} + \frac{B_v}{\sqrt{2\zeta}} \cos\varphi, \tag{6.4.6}$$

где $z = \psi/2\pi$, и принято, что $B_0 = 1$. Эти уравнения можно получить из гамильтониана

$$H = -\frac{1}{\beta}\left[\ln\left(\frac{8}{\sqrt{2\zeta}}\right) - 2\right] + B_v\sqrt{2\zeta}\cos\varphi.$$

Перейдем к переменным действие — угол (см. § 1.2)

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta d\varphi, \tag{6.4.7а}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\partial S(J, \varphi)}{\partial J}, \tag{6.4.7б}$$

где S — производящая функция. С точностью до членов, квадратичных по J, получаем (см. § 2.2 или 2.5):

$$H_0 = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{8}{\sqrt{2J}} - 2\right) - 2B_v^2\beta J - \frac{3}{2}B_v^4\beta^3 J^2. \tag{6.4.8}$$

Угол прокручивания $\iota = dH_0/dJ$ определяет магнитную поверхность. Подчеркнем, что при наличии азимутальной симметрии

(по ψ) гамильтониан магнитных линий описывает интегрируемую систему с одной степенью свободы.

Резонансы. Рассмотрим модель возмущенного магнитного поля с гамильтонианом

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \bar{\varphi}, \psi). \tag{6.4.9}$$

Разлагая вокруг невозмущенной траектории $J = J_0 + \Delta J$ и $\bar{\varphi} = \frac{\iota}{2\pi}\psi + \Delta\bar{\varphi}$, получаем уравнения

$$\frac{d\Delta J}{d\psi} = \varepsilon \sum_{m,\ n} A_{mn} \cos(m\bar{\varphi} - n\psi + \chi_{mn}), \tag{6.4.10}$$

$$\frac{d\Delta\bar{\varphi}}{d\psi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\iota}{\partial J}\Delta J,$$

где A_{mn} — амплитуды Фурье для $\partial H_1/\partial\bar{\varphi}$.

Рассмотрим резонансные невозмущенные магнитные поверхности, для которых $d\varphi/d\psi = n/m$. Переходя к резонансным переменным (см. § 2.4)

$$\tilde{\varphi} = m\bar{\varphi} - n\psi,$$

находим следующий гамильтониан возмущенного движения:

$$\tilde{H} = \frac{m^2}{2\pi}\frac{d\iota}{dJ}\frac{(\Delta\tilde{J})^2}{2} + \varepsilon A_{mn}\cos\tilde{\varphi}, \tag{6.4.11}$$

где $\Delta\tilde{J} = \Delta J/m$. Полуширина резонанса, согласно (2.4.31), равна

$$\Delta\tilde{J}_{\text{макс}} = \frac{2}{m}\left|\frac{\varepsilon A_{mn}}{(1/2\pi)\, d\iota/dJ}\right|^{1/2} \tag{6.4.12}$$

В работе [137] произведен численный расчет магнитного поля левитрона, возмущенного с помощью наклона кольцевого проводника. Для резонанса $m = n = 1$ ($\iota = 2\pi$) получено прекрасное согласие с аналитическим выражением (6.4.12), если только возмущение не превышает порог глобальной стохастичности. Для относительно больших возмущений наблюдалось образование вторичных резонансов, как и предсказывает теория в § 2.4 и 4.3. На рис. 6.22, *а* показано теоретическое (сплошная линия) и найденное численно сечение резонансной магнитной поверхности для невозмущенного $\iota = 2\pi$. Локальное число вращения в центре резонанса $\alpha = 1/(5{,}6)$, и поэтому вторичные резонансы не видны. На рис. 6.22, *б* возмущение увеличено, так что $\alpha = 1/4$ (вторичный резонанс на четвертой гармонике). Результаты численного счета (кружки) теперь уже не ложатся на теоретическую кривую, а соответствующая магнитная линия оказывается стохастической.

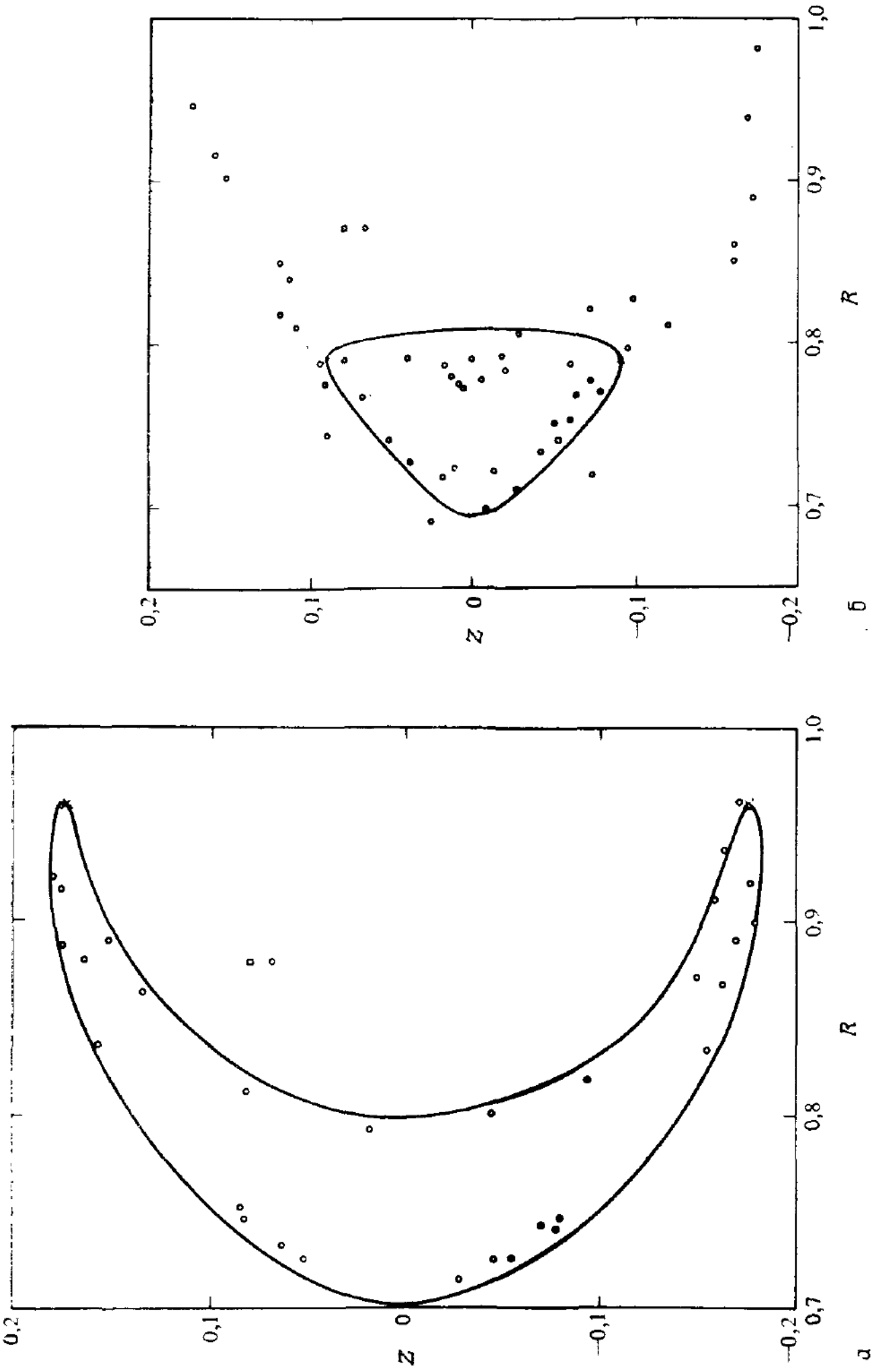


Рис. 6.22. Резонансы магнитных линий в левитроне при $\iota = 2\pi$ (по данным работы [137]).

а — угол наклона кольцевого тока (возмущение) $\delta = 0{,}25°$; *б* — $\delta = 0{,}5°$; сплошные линии — теоретические инвариантные кривые; кружки — численный счет.

Теоретический анализ (см. п. 2.4б) показывает, что вторичные резонансы с $\alpha = 1/4$ и $\alpha = 1/5$ перекрываются, что и приводит к наблюдаемой стохастичности.

Аналогичные результаты для винтовой обмотки были получены Розенблютом и др. [349] и Филоненко и др. [129]. Возмущения общего вида в токамаках рассматривались Речестером и Стиксом [343] и Финном [130]. В этих работах исследовались также перекрытие резонансов и внутренняя диффузия [1]). Во всех случаях рассматривалось возмущение и разрушение только магнитных поверхностей. Принималось, что заряженные частицы двигаются точно вдоль магнитных линий и конечный размер ларморовского радиуса не играет роли. Поскольку мы рассматриваем задачи, эквивалентные двум степеням свободы, то внутренняя диффузия возникает только при перекрытии резонансов (гл. 5), тогда как диффузия вдоль резонансов отсутствует.

6.4б. Дрейфовые поверхности и диффузия в статических полях

Дрейфовые поверхности. При учете конечного ларморовского радиуса электрического поля и неоднородности магнитного поля оказывается, что частицы не следуют точно за магнитной линией, а медленно сдрейфовывают перпендикулярно ей. Траектории ларморовского центра заполняют *дрейфовые поверхности.* При этом могут иметь место резонансы между гармониками неоднородности поля и дрейфовым движением. Уравнения движения в дрейфовом приближении в отсутствие токов имеют вид (см., например, [362], § 2.2) [2]):

$$\boldsymbol{v}_D = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{c}{e}\frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}}{B^2} + v_{\parallel}\frac{\boldsymbol{B}}{B}, \tag{6.4.13а}$$

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\Phi}{\partial s} - \frac{\mu}{M}\frac{\partial B}{\partial s}, \tag{6.4.13б}$$

где

$$\boldsymbol{F} = -\left(\mu + \frac{Mv_{\parallel}^2}{B}\right)\nabla B - e\nabla\Phi$$

— усредненная по ларморовскому вращению сила; $\mu = \frac{1}{2}Mv_{\perp}^2/B$ — магнитный момент; e — заряд частицы; M — ее масса; $v_{\parallel}$, $v_{\perp}$ — параллельная и перпендикулярная магнитному полю компоненты скорости частицы; $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор ларморовского центра; s — координата вдоль магнитной линии; Φ — элек-

---

[1]) См. также работу [514].— *Прим. ред.*
[2]) См. также работы [515, 516].— *Прим. ред.*

трический потенциал и c — скорость света. В дрейфовом приближении μ является адиабатическим инвариантом и считается постоянным (см. п. 2.3б). Если B и Φ не зависят явно от времени, то дрейфовое движение можно описать с помощью автономного гамильтониана с двумя степенями свободы. В этом случае вместо времени удобно использовать в качестве независимой переменной величину s, причем $ds/dt = v_{\parallel}$, где скорость $v_{\parallel}$ связана с интегралами движения E и μ соотношением

$$v_{\parallel} = \left(\frac{2}{M}\right)^{1/2} (E - \mu B)^{1/2}, \tag{6.4.14}$$

а E — полная энергия частицы. Получаемые в результате уравнения дрейфового движения аналогичны уравнениям магнитной линии, описанным в п. 6.4а.

Нерезонансный дрейф. Рассмотрим сначала случай, когда дрейф вызывается градиентом магнитного поля. Если магнитные поверхности симметричны по φ (см. рис. 6.20), то сила $\boldsymbol{F}$ перпендикулярна магнитной поверхности и скорость дрейфа v_D, согласно (6.4.13), направлена по касательной к магнитной поверхности. Однако магнитное поле в системах с тороидальной геометрией типа левитрона или токамака не обладает такой симметрией, что приводит к радиальной составляющей дрейфа частиц. Масштаб времени такого дрейфа обычно велик по сравнению с временем оборота вокруг большой оси тора. Поэтому в пренебрежении резонансами высоких порядков радиальный дрейф можно описать автономным гамильтонианом с одной степенью свободы, который является интегрируемым.

Дрейфовые траектории существенно зависят от отношения $v_{\perp}/v_{\parallel}$. В случае $v_{\parallel} \ll v_{\perp}$ частицы оказываются захваченными в некоторой области (по φ и ψ) с наружной стороны тора и совершают дрейфовые колебания, не попадая в область более сильного магнитного поля с внутренней стороны тора. Проекция этого движения на плоскость $\psi = \mathrm{const}$ имеет форму «банана» (ср. рис. 6.22,*а*). Амплитуда радиальных колебаний (при $\varphi = 0$) имеет порядок

$$\Delta r \sim (R/a)^{1/2} \rho_L / \iota, \tag{6.4.15}$$

где ρ_L — ларморовский радиус частицы. Подобные траектории для захваченных частиц существуют и в других магнитных полях и не зависят от резонансов между движением по φ и по ψ (подробнее см. в [389]).

Дрейфовая поверхность пролетных частиц [1]) повторяет форму

[1]) Пролетными называются частицы, которые совершают полный оборот вокруг малой и большой осей тора, т. е. по φ и ψ. Для поля токамака, например, граница между пролетными и захваченными частицами соответствует скорости $v_{\parallel} \approx v\,(2r/R_0)^{1/2}$ при $\varphi = 0$.— *Прим. ред.*

магнитной поверхности, отклоняясь от нее на расстояние порядка ρ_L/ι. Можно сказать, что дрейфовой поверхностью в этом случае является просто слегка возмущенная магнитная поверхность.

Дрейфовые резонансы. Если обе функции B и Φ зависят от φ и ψ, то для пролетных частиц возможны резонансы. Однако из-за того, что скорость дрейфа пропорциональна ρ_L, размер дрейфовых резонансов мал по сравнению с размером резонанса самих магнитных линий при том же возмущении магнитного поля. Если же присутствует статическое электрическое поле, например, с потенциалом вида

$$\Phi = \sum \Phi_{mn} e^{i(m\varphi - n\psi)},$$

то возникают дрейфовые резонансы независимо от возмущения магнитного поля. Возмущенный дрейф описывается в этом случае системой уравнений вида (6.4.10), причем амплитуды возмущения $\varepsilon A_{mn} \propto \rho_L \Phi_{mn}$. Брамбилла и Лихтенберг [39] получили для пространственной полуширины резонанса выражение, аналогичное (6.4.12):

$$\Delta r = 2\left(\frac{e\Phi_{mn}}{T}\,\frac{R}{a}\,\frac{\rho_L}{d\iota/dr}\right)^{1/2}, \tag{6.4.16}$$

где T — температура в энергетических единицах.

Диффузия в статических полях. Хотя размер резонанса (6.4.16) может быть велик по сравнению с амплитудой нерезонансных колебаний (6.4.15), именно последние определяют обычно внешнюю диффузию в статических полях. Причина этого состоит в следующем. В статическом случае положение резонанса (по r) определяется условием $\omega_\varphi/\omega_\psi = d\varphi/d\psi = n/m$ и не зависит от $v_\parallel$ или μ. Внешняя диффузия за счет столкновений между частицами с изменением $v_\parallel$ и μ относится поэтому к типу, рассмотренному в п. 5.5б. Конечно, если дрейфовые резонансы перекрываются, то скорость диффузии определяется глобальной стохастичностью движения. Однако такое перекрытие возможно лишь в исключительных случаях, так как размер резонансов зависит от малого ларморовского радиуса (6.4.16). Поэтому в дальнейшем мы пренебрежем внутренней диффузией. Правда, резонансы несколько усиливают диффузию даже в отсутствие перекрытия, однако средняя скорость диффузии меняется при этом незначительно (п. 5.5б).

В отличие от дрейфовых резонансов нерезонансные колебания захваченных частиц (6.4.15) существуют везде. Рассеяние частиц изменяет их $v_\parallel$ и μ и может переводить частицы из захваченных в пролетные, и наоборот. В результате частицы смещаются по радиусу. В зависимости от частоты столкновений возможны три режима диффузии.

1. При низкой частоте столкновений захваченные частицы смещаются, в среднем, на величину Δr [см. (6.4.15) за время пере-

хода их в пролетные вследствие диффузии по $v_{\parallel}$. Поэтому скорость радиальной диффузии в этом режиме пропорциональна частоте столкновений.

2. При промежуточной частоте столкновений захваченная частица переходит в пролетную раньше, чем она успевает совершить полное колебание по радиусу, т. е. ее радиальное смещение за один захват уменьшается по сравнению с (6.4.15). Однако при этом пролетные частицы с относительно малой скоростью $v_{\parallel}$ также вносят существенный вклад в диффузию, расширяя таким образом область (по $v_{\parallel}$) эффективного радиального дрейфа. Учет всех этих эффектов приводит к тому, что коэффициент диффузии перестает зависеть от частоты столкновений. Поэтому обычно этот случай называют режимом плато.
3. При высокой частоте столкновений все частицы вносят вклад в диффузию. Характерный масштаб радиального дрейфа между столкновениями равен ρ_L/α, а коэффициент диффузии снова пропорционален частоте столкновений.

Во всех трех режимах характерный масштаб радиального смещения пропорционален ларморовскому радиусу $\rho_L = v_T/\Omega$, так что зависимость коэффициента диффузии от магнитного поля имеет классический вид $D \propto \rho_L^2 \propto 1/B^2$. Поэтому такую диффузию называют *неоклассической* [1]). Подробная теория этой диффузии дана в обзоре Галеева и Сагдеева [147]. Как отмечалось в п. 6.3а, аналогичные три режима диффузии существуют и в резонансном каналировании.

6.4в. Диффузия в нестационарных полях

В нестационарных полях положение дрейфового резонанса уже зависит от $v_{\parallel}$ (см. ниже), и резонансы возможны при любом r. Поскольку ширина этих резонансов значительно превышает размах радиальных колебаний запертых частиц (6.4.15), то диффузия, аналогичная неоклассической, будет определяться теперь резонансами. Эта задача рассматривалась Геллом и др. [152] и, более подробно, Невинсом и др. [316] [2]).

Условие резонанса имеет вид

$$m\omega_{\varphi}(r, v_{\parallel}) + n\omega_{\psi}(r, v_{\parallel}) + l\omega = 0,$$

где ω — частота колебаний поля. Из этого условия (при заданных

[1]) Приставка «нео» здесь не очень оправдана, поскольку такой механизм диффузии рассматривался Будкером еще в 1951 г. (см. [509], с. 50), хотя разработка полной теории этих процессов «несколько» задержалась [510].— *Прим. ред.*

[2]) Эта задача впервые рассмотрена Погуце [525] для объяснения аномальной электронной теплопроводности в токамаке.— *Прим. ред.*

n, m и l) можно найти положение центра резонанса $r = r(v_{\parallel}, \omega)$ [1]). Если при этом имеет место внешняя диффузия частицы по $v_{\parallel}$, то резонанс диффундирует по r. Пример такой диффузии рассмотрен в п. 6.3б, а ее описание можно свести к отображению.

Рассмотрим переменное поле в виде плоской волны, фаза которой

$$\theta = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t, \tag{6.4.17}$$

где $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор. В дрейфовом приближении скорость частицы параллельна магнитной линии, поскольку скорость дрейфа считается малой по сравнению со скоростью частицы. Поэтому скорость изменения фазы волны равна

$$\frac{d\theta}{dt} = k_{\parallel}(r)\, v_{\parallel} - \omega, \tag{6.4.18}$$

где $k_{\parallel}$ — проекция волнового вектора на направление магнитного поля.

Построение отображения. Будем использовать для простоты декартову систему координат, в которой x соответствует r (см. рис. 6.23); волновой вектор $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0 \check{\boldsymbol{y}}$, а $\boldsymbol{B}(x)$ лежит в плоскости (y, z), причем $B_y = 0$ при $x = 0$. Зависимость $B_y(x)$ примем в виде

$$B_y(x) = B\,\frac{x}{L_S},$$

где L_S — некоторая постоянная (для тороидального поля $L_S^{-1} = (R/a)\, d\iota/dr$). Тогда

$$k_{\parallel}(x) = k_{\perp}\,\frac{x}{L_S}, \tag{6.4.19}$$

где мы положили приближенно $k_0 = k_{\perp}$. Для потенциала волны

$$\Phi = \Phi_0 \cos\theta \tag{6.4.20}$$

уравнения движения (6.4.13) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ck_{\perp}}{B}\,\Phi_0 \sin\theta, \tag{6.4.21}$$

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{e}{M}\,k_{\parallel}\Phi_0 \sin\theta. \tag{6.4.22}$$

---

[1]) Обе частоты ω_{φ} и ω_{ψ} пропорциональны $v_{\parallel}$, и при $l \neq 0$ положение резонанса зависит от $v_{\parallel}$. В статическом поле ($\omega = 0$) $v_{\parallel}$ исключается из резонансного условия, и резонанс, казалось бы, не может смещаться по r. Это, однако, правильно, за исключением важного частного случая $v_{\parallel} = 0$, когда условие резонанса автоматически выполняется при любом r. Фактически в рассматриваемом ниже примере скорость диффузии (6.4.40) вообще не зависит от ω (при $S \ll 1$). В частности, численные данные на рис. 6.25 относятся как раз к диффузии в статическом поле.— *Прим. ред.*

Вместе с (6.4.18) эти уравнения определяют возмущенное движение частицы в отсутствие столкновений. Из (6.4.18) условие резонанса с центром в точке $x = x_0$ имеет вид

$$k_{\|0} v_{\|0} - \omega = 0, \tag{6.4.23}$$

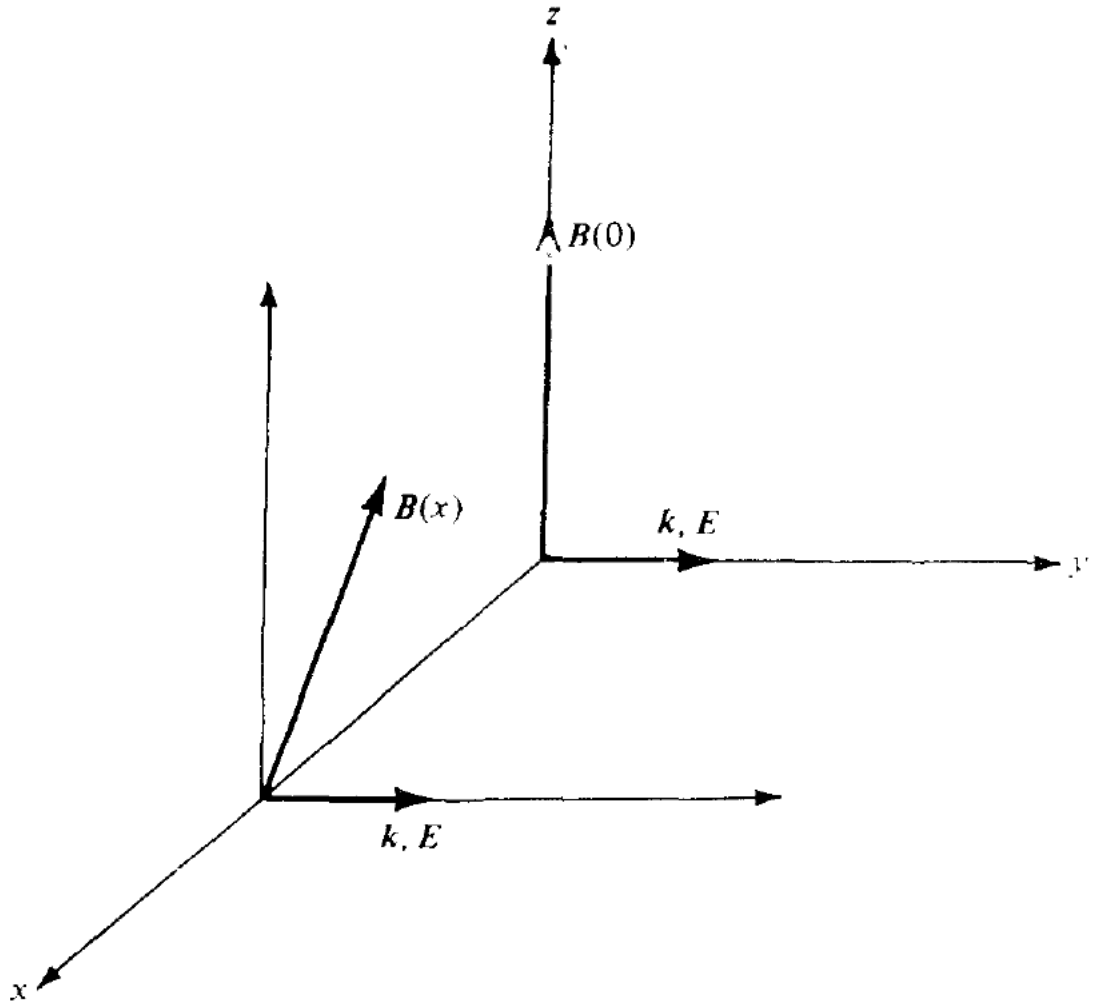


Рис. 6.23. Конфигурация полей в модели дрейфовых резонансов.

где $k_{\| 0} = k_{\|}(x_0)$. Невозмущенное движение в центре резонанса соответствует $\theta = 0$. Линеаризуя уравнения движения по x и $v_{\|}$, получаем

$$\frac{d}{dt}(\Delta x) = \frac{ck_{\perp}}{B} \Phi_0 \sin\theta, \tag{6.4.24}$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta v_{\|}) = \frac{e}{M} k_{\|0} \Phi_0 \sin\theta + \zeta, \tag{6.4.25}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{k_{\perp}}{L_S} v_{\|0} \Delta x + k_{\|0} \Delta v_{\|}, \tag{6.4.26}$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta v_{\|} = v_{\|} - v_{\| 0}$. В уравнение (6.4.25) добавлено случайное изменение скорости ζ, которое учитывает столкновения

между частицами. Положим $\langle\zeta\rangle = 0$ и

$$\frac{d}{dt}\langle\zeta^2\rangle = \frac{v_T^2}{\tau_c}, \tag{6.4.27}$$

где v_T — тепловая скорость частицы, а τ_c — среднее время между столкновениями. Согласно (6.4.23) и (6.4.19), это приводит к смещению резонанса по x.

Преобразуем уравнения (6.4.24) — (6.4.26) к виду (6.3.28). Для этого исключим θ из уравнений (6.4.24) и (6.4.25)

$$\frac{d}{dt}(\Delta v_{\|}) - \frac{\Omega k_{\|0}}{k_\perp}\frac{d}{dt}(\Delta x) = \zeta \tag{6.4.28}$$

и введем новую переменную

$$Y = \Delta v_{\|} - \frac{\Omega k_{\|0}}{k_\perp}\Delta x, \tag{6.4.29}$$

которая описывает только случайный процесс

$$\dot{Y} = \zeta. \tag{6.4.30}$$

Выражая $\Delta v_{\|}$ через Y и Δx из (6.4.29), подставляя в (6.4.26), получаем

$$\frac{d\theta}{dt} = k_{\|0}Y + \frac{k_{\|0}^2}{k_\perp}\Omega(1+S)\Delta x. \tag{6.4.31}$$

Параметр

$$S = \frac{k_\perp^2}{k_{\|0}^2}\frac{v_{\|0}}{L_S\Omega} \tag{6.4.32}$$

характеризует влияние поперечного градиента магнитного поля («шира»), которое существенно при $S \gg 1$. Путем изменения масштабов

$$I = \frac{k_{\|0}^2}{k_\perp}\Omega(1+S)\Delta x, \tag{6.4.33а}$$

$$P = k_{\|0}Y \tag{6.4.33б}$$

система уравнений (6.4.24), (6.4.31) и (6.4.30) приводится к стандартному виду (6.3.28)

$$\frac{dI}{dt} = K\sin\theta, \tag{6.4.34а}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = I + P, \tag{6.4.34б}$$

$$\frac{dP}{dt} = \xi, \tag{6.4.34в}$$

где

$$K = k_{\|0}^2 v_T^2 (1+S) \frac{e\Phi_0}{T}, \tag{6.4.35а}$$

$$\xi = k_{\|0}\zeta \tag{6.4.35б}$$

и положено $T = Mv_T^2$.

Скорость диффузии. Аналогично п. 6.3б коэффициент резонансной диффузии по I определяется соотношением

$$D_r = \frac{\langle I^2 \rangle}{2t} = \frac{\langle P^2 \rangle}{2t} = \frac{1}{2} \frac{k_{\|0}^2 v_T^2}{\tau_c}. \tag{6.4.36}$$

Пренебрегая нерезонансной диффузией, получаем для средней скорости диффузии аналогично (6.3.33):

$$\langle D \rangle = D_r f_r, \tag{6.4.37}$$

где f_r — доля резонансных частиц. Считая разброс $v_\|$ порядка v_T и, следовательно, согласно (6.4.33б), разброс P порядка $k_{\|0} v_T$, находим

$$f_r \sim \frac{K^{1/2}}{k_{\|0} v_T}, \tag{6.4.38}$$

что дает

$$\langle D \rangle = \frac{1}{2} k_{\|0}^2 v_T^2 (1+S)^{1/2} \left(\frac{e\Phi_0}{T}\right)^{1/2} / \tau_c. \tag{6.4.39}$$

Переходя с помощью (6.4.33а) к переменной Δx, имеем

$$D_x = \frac{1}{2} \frac{k_\perp^2}{k_{\|0}^2 (1+S)^{3/2}} \left(\frac{e\Phi_0}{T}\right)^{1/2} \frac{\rho_L^2}{\tau_c}. \tag{6.4.40}$$

Этот результат был получен Невинсом и др. [316] более формальным методом, не раскрывающим механизма диффузии. Отметим, что выражение (6.4.40) не дает точного количественного значения коэффициента диффузии ввиду неопределенности оценки (6.4.38). Диффузию такого типа иногда называют *псевдоклассической*, так как ее скорость (6.4.40), как и для классической диффузии, пропорциональна ρ_L^2/τ_c, но зависит от амплитуды Φ_0 резонансной гармоники возмущения.

Сравнение аналитических и численных результатов. В работе Невинса и др. [316] проведено также сравнение с результатами численного моделирования, для которого использовались точные уравнения движения частицы, а столкновения учитывались по методу Монте-Карло. В типичном случае для получения хорошей статистики просчитывались траектории от 500 до 1000 частиц. Было получено разумное согласие с теоретическими зависимостями от различных параметров. Мы приведем здесь два результата.

На рис. 6.24 численные данные (D^*) сравниваются с аналитическим выражением (6.4.40) для D_x, в которое введен дополнительный множитель. Подгонка дает $D^* = 0{,}8\, D_x$, т. е. согласие хорошее.

На рис. 6.25 показана зависимость скорости диффузии от эффективной частоты столкновений

$$\nu_{\text{эфф}} = \nu_c \frac{M v_T^2}{e\Phi_0 (1 + S)}, \tag{6.4.41}$$

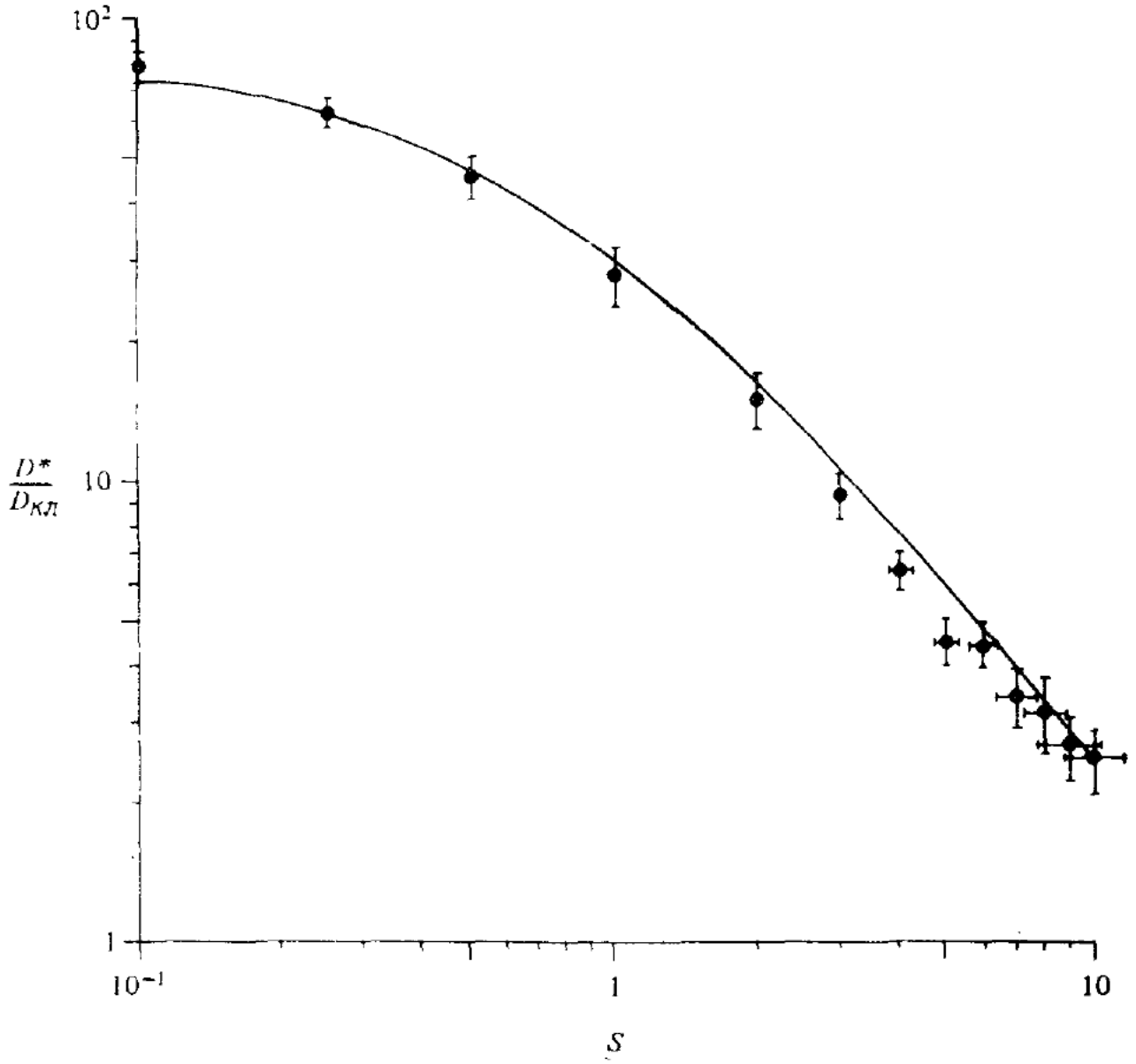


Рис. 6.24. Скорость дрейфовой диффузии D^* в зависимости от параметра шира S (по данным работы [316]).

$D_{кл} = \rho_L^2/\tau_c$; $e\Phi_0/T = 0{,}01$; $k_\parallel/k_\perp = 0{,}03$; $\omega/k_{\parallel 0} v_T = 0{,}5$; $k_\perp \rho_L = 4{,}3 \times 10^{-3}$. Точки — численные данные (с ошибками); сплошная линия — теоретические значения (6.4.40), умноженные на 0,8 (подгонка, см. текст).

где $\nu_c = 1/\tau_c$. Видн плато и интересный переходный режим в районе $\nu_{\text{эфф}}/\omega_0 = 1$ где $\omega_0 = K^{1/2}$ — частота фазовых колебаний на резонансе [1]). Скорость диффузии на плато можно определить,

[1]) Аналогичные результаты были получены для близкой, но более простой модели в работе [517] (рис. 5).— *Прим. ред.*

исходя из простого предположения, что при $\nu_{эфф} > \omega_0$ длина дрейфа между столкновениями уменьшается с ростом ν_c таким образом, что сохраняется отношение

$$\nu_{эфф}/\omega_0 \approx 1. \tag{6.4.42}$$

Используя в (6.4.42) $\omega_0 = K^{1/2}$ из (6.4.35а) и $\nu_{эфф}$ из (6.4.41), на-

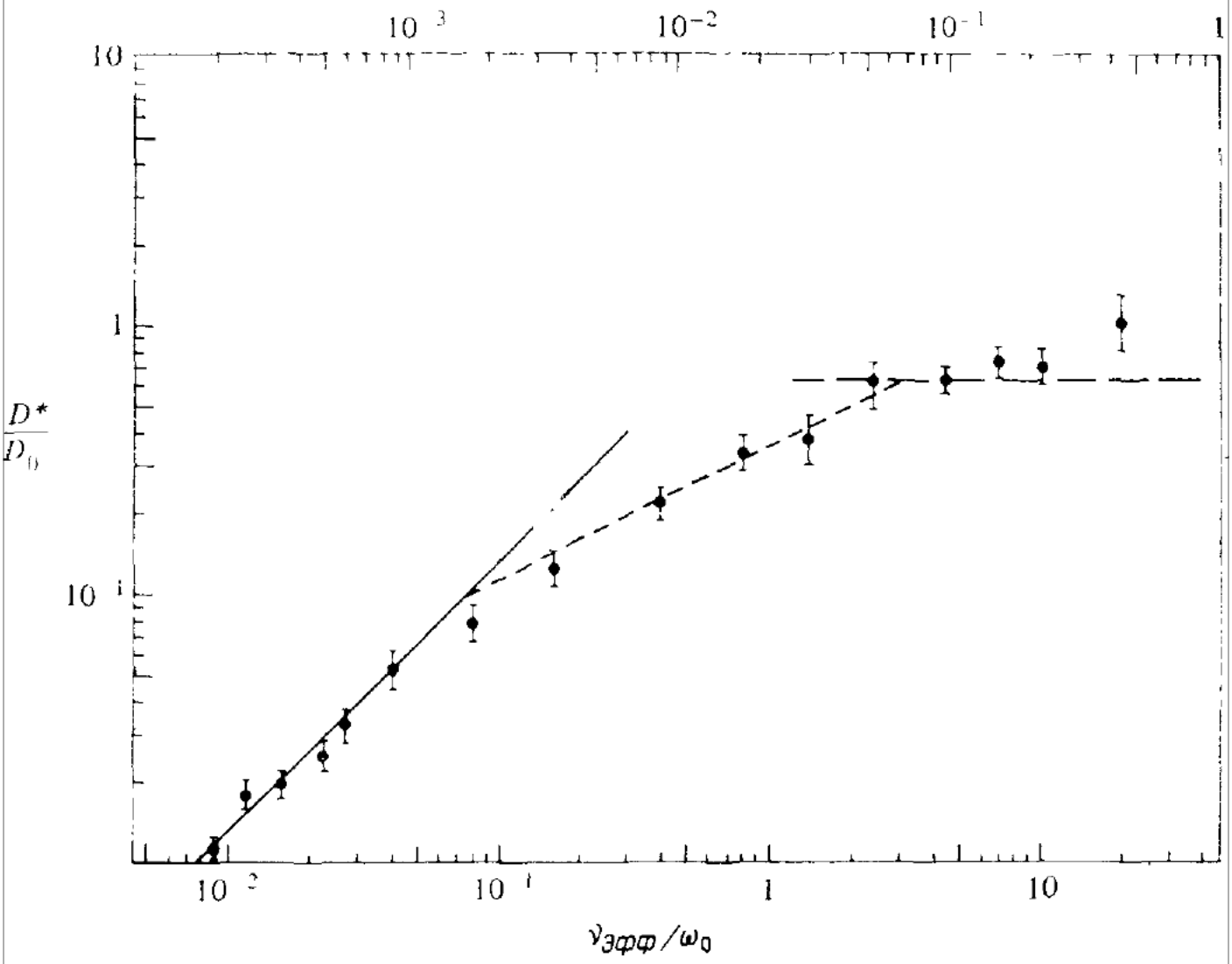


Рис. 6.25. Скорость дрейфовой диффузии в зависимости от частоты столкновений (по данным работы [316]).

$D_0 = (k_\parallel v_T)^{-1}(ck_\perp \Phi_0/B)^2$; $e\Phi_0/T = 0{,}08$; $k_\parallel/k_\perp = 0{,}2$; $\omega = 0$; $k_\perp \rho_L = 4{,}3 \times 10^{-3}$.

Точки — численные данные (с ошибками); сплошная линия — теоретические значения (6.4.40), умноженные на 1,3; пунктирная линия — плато (6.4.43).

ходим ν_c и подставляем эту величину в (6.4.40). В результате получаем не зависящий от ν_c коэффициент диффузии на плато [1]):

$$D_x^{пл} = \frac{k_\perp^2}{k_\parallel^2} k_\parallel v_T \left(\frac{e\Phi_0}{T}\right)^2 \rho_L^2. \tag{6.4.43}$$

[1]) При $k_\parallel \to 0$ эта оценка [как и в (6.4.40)] становится неприменимой в силу тех или иных ограничений. Если, например, рассматриваемая модель справедлива при $\Delta x \lesssim a$, то амплитуда дрейфовых колебаний $(k\rho_L/k_\parallel) \times (e\Phi_0/T)^{1/2} \lesssim a$ и $D_x^{пл} \lesssim \rho_L v_T k_\perp a (e\Phi_0/T)^{3/2}$. — *Прим. ред.*

Этот результат, полученный в пределе нулевого шира, отличается от результата кинетической теории [358] лишь на числовой множитель, близкий к единице. Заметим, что, хотя соотношение (6.4.42) и является правдоподобным, оно не вытекает из рассматриваемой теории [1]).

6.4г. Самосогласованная задача

Диффузия в тороидальных плазменных ловушках указывает на очень важную особенность реальных физических задач, не рассмат-

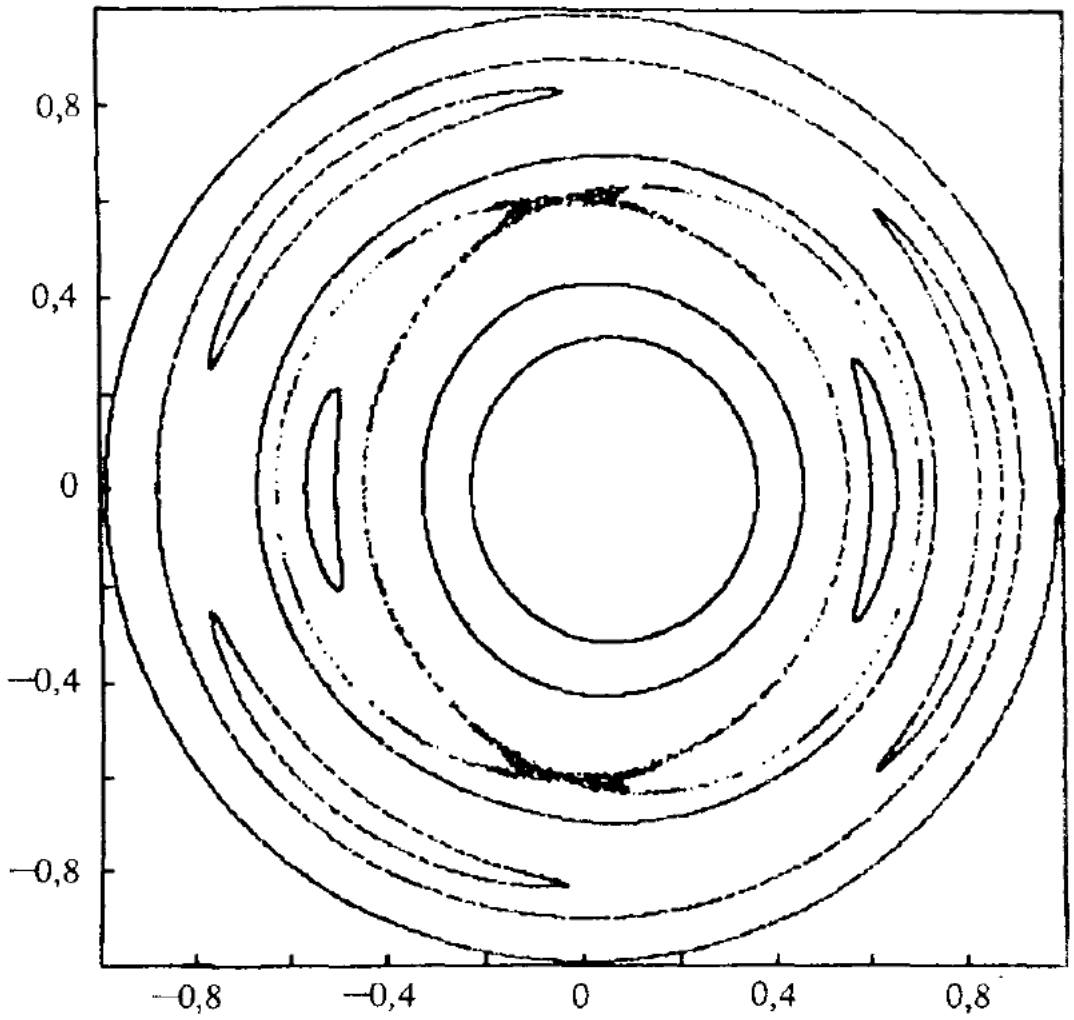


Рис. 6.26. Сечение магнитных поверхностей плоскостью $\psi = \text{const}$ (численные данные работы [48]).

Виден винтовой резонанс $l/n = 2/1$, окруженный тороидальным резонансом на третьей гармонике.

риваемую явно в этой книге. Речь идет о самосогласованных полях, которые, с одной стороны, определяют движение частиц, а

[1]) Это не совсем так. В работе [71] показано, что скорость диффузии на плато дается квазилинейным выражением

$$D_x^{\text{пл}} \approx \pi \left\langle \left(\frac{d}{dt} \Delta x \right)^2 \right\rangle / \Delta\omega \approx (\pi/2)\, c^2 k_\perp^2 \Phi_0^2 / (B^2 k_{\parallel 0} v_T) \approx D_0,$$

которое совпадает с (6.4.43) с точностью до числового множителя (см. рис. 6.25).— *Прим. ред.*

с другой — сами зависят от коллективных движений этих же частиц. При такой постановке задачи гамильтониан системы *априори* неизвестен, а исследования проводятся обычно с помощью численного моделирования полной системы уравнений для частиц и поля. Ниже кратко описан пример такой задачи.

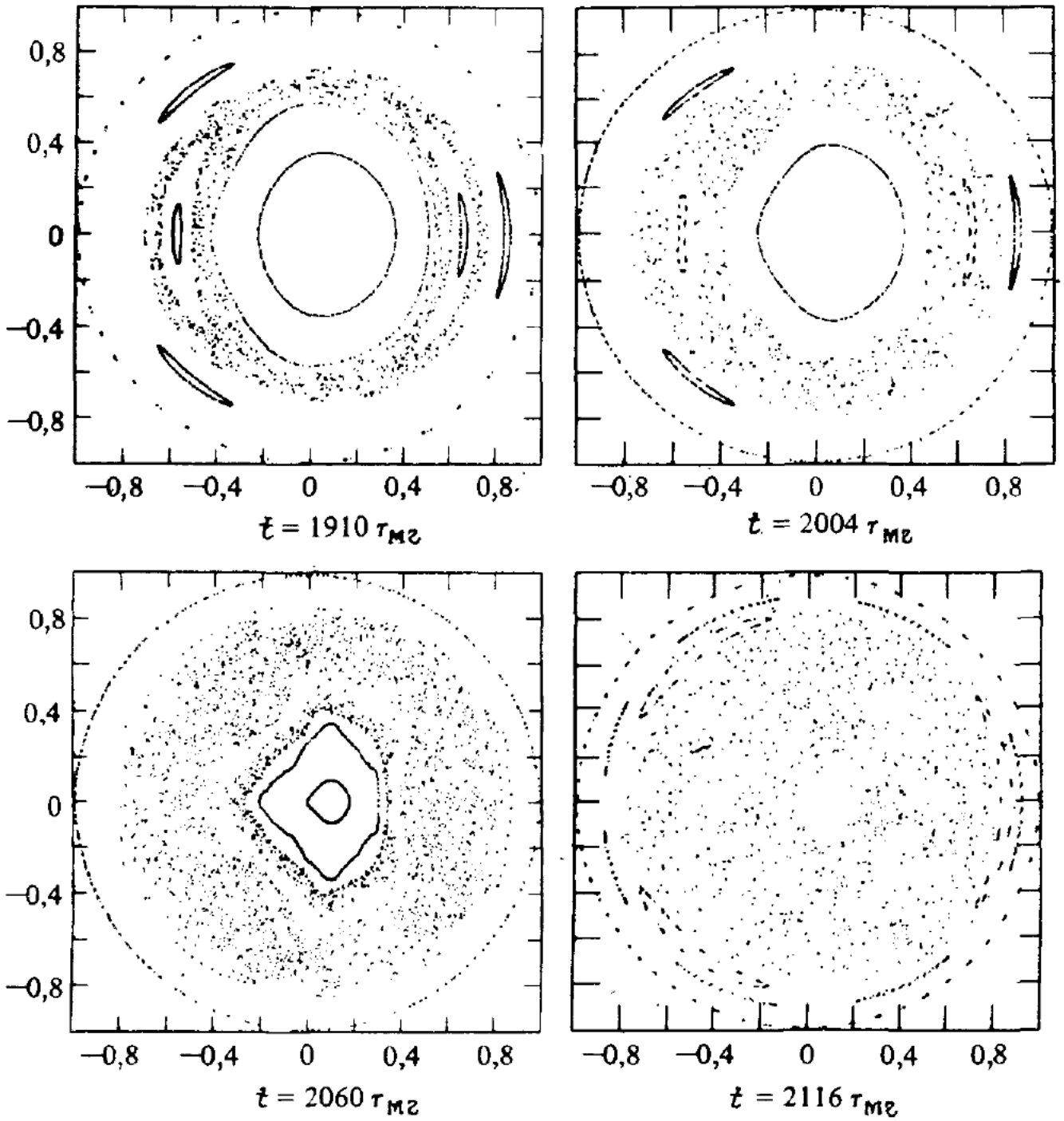


Рис. 6.27. То же, что и на рис. 6.26, но с учетом самосогласованного магнитного поля для четырех моментов времени (численные данные работы [48]). $\tau_{мг}$ — характерное магнитогидродинамическое время.

Тиринг-моды и неустойчивости срыва в токамаках. В токамаке (см. п. 6.4а) полоидальная составляющая магнитного поля возбуждается азимутальным током частиц плазмы, движение которых считается регулярным. Однако в плазме с конечной электропроводностью возможна неустойчивость тиринг-моды (см., например, [48, 428]) с винтовым возмущением тока ($l\varphi - n\psi = \mathrm{const}$; l, n — целые числа).

Такое возмущение тока нарушает азимутальную симметрию магнитного поля и приводит к резонансам магнитных линий. В случае цилиндрической симметрии одна винтовая мода приводит к образованию только одного резонанса, и конфигурация магнитного поля остается регулярной. Однако с учетом тороидальности появляются новые резонансы. Например, винтовая мода с $l = 2$ и $n = 1$ приводит к образованию одного резонанса второй гармоники на магнитной поверхности $\iota = \pi$. Тороидальность же добавляет к нему резонанс третьей гармоники при $\iota = 2\pi/3$. В токамаках обычно обе резонансные поверхности расположены в области, занятой плазмой. Структура магнитных поверхностей в этих условиях, полученная путем численного моделирования для стационарной винтовой моды, показана на рис. 6.26. В данном случае область стохастических магнитных линий оказалась незначительной. Однако если присутствует еще и винтовая мода с $l = 2$, $n = 2$, то область стохастичности резко увеличивается. Результаты численного моделирования эволюции двух этих мод путем решения самосогласованных уравнений для частиц и поля показаны на рис. 6.27 для четырех моментов времени. На первом кадре ясно видны резонансы с $\iota = \pi$ и $\iota = 2\pi/3$. На втором кадре виден результат взаимодействия между резонансами — большая часть магнитных линий в в районе резонанса $\iota = \pi$ стала стохастической. На третьем кадре стохастичность распространяется и на область резонанса $\iota = 2\pi/3$. И наконец, на четвертом кадре показана заключительная стадия эволюции, которая привела практически к полному разрушению магнитных поверхностей. Связанное с этим резкое изменение распределения тока по сечению камеры считается причиной неустойчивости срыва в токамаках.

§ 6.5. Системы со многими степенями свободы

Исследования систем со многими степенями свободы всегда вызывали большой интерес. Причиной этого является, с одной стороны, желание понять поведение непрерывных систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, а с другой — связь со статистической механикой. Геометрия многомерных резонансов рассматривалась в п. 6.1а, а также в § 6.3 (более подробное описание можно найти в работе [70]). С точки зрения резонансной структуры вопрос о поведении системы с большим числом степеней свободы сводится к вопросу о том, возрастает ли плотность основных резонансов быстрее, чем уменьшается их ширина, по мере распределения энергии по многим степеням свободы. Если это действительно так, то при $N \to \infty$ следует ожидать перекрытия резонансов и сильной стохастичности движения.

Чтобы как-то продвинуться в этом направлении, можно, напри-

мер, обобщить модель ускорения Ферми на случай, когда движение стенки является суперпозицией колебаний с несколькими частотами. Для случая двух частот это было сделано в работе Ховарда и др. [202] для отображения [1])

$$u_{n+1} = u_n + \frac{A_s \sin s\varphi_n + A_r \sin r\varphi_n}{\sqrt{A_s^2 + A_r^2}},$$
$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{4\pi M}{(r+s)\, u_{n+1}}. \tag{6.5.1}$$

Здесь величина A^2 характеризует «энергию колебаний» соответствующей частоты. Если считать полную энергию $\sum_i A_i^2 = \text{const}$ и возбудить колебания с N частотами, то ширина резонанса $\Delta u \propto A^{1/2} \propto N^{-1/4}$. Считая распределение частот случайным, можно ожидать, что максимальное расстояние между резонансами $\delta u_{\text{макс}} \propto (\ln N)/N$. Таким образом, параметр перекрытия резонансов

$$\frac{\Delta u}{\delta u_{\text{макс}}} \propto \frac{N^{3/4}}{\ln N} \tag{6.5.2}$$

возрастает с N. Сравнивая результаты для одной и двух частот в модели (6.5.1), Ховард и др. [202] нашли, что эффект, по меньшей мере, порядка (6.5.2). Однако они не исследовали зависимость от N. Из оценки (6.5.2) следует, что с ростом N при постоянной полной энергии движение становится стохастическим во всем фазовом пространстве.

Такая упрощенная модель не является, конечно, адекватной для всех многомерных систем. Так, например, она не описывает солитонные регулярные решения, которые, как известно, существуют для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [240, 249, 438]) [2]). Однако, как мы увидим ниже, многие системы действительно оказываются стохастическими при больших N.

Проблема Ферми—Паста—Улама. Одной из интересных моделей является нелинейная цепочка, исследованная численно в работе

---

[1]) Для иррационального отношения r/s (несоизмеримые частоты) можно было бы говорить, в некотором смысле, о двух внешних степенях свободы (см. работу [477]), как и предполагается ниже в основном тексте для произвольного числа N частот. Однако в цитируемой работе [202] r, s — целые числа, и отображение (6.5.1) описывает просто две гармоники одной частоты (ср. [482, § 6], где исследовано аналогичное отображение с большим числом гармоник). Отметим, что отображения вида (6.5.1) с несоизмеримыми частотами естественно возникают в теории диффузии Арнольда [70, § 7.3]. — *Прим. ред.*

[2]) См. также книгу [457].— *Прим. ред.*

Ферми, Паста и Улама [127]. Такую цепочку можно рассматривать как модель нелинейной струны, колебания которой описываются уравнением [1])

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left[1 + 3\beta\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right] = 0. \qquad (6.5.3)$$

Движение цепочки описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (все массы приняты равными единице):

$$\ddot{x}_j = (x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j) + \beta\,[(x_{j+1} - x_j)^3 - (x_j - x_{j-1})^3], \qquad (6.5.4)$$

где $j = 1, 2, \ldots, N$ и концы цепочки закреплены. Полное число частиц было выбрано равным $N = 64$. Вопреки ожиданию энергия не распределялась по различным модам колебаний, а система регулярно возвращалась к начальному состоянию [2]). Эти неожиданные результаты [3]) стимулировали многочисленные исследования модели (6.5.4) (библиографию по этой проблеме см. в работе [31]).

При аналитическом исследовании этой модели естественно использовать нормальные моды колебаний линейной системы ($\beta = 0$), что было сделано в ряде работ (см., например, [135, 208]). С помощью преобразования

$$x_j = \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin\frac{\pi k j}{N} \qquad (6.5.5)$$

Израйлев и Чириков при $\beta/8N \ll 1$ нашли следующую приближенную систему уравнений:

$$\ddot{a}_k + \omega_k^2 a_k\left[1 - \frac{3\beta}{4N}\,\omega_k^2\,(2 - \omega_k^2)\,a_k^2\right] = \frac{\beta}{8N}\sum_m F_{km}\cos\theta_{km}, \qquad (6.5.6)$$

где $\omega_k = 2\sin(\pi k/2N)$, а $\dot{\theta}_{km} = \overline{\omega}_{km}$ — частоты возмущения. Используя критерий перекрытия резонансов, Израйлев и Чириков после довольно громоздких вычислений получили следующее условие стохастичности для низких мод:

$$3\beta\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 \gtrsim \frac{3}{k}; \qquad k \ll N. \qquad (6.5.7)$$

---

[1]) Для качественно правильного моделирования в правую часть уравнения (6.5.3) нужно добавить дисперсионный член $(a^2/12)\,\partial^4 x/\partial z^4$, где a — расстояние между массами в цепочке. Решения же уравнения (6.5.3) являются сингулярными вследствие «опрокидывания» нелинейной волны.— *Прим. ред.*

[2]) Интересно отметить, что выдвинутая в работе [127] на основании этих результатов общая гипотеза о существовании «квази-мод» (см. также [135]) была в тот момент уже доказана Колмогоровым [229] для широкого класса гамильтоновых систем.— *Прим. ред.*

[3]) Первоначальное удивление было столь велико, что долгое время (до работы [208]) случаи хаотических колебаний нелинейной цепочки в работе [127] (см., например, рис. 5) оставались незамеченными.— *Прим. ред.*

Они нашли, что эта оценка не противоречит имевшимся численным данным. Это согласуется и с модельной оценкой (6.5.2), которая тоже предсказывает перекрытие резонансов при достаточно большом N. Однако так как при фиксированной энергии системы высокие моды будут иметь очень малую амплитуду, то не ясно, будет ли хаотическая часть фазового пространства стремиться к нулю или к единице с ростом N.

Аналогичные результаты были получены ранее Фордом и Уотерсом [135]. Они нашли, что существенный обмен энергией между модами возможен только вблизи резонансов по невозмущенным (линейным) частотам мод, и дали качественный критерий этого. В соответствии с этим критерием они видоизменили модель Ферми—Паста—Улама и численно продемонстрировали сильный обмен энергией между всеми модами (для $N = 5$), который имел, по-видимому, стохастический характер.

Используя другой подход, Бивинс и др. [31] исследовали взаимодействие нескольких мод в случае, когда одна из них имеет большую амплитуду и возбуждает соседние моды. Такой подход охватывает только относительно короткий интервал времени и ничего не говорит об *асимптотическом* поведении системы. Тем не менее они наблюдали переход от регулярного обмена энергией между модами при слабом возмущении к похожему [на хаотический при более сильном возмущении [1]).

Модель притягивающихся листов. Для исследования зависимости стохастичности от числа степеней свободы Фрёшле и Шейдекер (144) использовали модель в виде нескольких параллельных гравитационно-взаимодействующих листов, которая описывается гамильтонианом

$$H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{N} u_i^2 + 4\pi G m \sum_{j>i}^{N} |x_j - x_i|, \qquad (6.5.8)$$

где m — масса листа, а G — гравитационная постоянная. Для каждого счета начальные условия выбирались случайно при фиксированной полной энергии системы. Уравнения движения интегрировались аналитически до момента пересечения каких-либо двух листов. В качестве критерия стохастичности использовалась локальная

[1]) Другое, более известное, решение проблемы Ферми—Паста—Улама связывает регулярность колебаний некоторых видов нелинейной цепочки с близостью их к полностью интегрируемым нелинейным системам при любой энергии (см., например, прекрасный обзор Забуского [518]). В частности, уравнение (6.5.3) с квадратичной нелинейностью ($(\partial x/\partial z)^2 \to \partial x/\partial z$) и дисперсией (см. примечание редактора на с. 406) имеет бесконечный набор независимых интегралов движения и является, по-видимому, полностью интегрируемым. Хотя такое решение проблемы годится далеко не всегда ввиду исключительности полностью интегрируемых систем, оно послужило толчком для развития мощных методов интегрирования нелинейных уравнений (см., например, работы [457, 518]).— *Прим. ред.*

Таблица 6.1. Модель (6.5.8) притягивающихся листов (100 траекторий)

N (число листов)	Число регулярных траекторий	Число стохастических траекторий	N (число листов)	Число регулярных траекторий	Число стохастических траекторий
2	100	0	5	1	99
3	96	4	6	0	100
4	14	86	7	0	100

неустойчивость движения (§ 5.3). Полученные результаты приведены в табл. 6.1. Видно быстрое распространение стохастичности по фазовому пространству с ростом числа листов N. Случай двух листов является, как известно, интегрируемым.

Интерпретация этих результатов затруднительна, поскольку сингулярность взаимодействия при пересечении листов нарушает условие гладкости теоремы КАМ (п. 3.2а). Как мы знаем на примере сингулярного отображения Улама (3.4.4), это приводит к глобальной стохастичности, а регулярные траектории сохраняются только в островках устойчивости внутри резонансов. Если доля этих островков уменьшается с ростом N, то можно ожидать быстрого возрастания числа стохастических траекторий, что согласуется с результатами [144].

Потенциал Леннарда-Джонса. Другим хорошо известным примером является система с потенциалом Леннарда-Джонса

$$V(r_{ij}) = 4\varepsilon\,[(\sigma/r_{ij})^{12} - (\sigma/r_{ij})^{6}], \tag{6.5.9}$$

где r_{ij} — расстояние между частицами i и j, а σ — пространственный масштаб взаимодействия. Слабое притяжение при $r_{ij} \gtrsim \sigma$ сменяется сильным отталкиванием при $r_{ij} \lesssim \sigma$. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \sum_{j<i}^{N} V(r_{ij}).$$

Гальгани и сотр. [148] исследовали эту задачу в простейшем случае одномерного движения частиц. Они обнаружили, что распределение энергии по невозмущенным (линейным) модам колебаний увеличивается с ростом N. Эти результаты, однако, трудно интерпретировать с точки зрения стохастичности, поскольку обычные критерии стохастичности в работе не использовались.

Стоддард и Форд [394] исследовали ту же задачу для двумерного движения. Такая модель является сглаженным вариантом системы твердых дисков, движение которых, как показал Синай, обладает перемешиванием (см. п. 1.4а и § 5.2). В качестве критерия стохастичности использовалась неустойчивость близких траекторий, которая и была обнаружена для всех исследованных начальных условий в системе из 100 частиц ($N = 200$). Этот результат пред-

ставляется вполне естественным для сильно нелинейного взаимодействия Леннарда-Джонса.

Заключение. С ростом числа степеней свободы наблюдаются две конкурирующие тенденции. С одной стороны, сетка резонансов в фазовом пространстве становится все более плотной. С другой стороны, ширина резонансов обычно уменьшается. В зависимости от поведения усредненного параметра перекрытия движение системы при $N \to \infty$ может быть как полностью стохастическим, так и полностью регулярным. Примером систем первого типа является газ Леннарда-Джонса, а второго — непрерывные системы, такие, как нелинейная струна [1]). Хотя строгого критерия разделения систем на эти два типа не существует, оценка перекрытия резонансов позволяет, по-видимому, сделать правдоподобные заключения о поведении системы при больших N.

---

[1]) Последнее впечатление, по-видимому, обманчиво и связано с тем, что наиболее известные примеры непрерывных систем относятся к очень специальному виду (слабо нелинейные волны), а их динамика исследована только на относительно коротком масштабе времени и для узкого класса начальных условий (небольшое число низкочастотных мод). По всем существующим общим критериям граница стохастичности резко понижается с ростом N (см., например, работу [70], § 4.5 и 4.6), так что в типичном случае при $N \to \infty$ хаос охватывает, по-видимому, практически все фазовое пространство. Однако значение регулярной компоненты движения далеко не исчерпывается занимаемым ею объемом фазового пространства (см. предисловие редактора перевода).— *Прим. ред.*

Глава 7

ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 7.1. Простые и странные аттракторы

Диссипативные системы обладают той особенностью, что при их движении фазовый объем сжимается к аттрактору более низкой размерности, чем исходное пространство. При этом если какой-либо параметр системы изменяется, то регулярное движение на аттракторе может смениться хаотическим, и наоборот. Хотя наши знания о хаотическом поведении диссипативных систем ни в коей мере нельзя считать полными, все же к настоящему времени многие особенности такого движения хорошо изучены. Разработаны также методы теоретического анализа диссипативных систем.

В первом параграфе этой главы обсуждаются основные свойства диссипативных систем, такие, как сжатие фазового объема и регулярное движение на простых аттракторах. Затем вводится понятие *странного аттрактора* со стохастическим движением. В § 1.5 уже приводился пример странного аттрактора. Здесь же обсуждаются два других примера диссипативных систем со странными аттракторами: система Рёслера и отображение Хенона. Особое внимание обращается на те свойства хаотического движения, которые связаны с возможностью перехода к одномерному отображению, а также с геометрической структурой странного аттрактора. Эта геометрия описывается в терминах канторовых множеств дробной фрактальной размерности. Обсуждаются способы вычисления такой размерности и ее связь с показателями Ляпунова.

В § 7.2 рассматривается динамика необратимых одномерных отображений, начиная с их периодических точек, линейной устойчивости и структуры бифуркаций. Затем исследуется хаотическое движение и его связь с показателями Ляпунова, асимптотическими распределениями, спектром мощности, а также инвариантные свойства движения.

В § 7.3 рассматриваются двумерные обратимые отображения и связанные с ними потоки. Показывается, что последовательность бифуркаций удвоения периода, приводящая к хаотическому движению, аналогична найденной для одномерных отображений. Далее описывается метод Мельникова для определения перехода от регулярного движения к стохастическому. Метод иллюстрируется на примере вынужденных колебаний нелинейного осциллятора с затуханием. Описан метод вычисления инвариантных распределений с помощью уравнения ФПК.

Наконец, в § 7.4 рассматривается переход к предельному случаю непрерывной среды. Приводится краткий вывод уравнений Лоренца в задаче Рэлея—Бенара о движении подогреваемого снизу слоя жидкости и обсуждаются условия применимости этих уравнений. В заключение описываются различные модели перехода к турбулентности в жидкости и проводится сравнение с имеющимися экспериментальными данными.

Хаотическому движению в диссипативных системах посвящено большое число работ. В частности, одномерные отображения рассматриваются, например, в работах [82, 122, 123, 296] [1]). Имеются также прекрасные обзоры [180, 194, 324, 340, 354, 368, 411]. Наше изложение ниже основано главным образом на работах [180, 324, 368].

7.1а. Основные свойства

Рассмотрим движение, описываемое N дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = V(x), \tag{7.1.1}$$

где $\boldsymbol{x}$ и V — N-мерные векторы, причем V не зависит явно от времени. *Фазовое пространство* такой системы характеризуется переменными x_i $(i = 1, N)$ и имеет размерность N. Если $\boldsymbol{V}$ — гладкая функция, то решение для *потока* $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ существует при всех t. Любая точка фазового пространства однозначно определяет состояние системы (7.1.1). В п. 1.2б уже показывалось, как построить *сечение Пуанкаре* и соответствующее *отображение Пуанкаре* для гамильтоновой системы. В диссипативных системах такие отображения сохраняют некоторые, но не все свойства, присущие гамильтоновым системам. Как видно из рис. 1.3, *а*, на котором изображена поверхность сечения $\sum_R$, отображение Пуанкаре строится с помощью интегрирования уравнений (7.1.1) между двумя последовательными пересечениями траектории с $\sum_R$. Отображение имеет вид

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n), \tag{7.1.2}$$

где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{f}$ — векторы размерности N—1. Если функция $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ является гладкой, а вектор $\boldsymbol{V}$ нигде не касается $\sum_R$, то можно показать, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ также гладкая функция. Более того, поскольку решение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ существует для всех t, то функция $\boldsymbol{f}$ *обратима*, т. е. уравнения (7.1.2) можно однозначно разрешить относительно $\boldsymbol{x}_n$:

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}_{n+1}). \tag{7.1.3}$$

Это соответствует изменению знака времени и интегрированию (7.1.1) от $\boldsymbol{x}_{n+1}$ до $\boldsymbol{x}_n$.

---

[1]) См. также [526—529].— *Прим. перев.*

Сжатие фазового объема. По теореме Лиувилля (п. 1.2б) при движении гамильтоновой системы ее фазовый объем сохраняется. В противоположность этому в диссипативных системах фазовый объем в среднем сжимается.

Вычислим изменение малого элемента объема $\Delta\tau$ в точке $\boldsymbol{x}_0$:

$$\Delta\tau(\boldsymbol{x}_0,\ t) = \prod_i \Delta x_i, \tag{7.1.4}$$

где

$$\Delta x_i(\boldsymbol{x}_0,\ t) = \frac{\partial x_i(x_0,\ t)}{\partial x_{i0}} \Delta x_{i0}. \tag{7.1.5}$$

Скорость изменения $\Delta\tau$ равна

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{1}{\Delta\tau} \frac{d(\Delta\tau)}{dt} = \sum_i \frac{1}{\Delta x} \frac{d(\Delta x_i)}{dt}. \tag{7.1.6}$$

Из (7.1.5) имеем

$$\frac{d(\Delta x_i)}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_{i0}} \frac{dx_i(\boldsymbol{x}_0,\ t)}{dt} \Delta x_{i0}. \tag{7.1.7}$$

Используя (7.1.1) вблизи $t = 0$, для нормированного изменения объема получаем из (7.1.6) при $t \to 0$:

$$\Lambda = \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \boldsymbol{V}. \tag{7.1.8}$$

Локальная величина Λ зависит от $\boldsymbol{x}(t)$ и может быть как положительной (растяжение), так и отрицательной (сжатие). Однако под диссипативными мы понимаем такие системы, для которых фазовый объем в среднем сжимается. Записывая среднюю скорость сжатия как

$$\Lambda_0(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left| \frac{\Delta\tau(\boldsymbol{x}_0,\ t)}{\Delta\tau(\boldsymbol{x}_0,\ 0)} \right|, \tag{7.1.9}$$

потребуем, чтобы $\Lambda_0 < 0$ для всех $\boldsymbol{x}_0$.

Для N-мерного отображения локальный объем $\Delta\tau$ сжимается за одну итерацию в $|\det \mathbf{M}(\boldsymbol{x})|$ раз, где $\mathbf{M}$ — матрица Якоби для отображения. Скорость сжатия равна

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\Delta\tau} \frac{d(\Delta\tau)}{dn} = \ln|\det \mathbf{M}(\boldsymbol{x})|, \tag{7.1.10}$$

где n — число итераций. Усредняя эту величину вдоль траектории, так же как и в (7.1.9), получим $\Lambda_0(\boldsymbol{x}_0)$.

Общий случай диссипативных систем с произвольной зависимостью $\Lambda(\boldsymbol{x})$ мало исследован. В большинстве известных задач $\Lambda(\boldsymbol{x}) = -c$, где c — положительная постоянная, т. е. имеет место однородное сжатие всего фазового объема. Очевидно, что для таких систем $\Lambda_0 = -c$.

Показатели Ляпунова. Среднюю скорость сжатия фазового объема можно выразить через показатели Ляпунова, которые были определены в п. 5.2б для гамильтоновых систем. То же самое определение остается в силе и для диссипативных систем. Для N-мерного фазового пространства имеется N показателей, которые можно упорядочить следующим образом:

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_N,$$

где $\sigma_1 = \sigma_{\text{макс}}$ — наибольший показатель, а один из остальных показателей, соответствующий смещению вдоль траектории, равен нулю. Используя (5.2.14) и (5.2.16), для средней скорости сжатия получаем

$$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i. \tag{7.1.11}$$

Определение величины Λ_0 согласно (7.1.9) и (7.1.11), равно как и определение самих показателей Ляпунова, применимо как для потоков, так и для отображений, включая отображение Пуанкаре, соответствующее исходному потоку. В последнем случае $N-1$ показателей σ_i пропорциональны соответствующим показателям потока [см. (5.2.20)], а нулевой показатель опускается.

Хаотическое движение, как и в гамильтоновых системах, связано с экспоненциальной расходимостью близких траекторий, т. е. для хаотического движения $\sigma_i > 0$. С другой стороны, фазовый объем должен сжиматься. Из эти двух фактов следует, что хаотическое движение для одно- и двумерных потоков невозможно [1]). Для двумерного случая ($N = 2$) отображение Пуанкаре одномерное (и обратимое), поэтому из (7.1.11) следует, что $\Lambda_0 = \sigma_1$. Такое отображение не может быть одновременно и диссипативным ($\Lambda_0 < 0$) и хаотическим ($\sigma_1 > 0$). Поэтому наиболее простыми системами с хаотическим поведением являются трехмерные потоки или двумерные отображения. В последнем случае для хаотического движения должно быть $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_1 + \sigma_2 < 0$.

В некоторых предельных случаях из обратимых отображений с $N \geqslant 2$ можно получить одномерные необратимые отображения. Их поведение исследуется в § 7.2. Для таких отображений связь растяжения фазового объема с расходимостью близких траекторий нарушена, и при $\sigma_1 > 0$ возникает ограниченное хаотическое движение. Как будет показано, многие многомерные диссипативные системы приближенно можно свести к одномерным отображениям.

Простые аттракторы. Так как фазовый объем в диссипативных системах сжимается до нуля, то устойчивое стационарное движение

---

[1]) Фактически теорема Пуанкаре — Бендиксона утверждает, что хаотическое движение невозможно для любых двумерных потоков, как диссипативных, так и недиссипативных. Мы уже убедились в этом для гамильтоновых систем с одной степенью свободы (двумерное фазовое пространство).

в N-мерной системе должно происходить на «поверхности» меньшей размерности. Грубо говоря, такую поверхность и называют аттрактором. Более точно, мы будем называть аттрактором, следуя Лэнфорду [254], такое подмножество X фазового пространства, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) X инвариантно относительно потока;

2) существует (открытая) окрестность X, которая сжимается к X под действием потока;

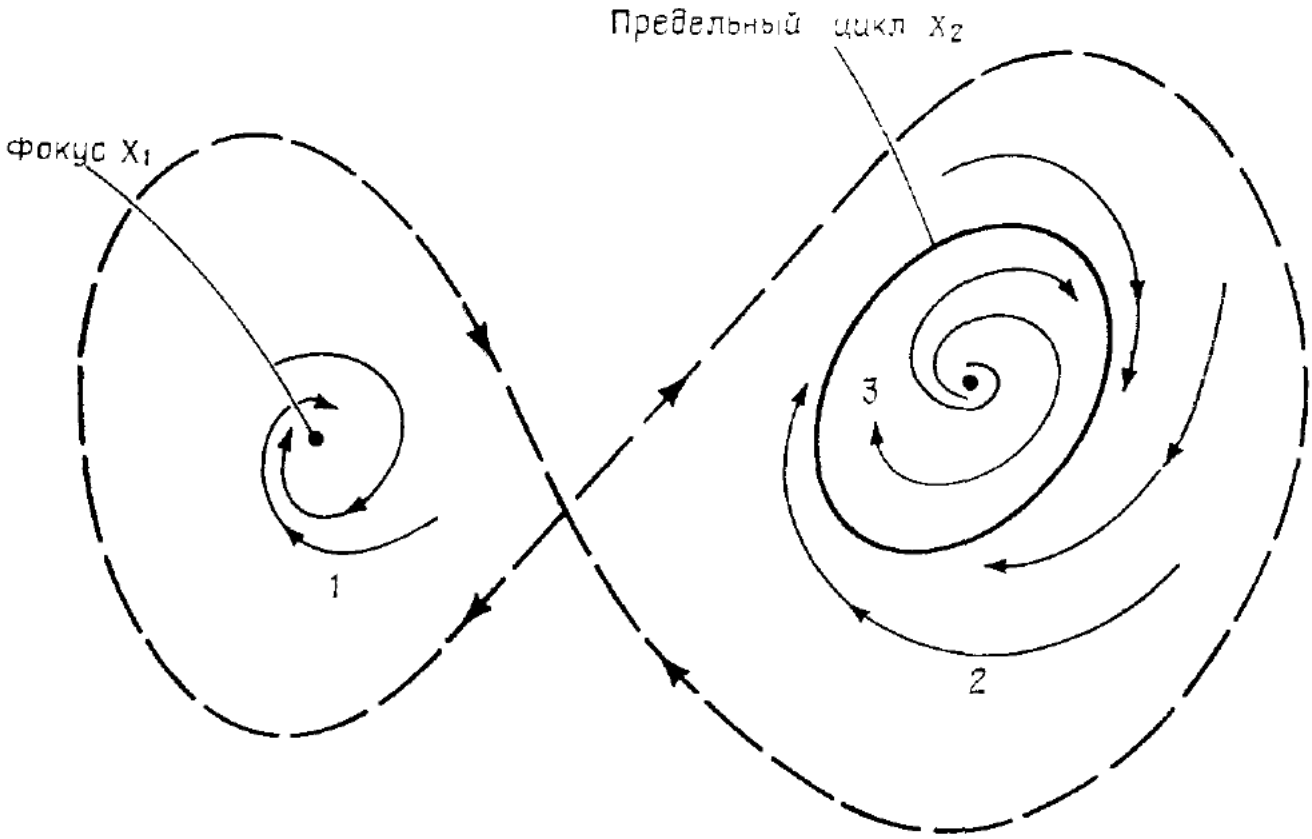


Рис. 7.1. Простые аттракторы.
1 — область притяжения фокуса X_1; *2, 3* — область притяжения предельного цикла X_2.

3) никакая часть X не является переходной [1]);

4) X нельзя разложить на два непересекающихся инвариантных множества.

Областью притяжения аттрактора X является множество состояний в фазовом пространстве, которые стремятся к X при $t \to \infty$. Обычно для N-мерного потока имеется конечное число аттракторов $X_1, \ldots, X_M$, хотя известны примеры и с бесконечным числом аттракторов. С точностью до меры нуль все начальные состояния лежат в области притяжения одного из M аттракторов (см. рис. 7.1).

---

[1]) То есть траектория не уходит из нее при $t \to \infty$. — *Прим. ред.*

Для одномерных потоков единственными аттракторами являются устойчивые неподвижные точки, или *устойчивые фокусы* (аналогично точке X_1 на рис. 7.1). Например, для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = V(x, \mu),$$

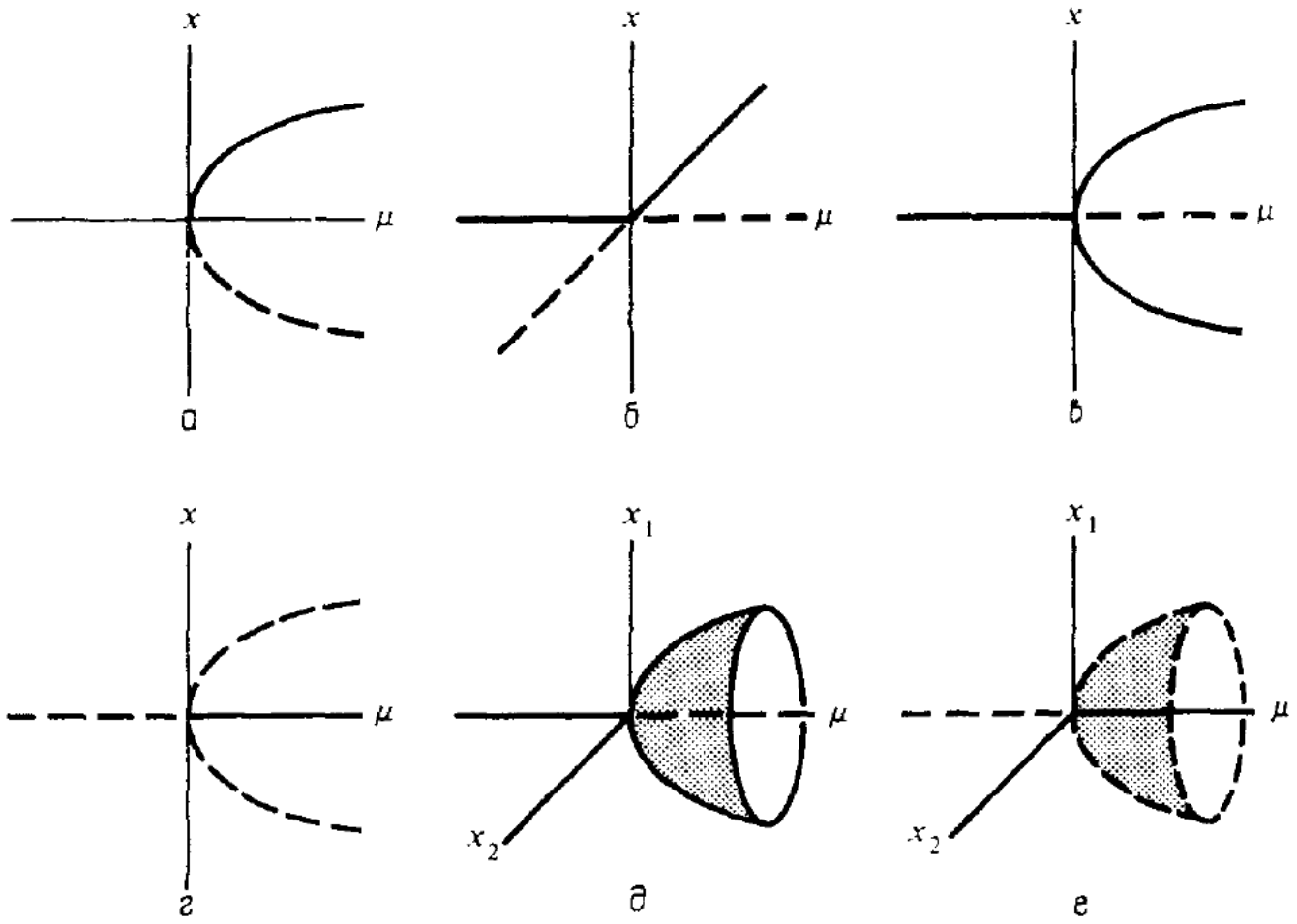


Рис. 7.2. Бифуркации в одномерных и двумерных потоках.

а — тангенциальная бифуркация; *б* — смена устойчивости; *в* — бифуркация удвоения; *г* — обратная бифуркация удвоения; *д* — бифуркация Хопфа; *е* — обратная бифуркация Хопфа. Случаи (*а*—*г*) типичны для одномерных потоков; случаи (*а*—*е*) — для двумерных потоков. Сплошные кривые — устойчивые решения, пунктирные кривые — неустойчивые решения.

где $V = \mu - x^2$, а μ — некоторый параметр, положение неподвижных точек получается из условия $dx/dt = 0$ или $V = -\partial U/\partial x = 0$ и равно $\pm\sqrt{\mu}$. Исследуя потенциал $U(x, \mu)$ вблизи неподвижных точек, найдем, что точка $x = +\sqrt{\mu}$ устойчива, а точка $x = -\sqrt{\mu}$ неустойчива. При $\mu < 0$ неподвижные точки для действительных x отсутствуют. Появление двух неподвижных точек при прохождении μ через нуль иллюстрируется на рис. 7.2, *а* и является примером *тангенциальной* бифуркации. Существуют бифуркации и других типов. Так, для $V = \mu x - x^2$ происходит *смена устойчивости* (рис. 7.2, *б*). Для $V = \mu x - x^3$ имеет место *бифуркация удвоения* [1]) (рис. 7.2, *в*), при которой вместо одного устойчи-

[1]) В оригинале — pitchfork bifurcation (бифуркация типа «вилки»).— *Прим. перев.*

вого фокуса возникают два. Возможна также и *обратная бифуркация удвоения* (рис. 7.2, *г*). За исключением особых случаев, только эти бифуркации и встречаются в одномерных потоках.

Для ограниченного двумерного потока на плоскости, согласно теореме Пуанкаре—Бендиксона, имеются только два типа аттракторов: 1) устойчивые неподвижные точки, или *устойчивые фокусы*, и 2) простые замкнутые кривые, или *предельные циклы* (кривая X_2 на рис. 7.1). Покажем, как образуется предельный цикл для системы

$$\frac{dr}{dt} = \mu r - r^2, \tag{7.1.12а}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 > 0, \tag{7.1.12б}$$

где r, θ — полярные координаты. При $\mu < 0$ правая часть (7.1.12а) всегда отрицательная и траектория свертывается к фокусу $r = 0$. Для $\mu > 0$ вблизи $r = 0$ скорость $\dot{r}$ положительна и неподвижная точка $r = 0$ перестает быть притягивающей. Поскольку $\dot{r} > 0$ для всех $r < \mu$ и $\dot{r} < 0$ для $r > \mu$, то траектория стремится к предельному циклу $r(t) = \mu$, $\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$.

Превращение устойчивого фокуса в предельный цикл при прохождении μ через нуль (рис. 7.2, *д*) называется *бифуркацией Хопфа*. Возможна также и *обратная бифуркация Хопфа* (рис. 7.2, *е*). На рис. 7.2, *а—е* показаны все типичные бифуркации в двумерных потоках [1]).

7.1б. Примеры странных аттракторов

Наименьшая размерность фазового пространства, в котором возможен странный аттрактор, равна трем, как в модели Лоренца, описанной в § 1.5. Еще более простая система была рассмотрена Рёслером [350], и мы опишем ее ниже. Интересные свойства двумерного отображения со странным аттрактором будут рассмотрены на примере отображения Хенона [187].

Аттрактор Рёслера. Рассмотрим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений [350]:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -(Y + Z), \\ \dot{Y} &= X + \frac{1}{5} Y, \\ \dot{Z} &= \frac{1}{5} + Z(X - \mu). \end{aligned} \tag{7.1.13}$$

[1]) В трехмерных потоках имеется аналог бифуркации Хопфа, когда предельный цикл становится неустойчивым и переходит в «предельный тор». Однако в общем случае притягивающие торы являются структурно неустойчивыми относительно изменения параметра μ (см. работу [254]).

Результат моделирования этой системы на аналоговой вычислительной машине для $\mu = 5{,}7$ представлен на рис. 7.3, *а* [368], где показана проекция странного аттрактора на плоскость X, Y (ср. рис. 1.18, *б*). Рассмотрим сечение аттрактора по линии (0,1), как показано на рис. 7.3, *а*. Тогда последовательные значения X_n в этом сечении определяются приближенно одномерным необратимым [1]) отображением, представленным на рис. 7.3, *б*. Таким образом, хаотическое движение на аттракторе Рёслера приближенно описывается отображением для X.

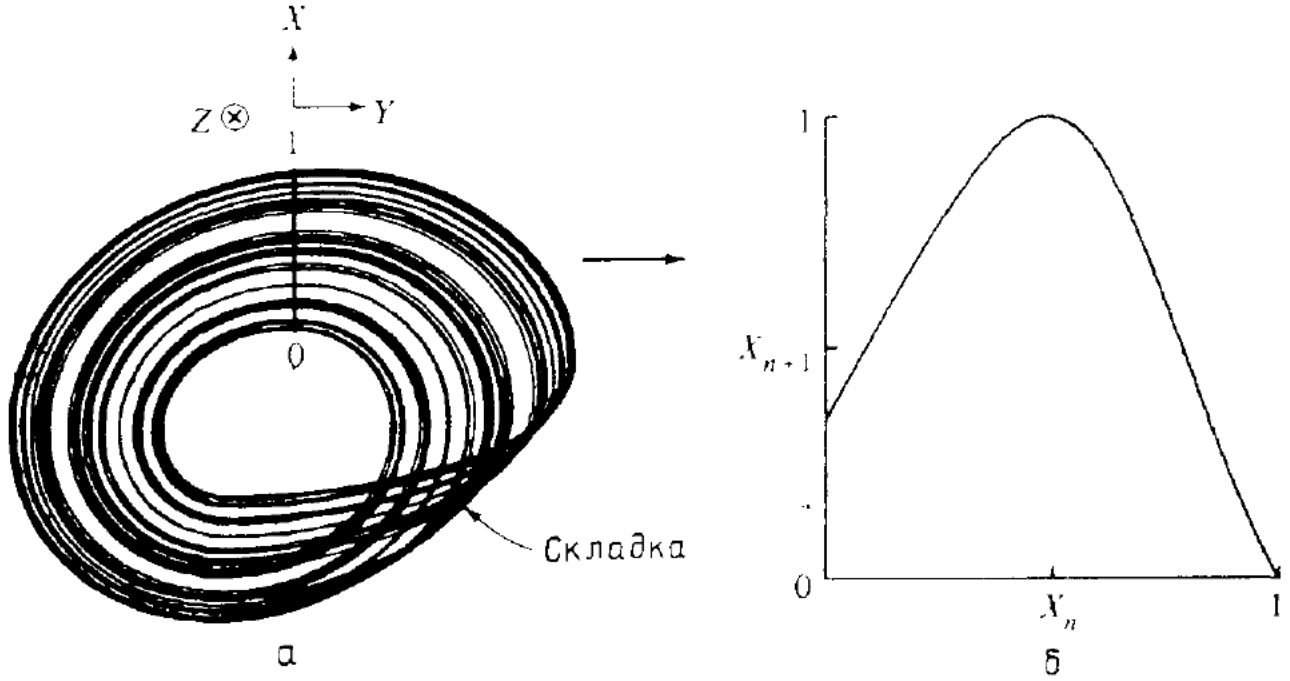


Рис. 7.3. Аттрактор Рёслера (по данным работы [368]).
а — проекция движения на плоскость (X, Y); б — одномерное отображение в плоскости $Y = 0$.

Переход от трехмерного потока к одномерному отображению является приближенным. Поэтому кривая на рис. 7.3, *б* должна иметь конечную толщину, связанную с тонкой структурой слоя в сечении $Y = 0$, который фактически содержит бесконечно много отдельных листов. Однако для этого и многих других странных аттракторов скорость сжатия фазового объема (7.1.8) столь велика, что при любом моделировании все листы кажутся слившимися в один. Поэтому, вообще говоря, одномерное отображение представляет основные особенности поведения исходного потока [2]).

Переход от простого к странному аттрактору иногда совершается путем последовательных бифуркаций с удвоением периода, которые сходятся по некоторому параметру к предельному значению. За этим значением движение становится суперпозицией хаотического

---

[1]) В том смысле, что обратное отображение неоднозначно (двузначно).— *Прим. ред.*

[2]) Вопрос о возможности описания трехмерного потока или двумерного отображения с помощью одномерного отображения обсуждается в п. 7.3в.— *Прим. перев.*

и периодического с обратными бифуркациями удвоения частоты. На рис. 7.4, полученном Кратчфилдом и др. [97] с помощью аналогового моделирования системы (7.1.13), эти бифуркации показаны, начиная с $\mu = 2{,}6$ (*а*), когда аттрактором является простой

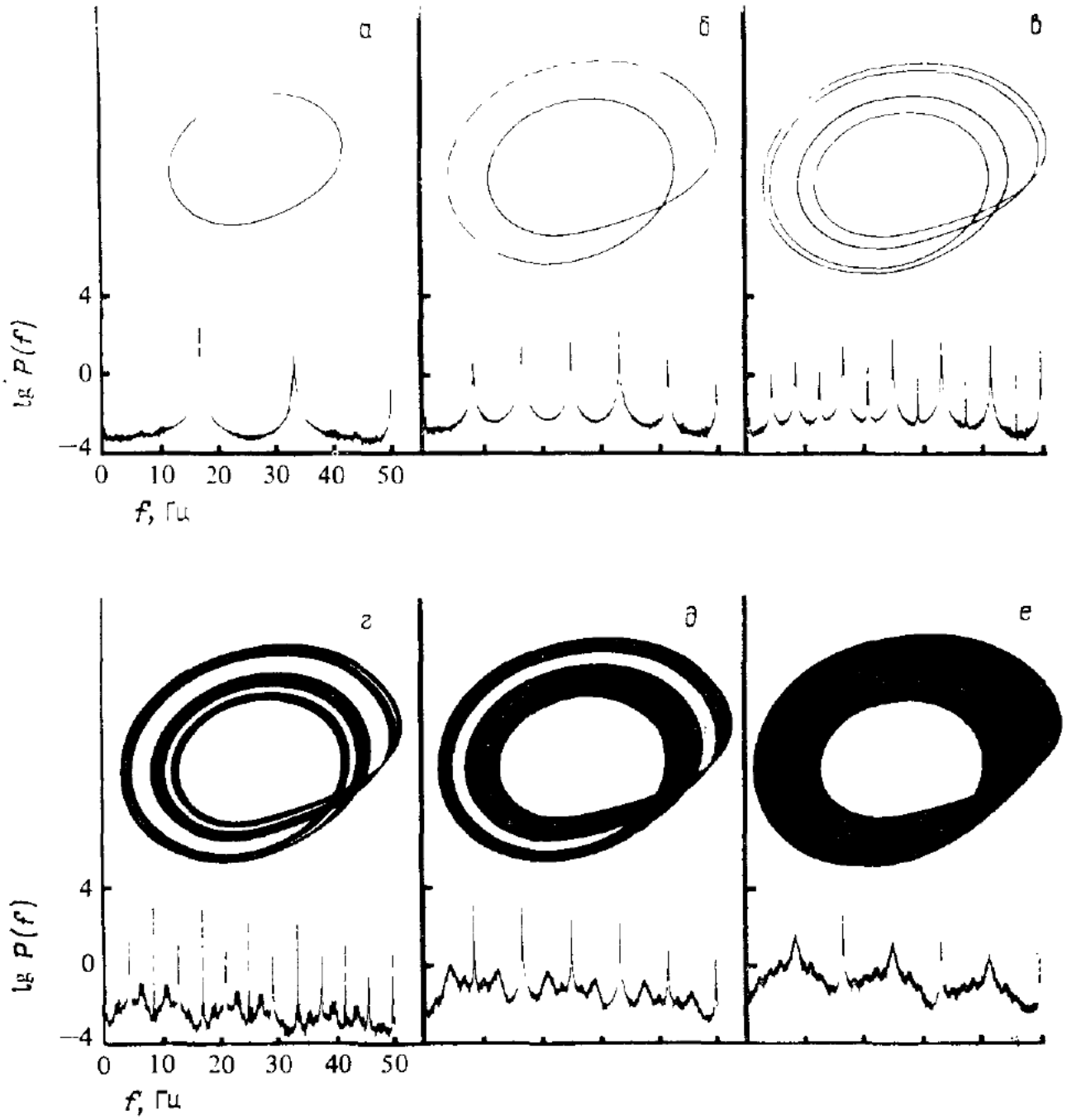


Рис. 7.4. Бифуркации удвоения периода для аттрактора Рёслера в проекции на плоскость (X, Y) (по данным работы [97]).

Ниже показана спектральная плотность мощности для $Z(t)$: *а*) $\mu = 2{,}6$; *б*) $\mu = 3{,}5$; *в*) $\mu = 4{,}1$; *г*) $\mu = 4{,}23$; *д*) $\mu = 4{,}30$; *е*) $\mu = 4{,}60$.

предельный цикл. При увеличении μ видны две первые бифуркации удвоения периода (*б* и *в*). Показанный на рисунке спектр мощности имеет в этих случаях вид острых пиков, характерных для регулярного движения. Ясно видны последовательные удвоения периода. Переход к хаотическому движению происходит при $\mu_\infty = 4{,}20$. Возникающий для $\mu > \mu_\infty$ странный аттрактор (рис. 7.4, *г*—*е*) имеет вид полосы хаотического движения, которая

приближенно соответствует предельным циклам на рис. 7.4, *а—в*. Соответственно спектр мощности представляет суперпозицию широкополосного шума хаотического движения и острых пиков периодической компоненты. Ясно видны обратные бифуркации удвоения частоты.

Переход к хаотическому движению через бифуркации удвоения периода является, как мы увидим, характерным для широкого класса диссипативных систем как отображений, так и потоков. При этом зависимость бифуркаций от параметра и форма спектра оказываются универсальными вблизи перехода. Эти вопросы будут рассмотрены в § 7.2 и 7.3.

Топология аттрактора Рёслера показана на рис. 7.5, *а*. Аттрактор представляет собой лист, который растягивается по вертикали, поперек траекторий (стрелки), перегибается вдоль траекторий, складывается, и, наконец, его правый и левый края соединяются друг с другом. Аттрактор Лоренца устроен более сложно (рис. 7.5,*б*). Он состоит из двух листов, которые растягиваются и делятся на две части, причем правый край каждого листа соединяется с левыми краями *обоих* листов. Можно представить себе и другие топологические структуры странных аттракторов.

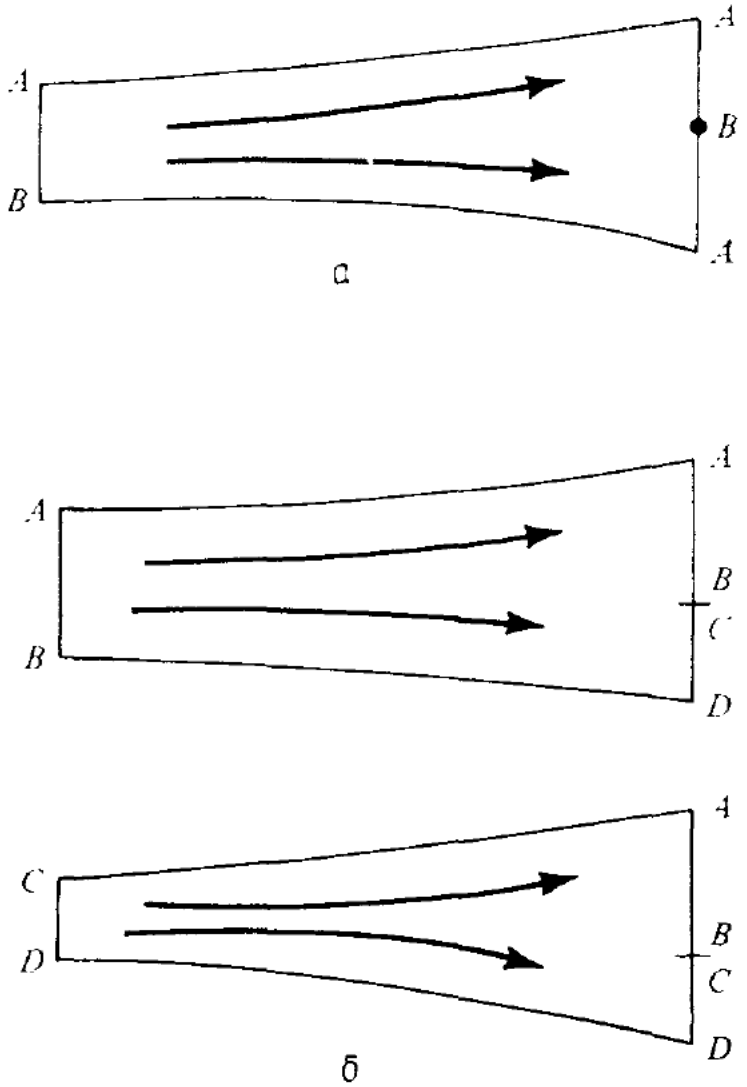


Рис. 7.5. Топология аттракторов Рёслера (*а*) и Лоренца (*б*).

Все отрезки, обозначенные одинаковыми буквами, соединяются друг с другом.

Хотя аттрактор Рёслера топологически проще аттрактора Лоренца, однако соответствующее ему одномерное отображение (рис. 7.3, *б*) имеет области, где производная $|dX_{n+1}/dX_n|<1$. Как показывается в § 7.2, в этом случае доказать хаотичность движения нелегко. Для аттрактора же Лоренца аналогичная производная всюду больше единицы. Доказано, что такие отображения являются хаотическими.

Аттрактор Хенона. Слоистая структура аттрактора хорошо видна на модели Хенона [187], которая описывается простым двумерным

квадратичным отображением:

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2,$$
$$y_{n+1} = bx_n. \tag{7.1.14}$$

Это отображение является обратимым, и его можно рассматривать как отображение Пуанкаре для некоторого трехмерного потока. Сокращение фазовой площади на одну итерацию определяется множителем

$$|\det \mathbf{M}| = \left| \frac{\partial (x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial (x_n, y_n)} \right| = b. \tag{7.1.15}$$

Можно показать [187], что отображение (7.1.14) является наиболее общим квадратичным отображением с постоянным якобианом. При достаточно большом x_0 величина $|x_n| \to \infty$ из-за квадратичного члена. Однако некоторая конечная область вблизи начала координат стягивается к аттрактору. Отображение имеет две неподвижные точки

$$x_\pm = (2a)^{-1} \{ -(1-b) \pm [(1-b)^2 + 4a]^{1/2} \},$$
$$y_\pm = bx_\pm \tag{7.1.16}$$

при условии, что

$$a > a_0 = \frac{-(1-b)^2}{4}.$$

Легко проверить, что точка x_- всегда неустойчива, а точка x_+ неустойчива при

$$a > a_1 = \frac{3(1-b)^2}{4}.$$

При дальнейшем увеличении $a > a_1$ численное моделирование показывает последовательность бифуркаций удвоения периода. Аттрактор остается простым и представляет собой $p = 2^n$ точек; $p \to \infty$ при $a \to a_2$. Далее для большинства значений a в интервале $a_2 < a < a_3$ численные эксперименты определенно указывают на существование странного аттрактора. И наконец, для $a > a_3$ большинство траекторий уходит на бесконечность.

Чтобы увидеть структуру аттрактора, Хенон выбрал относительно небольшое значение $b = 0{,}3$. В этом случае $a_0 \approx -0{,}1225$; $a_1 \approx 0{,}3675$; $a_2 \approx 1{,}06$; $a_3 \approx 1{,}55$. На рис. 7.6, *а* показан странный аттрактор для $a = 1{,}4$, полученный за 10^4 итераций отображения с начальными условиями вблизи неустойчивой неподвижной точки. Более детальная структура аттрактора видна на рис. 7.4, *б—г*, представляющих собой последовательно увеличенные участки фазовой плоскости. Видно, что структура аттрактора при изменении масштаба повторяется, т. е. имеет место масштабная инвариант-

ность [1]). Это подобие соответствует структуре *канторова множества*, которое будет описано в п. 7.1в. Экспоненциальная расходимость близких траекторий, подтверждающая стохастичность движения на аттракторе, численно получена в работах [99, 124, 375].

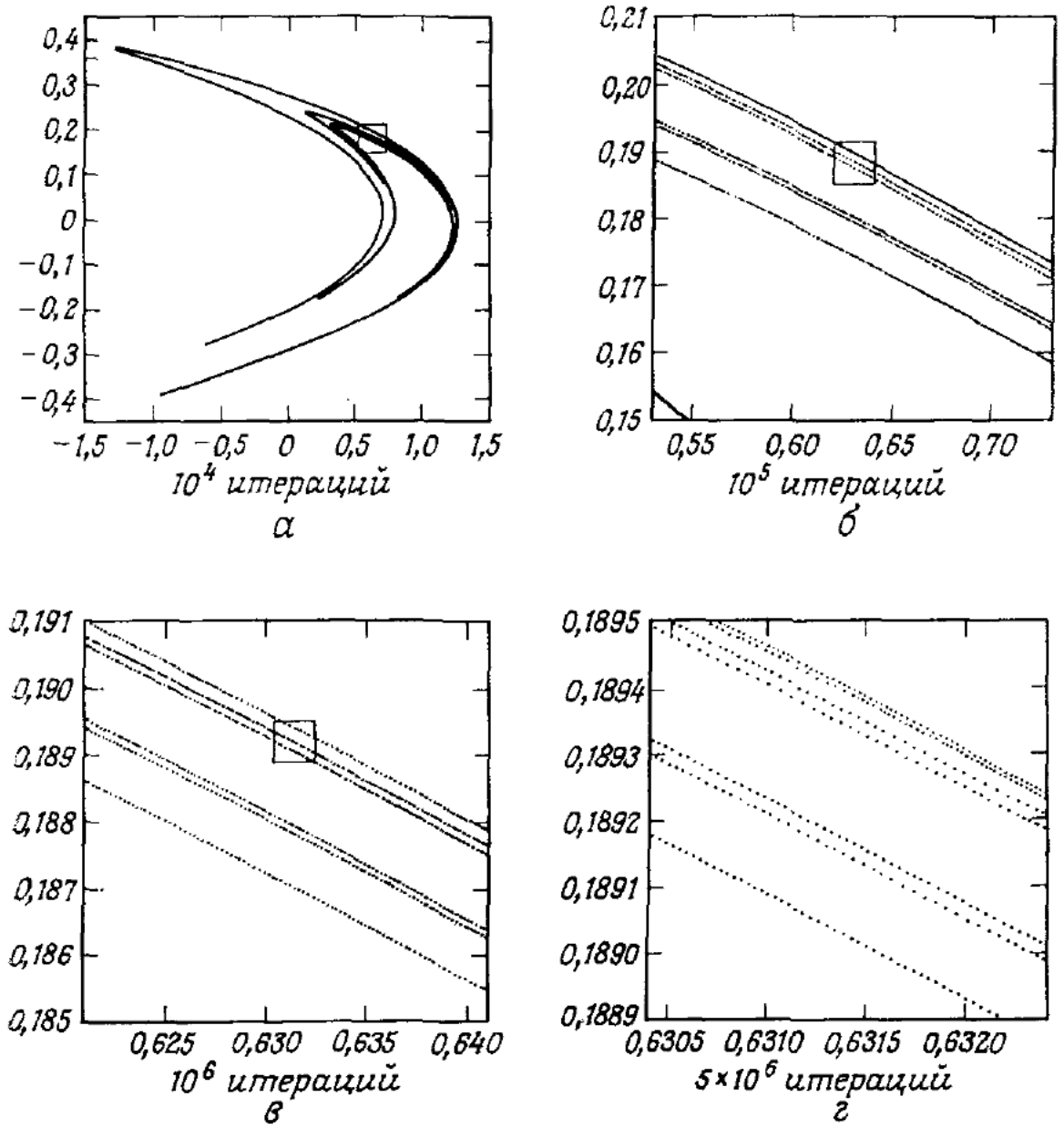


Рис. 7.6. Слоистая структура аттрактора Хенона (по данным работы [187]). *а* — траектория с начальными условиями в неустойчивой неподвижной точке; *б—г* — последовательные увеличения малого участка фазовой плоскости (квадрат). Видна масштабная инвариантность структуры аттрактора.

Странный аттрактор существует не для всех значений a в интервале $a_2<a<a_3$. Имеется много узких участков, в которых движение является периодическим с периодами 3, 4, 5 . . . и испытывает бифуркации удвоения периода [375]. Эти особенности движения рассматриваются в § 7.2.

---

[1]) Аналогичная структура аттрактора наблюдалась в работе [73] для другого отображения (см. также [74, 530]). — *Прим. ред.*

Математически доказать стохастичность аттрактора Хенона пока не представляется возможным. Ситуация значительно упрощается для разрывного отображения. Такой аттрактор с заменой x_n^2 на $|x_n|$ в (7.1.14) был рассмотрен Лози [285], а доказательство его хаотичности дано Мисюревичем [301].

7.1в. Геометрия странных аттракторов

Численные данные для отображения Хенона показывают, как мы видели выше, что структура аттрактора повторяется на все более и более мелких масштабах. Ее можно сопоставить с канторовым множеством, свойства которого позволяют значительно лучше понять природу странного аттрактора. Рассмотрим вначале размерность канторова множества. Для этого нам понадобится общее определение фрактальной размерности. Затем мы рассмотрим простой пример канторова множества и найдем его размерность. И наконец, обсудим некоторые методы вычисления и измерения фрактальной размерности странных аттракторов, уделяя основное внимание ее связи с показателями Ляпунова. Наше изложение следует частично обзорам Треве [411] и Отта [324].

Канторовы множества и фрактальная размерность. Примем следующее определение фрактальной размерности [1]):

$$d(S) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \tag{7.1.17}$$

где S — некоторое множество в N-мерном пространстве, а $M(\varepsilon)$ — минимальное число N-мерных кубов со стороной ε, необходимых для покрытия этого множества. При малых ε из такого определения следует, что

$$M(\varepsilon) \sim K\varepsilon^{-d}. \tag{7.1.18}$$

Размерность (7.1.17) называют также *емкостью*. Для точки, линии и области на двумерной поверхности фрактальная размерность имеет обычные значения 0, 1, 2 соответственно. Действительно, необходимое число квадратов со стороной ε для покрытия точки пропорционально $1/\varepsilon^0$, для линии $M \propto 1/\varepsilon^1$ и для двумерной области $M \propto 1/\varepsilon^2$.

Канторово множество является компактным, метрическим, нигде не плотным, несчетным и может быть нулевой меры. Типичные канторовы множества имеют дробную размерность ($0 < d < 1$) и обладают масштабной инвариантностью, т. е. при соответствующем изменении масштаба подмножество «выглядит» так же, как и исходное множество. Известным примером канторова множества слу-

---

[1]) Такое определение размерности введено в работе [521]. Различные понятия размерности и их взаимосвязь обсуждаются в обзоре [522] (см. также [523]).— *Прим. ред.*

жит так называемое «множество средних третей» (рис. 7.7), которое строится следующим образом. Возьмем закрытый отрезок [0, 1] и выбросим из него открытый (без граничных точек) интервал (1/3, 2/3). Затем из двух отрезков полученного множества T_1 аналогичным образом выбросим их «средние трети» и получим новое множество T_2. Повторяя эту процедуру бесконечное число раз, получим множества T_1, T_2, T_3, ... Канторово множество T есть пересечение всех T_n. Грубо говоря, это пересечение есть «предельное T_n».

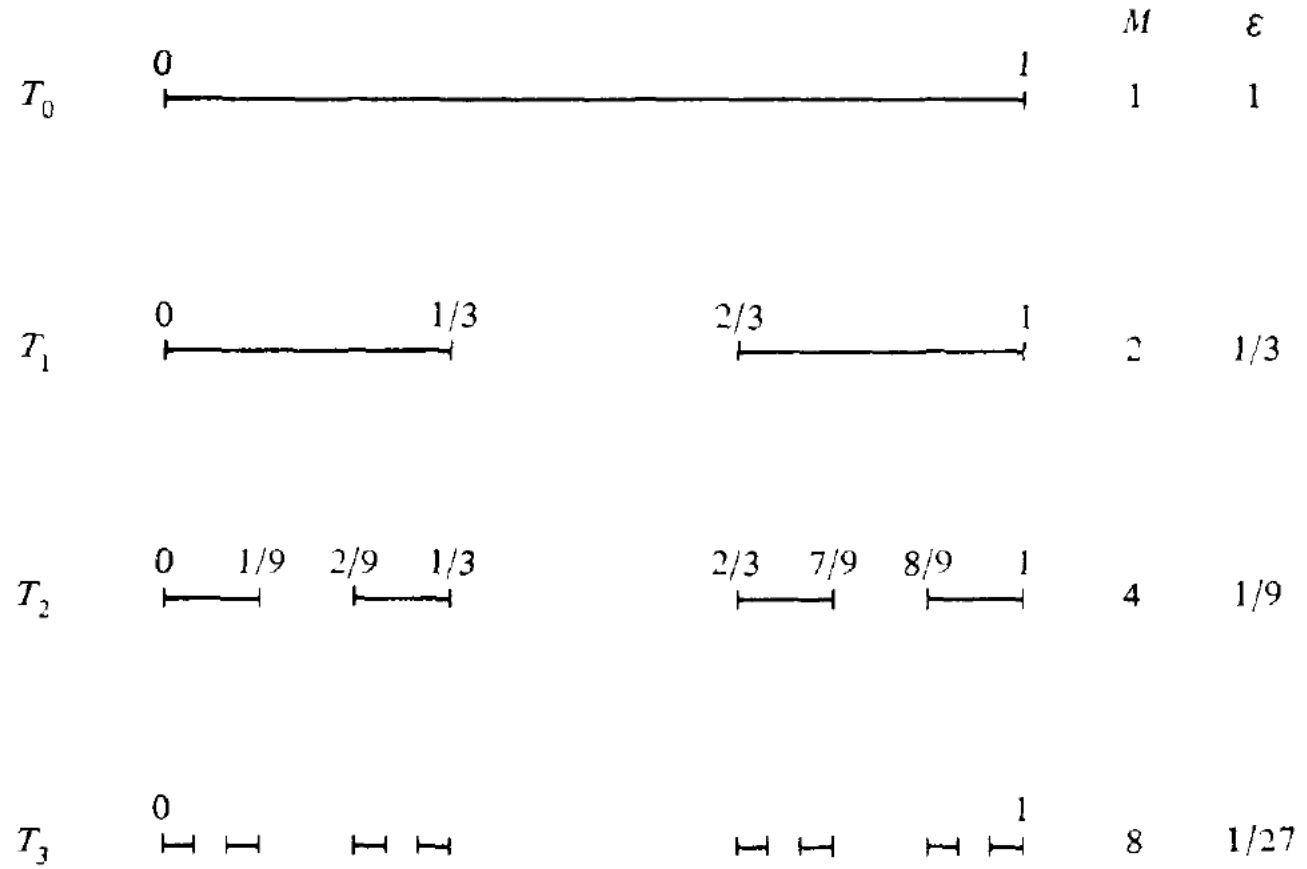


Рис. 7.7. Построение множества Кантора.
M — число отрезков длины ε, необходимое для покрытия множества T_n.

Из построения следует, что множество T_n состоит из $M = 2^n$ разделенных интервалов длиной $\varepsilon = (1/3)^n$. Согласно (7.1.17), фрактальная размерность T равна

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}631.$$

Множество T имеет нулевую меру

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon M = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Покажем, что множество T несчетно. Для этого представим действительное число x в интервале (0, 1) в следующем виде:

$$x = a_1\left(\frac{1}{3}\right) + a_2\left(\frac{1}{9}\right) + \ldots + a_n\left(\frac{1}{3^n}\right) + \ldots,$$

где a_i принимают, вообще говоря, три значения: 0, 1, 2. Однако, для того чтобы x принадлежало T, необходимо, чтобы все a_i принимали только два значения: 0 или 2 (см. рис. 7.7). И наоборот, любая последовательность таких a_i определяет x, принадлежащее T. Но тогда существует взаимно-однозначное соответствие между канторовым множеством и множеством всех двоичных последовательностей, которое представляет все числа в интервале (0, 1). Последнее же, как известно, несчетно.

Связь между фрактальной размерностью и показателями Ляпунова. Существует гипотеза [218], связывающая фрактальную размерность с показателями Ляпунова:

$$d = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \sigma_i}{-\sigma_{j+1}}, \tag{7.1.19}$$

где все показатели упорядочены обычным образом: $\sigma_1 \geqslant \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_N$, а j — наибольшее целое число, для которого $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_j > 0$.

Рассел и др. [356] сравнили (7.1.17) с (7.1.19) для нескольких двумерных отображений и трехмерных потоков. Для двумерных отображений, у которых $\sigma_1 > 0 > \sigma_1 + \sigma_2$, (7.1.19) сводится к

$$d = 1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \tag{7.1.20}$$

Для трехмерных потоков с $\sigma_1 > 0 > \sigma_3$, $\sigma_2 = 0$ [1]) и $\sigma_1 + \sigma_3 < 0$ получим

$$d = 2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}. \tag{7.1.21}$$

Для непосредственного численного определения d, согласно (7.1.17), все пространство делится на ячейки со стороной ε. Затем отображение итерируется до тех пор, пока не закончится переходной процесс, после которого движение происходит на аттракторе. При последующих итерациях помечаются те ячейки, в которые попадает траектория. После достаточно большого количества итераций число таких ячеек стремится к $M(\varepsilon)$. Из (7.1.17) следует, что зависимость $\ln M$ от $\ln \varepsilon$ является линейной. Значение d можно определить с помощью подгонки численных данных на эту прямую.

В табл. 7.1, взятой из работы Рассела и др. [356], сравниваются [2]) значения d, полученные описанным прямым методом

[1]) Напомним, что для потока один из показателей всегда равен нулю.

[2]) Фрактальная размерность, которую использовали Каплан и Йорке в своей гипотезе, является *информационной размерностью*. Было показано, что она ограничена сверху *емкостью* (7.1.17). В то же время Рассел и др. [356] численно определяли емкость, которая, очевидно, очень близка к информационной размерности по данным табл. 7.1 (подробности см. в работе Фармера [120]).

и согласно (7.1.19), для трех разных двумерных отображений и трехмерного потока. Были выбраны отображения Хенона (7.1.14), (необратимое) отображение Каплана и Йорке:

$$x_{j+1} = 2x_j, \qquad \mathrm{mod}\ 1,$$
$$y_{j+1} = \alpha y_j + \cos 4\pi x_j \tag{7.1.22}$$

Таблица 7.1. Вычисление фрактальной размерности [1])

Модель	По показателям Ляпунова (7.1.19)	Прямое вычисление (7.1.17)
Отображение Хенона $a=1,2$; $b=0,3$	$1,200\pm0,001$	$1,202\pm0,003$
Отображение Хенона $a=1,4$; $b=0,3$	$1,264\pm0,002$	$1,261\pm0,003$
Отображение Каплана—Йорке $\alpha=0,2$	1,4306766	$1,4316\pm0,0016$
Отображение Заславского $\Gamma=3,0$; $\varepsilon=0,3$ $\nu=400/3$	$1,387\pm0,001$	$1,380\pm0,007$
Поток	$2,317\pm0,001$	$2,318\pm0,002$

[1]) По данным работы [356].

и отображение Заславского:

$$x_{j+1} = x_j + \nu(1+\mu y_j) + \varepsilon\nu\mu\cos 2\pi x_j, \qquad \mathrm{mod}\ 1,$$
$$y_{j+1} = \exp(-\Gamma)(y_j + \varepsilon\cos 2\pi x_j). \tag{7.1.23}$$

Для отображений Хенона и Заславского непосредственно вычислялся только показатель Ляпунова σ_1, а σ_2 определялось из известной скорости сжатия фазового объема (7.1.10):

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \ln|\det \mathbf{M}|, \tag{7.1.24}$$

где $\det \mathbf{M}$ равен $-b$ для отображения Хенона и $e^{-\Gamma}$ — для отображения Заславского. В случае отображения Каплана и Йорке $\sigma_1 = \ln 2$ и $\sigma_2 = \ln\alpha$. И наконец, для потока $\sigma_1 + \sigma_3$ находится аналитически, а σ_1 — численно. Во всех случаях наблюдается прекрасное согласие между (7.1.17) и (7.1.19). Использование гипотезы (7.1.19) гораздо проще, чем прямое вычисление по (7.1.17), однако эта гипотеза пока не доказана.

Другие способы определения фрактальной размерности обсуждались в работах Паккарда и др. [326], Фрёлинга и др. [138] и Фармера [120].

§ 7.2. Одномерные необратимые отображения

7.2а. Основные свойства

Рассмотрим свойства одномерных отображений вида

$$x_{n+1} = f(x_n, C), \tag{7.2.1}$$

где C — некоторый параметр. Как мы уже видели, к таким отображениям сводятся более сложные диссипативные системы [1]). Они возникают также и как самостоятельные простые модели некоторых систем. Например, переменная x_n может описывать популя-

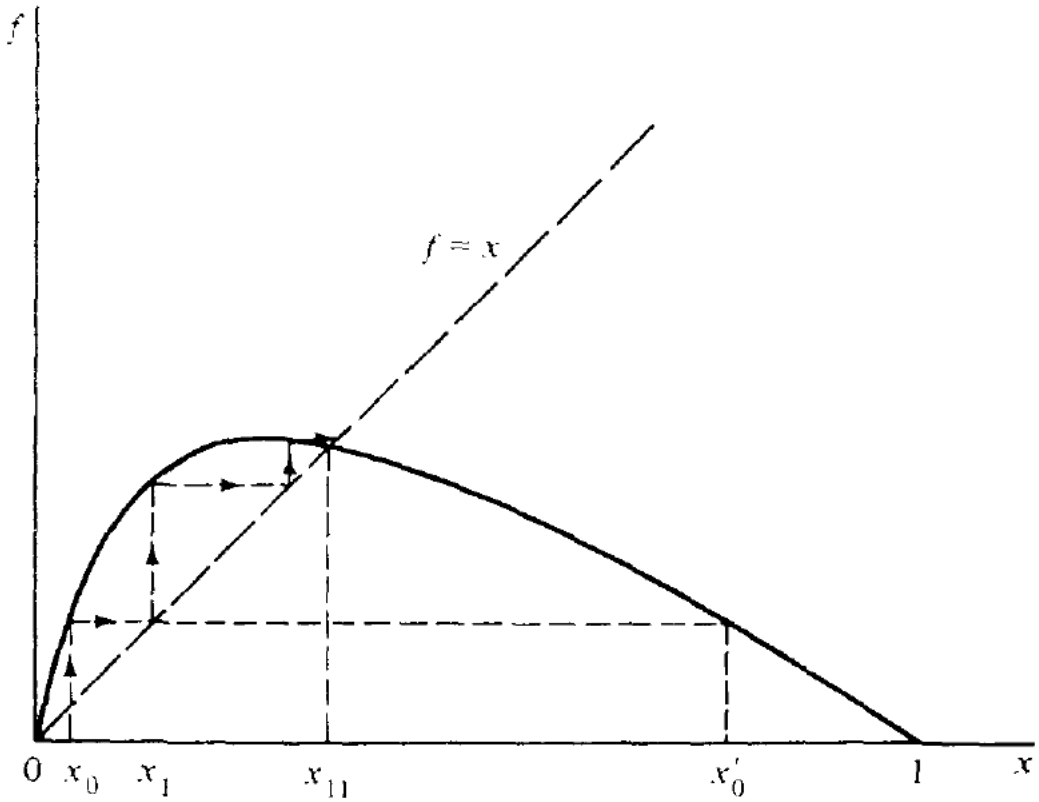


Рис. 7.8. Типичный пример одномерного необратимого отображения.

цию какого-то вида в n-й год, а f — влияние окружающей среды. Пусть задана начальная популяция x_0. Как будет изменяться эта популяция? Как ее эволюция зависит от окружающей среды?

Ниже мы ограничимся функциями f некоторого определенного вида. Если f — линейная функция, то решение (7.2.1) тривиально. В случае обратимой функции f (монотонная зависимость от x) движение также простое и не обладает хаотическими свойствами. Стационарные состояния являются периодическими, а бифуркации типа удвоения периода отсутствуют. Как будет видно ниже, хао-

[1]) Это справедливо, если исходная система имеет только один положительный показатель Ляпунова.

тическое движение связано [1]) с областями вблизи $f'(x) = 0$. Поэтому мы ограничимся простейшим интересным случаем, когда $f(x)$ имеет единственный максимум (или минимум). Типичная $f(x)$ в этом случае схематически изображена на рис. 7.8. Для малых x происходит увеличение x, а для больших — уменьшение. Такое отображение может, например, моделировать окружающую среду, в которой рост популяции ограничен запасами пищи и загрязнением окружающей среды.

Итерируя (7.2.1), можно проследить за эволюцией x для любого заданного x_0. Можно также исследовать поведение (7.2.1) графически:

а) по x_0 находим $x_1 = f(x_0)$, двигаясь вертикально вверх (см. рис. 7.8);

б) переводим x_1 на ось x, двигаясь горизонтально до пересечения с прямой $f = x$;

в) повторяя «а» и «б», находим x_2, x_3 и т. д. Из рис. 7.8 видно, что отображение необратимо, поскольку одному и тому же x_1 соответствуют два начальных состояния x_0 и x_0'. Поэтому обратное отображение будет неоднозначным.

Для случая, изображенного на рис. 7.8, вне зависимости от выбора x_0 решение сходится к точке x_{11}, которая является неподвижной точкой отображения:

$$x_{11} = f(x_{11}). \tag{7.2.2}$$

Ясно также, что x_{11} — устойчивая (притягивающая) неподвижная точка. Другая неподвижная точка $x = 0$ является неустойчивой (отталкивающей).

Квадратичные отображения. Как уже упоминалось, переход к хаосу для одномерного отображения с одним максимумом определяется поведением отображения вблизи его экстремума. Для типичного случая, когда $f' = 0$, но $f'' \neq 0$, отображение локально квадратично. Разложение в ряд Тейлора вблизи экстремума приводит к квадратичному отображению общего вида

$$z_{n+1} = a + bz_n + cz_n^2. \tag{7.2.3}$$

Линейным преобразованием его можно привести к нормальной форме, которую мы и будем называть *квадратичным отображением*:

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{7.2.4а}$$

где

$$f(x_n) = 2Cx_n + 2x_n^2. \tag{7.2.4б}$$

[1]) Это условие не является необходимым для хаоса, как показывает рассмотренный ранее пример (5.2.32), а также отображение Лоренца (рис. 1.21). Напротив, области с $f' = 0$ способствуют устойчивости (регулярности) движения, так как они уменьшают показатели Ляпунова [см. (7.2.46)]. Поэтому рассматриваемая ниже теория бифуркаций удвоения периода в окрестности $f'(x) = 0$ есть прежде всего теория сложного разрушения такой устойчивости.— *Прим. ред.*

Представляют интерес две области параметра C. Для $0<C<2$ интервал $-C<x<0$ переходит в себя, как показано на рис. 7.9, *а* и *б*. Для $-1<C<1/2$ переходит в себя интервал $-1/2<x<1/2-C$ (см. рис. 7.9, *в—е*). Отметим, что эти два интервала значений C перекрываются (см. рис. 7.9, *б* и *в*), а движение в обоих случаях аналогично и отличается только тем, какой отрезок x переходит в себя. Особое значение имеет точка $x^* = -C/2$, в которой функция f экстремальна.

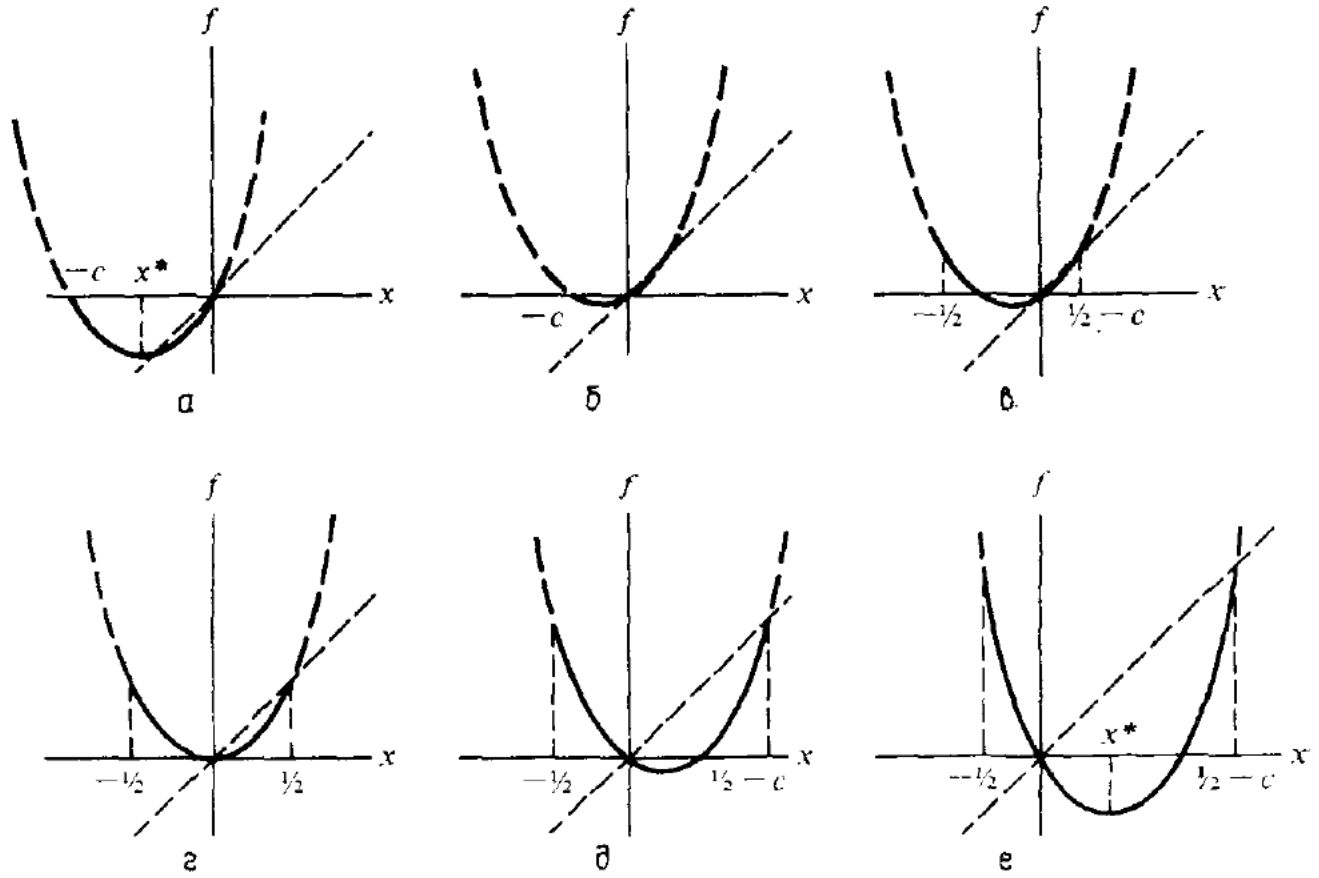


Рис. 7.9. Квадратичное отображение (7.2.4) для различных значений параметра C.

Сплошная кривая показывает отрезок x, переходящий в себя. Случай I: $-C<x<0$; *а*) $C>1/2$; *б*) $0<C<1/2$. Случай II: $-1/2<x<1/2-C$; *в*) $0<C<1/2$; *г*) $C=0$; *д*) $-1/2<C<0$; *е*) $-1<C<-1/2$.

Другая удобная форма квадратичного отображения получается путем замены $x=-(\mu/2)\,y$ и $C=\mu/2$ в (7.2.4). Это приводит к так называемому логистическому отображению:

$$y_{n+1}=\mu y_n(1-y_n). \tag{7.2.5}$$

Для $0<\mu<4$ интервал $0<y<1$ переходит в себя. Это соответствует значениям C в интервале $0<C<2$ (рис. 7.9, *а* и *б*). Отображение (7.2.5) использовалось как для изучения общих свойств одномерных отображений, так и в некоторых задачах популяционной биологии. На рис. 7.10 показано отображение (7.2.5) для двух значений μ. Оба отображения, (7.2.4) и (7.2.5), являются эквивалентными представителями общего квадратичного отображения (7.2.3).

Зеркальная симметрия. Квадратичные отображения обладают сим-

метрией, которая приводит к одному и тому же поведению для двух разных значений параметра. Действительно, производя в (7.2.4) линейную замену

$$x=\bar{x}+\frac{1}{2}-C, \tag{7.2.6}$$

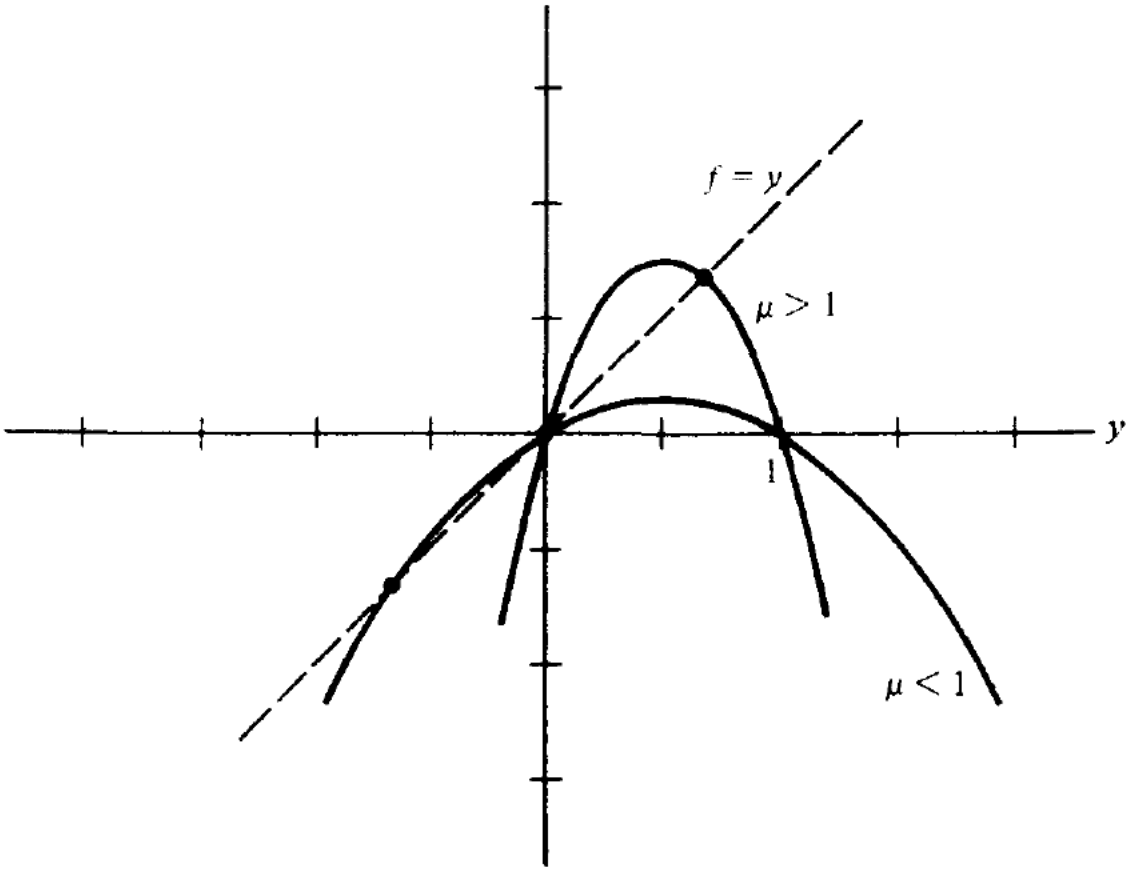


Рис. 7.10. Отображение (7.2.5) для $0<\mu<4$.
Интервал $0<y<1$ преобразуется сам в себя.

получаем

$$\bar{x}_{n+1}=2\bar{C}\bar{x}_n+2\bar{x}_n^2, \tag{7.2.7}$$

где новый параметр $\bar{C}$ равен

$$\bar{C}=1-C. \tag{7.2.8}$$

Из сравнения (7.2.7) и (7.2.4) следует, что квадратичные отображения с параметрами, равными C и $1-C$, обладают одними и теми же свойствами. Иначе говоря, отображение (7.2.4) симметрично относительно $C=1/2$. Аналогично, производя замену

$$y=(1-\mu^{-1})-(1-2\mu^{-1})\,\bar{y} \tag{7.2.9}$$

в отображении (7.2.5), получаем

$$\bar{y}_{n+1}=\bar{\mu}\,\bar{y}_n\,(1-\bar{y}_n), \tag{7.2.10}$$

где

$$\bar{\mu}=2-\mu, \tag{7.2.11}$$

т. е. отображение симметрично относительно $\mu=1$.

7.2б. Периодическое движение

Рассмотрим неподвижные точки квадратичного отображения (7.2.4) и их линейную устойчивость. Неподвижные точки находятся из условия:

$$x_1 = 2Cx_1 + 2x_1^2, \tag{7.2.12}$$

которое соответствует пересечению кривой $f(x)$, определяемой (7.2.4б), и прямой $f = x$. Решение (7.2.12) имеет два корня:

$$x_{10} = 0, \quad x_{11} = \frac{1}{2} - C. \tag{7.2.13}$$

Устойчивость неподвижных точек определяется из линеаризованного отображения (§ 3.3). Подставляя

$$x_n = x_1 + \Delta x_n \tag{7.2.14}$$

в (7.2.4) и удерживая только линейные члены, получаем

$$\Delta x_n = \lambda_1^n \Delta x_0, \tag{7.2.15}$$

где собственное значение $\lambda_1 = f'(x_1)$. Следовательно, x_1 — устойчивая (притягивающая) неподвижная точка, если $|\lambda_1| < 1$, и неустойчивая (отталкивающая), если $|\lambda_1| > 1$. Отсюда следует, что точка x_{11} устойчива при

$$|f'(x_{11})| = |2 - 2C| < 1,$$

или для $1/2 < C < 3/2$. Аналогично неподвижная точка x_{10} устойчива при

$$|f'(x_{10})| = |2C| < 1,$$

или для $-1/2 < C < 1/2$.

Бифуркации. Рассмотрим устойчивость отображения при уменьшении параметра C, начиная с некоторого $C > 1/2$, когда точка x_{11} устойчива, а x_{10} неустойчива. При $C_0 = 1/2$ точка x_{11} становится неустойчивой, а x_{10} — устойчивой. При дальнейшем уменьшении C вплоть до $C = C_1 = -1/2$ точка x_{10} остается устойчивой.

Чтобы понять, что происходит при $C < -1/2$, нужно рассмотреть периодические точки периода 2, которые находятся из условия:

$$x_2 = f(f(x_2)). \tag{7.2.16}$$

Это соответствует пересечению кривой

$$f_2(x) = f(f(x)) \tag{7.2.17}$$

с прямой $f = x$, как показано на рис. 7.11, *а* и *б* для $C > -1/2$ и $C < -1/2$ соответственно. Если $C > -1/2$, то оба пересечения соответствуют неподвижным точкам $x_{11} = 1/2 - C$ и $x_{10} = 0$, ко-

торые, очевидно, удовлетворяют и (7.2.16). В этом случае наклон $f_2(x)$ в нуле меньше единицы, так как

$$f_2'(x_{10}) = \lambda_1^2,$$

а $|\lambda_1| < 1$ для $C > -1/2$. Если же параметр C становится меньше $-1/2$, то наклон увеличивается и рождается пара неподвижных точек отображения f_2 (или периодических точек отображения f,

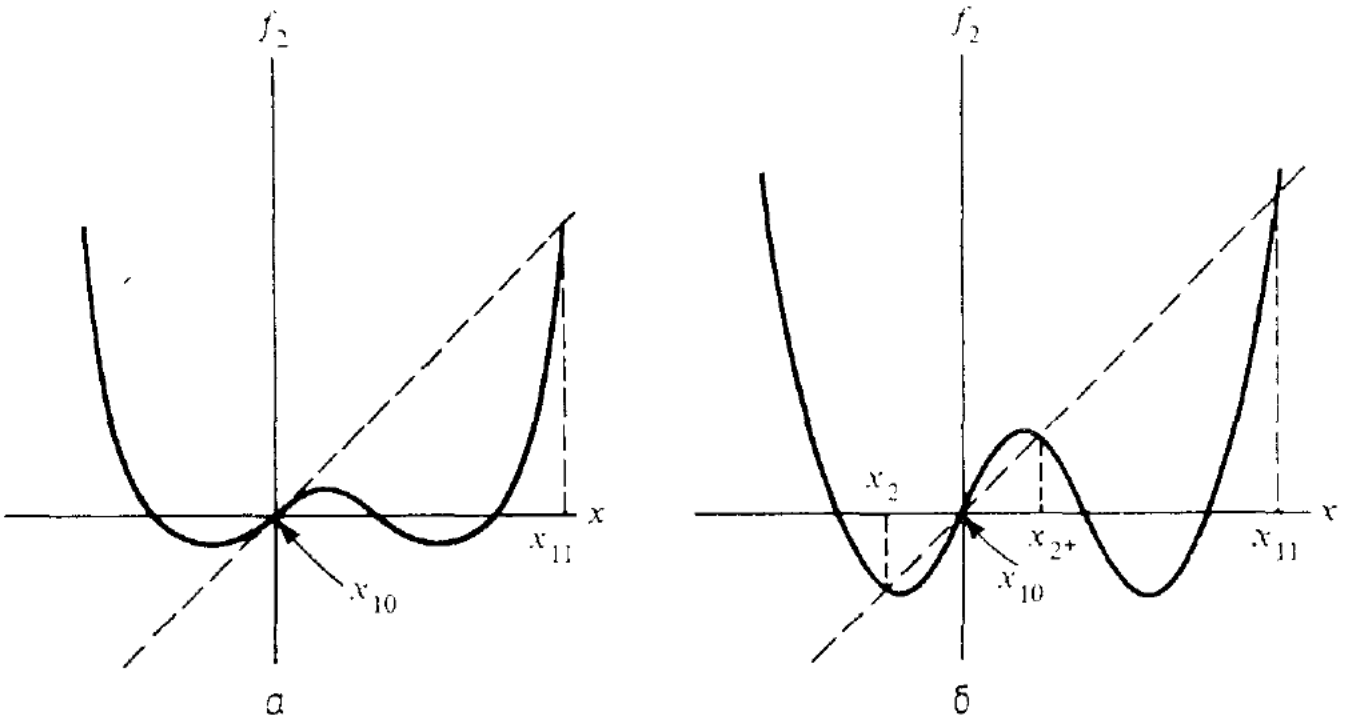


Рис. 7.11. Возникновение двух неподвижных точек $x_{2\pm}$ с периодом 2 для квадратичного отображения.
$f_2(x) = f(f(x))$: *а*) $C > -1/2$; *б*) $C < -1/2$.

рис. 7.11, *б*). Они удовлетворяют условиям

$$x_{2+} = f(x_{2-}) = f_2(x_{2+}), \tag{7.2.18а}$$

$$x_{2-} = f(x_{2+}) = f_2(x_{2-}). \tag{7.2.18б}$$

Позже мы получим явные выражения для x_{2+} и x_{2-} как функций параметра C.

Устойчивость $x_{2\pm}$ можно исследовать, как обычно, с помощью замены $x_{2,n} = x_{2\pm} + \Delta x_{2,n}$ и линеаризации отображения. Для точки x_{2-} находим

$$\Delta x_{2,n} = \lambda_{2-}^n \Delta x_0,$$

где

$$\lambda_{2-} = f_2'(x_{2-}) = f'(x_{2-}) f'(x_{2+}). \tag{7.2.19}$$

Аналогично для x_{2+}:

$$\lambda_{2+} = f'(x_{2+}) f'(x_{2-}) = \lambda_{2-}. \tag{7.2.20}$$

Видно, что наклоны (собственные значения) одинаковы для обеих точек. Как отмечено в п. 3.3а, для канонических отображений

это свойство является общим для неподвижных точек любого периода.

Из рис. 7.11, *б* следует, что если значение C чуть меньше $C_1 = -1/2$, то $|\lambda_2(x_{2-})| = |\lambda_2(x_{2+})| < 1$. Таким образом, как только неподвижная точка периода 1 становится неустойчивой, появляется пара устойчивых неподвижных точек с удвоенным периодом. Это явление иллюстрируется на рис. 7.12, где показана

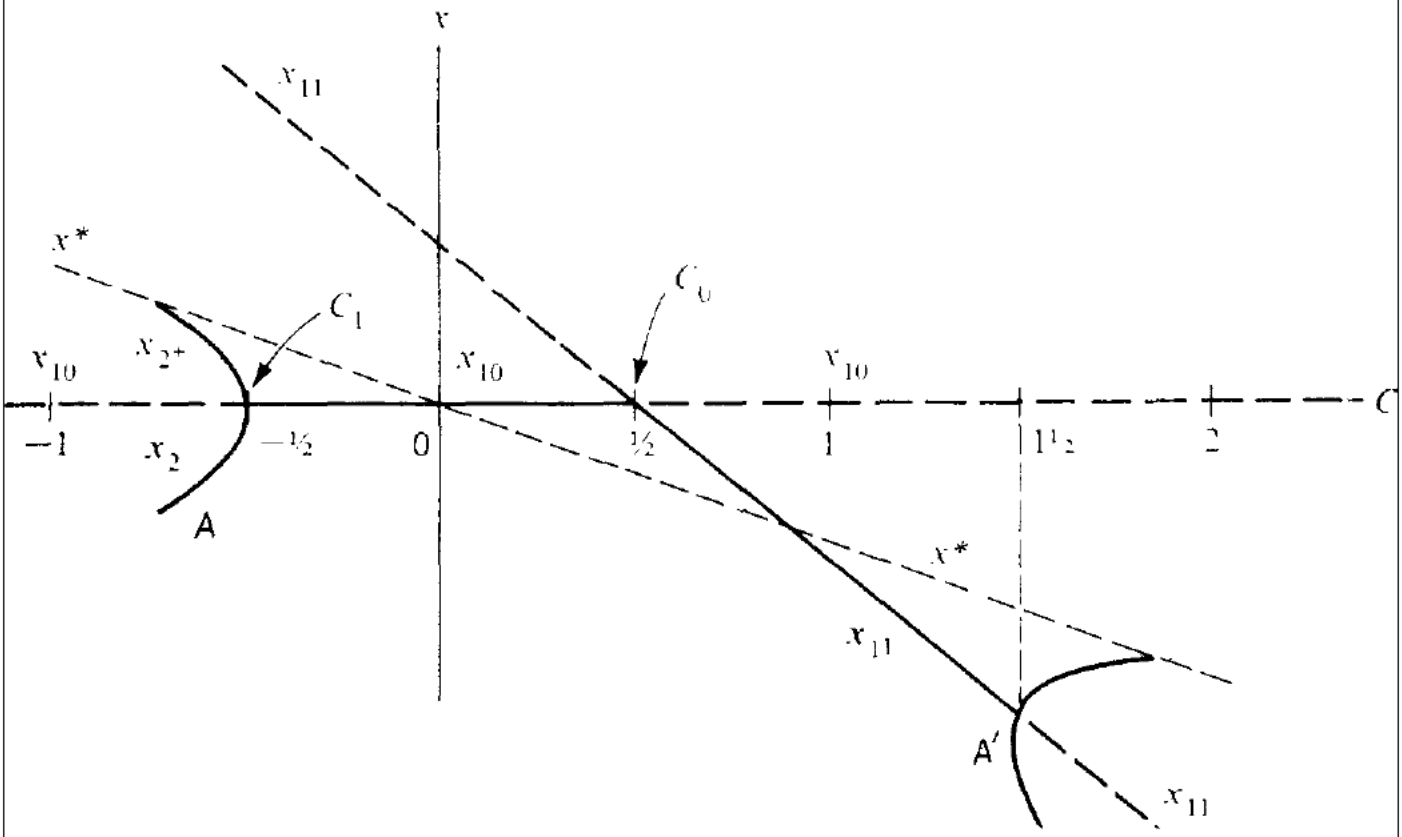


Рис. 7.12. Положение неподвижных точек x_{10}, x_{11}, x_{2+} и x_{2-} в зависимости от C.

Устойчивые неподвижные точки представлены сплошными линиями, неустойчивые — пунктирными. Показан также экстремум f при $x^* = -C/2$. A — бифуркация удвоения; A' — зеркальная бифуркация удвоения.

зависимость координат неподвижных точек от параметра C. Сплошная линия обозначает устойчивость точки, а штриховая — неустойчивость. Рождение пары устойчивых точек удвоенного периода при $C < -1/2$ является примером *бифуркации удвоения* (см. § 7.1). На рис. 7.2, *в* показана также зеркальная бифуркация удвоения, соответствующая зеркальному отображению (7.2.7).

При дальнейшем уменьшении параметра C обе неподвижные точки периода 2 становятся неустойчивыми. Поскольку в их окрестности отображение $f_2(x)$ также квадратично, следует ожидать аналогичной бифуркации, при которой возникают четыре неподвижные точки периода 4 и т. д. Означает ли это, что при любом значении параметра имеется либо устойчивое решение, либо (устойчивая) бифуркация? Оказывается, что нет. Последовательность бифуркаций удвоения периода кончается, достигая бесконечного периода при конечном значении параметра $C = C_\infty$. За этим значением лежат области хаоса.

Метод ренормализации. Для более глубокого понимания явления последовательных бифуркаций рассмотрим ренормализацию отображения с одним максимумом при переходе от одной бифуркации к следующей. Строгая теория ренормализации [83, 122], применимая к любым отображениям с одним максимумом, основана на решении некоторых функциональных уравнений. Соответствующие математические методы сложны и выходят за рамки этой монографии. Вместо этого, следуя Хеллеману [180—182], мы используем более простой, хотя и менее общий, метод локальной аппроксимации отображения с одним квадратичным максимумом. Это позволяет построить приближенную теорию ренормализации на основе алгебраических, а не функциональных уравнений. Для квадратичного отображения (7.2.4), как мы видели выше, устойчивая неподвижная точка x_{10} периода 1 возникает с уменьшением C при $C = C_0 = 1/2$, а устойчивые точки периода 2 — при $C_1 = -1/2$. Последние получаются из (7.2.18):

$$x_{2\pm} = a \pm b, \tag{7.2.21а}$$

где

$$2a = -1/2 - C, \tag{7.2.21б}$$

$$4b^2 = \left(C + \frac{1}{2}\right)\left(C - \frac{3}{2}\right), \quad b > 0. \tag{7.2.21в}$$

Подставляя

$$x = x_{2\pm} + \Delta x$$

в (7.2.4), получаем

$$\Delta x_{n+1} = d\Delta x_n + 2\Delta x_n^2,$$
$$\Delta x_{n+2} = e\Delta x_{n+1} + 2\Delta x_{n+1}^2,$$

где

$$d = 2C + 4x_{2+}, \tag{7.2.22}$$

$$e = 2C + 4x_{2-}, \tag{7.2.23}$$

и начальные условия выбираются таким образом, чтобы при четных n величина Δx была близка к x_{2+}, а при нечетных — к x_{2-}. Исключая Δx_{n+1} и удерживая члены по Δx до квадратичных включительно, получаем для четных n

$$\Delta x_{n+2} = de\Delta x_n + 2(e + d^2)\Delta x_n^2. \tag{7.2.24}$$

Путем изменения масштаба

$$x' = \alpha\Delta x \tag{7.2.25}$$

приводим (7.2.24) к виду

$$x'_{n+2} = 2C' x'_n + 2(x'_n)^2, \tag{7.2.26}$$

где

$$C' = de/2 = -2C^2 + 2C + 2, \tag{7.2.27}$$

$$\alpha = e + d^2 = 16b^2 - 12b, \tag{7.2.28}$$

а b определяется согласно (7.2.21в). Так как (7.2.26) имеет тот же самый вид, что и исходное отображение (7.2.4), его неподвижные точки испытывают бифуркацию удвоения периода при $C' = -1/2$. С учетом (7.2.27) это значение соответствует

$$C = C_2 = \frac{1-\sqrt{6}}{2} \approx -0{,}72474,$$

при котором возникают неподвижные точки периода 4. Из (7.2.21) следует, что $x_{2+} \approx 0{,}466$ и $x_{2-} \approx -0{,}241$ при $C = C_2$. Отметим, что точка x_{2+} лежит вблизи экстремума f при $x^* = -C/2$; этот факт мы используем ниже при нахождении закона подобия (7.2.36).

Последовательность бифуркаций сходится к предельному значению $C' = C = C_\infty$, которое находится из (7.2.27):

$$-2C_\infty^2 + 2C_\infty + 2 = C_\infty,$$

отсюда

$$C_\infty = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \approx -0{,}781. \tag{7.2.29}$$

Численное моделирование дает $C_\infty \approx -0{,}78497$, что находится в хорошем согласии с результатом ренормализации.

Скорость сходимости C к C_∞ можно приближенно найти, предполагая, что асимптотически сходимость происходит по закону [1])

$$C_k \approx C_\infty + A\delta^{-k}. \tag{7.2.30}$$

Подставляя это выражение в (7.2.27) и замечая, что k-я бифуркация по C' соответствует $(k+1)$-й по C, т. е.

$$C_k = -2C_{k+1}^2 + 2C_{k+1} + 2,$$

получаем

$$\delta = -4C_\infty + 2 = 1 + \sqrt{17} \approx 5{,}12. \tag{7.2.31}$$

Численное решение точного уравнения ренормализации, найденное впервые Фейгенбаумом [122], дает для отображения с одним квадратичным максимумом $\delta \approx 4{,}6692$. Закон подобия (7.2.30) можно представить в виде

$$\frac{C_{k+1} - C_k}{C_k - C_{k-1}} = \frac{1}{\delta}. \tag{7.2.32}$$

Постоянная δ не зависит от выбора параметра. Действительно,

[1]) Это предположение следует из (7.2.27); см. ниже.— *Прим. ред.*

введем новый параметр $P = g(C)$. Считая, что g — обратимая функция, разложим $P(C)$ вблизи C_∞:

$$P_k - P_\infty = g'(C_\infty)(C_k - C_\infty). \qquad (7.2.33)$$

Решая это уравнение относительно C_k и подставляя решение в (7.2.32), находим универсальное соотношение

$$\frac{P_{k+1} - P_k}{P_k - P_{k-1}} = \frac{1}{\delta}.$$

Фактически из точной теории ренормализации следует, что δ — универсальная константа для всех отображений с одним квадратичным максимумом. Принимая, что асимптотический закон (7.2.30) справедлив и для $k = 0$ и $k = 1$, получаем полезную оценку для предельного значения параметра (точки сгущения):

$$P_\infty = P_0 + \frac{\delta}{\delta - 1}(P_1 - P_0) = P_0 + 1{,}24(P_1 - P_0), \qquad (7.2.34)$$

где использовано приближенное значение (7.2.31) для δ.

Наконец, перейдем к параметру подобия α, входящему в (7.2.25). Из (7.2.28) и (7.2.21в) при $C = C_\infty$ [см. (7.2.29)]:

$$\alpha = 16b^2 - 12b \approx -2{,}24. \qquad (7.2.35)$$

Точная теория ренормализации дает $\alpha \approx -2{,}5029$. Параметр α определяет (асимптотически) изменение масштаба x при последовательных бифуркациях. Иначе говоря, при увеличении в α раз вблизи $x^* = -C/2$ очередная бифуркация будет выглядеть точно так же, как и предыдущая. В частности, расстояние между неподвижными точками при последовательных бифуркациях вблизи x^* подчиняется закону подобия

$$\frac{x_{k+} - x_{k-}}{x_{k+1,+} - x_{k+1,-}} = \alpha. \qquad (7.2.36)$$

Это соотношение справедливо для ветви, идущей от x_{k+}.

Поскольку f локально квадратичная функция x, то для первых итераций точек вблизи x^* масштаб изменяется как α^2. Отсюда

$$\frac{f(x_{k+}) - f(x_{k-})}{f(x_{k+1,+}) - f(x_{k+1,-})} = \alpha^2. \qquad (7.2.37)$$

Полученное соотношение выполняется для значений x_k на ветви, идущей от x_{k-}. Таким образом, для половины неподвижных точек периода 2^k масштаб изменяется как α, а для остальных — как α^2 [см. (7.2.38)].

Рис. 7.13 поясняет это поведение. На рис. 7.13, *а* отрезок Δx_1 вблизи минимума отображения переходит в отрезок $|\Delta x_2| \propto (\Delta x_1)^2$. Однако затем Δx_2 переходит в Δx_3 снова вблизи минимума, причем $|\Delta x_3| \propto |\Delta x_2|$. При каждом отображении знак Δx изменяется. На рис. 7.13, *б* показана полная структура неподвижных точек

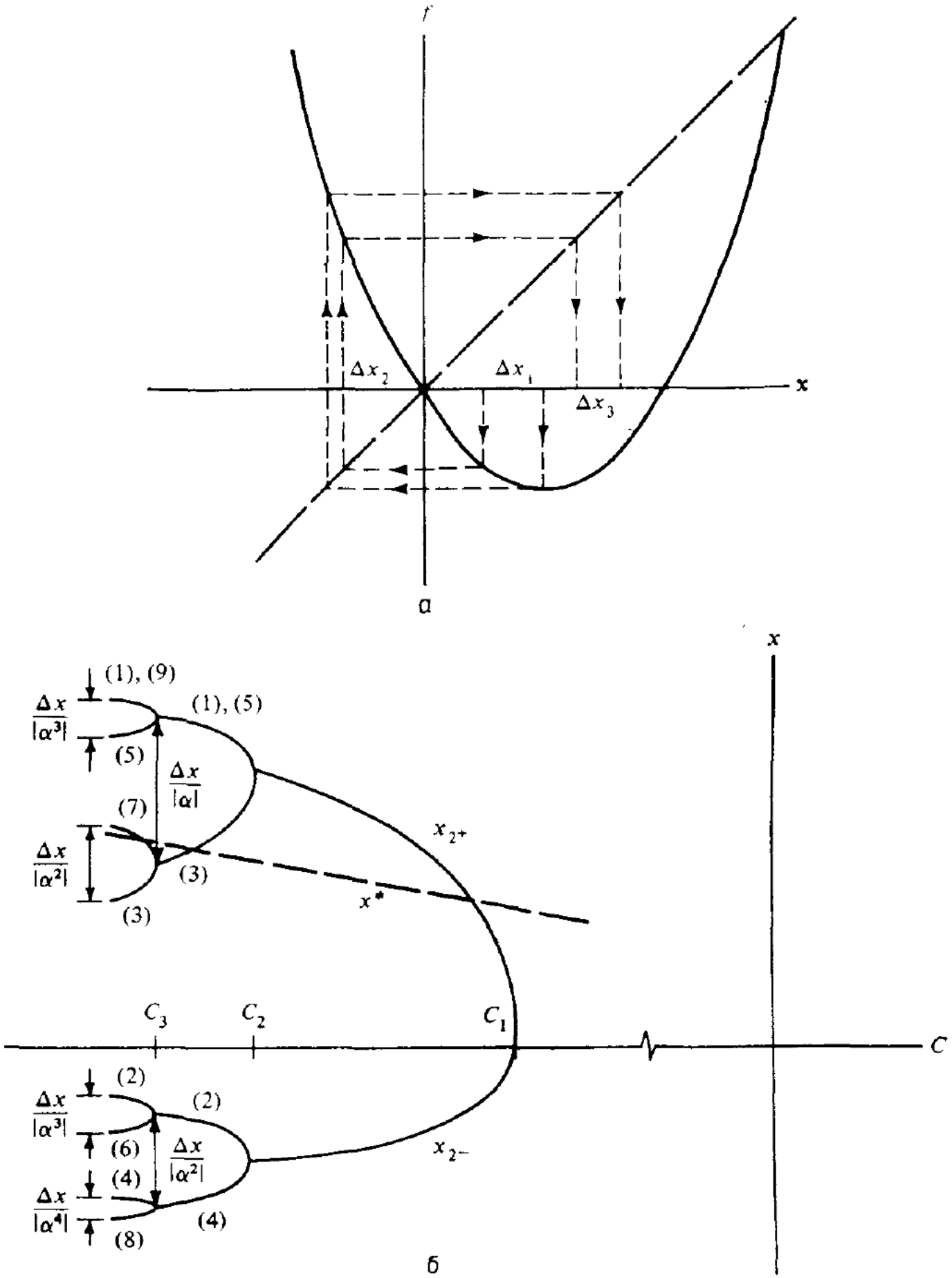


Рис. 7.13. Иллюстрация масштабного преобразования по x для квадратичного отображения.

а — изменение начального Δx_1 вблизи экстремума; $\Delta x_2 \sim (\Delta x_1)^2$, но $\Delta x_3 \sim \Delta x_2$; *б* — три первые бифуркации удвоения; порядок движения по траектории периода 4 и 8 показан в круглых скобках.

для трех первых бифуркаций. Цифры в круглых скобках показывают последовательность движения для траекторий с периодом 4 и 8, начиная с верхней точки. Отметим также, что расстояния между соответствующими ветвями, идущими от x_{k+} и от x_{k-}, отличаются в α раз.

При любом обратимом преобразовании от x к новой переменной y соотношения (7.2.36) и (7.2.37) сохраняются. Следовательно,

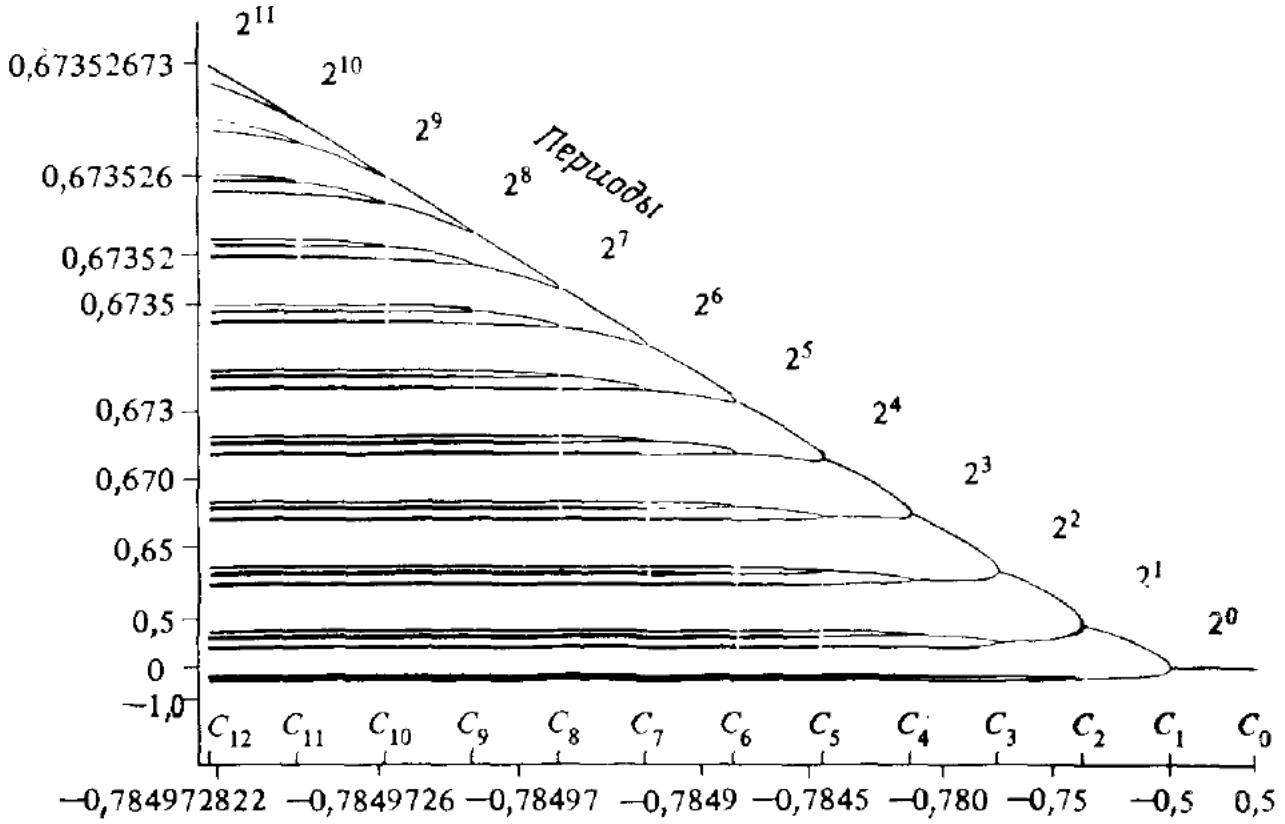


Рис. 7.14. Последовательность бифуркаций удвоения периода для квадратичного отображения в двойном логарифмическом масштабе (по данным работы [417]).

По вертикальной оси отложены неподвижные точки x_k аттрактора периода 2^k, который образуется при $C = C_k$ из аттрактора периода 2^{k-1}. Видна неизменность скорости сходимости по C и по x (константы δ и α).

константа α также является универсальной, в том же смысле, что и δ.

Помимо последовательности бифуркаций, при уменьшении C имеется зеркальная последовательность бифуркаций согласно (7.2.6) — (7.2.8). Для нее C увеличивается, начиная с 1/2, и стремится к своей точке сгущения, которая определяется из (7.2.8) и (7.2.29):

$$\overline{C}_\infty = (3+\sqrt{17})/4 \approx 1{,}7808.$$

Для отображения (7.2.5) зеркальная последовательность бифуркаций приходится как раз на обычно рассматриваемый интервал $0<\mu<4$. Используя (7.2.8) и соотношение $\overline{\mu} = 2\overline{C}$, находим, что

первая бифуркация наступает при $\bar{\mu}_1 = 3$, а точка сгущения равна

$$\bar{\mu}_\infty = (3+\sqrt{17})/2 \approx 3{,}5616,$$

что хорошо согласуется с численным значением $\mu_\infty = 3{,}5700$.

Существование бифуркаций удвоения очень большого периода демонстрируется на рис. 7.14, полученном с помощью численного моделирования квадратичного отображения [417]. Зависимость x_k от C отложена в двойном логарифмическом масштабе. Ясно видна постоянная скорость сходимости по C и по x (с параметрами δ и α соответственно).

Спектральные свойства. При экспериментальном исследовании сложного движения широко используется его спектр Фурье. Ниже мы следуем анализу Фейгенбаума [123], который получил универсальный спектр одномерного отображения вблизи точки сгущения C_∞.

Как известно, спектр периодического движения дискретный. Когда происходит бифуркация удвоения периода, в спектре появляются субгармоники основной частоты отображения. Для дальнейшего анализа введем непрерывное время t и обозначим через $x^{(n)}(t)$ решение после n-й бифуркации, а через T_n — его период. Чтобы найти спектр, нам нужно общее соотношение для положения аттракторов. Из рис. 7.13, *б* и пояснений в тексте следует, что ветви бифуркаций делятся на две группы, расстояния между которыми удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$x^{(n+1)}(t) - x^{(n+1)}(t+T_n) \approx$$
$$\approx \left[x^{(n)}(t) - x^{(n)}(t+T_{n-1})\right] \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\alpha} \\ \dfrac{1}{\alpha^2} \end{Bmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \leqslant t < T_{n-1}, \\ T_{n-1} \leqslant t < T_n, \end{matrix} \tag{7.2.38}$$

где $t = 0$ соответствует верхней неподвижной точке.

Для l-й фурье-амплитуды имеем

$$X_l^{(n+1)} = \frac{1}{T_{n+1}} \int\limits_0^{T_{n+1}} dt x^{(n+1)}(t) \exp\left(\frac{-2\pi i l t}{T_{n+1}}\right).$$

С помощью сдвига на половину периода интегрирование можно провести по периоду T_n:

$$X_l^{(n+1)} = \frac{1}{2T_n} \int\limits_0^{T_n} dt \left[x^{(n+1)}(t) + (-1)^l x^{(n+1)}(t+T_n)\right] \exp\left(\frac{-\pi i l t}{T_n}\right). \tag{7.2.39}$$

Для четных $l = 2k$ при $n \gg 1$

$$x^{(n+1)}(t) \approx x^{(n+1)}(t + T_n) \approx x^{(n)}(t)$$

[см. (7.2.38) и рис. 7.13, *б*], и из (7.2.39) получаем

$$X_{2k}^{(n+1)} \approx X_k^{(n)}. \tag{7.2.40}$$

Это означает, что фурье-амплитуда для данной частоты остается неизменной при всех последующих бифуркациях. Для нечетных $l = 2k + 1$ подстановка (7.2.38) в (7.2.39) дает

$$X_l^{(n+1)} = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^{T_{n-1}} F(t) \frac{dt}{2T_n} + \frac{1}{\alpha^2} \int\limits_{T_{n-1}}^{T_n} F(t) \frac{dt}{2T_n},$$

$$F(t) = \left[x^{(n)}(t) - x^{(n)}(t + T_{n-1})\right] \exp\left(\frac{-\pi i l t}{T_n}\right).$$

Сдвигая пределы во втором интеграле, имеем

$$X_l^{(n+1)} = \frac{1}{2\alpha}\left[1 + i\frac{(-1)^k}{\alpha}\right] \int\limits_0^{T_{n-1}} \frac{dt}{2T_{n-1}} \left[x^{(n)}(t) - x^{(n)}(t + T_{n-1})\right] \times$$

$$\times \exp\left(-\pi i \frac{l}{2} \frac{t}{T_{n-1}}\right).$$

Подставляя сюда разложение Фурье

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k'} X_{k'}^{(n)} \exp\left(\frac{2\pi i k' t}{T_n}\right),$$

получаем рекуррентное соотношение

$$X_{2k+1}^{(n+1)} = -\frac{1}{2\alpha}\left(1 - i(-1)^k\right)\left(1 + \frac{i}{\alpha}(-1)^k\right) S, \tag{7.2.41}$$

де

$$S = \frac{1}{\pi i} \sum_{k'} \frac{1}{(2k' + 1) - \frac{1}{2}(2k + 1)} X_{2k'+1}^{(n)}. \tag{7.2.42}$$

В пределе больших n, полагая $2k + 1 = \xi$ и $2k' + 1 = \xi'$ и заменяя сумму в (7.2.42) интегралом по ξ', находим

$$|S| \approx \frac{1}{2}\left|X^{(n)}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|. \tag{7.2.43}$$

Поэтому для амплитудного спектра вблизи точки сгущения выполняется универсальный закон подобия [1]):

$$\left| X^{(n+1)}(\xi) \right| = \gamma^{-1} \left| X^{(n)} \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|, \tag{7.2.44}$$

где

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{4|\alpha|} \left[2 (1 + \alpha^{-2}) \right]^{1/2}. \tag{7.2.45}$$

Для приближенного значения (7.2.35) для α имеем $\gamma = 5{,}79$; точное значение $\alpha = -2{,}5029$ дает $\gamma = 6{,}57$.

Согласно (7.2.44), чтобы получить амплитуду новой гармоники (вдали от точки бифуркации), появившейся в результате $(n+1)$-й бифуркации, нужно взять уменьшенное в 6,57 раза значение амплитуды гармоники, появившейся в результате n-й бифуркации. Это теоретическое предсказание подтверждается экспериментально (см. работу [123] и рис. 7.33). Мы обсудим эти экспериментальные данные в § 7.4.

Другие периодические траектории. При уменьшении параметра C от C_0 до C_∞ происходит бесконечное число бифуркаций удвоения. При $C < C_\infty$ также имеются области периодического движения. Периодические траектории рождаются здесь парами (устойчивая и неустойчивая) в результате тангенциальной бифуркации. В качестве примера [2]) рождения траектории с периодом 3 на рис. 7.15 отложена зависимость

$$f_3(x) = f(f(f(x)))$$

для $f(x)$ согласно (7.2.4б). Неподвижные точки периода 3 удовлетворяют уравнению

$$x_3 = f_3(x_3).$$

Для C незначительно больше $C_0^{(3)}$ это уравнение имеет только два

---

[1]) Приведенный вывод (взятый из работы [123], см. также [524]) является ошибочным. Во-первых, в данном случае нельзя заменять сумму интегралом, а во-вторых, неявно предполагаемая плавная зависимость комплексной амплитуды $X_{2k'+1}^{(n)}$ от k' явно несправедлива, хотя бы из-за фазового множителя в (7.2.41). Более естественным является предположение о плавной зависимости модуля амплитуды и случайности ее фазы ввиду перехода при $n \to \infty$ к хаосу с непрерывным спектром. Тогда из (7.2.41) и (7.2.42) можно получить $\gamma = 2\alpha^2 (1 + \alpha^2)^{-1/2} = \sqrt{2}\beta \approx 4{,}65$ [см. (7.2.67б)]. Точная теория с использованием универсального отображения Фейгенбаума дает для среднего по спектру параметра подобия значение $\langle\gamma\rangle = 4{,}578\ldots$ [540]. Небольшое различие между этими значениями объясняется, по-видимому, приближенным характером исходного закона подобия (7.2.38). Соответственно изменяется и параметр $\beta = 3{,}2375\ldots$ в (7.2.67б). Последнее значение приведено без объяснений в работе [205].— *Прим. ред.*

[2]) Согласно работе [261], «период 3 приводит к хаосу» (при другом значении параметра). Этот результат вытекает из более ранней теоремы Шарковского [526] (см. также [547], с. 276).— *Прим. ред.*

(действительных) корня, которые дают неподвижные точки периода 1 (рис. 7.15, *а*). Если же $C<C_0^{(3)}$, то уравнение имеет шесть корней (рис. 7.15, *б*), которые соответствуют двум разным траекториям с периодом 3. Легко показать, что одна траектория устойчива (рис. 7.15, *б*, темные кружки), а другая — неустойчива (светлые кружки). Критическое значение параметра $C_0^{(3)}$, при котором рождаются эти траектории, равно

$$C_0^{(3)}=(1-\sqrt{8})/2\approx-0{,}9142.$$

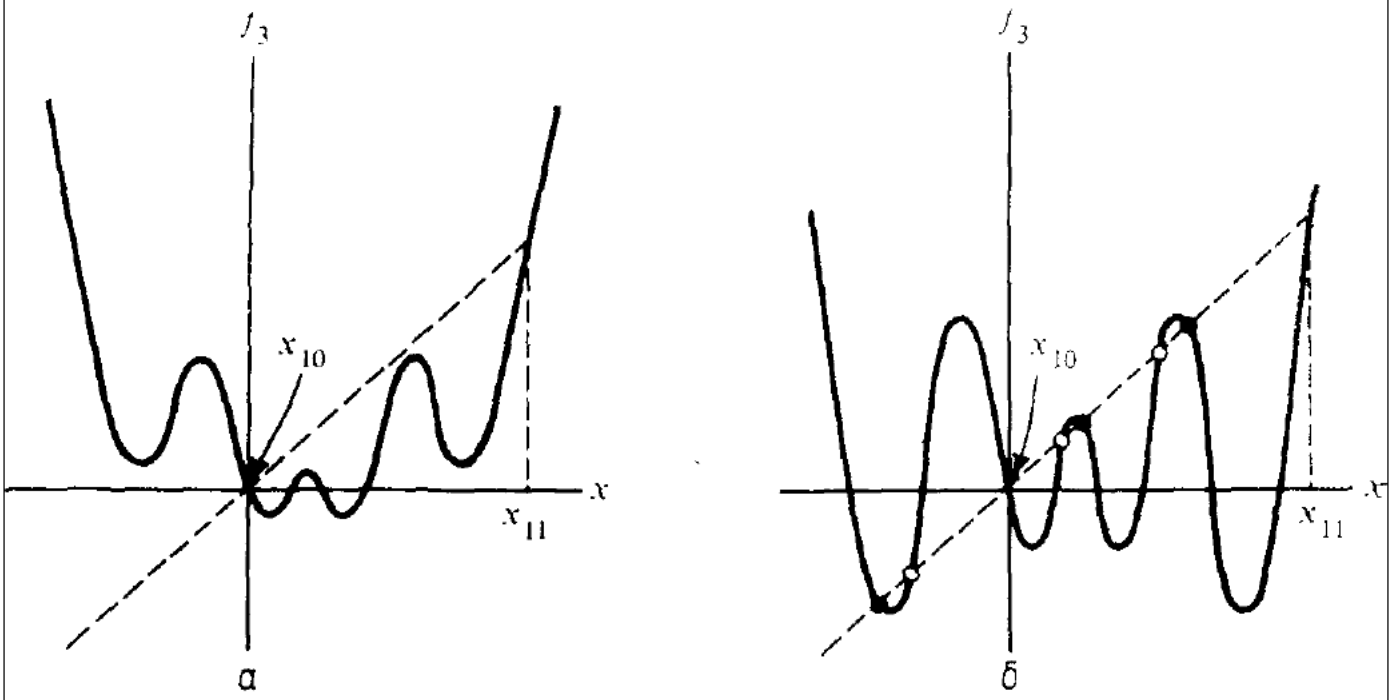


Рис. 7.15. Рождение пары траекторий периода 3 при тангенциальной бифуркации.

Темные кружки показывают устойчивую траекторию; светлые — неустойчивую: *а*) $C>C_0^{(3)}$, *б*) $C<C_0^{(3)}$. Пунктирная прямая $f_3=x$.

Поскольку вблизи неподвижных точек отображение f_3 локально квадратично, то можно ожидать, что при дальнейшем уменьшении C будут возникать бифуркации удвоения с периодами 3, 6, 12, 24 . . . . Их точку сгущения $C_\infty^{(3)}$ можно найти с помощью описанной выше ренормализации или же путем численного моделирования. В последнем случае $C_\infty^{(3)}\approx-0{,}92475$. Существуют и зеркальные бифуркации удвоения при $\overline{C}=1-C$.

Точно так же с помощью отображений f_4, f_5, f_6, . . . можно найти устойчивые траектории с основным периодом $n=4, 5, 6, \ldots$. Для каждой из этих траекторий существует своя последовательность бифуркаций удвоения с начальной точкой $C_0^{(n)}$ и точкой сгущения $C_\infty^{(n)}$. Порядок, в котором появляются основные периоды при уменьшении параметра, является универсальным для всех отображений с одним квадратичным максимумом. Например, первые шесть пе-

риодов упорядочены при уменьшении C следующим образом: 1, 6, 5, 3, 5, 6, 4, 6, 5, 6. Можно также найти и их общее число [296]. Например, имеются 202 основные траектории с периодом до 11 включительно; их упорядочение по параметру исследовано Метрополисом и др. [300]. Недавно Гейзал и Нирветберг [151] показали, что для всех этих траекторий ренормализация имеет универсальную структуру.

7.2в. Хаотическое движение

Предельные циклы занимают конечную часть интервала по параметру. Для остальных значений параметра движение неустойчиво и плотно покрывает конечный интервал по x при почти всех началь-

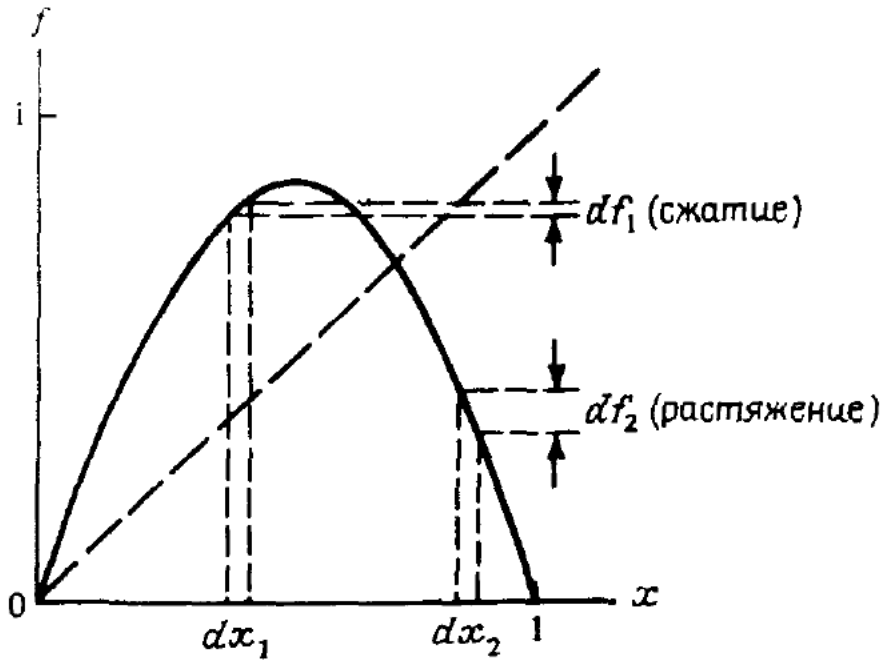


Рис. 7.16. Показатель Ляпунова равен среднему значению $\ln|df/dx|$ вдоль траектории.

ных x_0, а близкие траектории расходятся экспоненциально. Такое движение получило название хаотического (см., например, [261, 297]). При его исследовании можно использовать некоторые методы, описанные в гл. 5 для гамильтоновых отображений. Особое значение имеет показатель Ляпунова σ и *равновесное инвариантное распределение* $P(x)$.

Показатель Ляпунова. Для одномерного отображения имеется единственный показатель Ляпунова [см. (5.2.8)]:

$$\sigma(x_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln\left|\frac{df}{dx_i}\right|. \tag{7.2.46}$$

Значение σ положительно (см. рис. 7.16), если среднее по траектории от $|f'|$ больше 1. За исключением множества меры нуль, σ не зависит от выбора начального значения x_0. При $\sigma > 0$ движение хаотическое, а при $\sigma < 0$ существует предельный цикл. Зависимость σ от параметра C является обычно сложной. На рис. 7.17 представ-

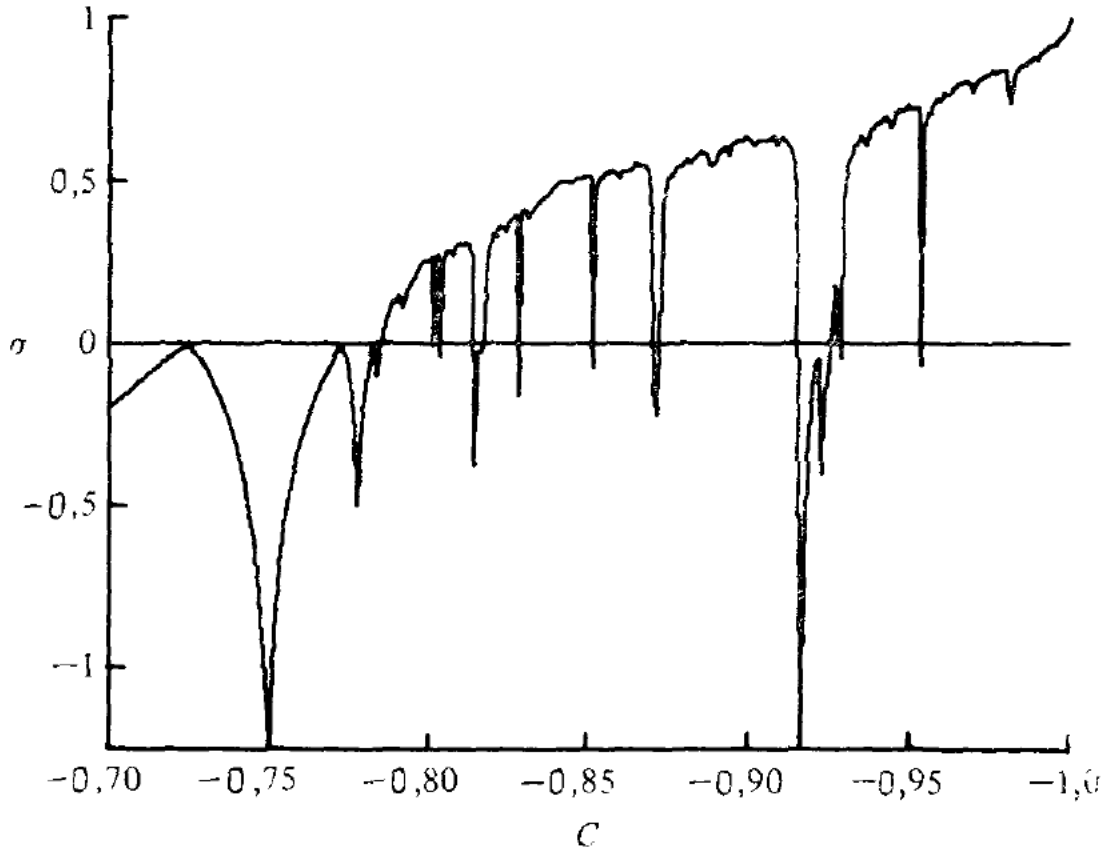


Рис. 7.17. Зависимость показателя Ляпунова σ от параметра C для квадратичного отображения (по данным работы [368]).

Для $\sigma > 0$ движение хаотическое, а для $\sigma < 0$ — периодическое. Сглаженная кривая построена по 300 точкам с равномерным шагом по C.

лен пример такой зависимости [368], полученной численным путем для квадратичного отображения. Значения σ определялись по формуле (7.2.46) с $N = 10^5$ (число итераций) для каждой из 300 равномерно расположенных по C точек. Ясно видны относительно широкие интервалы по C с $\sigma < 0$, которые отвечают периодическим движениям с небольшим периодом. Для движения с бóльшим периодом соответствующие им интервалы по C становятся меньше расстояния между точками на рисунке и потому не видны. Хьюберман и Рудник [204] показали, что вблизи критического значения C_∞ для хаотического движения $\sigma \propto |C - C_\infty|^\eta$, где $\eta = \ln 2/\ln \delta \approx \approx 0{,}4498$.

Показатель Ляпунова не зависит от (обратимой) замены переменных [323]. Действительно, пусть

$$\bar{x} = g(x), \tag{7.2.47}$$

где $g' \neq 0$. Тогда исходное отображение

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{7.2.48}$$

перейдет в отображение

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{f}(\bar{x}_n) \tag{7.2.49}$$

с показателем Ляпунова

$$\bar{\sigma} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln \left| \frac{d\bar{x}_{i+1}}{d\bar{x}_i} \right|. \tag{7.2.50}$$

Согласно (7.2.47), получим

$$\frac{d\bar{x}_{i+1}}{d\bar{x}_i} = \frac{(dg/dx_{i+1})\, dx_{i+1}}{(dg/dx_i)\, dx_i}, \tag{7.2.51}$$

откуда $\bar{\sigma} = \sigma$.

Инвариантные распределения. Будем говорить, что $P(x)$ является инвариантным распределением для отображения T, если

$$P(x) = TP(x). \tag{7.2.52}$$

Другие названия — *инвариантная мера* [1]) или *распределение вероятности*. Примем, далее, что $P(x)$ нормировано на единицу:

$$\int P(x)\, dx = 1. \tag{7.2.53}$$

В общем случае отображение имеет много инвариантных распределений. Из них выделенным является равновесное распределение, которое получается итерированием отображения и для которого среднее по времени равно фазовому среднему. Для предельного цикла периода n распределение дискретно и представляет собой сумму δ-функций в неподвижных точках с коэффициентом $1/n$. Для хаотического движения распределение $P(x)$ может быть разрывным, однако в типичном случае имеются конечные интервалы по x с ненулевым $P(x)$.

Численно $P(x)$ можно получить из (7.2.52). Для отображения с одним максимумом в силу сохранения «числа траекторий» имеем

$$P(x)\, dx = P(x_1)\, dx_1 + P(x_2)\, dx_2, \tag{7.2.54}$$

где точки x_1, x_2 — прообразы точки x (рис. 7.18). Записывая $dx/dx_1 = |df/dx|_{x_1}$ и т. д., получаем

$$P(x) = \frac{P(x_1)}{|df/dx|_{x_1}} + \frac{P(x_2)}{|df/dx|_{x_2}}. \tag{7.2.55}$$

---

[1]) Существование инвариантной меры (сосредоточенной на аттракторе), позволяющее распространить эргодическую теорию на диссипативные системы, было доказано для широкого класса динамических систем Боголюбовым и Крыловым (см. [447], т. 1, с. 411). Инвариантная мера единственна, если существует только один аттрактор (одна «эргодическая компонента» движения (ср. п. 5.2а), или «строгая эргодичность» [486], с. 43). Равновесным распределением ниже в основном тексте называется инвариантное распределение, сосредоточенное на одном аттракторе. Для него временные и фазовые средние совпадают в пределах области притяжения этого аттрактора.— *Прим. ред.*

Аналитически это функциональное уравнение решается в редких случаях. Однако его можно решить численно по следующей схеме:

а) выбираем некоторое начальное $P_i = P_1(x)$;

б) вычисляем P_{i+1} по (7.2.55) с P_i в правой части;

в) повторяем «б» до получения достаточной сходимости.

Этот метод иллюстрируется на рис. 7.19 [368] для отображения (7.2.5) с $\mu = 4$. Показаны первые три итерации P_i с начальным распределением $P_1(x) = 1$. В данном случае имеет место быстрая сходимость к инвариантному распределению

$$P(x) = \frac{1}{\pi}[x(1-x)]^{-1/2},$$

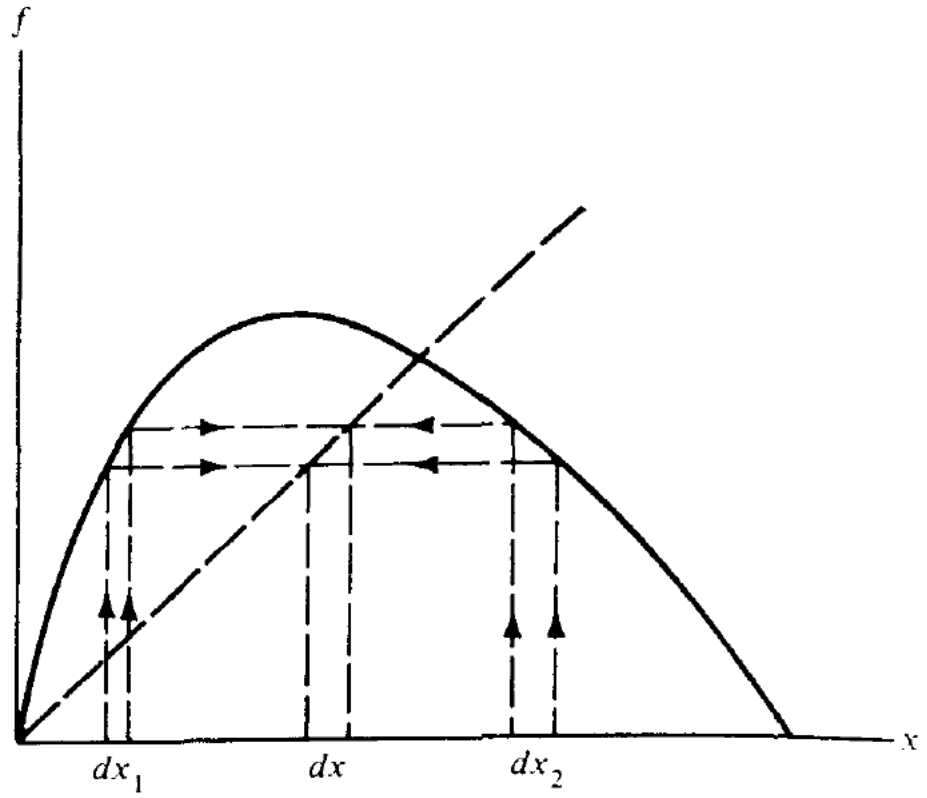


Рис. 7.18. Построение инвариантного распределения $P(x)$.
«Число траекторий» на отрезке dx равно числу траекторий, пришедших из «прообразов» dx_1 и dx_2.

которое будет получено аналитически ниже. Для $\mu = 3{,}8$ и $\mu = 3{,}825$ описанный метод дает инвариантные распределения, показанные на рис. 7.20. В этих случаях движение, по-видимому, также является хаотическим в некотором интервале по x. Знание инвариантного распределения позволяет заменять усреднение по времени усреднением по x. Например, можно вычислять показатель Ляпунова по формуле:

$$\sigma = \int dx P(x) \ln\left|\frac{df}{dx}\right|. \qquad (7.2.56)$$

При обратимой замене переменной $\bar{x} = g(x)$ новое инвариантное распределение получается из условия

$$\bar{P}(\bar{x})\, d\bar{x} = P(x)\, dx. \qquad (7.2.57)$$

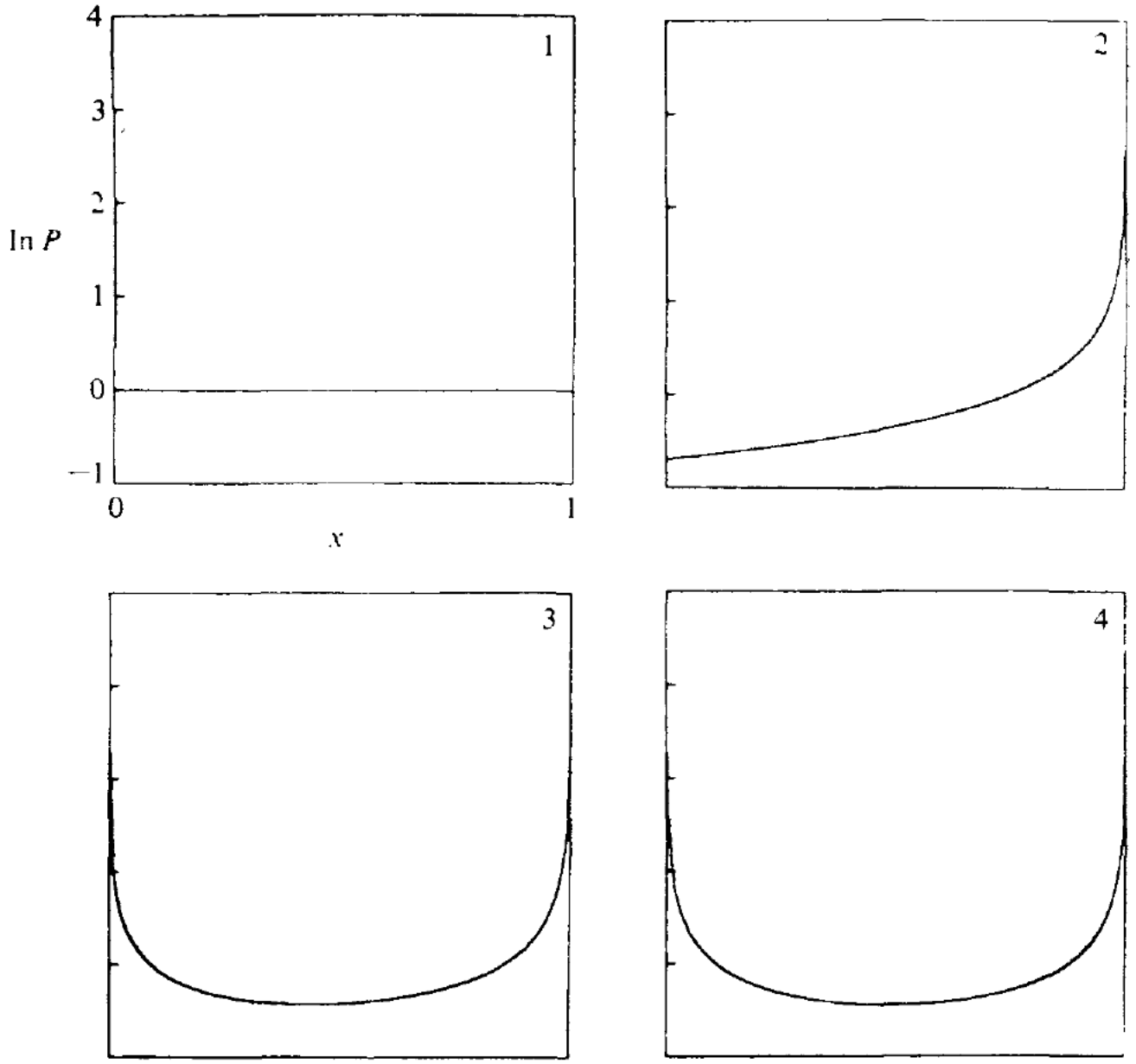


Рис. 7.19. Численное определение инвариантного распределения $P(x)$ для отображения (7.2.5) с $\mu = 4$ (по данным работы [368]).
Показано начальное распределение (1) и его первые три итерации.

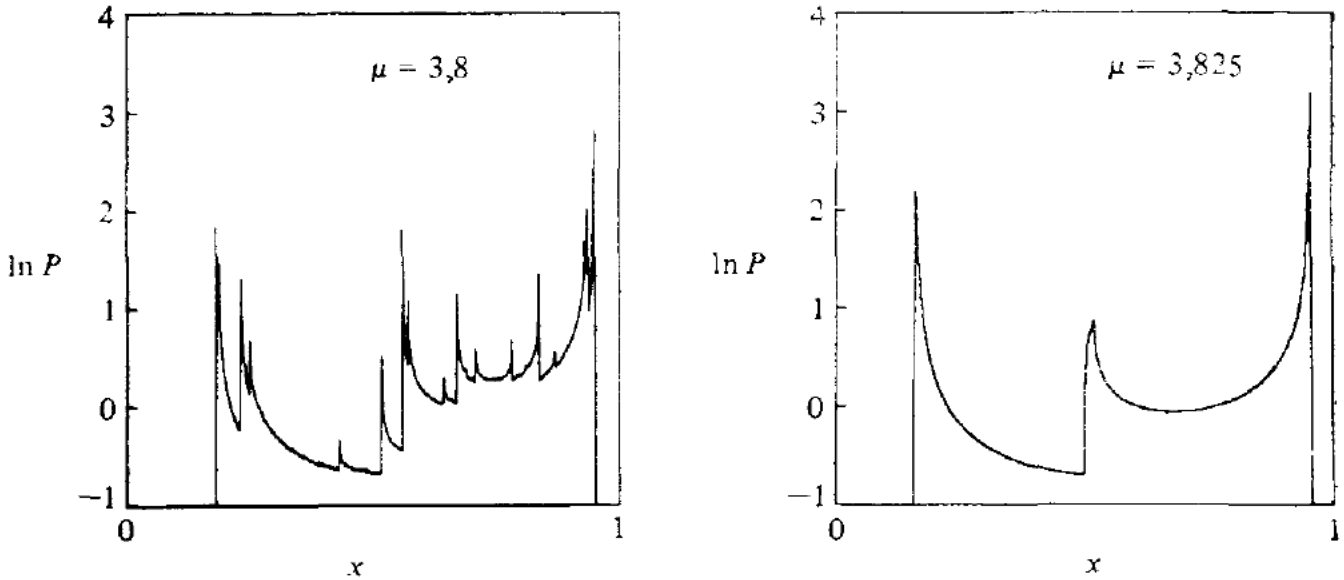


Рис. 7.20. Численно найденное инвариантное распределение $P(x)$ для двух значений μ отображения (7.2.5) (по данным работы [368]).
Видны разрывы функции $P(x)$ и обратные бифуркации при увеличении μ.

Треугольное отображение[1]). В качестве примера рассмотрим простое «треугольное» отображение (рис. 7.21). Оно имеет единственный максимум $f(1/2) = a$, но не относится к квадратичным. Производная f' равна $+2a$ в левой части и $-2a$ в правой части отображения. Ясно, что движение является хаотическим для $a > 1/2$, поскольку все траектории расходятся экспоненциально (см. рис. 7.16). Инвариантное распределение находится из (7.2.55):

$$P(x) = \frac{1}{2a}\left[P\left(\frac{x}{2a}\right) + P\left(1 - \frac{x}{2a}\right)\right].$$

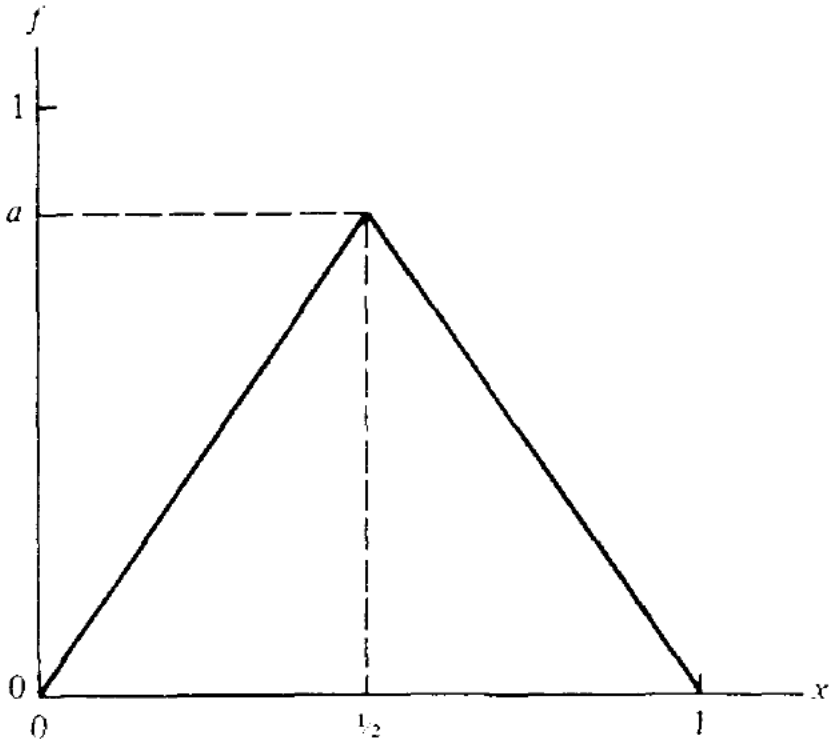


Рис. 7.21. Симметричное треугольное отображение.

Для $a = 1$ имеется очевидное решение $P(x) = 1$. Показатель Ляпунова равен (7.2.56):

$$\sigma = \int_0^1 dx \ln 2 = \ln 2.$$

Поскольку $\sigma > 0$, движение является хаотическим. Рассмотрим теперь отображение

$$f(x) = 4x(1 - x). \tag{7.2.58}$$

Введем новую переменную

$$\bar{x} = \left(\frac{2}{\pi}\right) \arcsin\left(\sqrt{x}\right), \tag{7.2.59}$$

[1]) В оригинале — tent map (отображение, похожее на палатку).—*Прим. перев.*

тогда (7.2.58) перейдет в треугольное отображение с $a = 1$:

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{cases} 2\bar{x}, & 0 < \bar{x} < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2\bar{x}, & \frac{1}{2} < \bar{x} < 1. \end{cases} \tag{7.2.60}$$

Из (7.2.57) с $\bar{P}(\bar{x}) = 1$ получим инвариантное распределение для отображения (7.2.58):

$$P(x) = \frac{d\bar{x}}{dx} = \frac{1}{\pi}[x(1-x)]^{-1/2}, \tag{7.2.61}$$

которое можно сравнить с численными данными на рис. 7.19. Показатель Ляпунова для отображения (7.2.58) равен

$$\sigma = \frac{31}{\pi}\int_0^1 \frac{\ln|4(1-2x)|}{[x(1-x)]^{1/2}}\,dx = \ln 2.$$

Отметим, что отображения (7.2.58) и (7.2.60) имеют одинаковую величину σ, поскольку она инвариантна относительно преобразования переменной. Соответственно любое обратимое преобразование квадратичного отображения (7.2.4) сохраняет функцию $\sigma(C)$, показанную на рис. 7.17.

Для отображения (7.2.58) [и «зеркального» квадратичного отображения (7.2.4) с $C = -1$] точное решение имеет вид

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2^{n+1}\varphi_0) = \sin^2(2^n\varphi_0), \tag{7.2.62}$$

где φ_0 определяется начальным условием x_0. Статистические свойства отображения (7.2.58) исследовались в работе [416]. Было показано также, что движение является эргодическим и перемешивающим с экспоненциальной расходимостью близких траекторий [1]).

Обратные бифуркации хаотического движения. При изменении параметра C квадратичного отображения (7.2.4) от $C_0 = 1/2$ до $C_\infty = -0{,}78497\ldots$ возникает «дерево» бифуркаций, показанное на рис. 7.14. Какова природа движения для $C < C_\infty$?

Эта область исследовалась Лоренцем [284], Колле и Экманом [82] и Хеллеманом [182], ее качественная структура представлена на рис. 7.22. Точки показывают x_n в стационарном режиме ($1000 < n < 4000$) для разных значений параметра C. Ясно видны полосы с хаотическим движением (при $C < C_\infty$). При уменьшении C от значения $C = C_\infty$ эти полосы сливаются и испытывают обратные бифуркации в точках $C = C_n^*$. Видны также бифуркации предель-

[1]) Это вытекает, в частности, из свойств более простого отображения $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n$, mod 2π для фазы в (7.2.62) (см. конец п. 5.2в).—*Прим. ред.*

ных циклов более длинного основного периода 6, 5 и 3, «разрезающие» хаотическую область. Для обратных бифуркаций хаотических полос выполняется закон подобия с теми же константами δ и α, что и для бифуркаций предельных циклов при $C > C_\infty$. Эти результаты Гроссмана и Томае [170] можно получить также из описанной в п. 7.2б приближенной теории ренормализации [182].

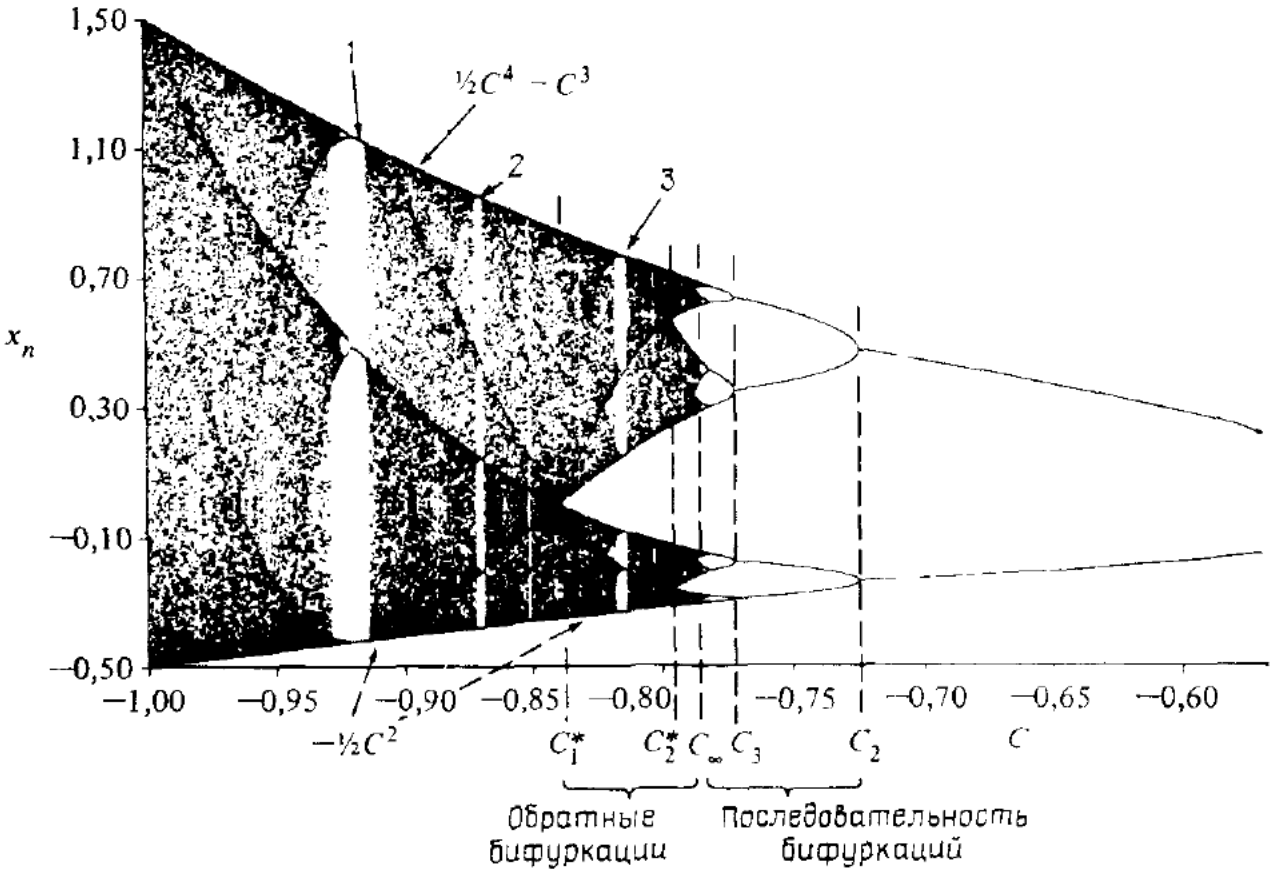


Рис. 7.22. Численное моделирование последовательности обратных бифуркаций удвоения для квадратичного отображения (по данным работы [82]). Для каждого значения C отложены 3000 значений x_n ($1000 < n < 4000$). Видны полосы хаотического движения для $C < C_\infty$, которые сливаются при $C = C_k^*$. Отмечены интервалы (по C) предельных циклов: 1 — периода 3; 2 — периода 5; 3 — периода 6.

Спектр мощности. «Шумовое» движение в хаотическом режиме можно охарактеризовать его спектром мощности $P(\omega, C)$, где ω — частота, а C — параметр. В отличие от таких свойств хаотического движения, как показатели Ляпунова, спектр мощности легко измерять экспериментально. В частности, представляет интерес вид спектра при бифуркационных значениях C_k^* вблизи критического C_∞, где происходит слияние полос хаотического движения. Движение в этих полосах представляет собой суперпозицию периодических колебаний и шума:

$$x_n = \sum_j A_j e^{i\omega_j n} + r(n). \qquad (7.2.63)$$

Определим фурье-амплитуду посредством формулы

$$X_N(\omega, C) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n e^{-i\omega n}. \tag{7.2.64}$$

Тогда спектр мощности равен ($\omega > 0$)[1])

$$P(\omega, C) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi} |X_N(\omega, C)|^2 = \sum_j |A_j|^2 \delta(\omega - \omega_j) + |r(\omega, C)|^2. \tag{7.2.65}$$

Он состоит из острых пиков (периодические переходы между полосами, аналогичные движению на предельном цикле при $C > C_\infty$) и широкополосного шума (хаотическое движение внутри полос).

Следуя Хьюберману и Зисоку [205], получим сначала универсальный закон подобия для полной мощности в непрерывном спектре (7.2.68) для $\mathcal{N}(C)$. При $C = -1$ (см. рис. 7.22) движение обладает перемешиванием[2]). Более того, как показано в работе [170], корреляционная функция

$$\mathscr{C}(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle)(x_{i+n} - \langle x \rangle),$$

где

$$\langle x \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i,$$

является в этом случае «δ-функцией», т. е.

$$\mathscr{C}(n) = \begin{cases} W^2, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \tag{7.2.66}$$

Это очень сильное статистическое свойство, означающее полное[3])

---

[1]) Спектр «мощности» (точнее спектральная плотность), он же спектр корреляционной функции $\mathscr{C}(n)$ (см. ниже), или просто спектр (в эргодической теории) определяется как преобразование Фурье от $\mathscr{C}(n)$:

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathscr{C}(n) \cos(\omega n).$$

Для дискретного времени спектр определен по модулю 2π и обладает зеркальной симметрией $P(\omega) = P(2\pi - \omega)$. Переход к непрерывному времени соответствует только интервалу частоты $(0, \pi)$ с независимыми фурье-компонентами. Простое изложение спектрального анализа случайных процессов см., например, в работе [519].— *Прим. ред.*

[2]) Это следует из положительности КС-энтропии (см. выше).— *Прим. ред.*

[3]) Равенство нулю конкретной корреляционной функции не означает «полное отсутствие корреляций. Существование определенных корреляций следует просто из функциональной зависимости $x_{n+1} = f(x_n)$.— *Прим. ред.*

отсутствие корреляций уже через одну итерацию отображения[1]). Величина W в (7.2.66) есть среднеквадратичный размер единой полосы хаотического движения при $C = -1$. Каждая обратная бифуркация удваивает число полос и уменьшает их ширину. В соответствии с законом подобия (7.2.36) и (7.2.37) для половины полос ширина уменьшается в α раз, а для остальных — в α^2 раз. Среднеквадратичная ширина одной полосы удовлетворяет закону

$$W_{k+1} = \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha^4}\right)^{1/2} W_k \tag{7.2.67а}$$

(k — номер бифуркации), или

$$W_k = W_0 \beta^{-k}, \tag{7.2.67б}$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt{2}\,\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+1}} \approx 3{,}29.$$

Заметим, что $2\beta = \gamma$ [см. (7.2.45)]. Полная мощность в пределах основной частоты отображения 2π равна

$$\mathcal{N}(C) = \int_0^{2\pi} d\omega\, |r(\omega, C)|^2 = \mathscr{C}_r(0), \tag{7.2.68}$$

где корреляционная функция $\mathscr{C}_r$ определяется только хаотической частью движения [$x_n \to r_n$, см. (7.2.63)]. Поэтому $\mathscr{C}_r(0) = W_k^2$ и

$$\mathcal{N}(C_k^*) = \mathcal{N}_0 \beta^{-2k}. \tag{7.2.69}$$

Но бифуркационные значения C_k^* сами удовлетворяют закону подобия

$$C_k^* - C_\infty = (C_0^* - C_\infty)\,\delta^{-k}. \tag{7.2.70}$$

Исключая k, приходим к новому закону подобия

$$\mathcal{N}(C) \propto (C_\infty - C)^\sigma, \tag{7.2.71}$$

где

$$\sigma = \frac{2\ln\beta}{\ln\delta} \approx 1{,}544$$

— универсальная постоянная. Хьюберман и Зисок [205] проверили этот результат путем численного моделирования отображения (7.2.5) и получили прекрасное согласие.

---

[1]) Заметим, что для многих систем с хаотическим движением корреляции убывают совсем не так быстро, иногда только как степень n [60]. [В указанной работе исследовались полностью интегрируемые системы и «убывание» корреляций связано не с динамикой системы, а с методом вычисления корреляций. По поводу медленного убывания корреляций см. предисловие редактора перевода и цитированную там литературу.— *Прим. ред.*]

Спектральная плотность хаотического движения была найдена в работе [434], следуя методу Фейгенбаума [123] (см. п. 7.2б). Полученный результат можно представить в виде

$$r(\omega,\ C_k^*) = g_k(\omega)\,\tilde{r}(2^k\omega). \tag{7.2.72}$$

Здесь $|\tilde{r}(\omega)|^2$ — спектр движения при $C = -1$, который можно приближенно считать однородным (белый шум)[1]). Фурье-амплитуды

$$g_k(\omega) = \sum_{j=1}^{2^k} W_{jk} e^{-i\omega j} \tag{7.2.73}$$

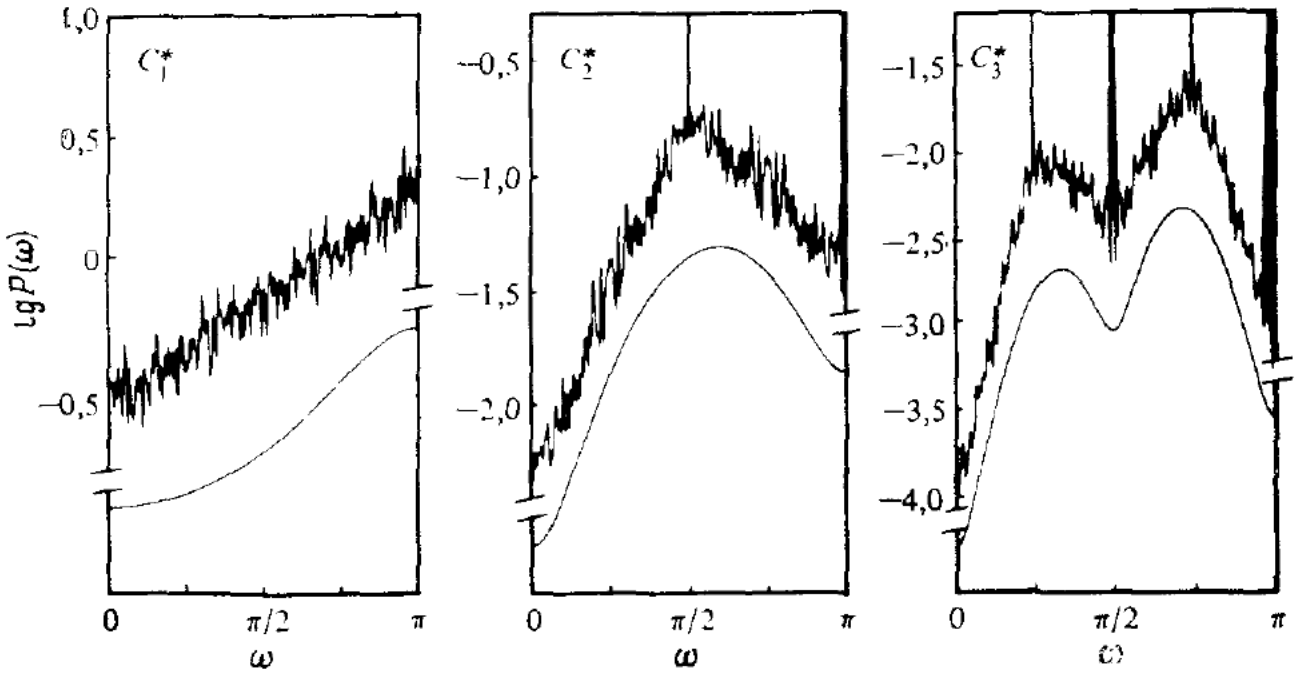


Рис. 7.23. Спектр мощности при трех значениях C в обратной последовательности бифуркаций для квадратичного отображения (по данным работы [434]).

Ломаная кривая — численные данные; плавная кривая, смещенная для удобства вниз, — теория без учета дискретного спектра.

характеризуют систему хаотических полос шириной W_{jk} ($j = 1, 2, \ldots 2^k$) и находятся из рекуррентного соотношения[2])

$$g_{k+1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha}\left(1 - \frac{e^{i\omega}}{\alpha}\right) g_k(2\omega), \tag{7.2.74}$$

---

[1]) См. (7.2.66); заметим также, что значение частоты $2^k\omega$ (в 7.2.72) берется по модулю 2π [см. (7.2.68)]. — *Прим. ред.*

[2]) При $C \to C_\infty$ этот закон подобия определяет масштабно-инвариантную структуру как непрерывного ($c|g_0|^2 = 1$), так и дискретного ($c|g_0|^2 = |A_0|^2\delta(\omega)$) спектра [кроме $\omega = \pi$ (см. [520]), для которого справедливо соотношение (7.2.40)]. При переходе от спектральной плотности к амплитудам гармоник ($g_k \to X^{(k)}$) правую часть (7.2.74) нужно разделить на $\sqrt{2}$ (интеграл от $\delta(2\omega)$ равен 1/2). Обратим внимание, что законы подобия (7.2.40), (7.2.44) и (7.2.74) разные: в первом фиксирована частота, а во втором — номер гармоники колебаний. Из (7.2.74) следует также, что масштабный мно-

причем, согласно (7.2.72), $g_0 = 1$. На рис. 7.23 показаны численные данные для спектра мощности при трех значениях параметра C. Соответствующий универсальный спектр $|g_k|^2$, полученный с помощью (7.2.74), представлен сплошными линиями, которые сдвинуты по вертикали для удобства сравнения. Согласие с численными данными весьма хорошее. Напомним, что дискретный спектр в теорию не включен.

§ 7.3. Двумерные отображения и связанные с ними потоки

Мы уже видели, что хаотическое движение может возникать в диссипативных потоках с размерностью фазового пространства не меньше трех, или в соответствующих этим потокам обратимых отображениях Пуанкаре, размерность которых не менее двух. В общем случае хаотическое движение имеет место лишь для узких интервалов параметров. В этом существенное отличие от гамильтоновых систем, где хаотическое движение сохраняется, как правило, в широком диапазоне параметров. Ниже описаны два критерия локальной стохастичности для диссипативных систем. В п. 7.3а метод квадратичной ренормализации применяется к двумерным обратимым отображениям и показывается сходимость последовательности бифуркаций удвоения периода и возникновение локального хаотического движения. В п. 7.3б получен критерий перехода к хаотическому движению вблизи сепаратрисы на примере вынужденных колебаний осциллятора с затуханием. Наконец, в п. 7.3в рассмотрена модель ускорения Ферми с диссипацией и используется описание хаотического движения с помощью уравнения ФПК. Это уравнение позволяет получить первое приближение для инвариантного распределения на странном аттракторе.

7.3а. Бифуркации удвоения периода

Покажем, что последовательность бифуркаций удвоения является тем механизмом, с помощью которого происходит переход от регулярного движения к хаотическому в широком классе двумерных обратимых отображений. Более того, оказывается, что вблизи перехода движение системы можно локально описать одномерным необратимым отображением. Эти результаты были получены на основе точной теории ренормализации [83]. Однако мы будем попрежнему использовать приближенную теорию Хеллемана [180—182].

житель γ в (7.2.44) является на самом деле сложной (фрактальной) функцией частоты ω, а его среднее значение (с учетом множителя $1/\sqrt{2}$) равно $\langle\gamma^{-2}\rangle^{-1/2} = 2\alpha^2(1+\alpha^2)^{-1/2}$ и в точности совпадает с результатом для случайных фаз (см. примечание редактора на с. 440).— *Прим. ред.*

Рассмотрим последовательные бифуркации неподвижной точки[1]) *периода 1 некоторого двумерного отображения T. После первой* бифуркации эта неподвижная точка становится неустойчивой. Разложим отображение до квадратичных членов:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n^2 \\ u_n v_n \\ v_n^2 \end{pmatrix}, \qquad (7.3.1)$$

где u, v — отклонение от неустойчивой неподвижной точки. Примем, что якобиан этого отображения $B = \text{const} < 1$, что, во всяком случае, справедливо вблизи перехода.

Отображение (7.3.1) можно привести к стандартному виду

$$x_{n+1} + Bx_{n-1} = 2Cx_n + 2x_n^2 \qquad (7.3.2)$$

следующим способом (см. [182], приложение А):

1. Переходим к переменным u', v', в которых матрица Λ' диагональна, а оба ее собственные значения λ_1, λ_2 действительны, поскольку неподвижная точка неустойчива; тогда Γ переходит в Γ'.
2. Условие $B = \text{const}$ дает возможность выразить все элементы матрицы Γ' через Γ'_{11}, Γ'_{13} и собственные значения.
3. Переходим к новым переменным:

$$s = u'\sqrt{\Gamma'_{11}} + v'\sqrt{\Gamma'_{13}},$$

$$d = u'\sqrt{\Gamma'_{11}} - v'\sqrt{\Gamma'_{13}}.$$

4. Изменяем масштаб по s, вводя

$$x = \frac{\sqrt{\Gamma'_{11}}(\lambda_1 - \lambda_2)}{2\lambda_1} s.$$

В результате получаем (7.3.2) с параметром

$$C = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \qquad (7.3.3)$$

В некоторых случаях стандартная форма (7.3.2) находится непосредственно. Например, отображение

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1-\delta)u_n + Av_n + Dv_n^2, \\ v_{n+1} &= v_n + u_{n+1} \end{aligned} \qquad (7.3.4)$$

сводится к (7.3.2) с помощью замены $x = Dv/2$, $C = (2-\delta + A)/2$

---

[1]) В случае периода k берем отображение T^k.

и $B = 1-\delta$. Отображение Хенона (7.1.14) может быть сразу записано в стандартной форме.

Квадратичная ренормализация. Исследуем, как и в п. 7.2б, поведение вблизи неподвижной точки $x_{10} = 0$ при уменьшении C. Неподвижная точка устойчива, если

$$|C| < \frac{1+B}{2},$$

и неустойчива при

$$C < -\frac{1+B}{2}. \tag{7.3.5}$$

В результате бифуркации рождаются две устойчивые неподвижные точки $x_{2\pm}$ (см. рис. 7.12). Оба корня можно найти, записывая

$$x_{2\pm} = a \pm b \tag{7.3.6а}$$

и итерируя (7.3.2) дважды [ср. (7.2.21)]:

$$2a = -\frac{1+B}{2} - C, \tag{7.3.6б}$$

$$4b^2 = \left[C + \frac{1+B}{2}\right]\left[C - \frac{3(1+B)}{2}\right]. \tag{7.3.6в}$$

Подставляя $x = x_{2\pm} + \Delta x$ в (7.3.2), получаем

$$\Delta x_n + B\Delta x_{n-2} = e\Delta x_{n-1} + 2(\Delta x_{n-1})^2, \tag{7.3.7а}$$

$$\Delta x_{n+1} + B\Delta x_{n-1} = d\Delta x_n + 2(\Delta x_n)^2, \tag{7.3.7б}$$

$$\Delta x_{n+2} + B\Delta x_n = e\Delta x_{n+1} + 2(\Delta x_{n+1})^2, \tag{7.3.7в}$$

где d и e имеют вид [см. (7.2.22) и (7.2.23)]:

$$d = 2C + 4x_{2+}, \tag{7.3.8а}$$

$$e = 2C + 4x_{2-}. \tag{7.3.8б}$$

При четных n траектория находится вблизи x_{2+}, а при нечетных — вблизи x_{2-}. Умножая (7.3.7а) на B, (7.3.7б) на e и складывая затем с (7.3.7в), получаем

$$\Delta x_{n+2} + B'\Delta x_{n-2} = 2C'\Delta x_n + 2e(\Delta x_n)^2 + 2[(\Delta x_{n+1})^2 + B(\Delta x_{n-1})^2], \tag{7.3.9}$$

где

$$B' = B^2, \tag{7.3.10а}$$

$$C' = \frac{1}{2}de - B = -2C^2 + 2(1+B)C + 2B^2 + 3B + 2. \tag{7.3.10б}$$

Член в квадратных скобках в (7.3.9) пропорционален $(\Delta x_n)^2$. Действительно, вводя $r = \Delta x_{n+1}/\Delta x_{n-1}$, находим

$$(\Delta x_{n+1})^2 + B(\Delta x_{n-1})^2 = (r^2 + B)(\Delta x_{n-1})^2. \tag{7.3.11}$$

Пренебрегая квадратичным членом в (7.3.7б), имеем

$$(r + B)\Delta x_{n-1} \approx d\Delta x_n. \tag{7.3.12}$$

Подстановка (7.3.12) в правую часть (7.3.11) дает

$$(\Delta x_{n+1})^2 + B(\Delta x_{n-1})^2 \approx \frac{d^2(r^2 + B)}{(r + B)^2}(\Delta x_n)^2. \tag{7.3.13}$$

Вследствие квадратичной зависимости при бифуркации удвоения $r \approx 1$, т. е. $|\Delta x_{n+1}|$ близко к $|\Delta x_{n-1}|$. Правая часть (7.3.13) имеет экстремум при $r = 1$ и поэтому слабо зависит от r при $r \approx 1$. Отсюда

$$(\Delta x_{n+1})^2 + B(\Delta x_{n-1})^2 \approx \frac{d^2}{1 + B}(\Delta x_n)^2. \tag{7.3.14}$$

Подставляя (7.3.14) в (7.3.9) и переходя к переменной

$$x' = \alpha\Delta x, \tag{7.3.15}$$

находим

$$x'_{n+2} + B'x'_{n-2} = 2C'x'_n + 2(x'_n)^2, \tag{7.3.16}$$

где

$$\alpha = e + \frac{d^2}{1 + B}. \tag{7.3.17}$$

Отображение (7.3.16) имеет тот же вид, что и исходное (7.3.2). Поэтому неподвижные точки нового отображения испытывают бифуркацию при тех же значениях новых параметров B' и C' [см. (7.3.5)]. Последовательность бифуркаций, которые описываются соотношениями (7.3.10), сходится при значениях $B' = B = B_\infty$ и $C' = C = C_\infty$. Для диссипативного отображения $|B| < 1$ и из (7.3.10а) следует, что $B_\infty = 0$. Поэтому все диссипативные отображения вблизи перехода ведут себя локально как одномерные [ср. (7.3.16) с (7.2.26) при $B' = 0$]. Неудивительно, что при подстановке $B = B_\infty = 0$ в (7.3.10б) условие $C' = C = C_\infty$ дает то же самое значение

$$C_\infty = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \approx -0{,}781, \tag{7.2.29}$$

что и для одномерного случая. Бифуркационные значения C_k сходятся к C_∞ по тому же закону

$$C_k - C_\infty \approx A\delta^{-k}$$

и с тем же множителем $\delta = 1 + \sqrt{17} \approx 5{,}12$, что и в одномерном

случае. Параметр подобия $\alpha \approx -2{,}24$, определяемый формулой (7.3.17), также совпадает с (7.2.35). Эти результаты указывают на универсальный характер поведения всех диссипативных систем вблизи перехода к хаотическому движению; они были проверены численно для многих одномерных, двумерных и многомерных отображений. Однако следует подчеркнуть, что переход к стохастичности является локальным, т. е. относится только к данной неподвижной точке с ее последовательностью бифуркаций. В общем случае в диссипативной системе имеется много неподвижных точек, каждая из которых должна претерпевать свою последовательность бифуркаций, прежде чем возникает глобальный переход к хаотическому движению и странный аттрактор [1]).

В противоположность этому бифуркации двумерных гамильтоновых отображений устроены более сложно. Из-за сохранения фазовой площади $B' = B = B_\infty = 1$ (если $B = -1$, то можно взять квадрат отображения; более подробно см. работу [182]). Поэтому бифуркации удвоения гамильтонова отображения сохраняют двумерный характер даже вблизи точки сгущения (численные данные см. в работе [36]). В результате, хотя масштабные факторы δ и α, а также параметр C_∞ и являются универсальными для всех двумерных гамильтоновых отображений, они имеют *другие* значения, чем для диссипативных отображений. Более того, для гамильтоновых отображений имеется еще один универсальный масштабный фактор β, который вместе с α определяет преобразование фазовой плоскости при бифуркациях. Определение β с помощью обобщения описанного выше метода приводится в дополнении Б.

7.3б. Движение вблизи сепаратрисы

В этом разделе мы рассмотрим метод Мельникова [299], позволяющий исследовать движение вблизи сепаратрисы системы, близкой к интегрируемой. Этот метод позволяет получить критерий возникновения стохастичности в окрестности сепаратрисы при наличии диссипации. Мы уже видели (см. п. 3.2б и рис. 3.4), что в типичной гамильтоновой системе движение около сепаратрисы всегда хаотическое. Однако в присутствии диссипации это уже не так. Поэтому важно найти условия, при которых возникает хаос.

Метод Мельникова использовался в теории динамических систем Морозовым [305, 306], Мак-Лафлином [288, 289] и Холмсом [195, 196]. В частности, Морозов и Холмс исследовали этим методом уравнение Дюффинга. Ниже мы следуем подходу Холмса (см. [168]). В качестве примера рассмотрим простую двумерную авто-

---

[1]) Речь здесь идет о возможном слиянии хаотических аттракторов, возникающих из разных неподвижных точек.— *Прим. ред.*

номную систему с единственной гиперболической точкой под действием периодического возмущения:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}, t), \tag{7.3.18}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, а функция $\boldsymbol{f}_1$ периодична по t с периодом T. Невозмущенная система является интегрируемой и имеет гиперболическую точку $\boldsymbol{X}_0$ с единой сепаратрисой $\boldsymbol{x}_0(t)$, так что

$$\lim_{t \to \pm\infty} \boldsymbol{x}_0(t) = \boldsymbol{X}_0.$$

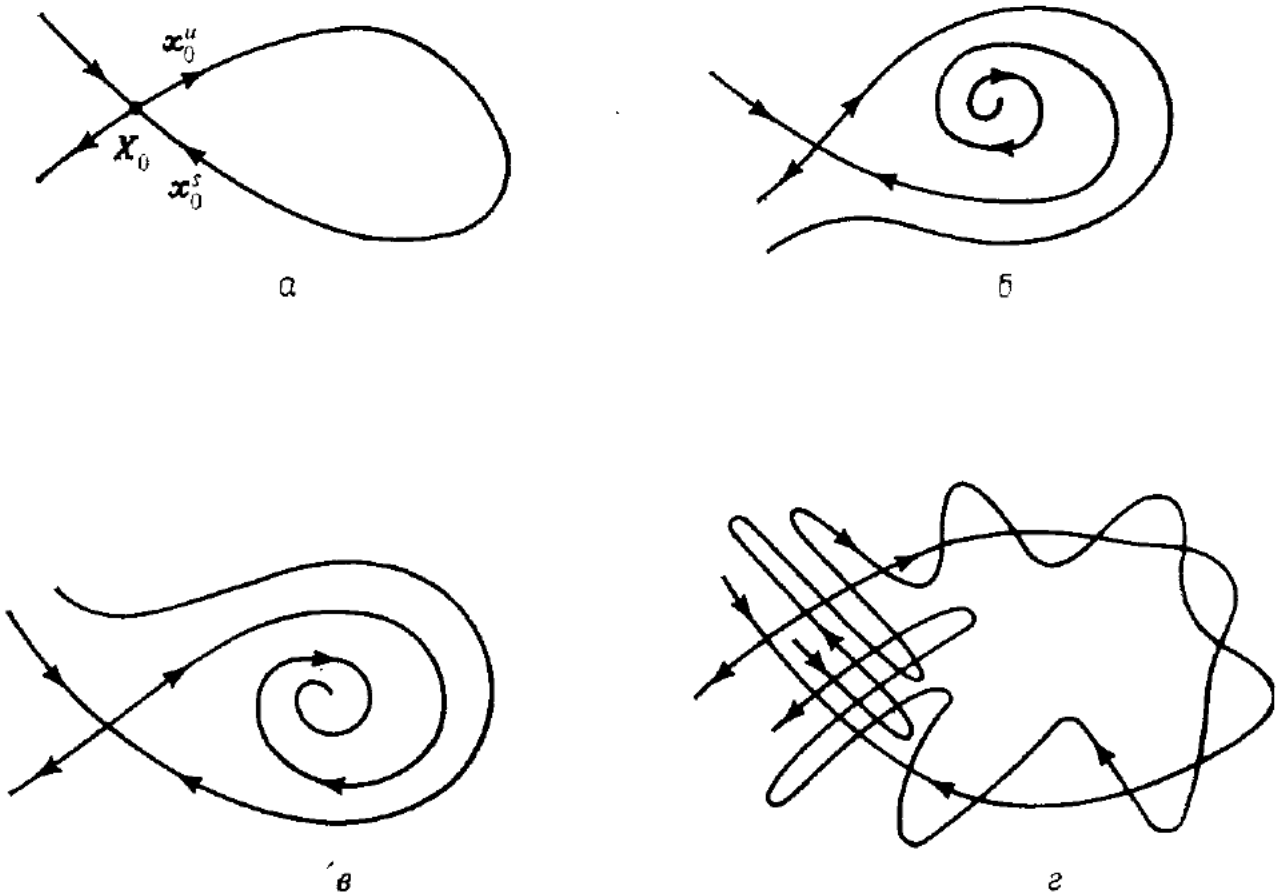


Рис. 7.24. Входящая и выходящая сепаратрисы гиперболической точки $\boldsymbol{X}_0$. *а* — интегрируемая система, обе сепаратрисы плавно переходят друг в друга; *б* — возмущенная система, выходящая сепаратриса окружает входящую; *в* — входящая сепаратриса окружает выходящую; *г* — сепаратрисы пересекаются.

Схематически это показано на рис. 7.24, *а*, где в фазовом пространстве (x_1, x_2) системы изображены совпадающие в данном случае входящая $\boldsymbol{x}^s(t)$ и выходящая $\boldsymbol{x}^u(t)$ сепаратрисы. Внутри области, охватываемой сепаратрисой, имеется, вообще говоря, эллиптическая неподвижная точка.

При включении возмущения фазовое пространство системы становится трехмерным (x_1, x_2, t), поэтому наиболее удобно рассматривать движение на поверхности сечения $t = \mathrm{const} \pmod T$. Как показано в п. 3.2б, в возмущенной гамильтоновой системе сепаратриса «расщепляется», т. е. входящая и выходящая сепаратрисы уже не совпадают, а, вообще говоря, пересекаются между собой, приводя к бесконечному числу гомоклинных точек и хаотическому движению. В более общем диссипативном случае имеются три воз-

можности [66][1]), показанные на рис. 7.24. Сепаратрисы либо нигде не пересекаются, причем любая из них может полностью охватывать другую (рис. 7.24, *б* и *в*), либо пересекаются в бесконечном числе точек. Хаотическое движение возникает только в последнем случае.

Метод Мельникова. Чтобы найти условие пересечения, вычислим по теории возмущений расстояние D между сепаратрисами в некоторый момент времени t_0. Для случая на рис. 7.24, *б* $D<0$, а на рис. 7.24, *в* $D>0$ при любом t_0. И, только если для какого-либо t_0 величина D меняет знак, возникает хаотическое движение[2]), показанное на рис. 7.24, *г*.

Для вычисления D достаточно знать обе сепаратрисы $\boldsymbol{x}^s$ и $\boldsymbol{x}^u$ в первом порядке по ε. Записывая

$$\boldsymbol{x}^{s,\,u}(t,\ t_0)=\boldsymbol{x}_0(t-t_0)+\varepsilon\boldsymbol{x}_1^{s,\,u}(t,\ t_0), \tag{7.3.19}$$

где t_0 — произвольный начальный момент времени, а $\boldsymbol{x}_0$ — единая невозмущенная сепаратриса, и подставляя (7.3.19) в (7.3.18), получаем в первом порядке

$$\frac{d\boldsymbol{x}_1^{s,\,u}}{dt}=\mathsf{M}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{x}_1^{s,\,u}+\varepsilon\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_0(t-t_0),\ t), \tag{7.3.20}$$

где

$$\mathsf{M}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_{01}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{01}}{\partial x_2}\\[2ex] \dfrac{\partial f_{02}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{02}}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

— матрица Якоби для вектора $\boldsymbol{f}_0$, взятая на невозмущенной траектории $\boldsymbol{x}_0(t-t_0)$. Нам нужно решение (7.3.20) для $\boldsymbol{x}^s$ при $t>t_0$ и для $\boldsymbol{x}^u$ при $t<t_0$, такое, чтобы

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}^s=\lim_{t\to-\infty}\boldsymbol{x}^u=\boldsymbol{X}_p,$$

где $\boldsymbol{X}_p$ — возмущенное положение гиперболической точки. Эти решения отличаются на вектор ($\varepsilon=1$)

$$\boldsymbol{d}(t,\ t_0)=\boldsymbol{x}^s(t,\ t_0)-\boldsymbol{x}^u(t,\ t_0)=\boldsymbol{x}_1^s(t,\ t_0)-\boldsymbol{x}_1^u(t,\ t_0). \tag{7.3.21}$$

Расщепление сепаратрисы по Мельникову[3]) $D(t,\ t_0)$ определяется как проекция $\boldsymbol{d}$ на нормаль $\boldsymbol{N}$ к невозмущенной сепаратрисе $\boldsymbol{x}_0$ в момент времени t (рис. 7.25):

$$D(t,\ t_0)=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{d}. \tag{7.3.22}$$

---

[1]) Все эти случаи рассмотрены Мельниковым [298].— *Прим. ред.*

[2]) Вообще говоря, это будет лишь так называемый переходной или временный хаос (см. ниже).— *Прим. ред.*

[3]) В оригинале — the Melnikov distance (расстояние Мельникова). — *Прим. перев.*

Используя (7.3.18) (при $\varepsilon = 0$), определим вектор нормали как[1])

$$N(t,\ t_0) = \begin{pmatrix} -f_{02}(x_0) \\ f_{01}(x_0) \end{pmatrix}. \tag{7.3.23}$$

Вводя оператор [2])

$$x \wedge y = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

можно записать (7.3.22) в виде

$$D(t,\ t_0) = f_0 \wedge d. \tag{7.3.24}$$

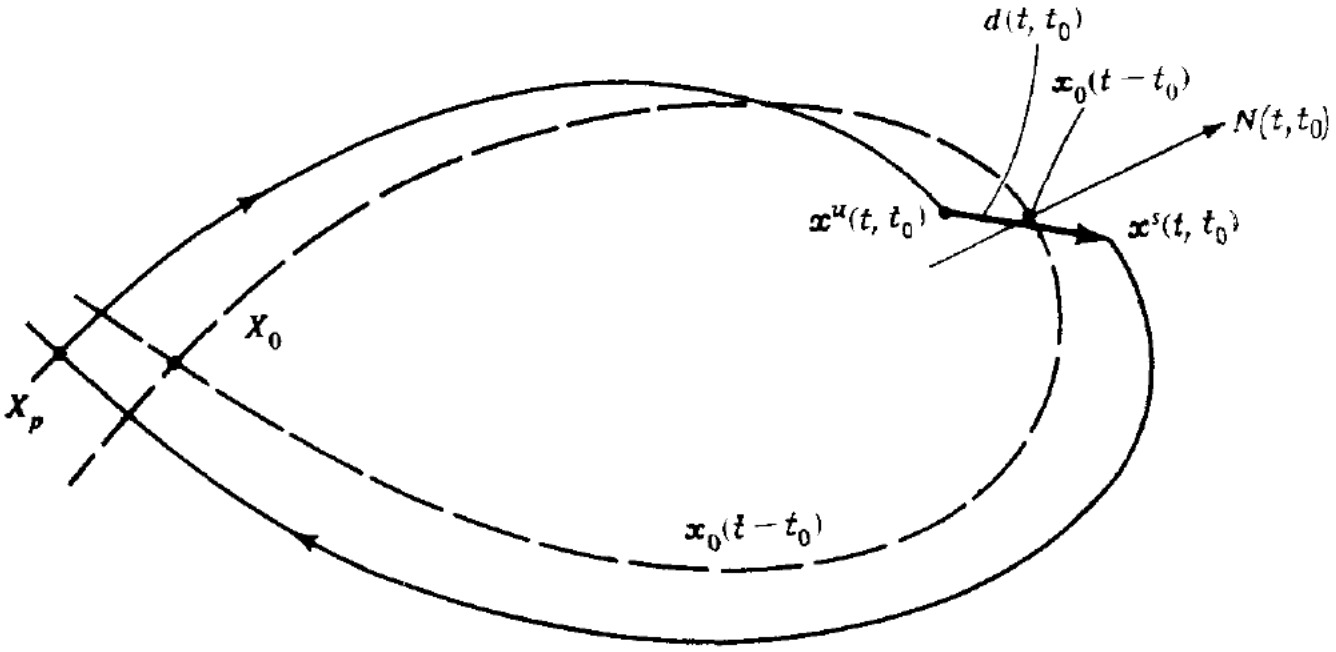


Рис. 7.25. Расщепление сепаратрисы $D = N \cdot d$ по Мельникову.
Пунктирной кривой показана невозмущенная сепаратриса гиперболической точки X_0, которая под действием возмущения смещается в точку X_p.

Чтобы найти явное выражение для D, представим его как

$$D = D^s - D^u, \tag{7.3.25а}$$

где

$$D^{s,\,u}(t,\ t_0) = f_0 \wedge x_1^{s,\,u}. \tag{7.3.25б}$$

Дифференцируя по времени, имеем, например, для D^s:

$$\dot{D}^s = \dot{f}_0 \wedge x_1^s + f_0 \wedge \dot{x}_1^s = \left(\mathsf{M}(x_0) \cdot \dot{x}_0\right) \wedge x_1^s + f_0 \wedge \dot{x}_1^s. \tag{7.3.26}$$

---

[1]) Поскольку вводимый таким образом вектор N не является единичным, величина D в (7.3.22) не равна расстоянию между сепаратрисами и даже имеет другую размерность. Для рассматриваемой здесь задачи об условии пересечения сепаратрис это несущественно. С другой стороны, нормировка N неоправданно усложнила бы нижеследующие уравнения для D, проще сделать это в конце вычислений.— *Прим. ред.*

[2]) Действие этого оператора удобно представить в виде $x \wedge y = \varepsilon_{ik} x_i y_k$, где ε_{ik} — единичная антисимметричная матрица ($\varepsilon_{12} = 1$).— *Прим. ред.*

Используя (7.3.20) и $\dot{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{f}_0$, получаем

$$\dot{D}^s = (\mathbf{M}(\boldsymbol{x}_0)\cdot \boldsymbol{f}_0) \wedge \boldsymbol{x}_1^s + \boldsymbol{f}_0 \wedge (\mathbf{M}(\boldsymbol{x}_0)\cdot \boldsymbol{x}_1^s) + \boldsymbol{f}_0 \wedge \boldsymbol{f}_1, \qquad (7.3.27)$$

или

$$\dot{D}^s = \mathrm{Sp}\,\mathbf{M}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{f}_0 \wedge \boldsymbol{x}_1^s + \boldsymbol{f}_0 \wedge \boldsymbol{f}_1 = \mathrm{Sp}\,\mathbf{M}(\boldsymbol{x}_0) D^s + \boldsymbol{f}_0 \wedge \boldsymbol{f}_1, \qquad (7.3.28)$$

где $\mathrm{Sp}\mathbf{M} = \mathrm{div}\boldsymbol{f}_0$. При интегрировании этого уравнения ограничимся частным случаем, когда невозмущенная система является гамильтоновой, т. е. $\mathrm{Sp}\mathbf{M} \equiv 0$ (см. п. 7.1а). Интегрируя (7.3.28) от t_0 до ∞ и учитывая асимптотическое условие $D^s(\infty, t_0) = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{X}_0) \wedge \boldsymbol{x}_1^s = 0$, находим

$$D^s(t_0, t_0) = -\int_{t_0}^{\infty} \boldsymbol{f}_0 \wedge \boldsymbol{f}_1 dt. \qquad (7.3.29)$$

Для D^u аналогичным образом получаем

$$D^u(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \boldsymbol{f}_0 \wedge \boldsymbol{f}_1 dt. \qquad (7.3.30)$$

Подставляя (7.3.29) и (7.3.30) в (7.3.25а), окончательно имеем

$$D(t_0, t_0) = -\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}_0 \wedge \boldsymbol{f}_1 dt. \qquad (7.3.31)$$

Полученная зависимость D от t_0 определяет характер движения. Если $D(t_0)$ меняет знак, то сепаратрисы пересекаются (рис. 7.24, *г*) и движение в этой области является хаотическим.

Уравнение Дюффинга. Следуя Холмсу [195], найдем условия перехода к хаотическому движению для уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} - x + x^3 = -\varepsilon\delta\dot{x} + \varepsilon\gamma\cos\omega t, \qquad (7.3.32)$$

которое описывает колебания нелинейного осциллятора с малым затуханием $\varepsilon\delta$ под действием периодической силы с амплитудой $\varepsilon\gamma$. Перепишем (7.3.32) в виде (7.3.18):

$$\dot{x} = v, \qquad (7.3.33а)$$

$$\dot{v} = x - x^3 + \varepsilon[\gamma\cos\omega t - \delta v]. \qquad (7.3.33б)$$

Линии постоянной энергии невозмущенного гамильтониана

$$H_0 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \qquad (7.3.34)$$

показаны на рис. 7.26. Имеется единственная гиперболическая точка $x = v = 0$ с единой сепаратрисой при $H_0 = 0$. Чтобы найти

решение на сепаратрисе, выразим $v(x)$ из (7.3.34) и подставим в (7.3.33а). Имеем

$$\frac{dx}{dt} = -x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{1/2},$$

откуда

$$x_0(t) = \sqrt{2}/\operatorname{ch} t, \tag{7.3.35а}$$

$$v_0(t) = -\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}. \tag{7.3.35б}$$

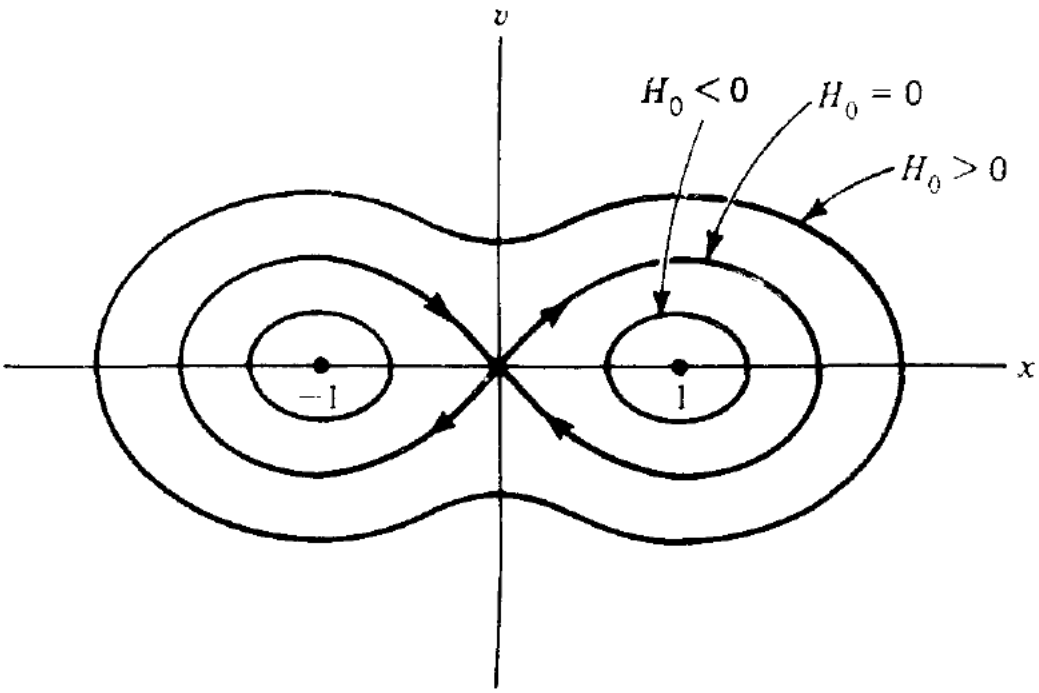


Рис. 7.26. Кривые постоянной энергии невозмущенного гамильтониана (7.3.34).

Сравнивая (7.3.33) и (7.3.18), находим

$$f_{01} = v; \qquad f_{11} = 0;$$
$$f_{02} = x - x^3; \qquad f_{12} = \gamma\cos\omega t - \delta v.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{f}_0 \wedge \boldsymbol{f}_1 = v_0[\gamma\cos\omega t - \delta v_0],$$

и, согласно (7.3.31),

$$D = -\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\left[\gamma v_0(t-t_0)\cos\omega t - \delta v_0^2(t-t_0)\right]. \tag{7.3.36}$$

Подставляя (7.3.35б) в (7.3.36) и заменяя переменную интегрирования ($\tau = t - t_0$), запишем

$$D = \sqrt{2}\,\gamma\sin\omega t_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\,\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}^2\tau}\sin\omega\tau + 2\delta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{th}^2\tau\, d\tau}{\operatorname{ch}^2\tau}.$$

Второй интеграл вычисляется элементарно и равен 2/3, а первый выражается через вычеты в точках $\tau_n = \pi i\,(n + 1/2)$. В результате находим[1])

$$D(t_0,\ t_0) = \sqrt{2}\,\pi\gamma\omega\,\frac{\sin\omega t_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} + \frac{4\delta}{3}. \qquad (7.3.37)$$

Хаотическое движение вблизи сепаратрисы возникает при условии пересечения сепаратрис, т. е. когда $D\,(t_0)$ меняет знак. Из (7.3.37) следует, что это происходит, если

$$\delta < \delta_c = \frac{3\sqrt{2}\,\pi\gamma\omega}{4\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}. \qquad (7.3.38)$$

Стационарное хаотическое движение. Нужно подчеркнуть, что условие пересечения сепаратрис (7.3.38) является локальным критерием стохастичности и применимо только вблизи невозмущенной сепаратрисы. Поэтому такой критерий ничего не говорит о появлении странного аттрактора, который представляет стационарное хаотическое движение в большой области фазового пространства. Уравнение Дюффинга без диссипации ($\delta = 0$) является гамильтоновым и всегда имеет хаотические решения вблизи сепаратрисы. Мы знаем, что хаотическое движение в этом случае происходит в узком слое и ограничено инвариантными кривыми. Однако при $\delta > 0$ все инвариантные кривые разрушаются и траектория, хаотическая вблизи сепаратрисы, может уйти далеко от нее и «захватиться» устойчивым фокусом или предельным циклом. Такое поведение наблюдал Холмс [195] при аналоговом моделировании уравнения Дюффинга[2]). Поэтому единственное, что можно ожидать при выполнении условия пересечения сепаратрис (7.3.38), — это нерегулярное «блуждание» траектории в течение некоторого времени, пока она не попадет на какой-либо аттрактор, простой или странный.

Фактически численное моделирование показывает, что появление странного аттрактора для уравнения Дюффинга, по всей видимости, связано с каскадом бифуркаций двух фокусов при $x = \pm 1$; $v = 0$ (см. рис. 7.26). С помощью аналоговой вычислительной машины Холмс исследовал поведение системы при фиксированных δ и ω в зависимости от γ. Его результаты приведены на рис. 7.27. При $\gamma < 0{,}76$ наблюдалось только регулярное движение, показан-

---

[1]) Напомним, что расстояние между сепаратрисами находится делением $D\,(t_0)$ на $|N| = |f_0| = [v^2 + x^2(1-x^2)^2]^{1/2}$ [для (7.3.32)]. Вблизи гиперболической точки v, $x \to 0$, и расщепление сепаратрисы быстро возрастает, а полученные приближенные оценки перестают быть справедливыми. В пределах их применимости, однако, это не влияет на условие пересечения сепаратрис (7.3.38) ниже.— *Прим. ред.*

[2]) Это явление «вырождения» хаоса, по-видимому, впервые было обнаружено в работе [274] и исследовалось в работах [73, 74, 530].—*Прим. ред.*

ное на рис. 7.24, *в*. В интервале $0{,}76<\gamma<0{,}95$ движение было хаотическим в течение некоторого времени, а затем траектория притягивалась к одному из двух фокусов. Далее, для $0{,}95<\gamma<1{,}08$ происходит каскад бифуркаций обоих фокусов. И наконец, для $1{,}08<\gamma<2{,}45$ результаты моделирования указывают на присутствие странного аттрактора, за исключением интервала $1{,}15<\gamma<1{,}2$, где существует предельный цикл периода 5. Таким образом, хотя как пересечение сепаратрис, так и каскад бифуркаций обоих фокусов являются необходимыми условиями появления странного аттрактора[1]), они не являются достаточными.

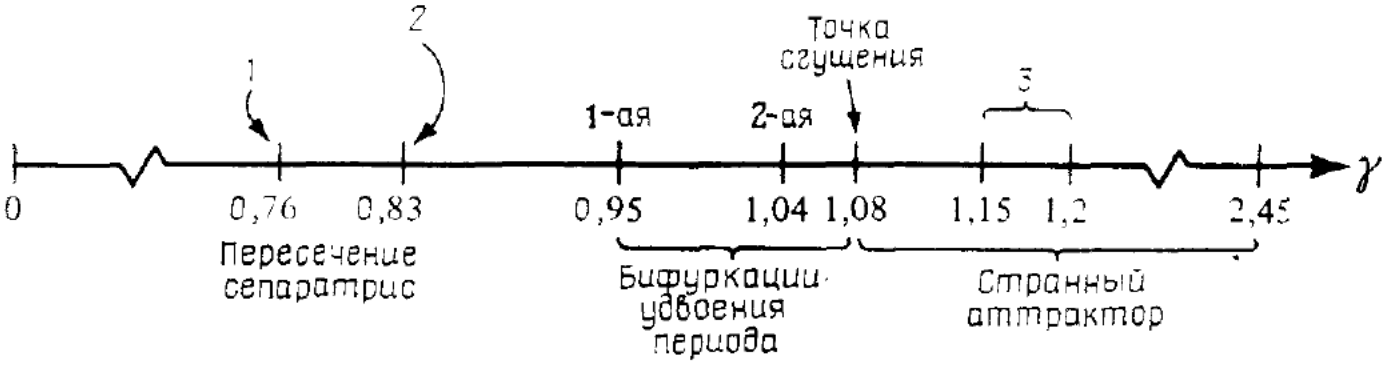


Рис. 7.27. Поведение решения уравнения Дюффинга (7.3.32) в зависимости от амплитуды γ внешней периодической силы заданной частоты ω при постоянном затухании δ.

1 — граница пересечения сепаратрис (численный результат); *2* — то же, теория (7.3.38); *3* — интервал существования предельного цикла периода 5.

Диссипативные отображения. Метод Мельникова можно использовать и для изучения двумерных диссипативных отображений. Рассмотрим, например, обобщенное стандартное отображение (7.3.4) (с заменой u и v на I и θ):

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dn} &= [-\delta I + f(\theta)]\,\delta_1(n), \\ \frac{d\theta}{dn} &= I, \end{aligned} \tag{7.3.39}$$

где $\delta_1(n)$ — периодическая δ-функция (3.1.33). Если принять $f = K\sin\theta$, оставить только два члена в $\delta_1(n) \approx 1 + 2\cos 2\pi n$ и ввести дополнительный малый параметр возмущения ε, то полу-

[1]) Ни бифуркации удвоения, ни пересечения сепаратрис не являются необходимыми для хаотического аттрактора, как показывает классический пример Лоренца (см. также конец п. 7.4б). Тем более не требуется совпадения этих условий. Если, например, изменить знак линейной силы в уравнении Дюффинга (7.3.32), то сепаратрисы вообще не будет, а хаотический аттрактор останется [210].— *Прим. ред.*

чим уравнения типа (7.3.18):

$$\frac{dI}{dn} = K \sin\theta + \varepsilon(-\delta I + 2K \sin\theta \cos 2\pi n),$$
$$\frac{d\theta}{dn} = I. \tag{7.3.40}$$

Невозмущенная сепаратриса этой системы имеет, как мы знаем, вид [см. (1.3.21)]:

$$\theta_0(n) = 4\operatorname{arctg}\left(\exp\left(\sqrt{K}\, n\right)\right) - \pi,$$
$$I_0(n) = 2\sqrt{K} \sin\left(\frac{\theta_0(n)}{2}\right). \tag{7.3.41}$$

Подставляя (7.3.41) в (7.3.31), можно вычислить расщепление сепаратрисы:

$$D(n_0) = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(n-n_0)\{-\delta I_0(n-n_0) + 2K \sin[\theta_0(n-n_0)] \cos 2\pi n\}\, dn. \tag{7.3.42}$$

Здесь первый интеграл берется элементарно, а второй сводится к интегралу Мельникова—Арнольда (п. 3.5а). В результате получим

$$D(n_0) = \frac{4\pi}{Q_0}\left[\frac{Q_0^3}{\operatorname{ch}(\pi Q_0/2)} \sin 2\pi n_0 - 4\delta\right], \tag{7.3.43}$$

где $Q_0 = 2\pi/K^{1/2}$. Поэтому условие пересечения сепаратрис имеет вид

$$\delta < \frac{Q_0^3}{4} \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi Q_0/2)}, \tag{7.3.44}$$

или для $Q_0 \gg 1$

$$\delta < \frac{Q_0^3}{2} \exp\left(-\frac{\pi Q_0}{2}\right).$$

Метод Мельникова можно обобщить и на многомерные системы [196]. В частности, его можно использовать для изучения движения вблизи сепаратрисы вторичных резонансов. Этот метод привел также к важным математическим результатам в теории диффузии Арнольда [197] [1]).

---

[1]) Речь идет о более аккуратном установлении самого факта существования диффузии в окрестности резонансных сепаратрис для широкого класса гамильтоновых систем (гипотеза Арнольда [462]).— *Прим. ред.*

7.3в. Вычисление инвариантных распределений

Рассмотрим задачу о вычислении инвариантного распределения $P(\boldsymbol{x})$ на странном аттракторе. Как упоминалось в п. 7.2в, $P(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет уравнению

$$P(\boldsymbol{x}) = TP(\boldsymbol{x}), \tag{7.3.45}$$

где T — отображение в сечении Пуанкаре. В случае нескольких инвариантных распределений мы будем понимать под $P(\boldsymbol{x})$ равновесное распределение, для которого среднее по времени на почти любой траектории из области притяжения аттрактора равно фазовому среднему, вычисленному с этим распределением [1]).

Пусть $G(\boldsymbol{x})$ — некоторая функция в фазовом пространстве. Ее временнòе среднее на траектории с начальными условиями $\boldsymbol{x}_0$ равно

$$\bar{G}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} G(T^i \boldsymbol{x}). \tag{7.3.46}$$

Для почти всех $\boldsymbol{x}_0$ в области притяжения данного аттрактора $\bar{G}$ не зависит от $\boldsymbol{x}_0$ и равно

$$\bar{G} = \int d\boldsymbol{x} P(\boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x}), \tag{7.3.47}$$

где $P(\boldsymbol{x})$ — инвариантное распределение для аттрактора. Соотношение (7.3.47) часто более удобно для вычисления $\bar{G}$, чем (7.3.46). В частности, с помощью инвариантного распределения вычисляются показатели Ляпунова (для одномерного отображения это описано в п. 7.2в).

В случае гамильтоновой системы и канонических переменных $\boldsymbol{x}$ равновесное распределение $P(\boldsymbol{x}) = c$, где постоянная $c > 0$ на всей хаотической компоненте движения и $c = 0$ вне ее. Если хаотическая компонента заполняет почти все фазовое пространство, как, например, в стандартном отображении (3.1.22) при $K \gg 1$, то $P = 1/\tau$, где τ — объем произвольной области фазового пространства, по которой производится интегрирование в (7.3.47). Однако для диссипативных систем $P(\boldsymbol{x})$ *априори* неизвестно и его нужно находить для каждого интересующего нас аттрактора [2]). Основной метод определения $P(\boldsymbol{x})$ состоит в итерировании (7.3.45)

$$P^{(i+1)}(\boldsymbol{x}) = TP^{(i)}(\boldsymbol{x}), \tag{7.3.48}$$

начиная с какого-либо начального распределения $P^0(\boldsymbol{x})$ (предполагая, что вне области притяжения аттрактора $P^{(0)}(\boldsymbol{x}) = 0$). Тогда [3])

$$P(\boldsymbol{x}) = \lim_{i\to\infty} P^{(i)}(\boldsymbol{x}).$$

---

[1]) См. примечание редактора на с. 444.— *Прим. ред.*

[2]) При практических вычислениях средних обычно достаточно знать крупноструктурное инвариантное распределение.

[3]) Этот предел существует, вообще говоря, лишь для хаотического аттрактора с перемешиванием.— *Прим. ред.*

Сведéние к одномерному отображению. Некоторое упрощение вычислений можно достигнуть по методу Бриджеса и Раулэндса [40]. Они исследовали двумерные отображения, которые можно описать в некотором пределе с помощью одномерных отображений. Рассмотрим отображение вида

$$\bar{x} = F(x, y), \tag{7.3.49а}$$

$$\bar{y} = bG(x, y), \tag{7.3.49б}$$

где b — малый параметр. Полагая в нулевом порядке $y = 0$, получаем одномерное отображение

$$\bar{x} = F(x, 0) = F_0(x). \tag{7.3.50}$$

Смещение аттрактора по y определяется уравнением (7.3.49б) при $y = 0$. Решая это уравнение относительно x, находим

$$x = G_0^{-1}\left(\frac{\bar{y}}{b}\right).$$

Подставляя x в (7.3.50), в итоге получаем для аттрактора уравнение нулевого порядка:

$$\bar{x} = F_0\left(G_0^{-1}\left(\frac{\bar{y}}{b}\right)\right). \tag{7.3.51}$$

Чтобы прийти к уравнению в следующем порядке, заменим $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в (7.3.51) на x и y и решим его относительно y:

$$y = bG_0\left(F_0^{-1}(x)\right). \tag{7.3.52}$$

Затем, подставляя это решение, как и раньше, в (7.3.49а), получим уравнение для аттрактора в первом порядке. Отображение Хенона (7.1.14) имеет вид (7.3.49) с $G(x, y) = x$. Структура аттрактора, найденная таким методом, удивительно хорошо совпадает с численными результатами.

Для получения инвариантного распределения методом итераций возьмем начальное распределение в виде

$$P^{(0)}(x, y) = P_1(x)\,\delta(y - y(x)), \tag{7.3.53}$$

где $P_1(x)$ — инвариантное распределение для одномерного отображения (7.3.50), а $y(x)$ определяется уравнением (7.3.52). При $b \ll 1$ это уже дает хорошее приближение для $P(x, y)$.

Трехмерные потоки приближенно описываются обычно с помощью одномерных необратимых отображений, для которых и определяется численно инвариантное распределение [324, 368]. Мы уже знаем два таких примера: аттрактор Лоренца (§ 1.5) и аттрактор Рёслера (п. 7.1б). Однако прямое сравнение действительного распределения и одномерного приближения проводится не часто. Израйлев и др. [210] сравнили полученные численным методом распределение $P_1(x)$ и распределение

$$\int P(x, y)\,dy$$

для трехмерного потока параметрически возбуждаемого нелинейного осциллятора и нашли хорошее согласие. Они указали также, что малый параметр в (7.3.49) связан с дробной частью фрактальной размерности $d_f = \sigma_1/|\sigma_2|$:

$$b \sim \exp[|\sigma_2|(d_f - 1)] = \exp(\sigma_1 + \sigma_2). \tag{7.3.54}$$

Использование уравнения ФПК. Хорошим начальным приближением $P^{(0)}$ инвариантного распределения может служить аналитическое решение уравнения ФПК. Такой метод наиболее удобен в случае малой скорости сжатия фазового объема ($|\sigma_1 + \sigma_2| \approx 0$), когда метод Бриджеса—Раулэндса неприменим. Этот случай можно рассматривать как малое диссипативное возмущение гамильтоновых отображений, для которых $\sigma_1 + \sigma_2 \equiv 0$.

В качестве примера возьмем ускорение Ферми с диссипацией. Используя упрощенное отображение Улама (3.4.6), вводим диссипацию посредством следующих формул:

$$u_{n+1} = |u_n(1-\delta) + \sin\psi_n|, \tag{7.3.55а}$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \frac{2\pi M}{u_{n+1}}. \tag{7.3.55б}$$

Здесь u_n — приведенная скорость частицы, $\delta \ll 1$ — относительная потеря скорости при столкновении с неподвижной стенкой, ψ_n — фаза колеблющейся стенки в момент соударения с частицей, а $M \gg 1$ пропорционально отношению расстояния между стенками к амплитуде колебания стенки (п. 3.4а). Якобиан отображения (7.3.55) равен

$$R = \frac{\partial(u_{n+1}, \psi_{n+1})}{\partial(u_n, \psi_n)} = 1 - \delta. \tag{7.3.56}$$

При $\delta = 0$ отображение является гамильтоновым и приводит к обычной картине хаотического движения с островками устойчивости (рис. 1.14).

Для $0 < \delta \ll 1$ неподвижные точки в центрах областей устойчивости становятся притягивающими фокусами и можно ожидать, что хаотическая компонента движения будет полностью разрушена. Останется, однако, переходной хаос вблизи сепаратрис [1]), как описано в п. 7.3б. Численное моделирование отображения (7.3.55) подтвердило эти представления. Например, при $M = 100$ для $0 < \delta < 0{,}02$, в том числе и для очень малых $\delta \sim 10^{-6}$, наблюдался переходной хаос. Полное разрушение стационарного хаотического движения при малой диссипации является, по всей видимости, типичным для таких систем. Исследование масштаба времени, в те-

[1]) При достаточно малом δ переходной хаос охватывает практически всю область стохастичности для $\delta = 0$ [73, 74, 531].— *Прим. ред.*

чение которого сохраняется переходной хаос, проводилось, например, Чириковым и Израйлевым [73, 74]. Однако сейчас нас интересует стационарный хаос, т. е. образование странного аттрактора.

При $M = 100$ численные данные убедительно показывают, что в интервале $0{,}03 \leqslant \delta \leqslant 0{,}3$ (значения $\delta > 0{,}3$ не исследовались) имеется странный аттрактор [1]). Правда, при этом нельзя исключить существование малых участков внутри этого интервала δ с периодическим движением. На рис. 7.28, *а* показана поверхность сечения (u, ψ) в интервале $4 < u < 7$ после $4{,}5 \cdot 10^5$ итераций одной траектории. Хорошо видна слоистая структура аттрактора. Более мелкая структура внутри слоев представлена на рис. 7.28, *б*, где в увеличенном масштабе показан участок фазовой плоскости $4{,}4 < u < 4{,}8$. Этот участок состоит из $200 \cdot 100$ ячеек, а число итераций траектории составляет $3 \cdot 10^6$. Если просуммировать распределение $P(u, \psi)$ по фазе ψ при постоянном u, то получается значительно более гладкое распределение $P(u)$. Согласно численным данным, распределение $P(u)$ хорошо аппроксимируется распределением Гаусса

$$P(u) \propto \exp(-\alpha u^2),$$

где α зависит от δ, но не от M. Вычисление $P(u)$ производится так же, как и в п. 5.4б. Будем исходить из усредненного по фазе уравнения ФПК (5.4.5). Коэффициенты трения B и диффузии D равны, согласно (5.4.6) и (5.4.7):

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \Delta u, \tag{7.3.57а}$$

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi (\Delta u)^2, \tag{7.3.57б}$$

---

[1]) Образование хаотического аттрактора при достаточно сильной диссипации, которое, по-видимому, наблюдалось также в работах [73, 74, 531], связано с тем, что диссипация разрушает устойчивые области. Однако приведенное в тексте критическое значение $\delta = 0{,}03$ вызывает сомнения. Для образования хаотического аттрактора требуется по крайней мере, чтобы все неподвижные точки отображения (см. рис. 1.14) стали неустойчивыми. Можно показать, что это происходит при условии: $\delta > (2/\pi^2 M)^{1/3} \approx 0{,}13$ $(M = 100)$, что заметно превышает приведенное значение, и даже значение $\delta = 0{,}1$ в численном моделировании (рис. 7.28). Для данных на рис. 7.29 это же условие имеет вид $M > 203$ $(\delta = 0{,}1)$. Причина, по которой захват траектории в устойчивый фокус не наблюдается при численном моделировании, состоит, по всей видимости, в том, что плотность равновесной функции распределения (7.3.61) в области захвата ($8{,}7 \leqslant u \leqslant 10$ для данных на рис. 7.28) исчезающе мала и соответственно время существования переходного хаоса огромно. В таком случае вполне можно говорить о квазистационарном хаосе. Условие его существования в данной модели, как можно показать, имеет вид: $\pi M \delta \gtrsim 1$; оно выполняется с запасом для всех численных данных на рис. 7.28 и 7.29.— *Прим. ред.*

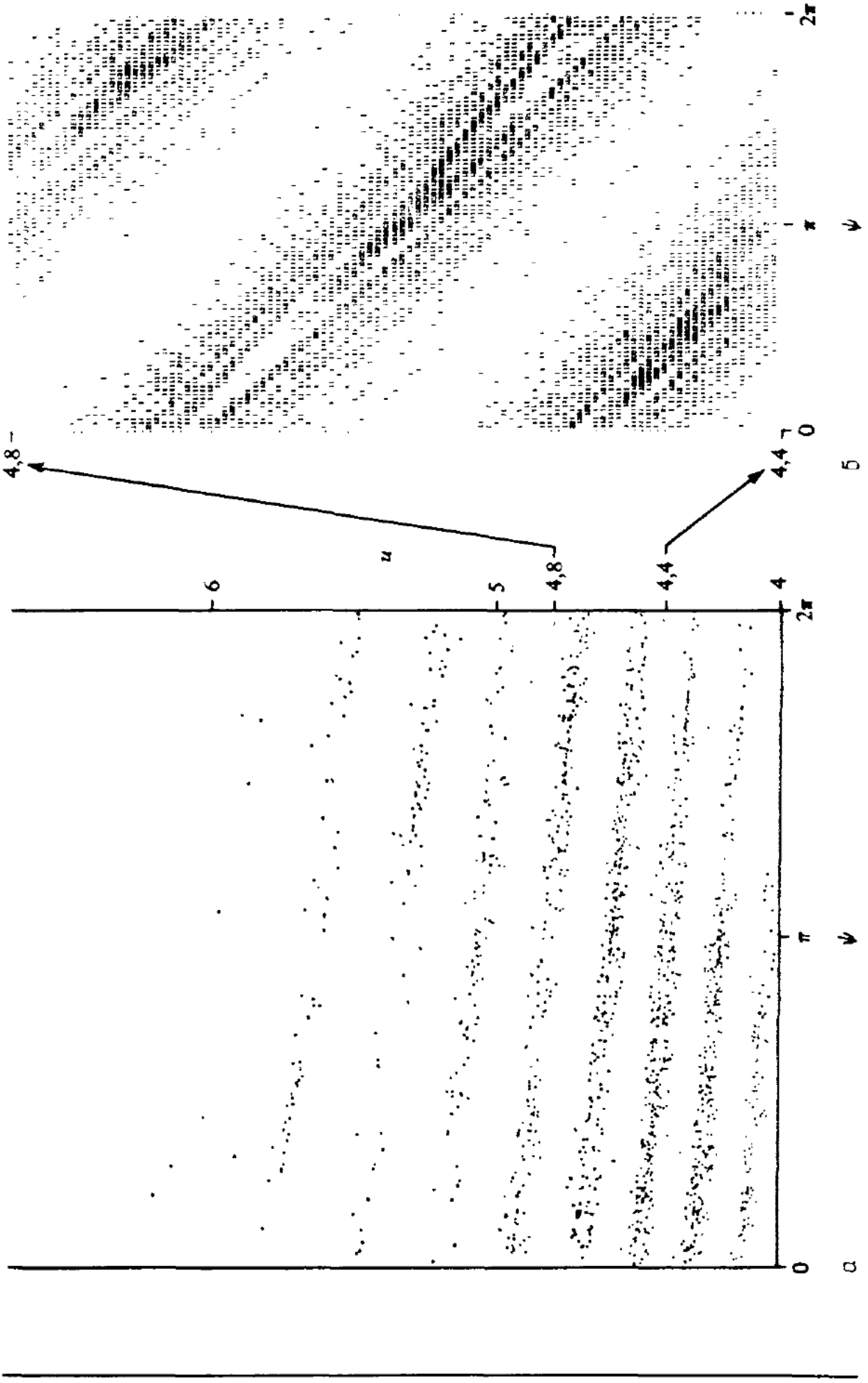


Рис. 7.28. Фазовая плоскость для модели ускорения Ферми с диссипацией при $M = 100$ и $\delta = 0{,}1$.

а — одна траектория в интервале $4 < u < 7$; $4{,}5 \cdot 10^5$ итераций; *б* — то же в увеличенном масштабе по *u*; $3 \cdot 10^6$ итераций, 100×100 ячеек; цифры пропорциональны логарифму числа попаданий в ячейку.

где мы предположили равномерное распределение по фазе уже после одной итерации. Из (7.3.55а) имеем

$$\Delta u(\psi) = -\delta u + \sin\psi \tag{7.3.58}$$

и

$$B = -\delta u, \tag{7.3.59а}$$

$$D = \frac{1}{2} + \delta^2 u^2. \tag{7.3.59б}$$

В стационарном состоянии и в отсутствие потока частиц уравнение ФПК имеет вид

$$-BP^{(0)} + \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(DP^{(0)}\right) = 0. \tag{7.3.60}$$

Опуская второй член в (7.3.59б) (см. ниже), получаем нормированное на единицу решение

$$P^{(0)}(u) = \left(\frac{8\delta}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-2\delta u^2\right). \tag{7.3.61}$$

На рис. 7.29 это решение (сплошная прямая) сравнивается с численными данными при $\delta = 0{,}1$ и различных M. При малых скоростях все численные значения хорошо ложатся на теоретическую прямую и не зависят от M. Однако при больших скоростях имеется систематическое отклонение. Очевидно, это связано с нарушением условия (5.4.4) применимости уравнения ФПК, которое в данном случае принимает вид

$$\left(\frac{1}{P^{(0)}}\frac{dP^{(0)}}{du}\right)^{-1} \gg |\Delta u| = 1,$$

или $u^2 \ll (4\delta)^{-2} = 6{,}25$ при $\delta = 0{,}1$. Во всяком случае, (7.3.61) является хорошим первым приближением для инвариантного распределения, хотя в нем и полностью отсутствует слоистая структура, масштаб которой по u существенно меньше 1 (см. рис. 7.28, *а*).

Чтобы получить эту структуру, воспользуемся методом итераций, согласно (7.3.48), взяв в качестве начального $P^{(0)}$ распределение (7.3.61). Записывая (7.3.48) в явном виде, находим

$$P^{(i+1)}(\bar{u}, \bar{\psi})\, d\bar{u}\, d\bar{\psi} = P^{(i)}(u, \psi)\, du\, d\psi, \tag{7.3.62}$$

или

$$P^{(i+1)}(\bar{u}, \bar{\psi}) = RP^{(i)}(u, \psi), \tag{7.3.63}$$

где

$$R = \frac{\partial(u, \psi)}{\partial(\bar{u}, \bar{\psi})} \tag{7.3.64}$$

— якобиан обратного отображения (T^{-1})

$$u = u(\bar{u}, \bar{\psi}), \quad \psi = \psi(\bar{u}, \bar{\psi}). \tag{7.3.65}$$

Для диссипативного отображения Улама (7.3.55) $R = (1-\delta)^{-1}$ из (7.3.56), а T^{-1} имеет вид

$$\psi = \bar{\psi} - \frac{2\pi M}{\bar{u}},$$

$$u = \frac{\bar{u} - \sin[\bar{\psi} - (2\pi M/\bar{u})]}{1-\delta}. \tag{7.3.66}$$

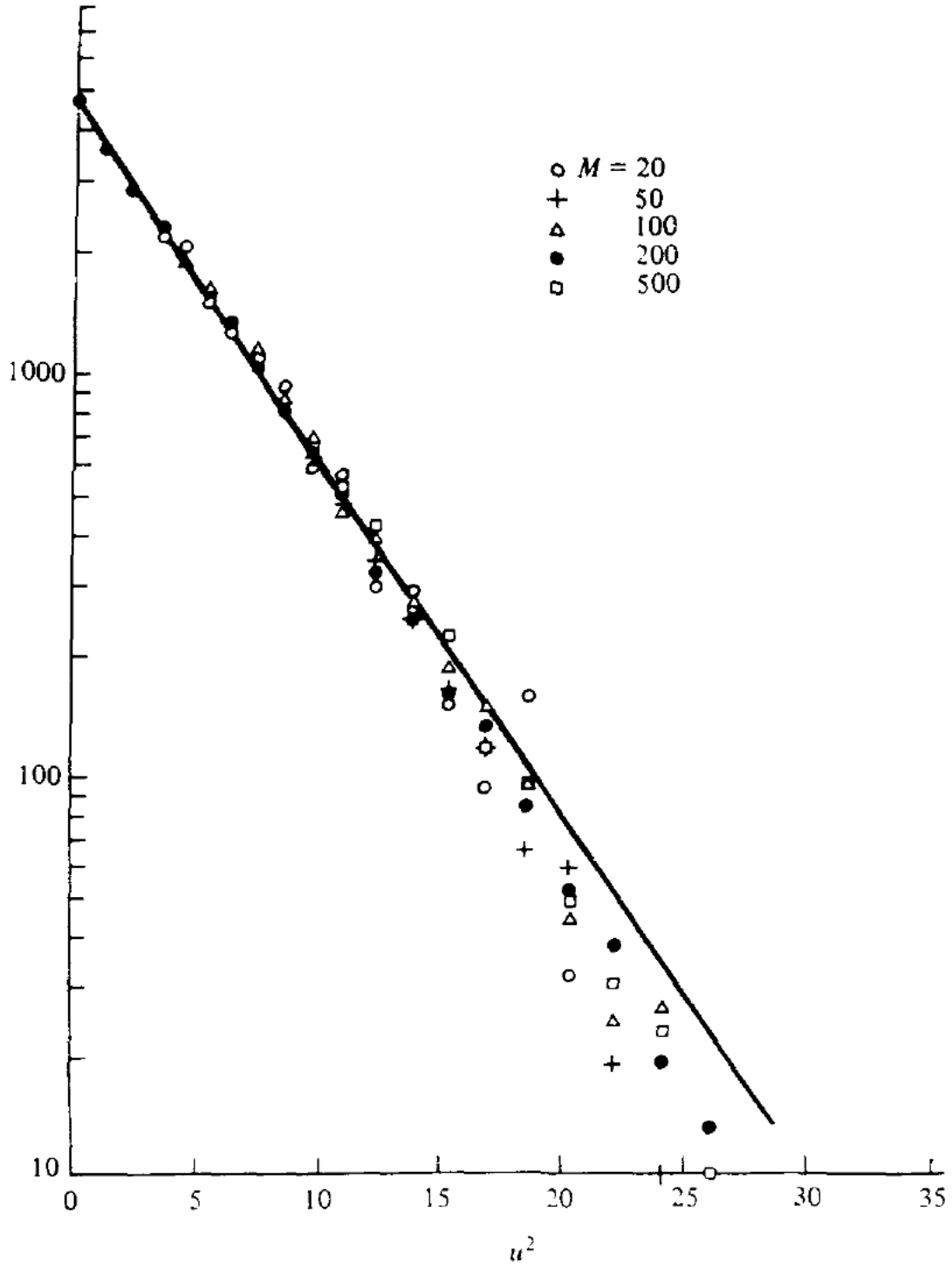


Рис. 7.29. Сравнение численных данных для инвариантного распределения с решением уравнения ФПК при $\delta = 0{,}1$ и различных значениях M.

По оси ординат отложена величина, пропорциональная интегралу функции распределения по фазе ψ.

Подставляя (7.3.66) в (7.3.63) с $P^{(0)}$ из (7.3.61), получаем следующее приближение для инвариантного распределения:

$$P^{(1)}(\bar{u}, \bar{\psi}) = \left(\frac{8\delta}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{1-\delta} \exp\left\{-\frac{2\delta}{(1-\delta)^2}\left[\bar{u} - \sin\left(\bar{\psi} - \frac{2\pi M}{\bar{u}}\right)\right]^2\right\}. \tag{7.3.67}$$

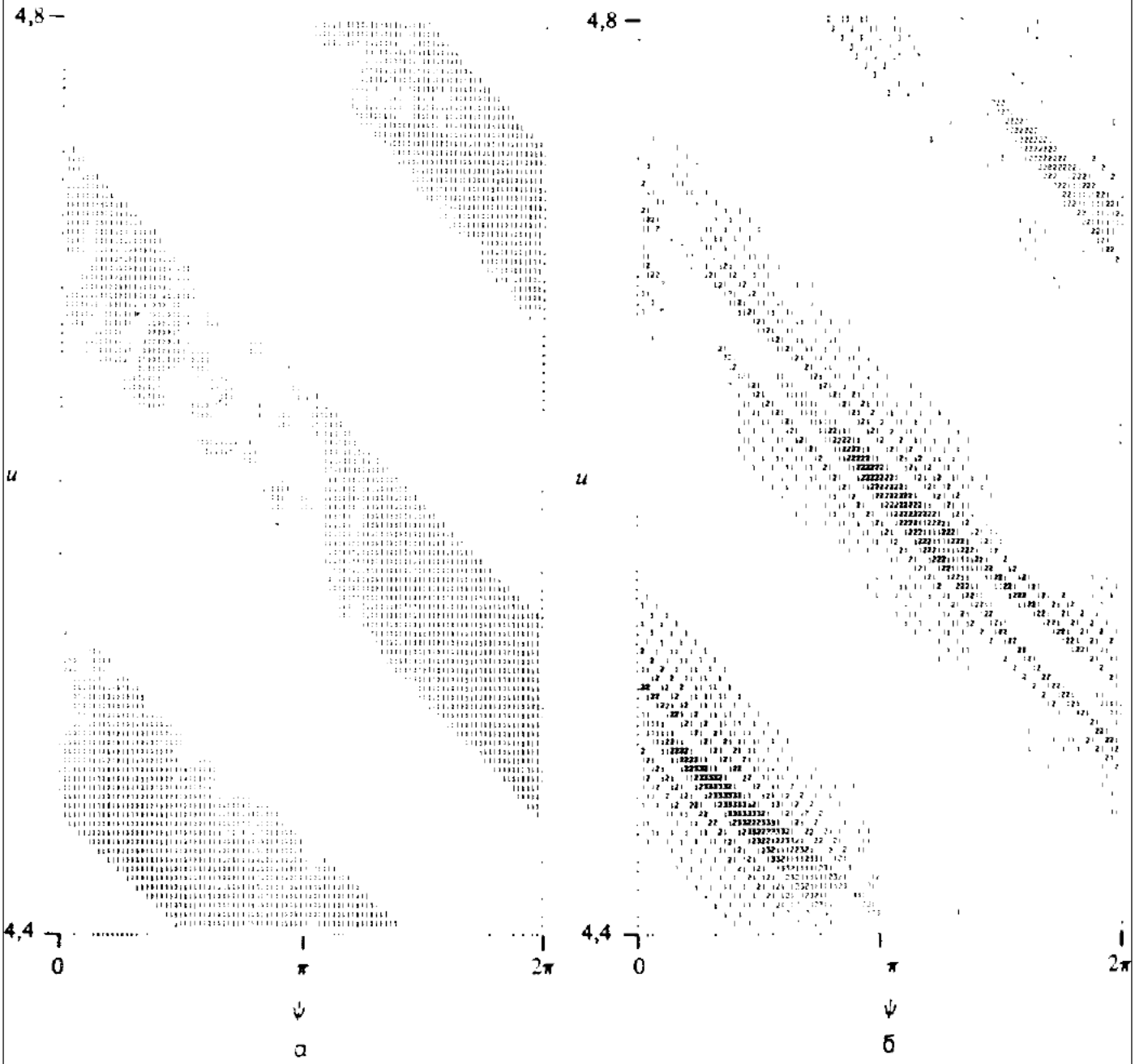


Рис. 7.30. Последовательные приближения при вычислении инвариантного распределения (по данным работы [277]).

а) $P^{(1)}(u, \psi)$; *б*) $P^{(2)}(u, \psi)$; начальное $P^{(0)}(u)$ из (7.3.61). Обозначение и параметры те же, что и на рис. 7.28, *б*.

Это приближение показано на рис. 7.30, *а*, взятом из работы Либермана и Цанга [277]. Его следует сравнить с численными данными на рис. 7.28, *б*. В обоих случаях использованы одинаковые параметры модели и ее представления на фазовой плоскости. Грубая слоистая структура $P^{(1)}$ хорошо согласуется с численными данными. Результат второй итерации (7.3.63) — распределение $P^{(2)}$ —

показан на рис. 7.30, *б* в тех же условиях. Согласие с численными данными на рис. 7.28, *б* становится поразительно хорошим. Следующие итерации дали бы еще более тонкую структуру аттрактора. Для других значений δ, например 0,03, также имеется хорошее согласие.

§ 7.4. Проблема турбулентности

Рассмотрим теперь связь исследованных выше конечномерных хаотических потоков с движением сплошной среды («жидкости») с бесконечным числом степеней свободы. Сначала мы обсудим вопрос, в каком смысле конечномерные модели аппроксимируют жидкость, а затем опишем некоторые механизмы перехода от регулярного движения к турбулентному.

7.4а. Представление Фурье

Будем описывать поведение жидкости с помощью дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \hat{\mathscr{L}}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t), \tag{7.4.1}$$

где $\boldsymbol{Q}$ — M-мерный вектор состояния жидкости [компонентами $\boldsymbol{Q}$ могут быть, например, давление $p(\boldsymbol{x}, t)$, скорость жидкости $v(\boldsymbol{x}, t)$, плотность $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ и т. д.], $\boldsymbol{x}$ — обычный радиус-вектор с компонентами x, y, z, а $\hat{\mathscr{L}}(\boldsymbol{x})$ — независящий от времени нелинейный дифференциальный оператор. Обычный метод изучения системы (7.4.1) состоит в переходе к представлению Фурье для вектора $\boldsymbol{Q}$:

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k}}(t)\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{7.4.2}$$

где

$$\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x\, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t)\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{7.4.3}$$

Подставляя (7.4.2) в (7.4.1) и используя ортогональность функций $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$, получаем уравнения движения в виде [1])

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q}_1 \ldots \boldsymbol{q}_k). \tag{7.4.4}$$

Если оставить в сумме (7.4.2) N «наиболее существенных» мод, то задача сведется к конечному числу (MN) обыкновенных диффе-

[1]) Такое представление годится, конечно, только для модельных задач с простейшими граничными условиями. В более общем случае обычно используется разложение по собственным функциям соответствующего системе (7.4.1) линейного уравнения (см., например, книгу [534]). — *Прим. ред.*

ренциальных уравнений первого порядка, описывающих временну́ю эволюцию этих мод. Такой метод называется приближением Галёркина.

Рассмотрим в качестве примера задачу Рэлея — Бенара о тепловой конвекции (рис. 7.31, *а*). Слой жидкости толщиной h в поле тяжести подогревается снизу при постоянной разности температур $\Delta T = T_1 - T_0$. Движение жидкости описывается уравнениями

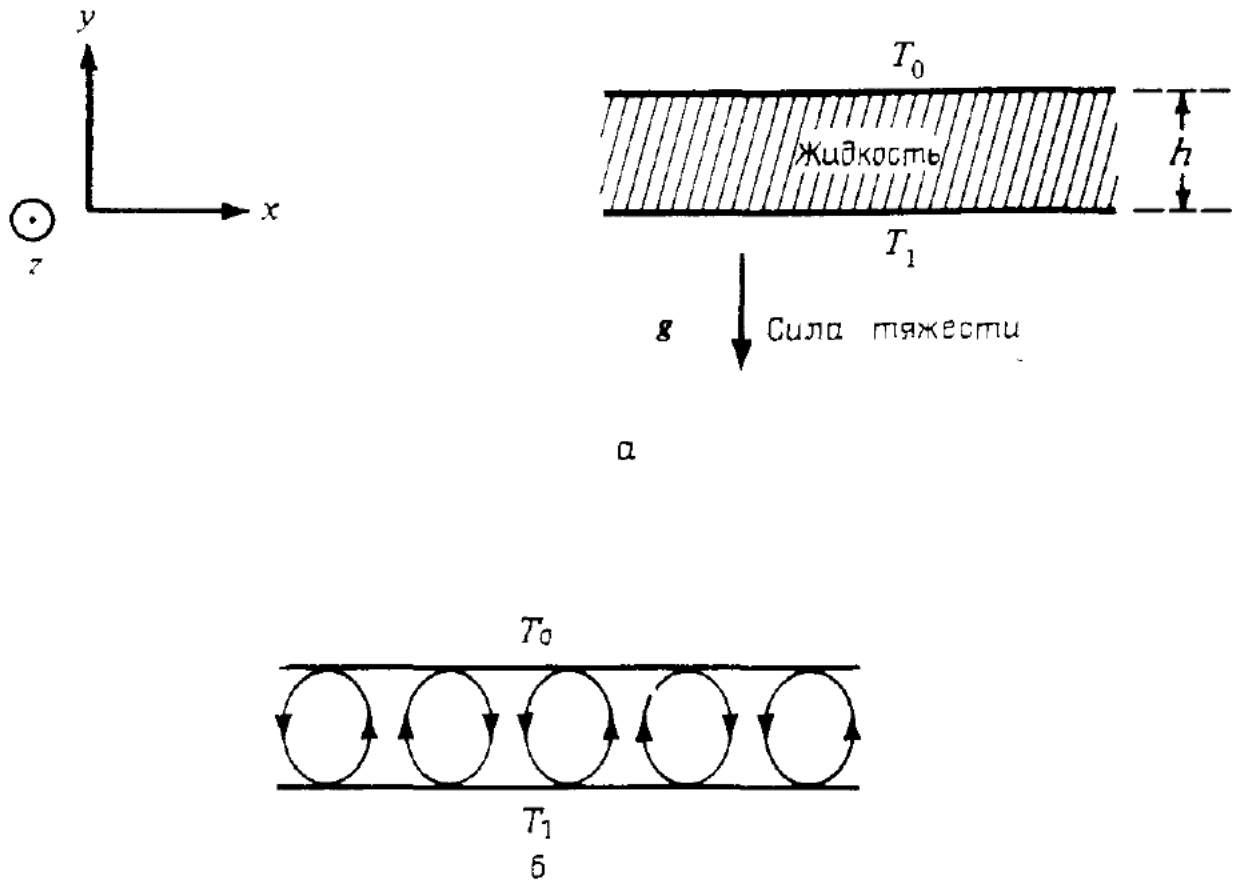


Рис. 7.31. Конвекция Рэлея—Бенара.
а — схема опыта; $\Delta T = T_1 - T_0 > 0$; *б* — стационарная конвекция при $\Delta T > \Delta T_c$

Навье—Стокса. Ограничиваясь двумерным движением ($\partial/\partial z \equiv 0$), введем функцию потока $\psi(x, y, t)$, которая связана со скоростью жидкости $\boldsymbol{v}(x, y, t)$ посредством формулы

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times (\check{z}\psi). \tag{7.4.5}$$

Введем также функцию $\Theta(x, y, t)$, описывающую отклонение температуры $T(x, y, t)$ от линейной зависимости по y:

$$\Theta = T - T_1 + \frac{\Delta T}{h} y. \tag{7.4.6}$$

В отсутствие конвекции $\Theta = 0$. Для выбранных переменных задача сводится к двум уравнениям в частных производных [283]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\right) + \nu\Delta^2\psi - g\alpha\frac{\partial\Theta}{\partial x}, \tag{7.4.7а}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)-\frac{\Delta T}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\varkappa\Delta\Theta. \qquad (7.4.7б)$$

Здесь ν — кинематическая вязкость, g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент теплового расширения и $\varkappa$ — температуропроводность [1]). Примем граничные условия в виде $\Theta=\psi=\Delta\psi=0$ при $y=0$ и $y=h$, что соответствует фиксированным T_0 и T_1 и свободной поверхности жидкости. При малых ΔT имеется устойчивое равновесное состояние $\psi=\Theta=0$, соответствующее покоящейся жидкости и молекулярной теплопередаче. Еще лорд Рэлей изучал линейную устойчивость этого состояния и показал, что выше некоторого критического значения ΔT_c оно становится неустойчивым и в жидкости возникают циркулирующие потоки, (рис. 7.31, *б*):

$$\psi=\psi_0\sin\left(\frac{\pi a x}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right), \qquad (7.4.8а)$$

$$\Theta=\Theta_0\cos\left(\frac{\pi a x}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right), \qquad (7.4.8б)$$

где параметр a характеризует периодичность движения по x. Введем безразмерное число Рэлея, характеризующее разность температур:

$$R_a=\frac{g\alpha h^3\Delta T}{\nu\varkappa}. \qquad (7.4.9)$$

Критическое значение числа Рэлея, определяющее возникновение устойчивой конвекции, равно

$$R_c=\frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2} \qquad (7.4.10)$$

и принимает минимальное значение $27\,\pi^4/4$ для $a=1/\sqrt{2}$.

При дальнейшем увеличении R_a выше R_c регулярная конвекция становится линейно неустойчивой. Эксперимент показывает, что конвекция становится при этом нестационарной и нерегулярной. Для анализа этого случая, следуя Зальцману [359], разложим ψ и Θ в двойной ряд Фурье по x и y, так что коэффициенты разложения будут зависеть только от t. Оставляя конечное число членов, получаем представление движения в конечномерном фазовом пространстве фурье-амплитуд. Зальцман численно нашел случаи хаотического движения [2]). Лоренц [283] исследовал упрощен-

---

[1]) Величина $\omega=-\Delta\psi$ характеризует вращение элемента жидкости вокруг оси z и называется завихренностью ($\check{z}\omega=\nabla\times\boldsymbol{v}$).— *Прим. ред.*

[2]) См. благодарности в статье Лоренца [283].— *Прим. ред.*

ную систему, в которой оставлены только три фурье-амплитуды:

$$\frac{a}{\varkappa(1+a^2)}\psi=\sqrt{2}\,X(t)\sin\left(\frac{\pi a x}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right),$$

$$\frac{\pi R_a}{R_c(\Delta T)}\Theta=\sqrt{2}\,Y(t)\cos\left(\frac{\pi a x}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right)-Z(t)\sin\left(\frac{2\pi y}{h}\right). \tag{7.4.11}$$

Здесь X — амплитуда конвективного движения, Y — разность температур между восходящими и нисходящими потоками, а Z — отклонение вертикального профиля температуры от линейного. Подставляя (7.4.11) в уравнение (7.4.7), приходим к модели Лоренца:

$$\dot{X}=-\sigma X+\sigma Y, \tag{7.4.12а}$$

$$\dot{Y}=-XZ+rX-Y, \tag{7.4.12б}$$

$$\dot{Z}=XY-bZ, \tag{7.4.12в}$$

где $\sigma=\nu/\varkappa$ — число Прандтля, $r=R_a/R_c$ — приведенное число Рэлея, $b=4(1+a^2)^{-1}$, а точка означает производную по безразмерному времени $\tau=\pi^2h^{-2}(1+a^2)\varkappa t$.

Модель Лоренца и ее странный аттрактор уже рассматривались в § 1.5 и выше в этой главе. Здесь же нас интересует вопрос: в какой мере эта модель представляет поведение жидкости в задаче Рэлея—Бенара? На первый взгляд обе системы очень далеки друг от друга, поскольку модель Лоренца является чрезвычайно упрощенной с ее всего лишь тремя модами для двух функций состояния жидкости ψ и Θ. Увеличение числа мод до пяти, семи и даже четырнадцати сохраняет некоторые черты поведения модели, включая и образование странного аттрактора. Однако переход к хаотическому движению может происходить при этом через разные последовательности бифуркаций [98] (дополнительную библиографию см. в работе [180]). Более того, численное моделирование двумерной конвекции, согласно (7.4.7), показывает отсутствие турбулентного движения [1]). В этом состоит существенное отличие от трехмерной конвекции Рэлея—Бенара, в которой турбулентность наблюдается экспериментально.

В работе [131] было показано, что двумерные решения уравнения Навье—Стокса можно описать асимптотически (при $t\to\infty$) конечным числом мод N_2. Этот результат был обобщен на трехмерные решения, причем $N_3\propto N_2^3$ [132]. Поэтому при фиксированных параметрах системы и начальных условиях конечномерные

[1]) Это замечание непонятно. По поводу особенностей двумерной турбулентности см., например, работы [542, 543].— *Прим. ред.*

модели с некоторым минимальным значением N_2 (или N_3) представляют все физически существенные свойства реального течения [1]). Треве [412] предложил численный метод проверки *апостериори*, было ли выбранное число мод достаточным. Однако пока не существует никакого метода определения необходимого числа мод *априори* до численного моделирования[2]).

7.4б. Переход к турбулентности

Обсудим теперь различные гипотезы относительно механизма перехода от регулярного течения к гидродинамической турбулентности. За исключением самой ранней гипотезы Ландау [251], все предложенные механизмы связаны с конечномерными моделями. Имеющиеся экспериментальные данные не позволяют сделать определенного выбора между моделями, поскольку в опытах часто присутствуют черты разных механизмов. Наше описание возникновения турбулентности базируется на обзорах Хеллемана [180], Отта [324] и Экмана [112].

Хотя явление турбулентности известно уже сотни лет, детальные измерения характеристик потока вблизи перехода были выполнены только в последнее десятилетие[3]). Возникновению турбулентного режима движения обычно предшествует возбуждение

---

[1]) Точнее конечное число мод движения полностью определяет и все остальные моды (см. также работу [545]). Физически это связано с сильным затуханием высоких мод, которые, таким образом, просто повторяют с уменьшенной амплитудой колебания основных мод и имеют, в частности, тот же тип спектра (дискретный или непрерывный). Иначе можно сказать, что движение на аттракторе вообще имеет конечное число мод, однако эти моды не совпадают с невозмущенными модами приближения Галёркина. Отсюда следует также, что движение имеет только конечное число положительных показателей Ляпунова. Отметим, что конечномерность аттрактора (гипотеза Хопфа [546]) доказана только для двумерного течения [131, 545], тогда как в трехмерном случае это принимается в работе [132] в качестве гипотезы. — *Прим. ред.*

[2]) Грубые априорные оценки получены в упомянутой работе [132] и их можно представить в виде $N_2 \sim \mathrm{Re}^3 \sim N_3^{1/3}$, где Re — число Рейнольдса. Однако эти оценки (как и критерий в работе [412]) являются лишь достаточными и, вообще говоря, весьма неэффективными. Например, в случае однородной турбулентности они существенно превосходят естественную оценку числа степеней свободы по Ландау и Лифшицу [539]: $N_2 \sim \mathrm{Re}^{3/2} \sim N_3^{2/3}$. Это хорошо согласуется также с полученной недавно строгой оценкой снизу (необходимой): $N_2 \sim \mathrm{Re}$ [560]. В любом случае такие оценки указывают на существенный дефект используемых конечномерных моделей турбулентности, число степеней свободы которых фиксировано, а параметры изменяются.— *Прим. ред.*

[3]) Это краткое замечание представляет обширные многолетние исследования турбулентности весьма однобоко (см., например, работы [535, 536]). В последнее время, особенно после нашумевшей работы Рюэля и Тэкенса [355], действительно были проведены некоторые специальные эксперименты, иногда, кстати сказать, весьма поспешно (см. примечание редактора на с. 483), по проверке ряда новых гипотез (см. ниже).— *Прим. ред.*

колебаний одной или нескольких независимых частот и их гармоник, а иногда и субгармоник. Основные эксперименты по детальному исследованию перехода к турбулентности относятся к различным вариантам конвекции Рэлея — Бенара, а также вихрей Тейлора, возникающих в слое жидкости между вращающимися цилиндрами (так называемое круговое течение Куэтта). Эти примеры мы и используем ниже при сравнении с различными гипотезами о механизме возникновения турбулентности.

Первоначальная картина возникновения турбулентности, предложенная Ландау, была основана на представлении об иерархии неустойчивостей. При увеличении некоторого параметра, например числа Рейнольдса или числа Рэлея, нелинейные колебания жидкости теряют устойчивость и появляются все новые и новые независимые частоты движения ω_1, ω_2, ω_3 . . . . При этом должно наблюдаться квазипериодическое движение с одной, двумя, тремя и т. д. основными частотами. Таким образом, мы приходим к последовательности бифуркаций Хопфа, т. е. к движению по поверхности некоторого тора возрастающей размерности. Движение выглядит все более и более сложным, однако непрерывный спектр и хаотическое движение возникают лишь при бесконечном числе бифуркаций. Модель Ландау представлена схематически в табл. 7.2.

Хотя в экспериментах и наблюдается до четырех [158] независимых частот, резкий переход к непрерывному спектру не согласуется с моделью Ландау [1]). Помимо этого, теоретически было показано (см. работу [112]), что последовательность бифуркаций Хопфа, как и само квазипериодическое движение, не являются типичными. Судя по рассмотренным выше примерам резкого [2]) возникновения непрерывного спектра, связанного с образованием странного аттрактора, можно ожидать, что именно такой механизм

---

[1]) Поучительно отметить, что эта «квазипериодическая» модель турбулентности была очевидно навеяна аналогиями с квантовой механикой. Вот соответствующая цитата из оригинальной работы Ландау [251]:

«Задача об определении возможных значений «частот» Ω при данных граничных условиях движения представляет собой Eigenwert-проблему. В результате ее решения должен получиться спектр «собственных частот» . . . Можно предполагать, что частоты непрерывного спектра соответствуют движениям $\boldsymbol{v}_1$ [возмущение], не затухающим на бесконечности [в пространстве], а частоты дискретного спектра — движениям, достаточно быстро затухающим на бесконечности (подобно тому, как это имеет место во многих других Eigenwert-проблемах) . . . Соответственно этому ниже мы можем рассматривать только «частоты» Ω дискретного спектра».

В квантовой механике это действительно так.— *Прим. ред.*

[2]) Представление о «резком» переходе к хаотическому движению является условным. Так, например, в механизме бифуркаций удвоения хаотический аттрактор появляется в критической точке ($C = C_\infty$) лишь номинально, поскольку мощность хаотической компоненты движения в этой точке равна нулю и плавно возрастает в результате обратных бифуркаций (см., например, рис. 7.22).— *Прим. ред.*

Таблица 7.2. Модели и механизмы перехода к турбулентности

Модель	Механизм			
а) Ландау	Неподвижная точка	→ Бифуркация Хопфа	Периодическая траектория	→ Бифуркация Хопфа
б) Рюэль — Тэкенс — Ньюхаус	То же	→ То же	То же	→ То же
в) Фейгенбаум	»	→	» (период T)	→ Бифуркация удвоения
г) Помо — Манневиль	»	→	»	→ Обратная тангенциальная бифуркация

и послужит основой построения современной теории турбулентности, как это и оказывается в действительности.

Рюэль и Тэкенс [355] предложили другой механизм возникновения турбулентности, согласно которому сначала происходят две последовательные бифуркации Хопфа, как и в модели Ландау, однако затем нелинейность разрушает трехчастотное движение и образуется «странный» аттрактор (табл. 7.2). По первоначальной гипотезе требовалась размерность потока не менее четырех. Предположение о неустойчивости трехчастотного аттрактора в типичном случае было позднее доказано, а минимальная размерность сокращена до трех [317] [1]).

Модель Рюэля—Тэкенса исследовалась численно на примере простого двумерного отображения [100]. Были обнаружены переходы от устойчивого фокуса к предельному циклу, затем к двухчастотному движению и, наконец, к странному аттрактору. В этой связи важно отметить, что в отличие от модели Лоренца с тремя модами в модели конвекции Рэлея—Бенара, использующей 14 мод, также обнаружен квазипериодический аттрактор на некоторой двумерной поверхности в 14-мерном фазовом пространстве [98].

---

[1]) Хотя работа [355] оказала фактически заметное влияние на развитие как теоретических, так и экспериментальных исследований по турбулентности, предложенный ее авторами конкретный механизм хаоса, связанный с резонансами высоких гармоник, представляется слишком «нежным» для такого «грубого» явления, как гидродинамическая турбулентность. Что же касается минимальной размерности потока, то этот вопрос был выяснен еще в классической работе Лоренца [283] (см. также работу [533]). — *Прим. ред.*

Механизм				
Квазипериодическая траектория (две основные частоты)	→ Бифуркация Хопфа →	Квазипериодическая траектория (три основные частоты)	→ ··· Бифуркации Хопфа →	Турбулентное движение
То же	→	Странный аттрактор		
Периодическая траектория (период 2 T)	→ Бифуркация удвоения →	Периодическая траектория (период 4 T)	→ ··· Бифуркации удвоения →	Странный аттрактор
Хаотическое движение с перемежаемостью				

Некоторые экспериментальные данные, по-видимому, подтверждают модель Рюэля—Тэкенса. Так, в спектрах мощности появляется сначала одна, затем вторая и, возможно, третья независимая частота. На пороге появления третьей частоты внезапно возникает широкополосный шум, который свидетельствует о переходе к хаотическому движению. Экспериментально исследовались как вихри Тейлора в жидкости между вращающимися цилиндрами [125], так и конвекция Рэлея—Бенара [5]. На рис. 7.32 из популярной статьи Суинни и Голуба [396] показаны спектры скорости жидкости для течения Куэтта (слева) и для конвекции Рэлея—Бенара (справа). В обоих случаях перед переходом к непрерывному спектру наблюдается сначала одна, а затем две независимые частоты f_1 и f_2. Однако это зависит, вообще говоря, от начальных условий и иногда частоты f_1 и f_2 оказываются синхронизованными [1]). В другом эксперименте по течению Куэтта [158] наблюдались по крайней мере четыре независимые частоты. Это указывает на то, что переход к турбулентности происходит не всегда после двух бифуркаций Хопфа, как в модели Рюэля—Тэкенса.

Третья модель перехода к турбулентности, предложенная Фейгенбаумом, связана с последовательностью бифуркаций удвоения периода [122]. Переход начинается с бифуркации Хопфа из устойчивого фокуса в предельный цикл с частотой f_1. При дальнейшем

[1]) То есть отношение частот $f_1/f_2 = m/n$ рационально (в пределах точности измерений $\sim 10^{-4}$, см., например, работу [541]). Экспериментальная независимость (несоизмеримость) частот определяется с той же точностью для $|m|, |n| < 20$. — *Прим. ред.*

увеличении параметра происходят последовательные бифуркации удвоения, приводящие к периодическому движению с частотами $f_1/2$, $f_1/4$, $f_1/8$ и т. д. Эта последовательность сходится при некотором критическом значении параметра, при котором возникает странный аттрактор (табл. 7.2). Механизм удвоения периода был описан в § 7.2 и п. 7.3а, где показан его универсальный характер. Существенно, что вблизи критической точки движение является близким к одномерному (см. п. 7.3а).

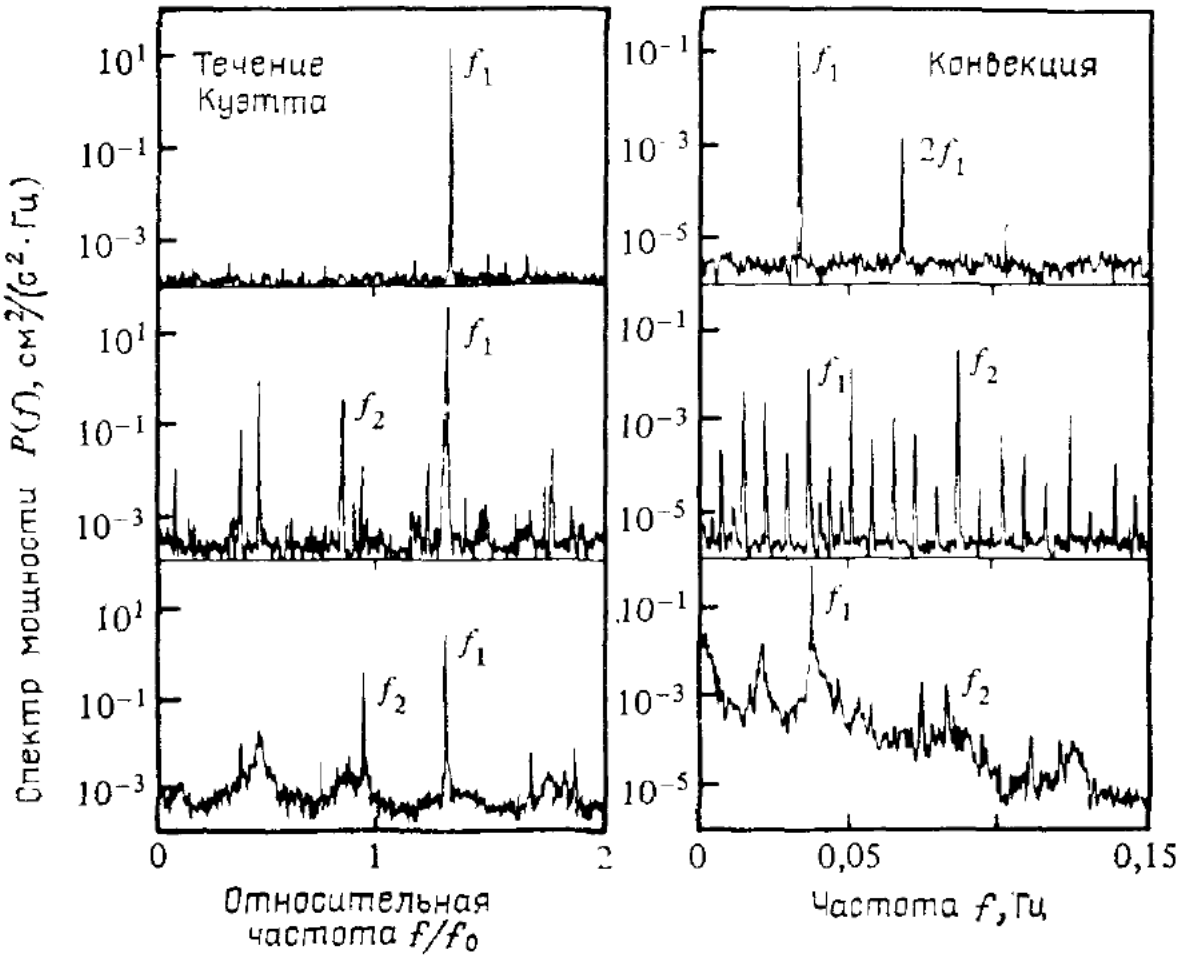


Рис. 7.32. Спектры скорости жидкости между вращающимися цилиндрами при трех значениях частоты внутреннего цилиндра f_0 (слева), то же для трех значений ΔT в задаче Рэлея—Бенара (справа) (по данным работы [396]).

Модель Фейгенбаума хорошо подтверждается численными экспериментами на простых моделях. Как мы видели выше, бифуркации удвоения периода найдены и во многих динамических системах с малой размерностью, таких, как аттрактор Рёслера, отображение Хенона, уравнение Дюффинга и др. Некоторые эксперименты по конвекции Рэлея—Бенара обнаруживают эти бифуркации, а также некоторые признаки их универсальности. Спектры скорости высокого разрешения в эксперименте Рэлея—Бенара с водой, показанные на рис. 7.33 [155, 157], демонстрируют некоторые из бифуркаций удвоения. Было проведено также сравнение экспериментальных значений амплитуд субгармоник с предсказаниями модели Фейгенбаума. Как показано в п. 7.2б, отношение амплитуд развитых субгармоник должно быть равным $\gamma \approx 6{,}6$. На рис. 7.33,*г*

расстояние между верхней прямой, проведенной по пикам гармоник частоты $f_2/2$, и нижней прямой соответствует множителю 6,6. Видно, что большинство пиков гармоник частоты $f_2/4$ примерно ложатся на нижнюю прямую в соответствии с теорией [1]). В другом

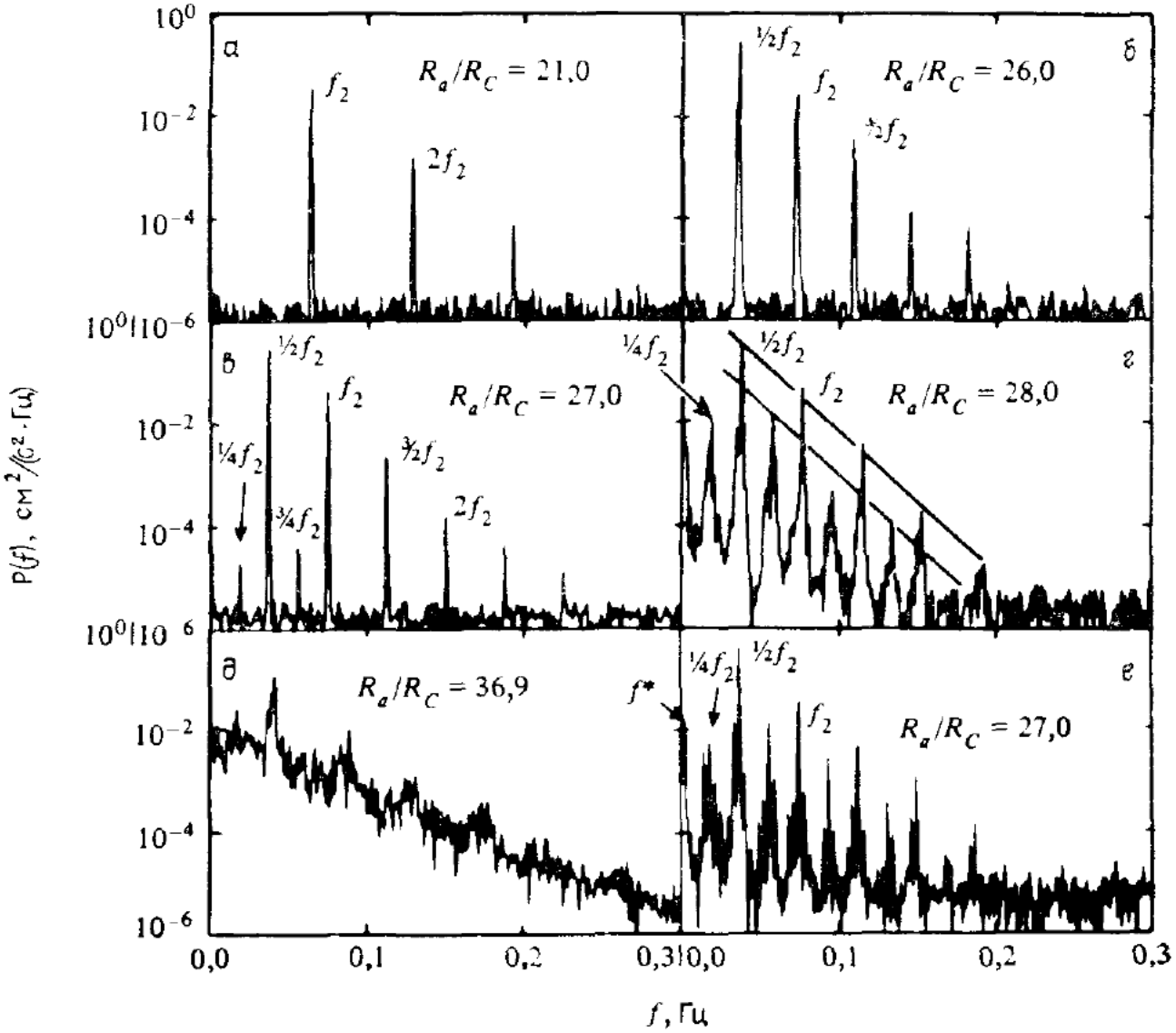


Рис. 7.33. Бифуркации удвоения периода в эксперименте Рэлея—Бенара (по данным работы [157]).

а—в — при увеличении числа Рэлея возникают субгармоники; *г* — хаотические полосы; *д* — непрерывный спектр; *е* — при уменьшении R_a появляется вторая частота f^*.

эксперименте по конвекции Рэлея—Бенара в жидком гелии [263] наблюдались последовательные субгармоники f_1, $f_1/2$, $f_1/4$, $f_1/8$ и $f_1/16$ в спектре температуры. Отношение амплитуд последовательных субгармоник также равно примерно 6,6 (см. работу [123]).

[1]) Сравнение экспериментальных данных на рис. 7.33, *г* для фиксированного значения параметра C с законом подобия (7.2.44) для разных C возможно вследствие того, что при бифуркации удвоения амплитуды прежних частот (четные гармоники на рис. 7.33, *г*) остаются неизменными согласно (7.2.40). При сравнении необходимо, во-первых, учитывать, что масштабный фактор γ относится к амплитудам гармоник, а во-вторых, брать только нечетные до бифуркации гармоники, т. е. только второй и шестой пики на рис. 7.33, *г*. В результате среднее $\gamma \approx 4{,}4$ (см. примечание редактора на с. 440). — *Прим. ред.*

Однако, как мы видели, другие эксперименты не подтверждают эти свойства [1]). Можно предположить, что причиной этого является внешний шум, который нарушает тонкую структуру спектра, и в зависимости от условий эксперимента субгармоники то появляются, то пропадают. Такое поведение действительно наблюдалось в численном моделировании Кратчфилдом и Хьюберманом [96].

Рассмотрим, наконец, четвертый механизм возникновения турбулентности, лежащий в основе модели Помо и Манневиля [293] и связанный с переходом к хаотическому движению с перемежаемостью. В этой модели при увеличении некоторого параметра периодическая траектория непосредственно превращается в хаотическую с перемежаемостью в результате обратной тангенциальной бифуркации.

Следуя Экману [112], покажем, каким образом это происходит на примере потери устойчивости предельного цикла периода 3 для одномерного квадратичного отображения (7.2.4). В п. 7.2б (см. рис. 7.15 и пояснения к нему) было показано, что при $C = C_0^{(3)} = (1-\sqrt{8})/2$ в результате тангенциальной бифуркации рождаются устойчивая и неустойчивая траектории периода 3. Они сохраняются в небольшом интервале значений $C<C_0^{(3)}$. При $C = C_0^{(3)}$ они сливаются и исчезают, рождая так называемое хаотическое движение с перемежаемостью. Под этим понимается следующее: можно показать, что хотя движение является хаотическим, однако при малой разности $C-C_0^{(3)} \sim \varepsilon$ типичная траектория будет находиться в окрестности периодической траектории в течение $\sim \varepsilon^{-1/2}$ итераций. При этом периодическая траектория

$$x_{3i} = f(f(f(x_{3i}))), \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

соответствует бифуркационному значению $C = C_0^{(3)}$. В течение этого времени траектория выглядит как периодическая, а затем, после выхода из этой области,— как хаотическая. Поэтому в модели Помо и Манневиля нерегулярное движение продолжается в течение некоторого случайного промежутка времени, сменяясь периодическим со средней длительностью $\sim |\mu-\mu_c|^{-1/2}$, где μ_c — бифуркационное значение некоторого параметра μ.

Численное моделирование квадратичного отображения подтверждает такое поведение [112]. Оно существует и для модели Лоренца в некотором интервале параметров [293]. Подобный переход к турбулентности наблюдался во многих экспериментах, включая конвекцию Рэлея—Бенара [273] и так называемую химическую турбулентность [352] (см. также дополнение А). Однако в этих случаях перемежаемость связана с переходом между

---

[1]) Речь идет, по-видимому, о данных на рис. 7.32. — *Прим. ред.*

двумя квазиустойчивыми состояниями системы и остается неясным, описывается ли такое поведение моделью Помо — Манневиля [1]).

Следует подчеркнуть, что единого механизма перехода к турбулентности не существует [2]). Если, например, система обнаруживает бифуркации удвоения периода, то можно предсказать зависимость этих бифуркаций от параметра. Однако пока неизвестно, каким образом можно узнать заранее, в какой системе это будет происходить. Отметим также, что все эти модели описывают только возникновение турбулентности и ничего не говорят о свойствах развитой турбулентности (см., например, [295]).

---

[1]) Хотя термин «перемежаемость» появился недавно, подобные процессы рассматривались уже довольно давно под более удачным, на наш взгляд, названием — «структурная турбулентность» (см., например, работы [537, 538], где имеется подробная библиография). В частности, появление структур в хаотическом режиме простой диссипативной модели описано в работе [530]. Такие флуктуирующие структуры часто встречаются и в гамильтоновых системах. Типичный пример — движение в узком стохастическом слое сепаратрисы маятника (резонанса) (§ 3.5). Здесь имеются три структуры (вращение в двух направлениях и колебания), между которыми происходят случайные переходы. — *Прим. ред.*

[2]) См., например, работу [541]. — *Прим. ред.*

Дополнение А

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Во введении мы уже упоминали о некоторых применениях обсуждаемых в настоящей монографии методов. Поскольку наиболее знакомой для нас областью является удержание и нагрев плазмы, то большинство примеров в тексте относится именно к этому кругу вопросов. Имеется, однако, много других областей, где рассматриваемая теория находит широкое применение: движение планет, ускорение и накопление заряженных частиц, процессы в твердых телах, молекулярная и химическая динамики, гидродинамика, экология и т. д. Кроме того, близкие проблемы возникают при изучении квантовых систем, которых мы не касались. Чтобы частично компенсировать указанный пробел, ниже дается краткая справка о некоторых из перечисленных применений теории. Поскольку круг обсуждаемых вопросов необычайно широк, мы даже и не пытаемся описать его полностью.

Многочисленные обзорные статьи и труды конференций помогут читателю ориентироваться в этой области. Некоторые применения теории в физике твердого тела (здесь не обсуждаемые) можно найти, например, в трудах конференции [58] [1]), а теория диссипативных систем и ее приложения описываются в работе [81]. Весьма полезна также обширная библиография в обзорах Чирикова [70] и Хеллемана [180]; другие ссылки даются ниже.

А.1. Небесная механика

Самые ранние приложения обсуждаемых в настоящей монографии методов, как и вообще применение самой гамильтоновой механики, связано с попытками предсказать движение планет на достаточно большом интервале времени. Именно к этой области относится знаменитая *задача трех тел* и ее упрощенный вариант, так называемая *ограниченная задача трех тел*. Первая касается движения трех произвольных гравитационно взаимодействующих масс. В более простой «ограниченной задаче» масса одного из тел полагается равной нулю и исследуется его движение в изменяющемся со временем гравитационном поле двух других тел. В 1904 г. Уиттекер,

---

[1]) Об одном интересном приложении стандартного отображения в физике твердого тела см. работу [544] и цитированную там литературу.— *Прим. ред.*

обсуждая научные достижения того времени, отметил, что эта проблема «вызвала исследования такого размаха, что с 1750 г. по этой теме было опубликовано свыше 800 научных работ, многие из которых носили имена величайших математиков».

Прежде всего Брунс [45] и Пуанкаре [337] показали, что все изолирующие интегралы движения выражаются через известные (классические) интегралы, такие, как энергия и импульс замкнутой системы [1]). Одновременно выяснилось, что ограниченная задача трех тел содержит все существенные трудности общей задачи и основные усилия были сконцентрированы на исследовании этого упрощенного варианта.

Методы теории возмущений [337, 419] были вначале разработаны для получения приближенных решений задачи трех тел. Затем они развивались с использованием новой техники асимптотических разложений, основанной на методе дополнительных (к классическим) формальных интегралов Уиттекера [430]. Эти методы были усовершенствованы Контопулосом и его сотрудниками [86, 87], а также с использованием скобок Пуассона Мак-Намарой и Уайтменом [292]. Другой способ, приводящий к тем же результатам и развитый Густавсоном [171], заключается в преобразовании гамильтониана с помощью рядов к нормальной форме. Работы Хори [199], Гарридо [150] и Депри [102], в которых систематически представлена техника преобразований Ли с использованием скобок Пуассона, также появились в связи с проблемой изучения движения планет.

Попытки решения задачи трех тел привели попутно к получению многих интересных математических результатов. Мы уже обсуждали общую теорию периодического движения, связанную с именами Пуанкаре [337] и Биркгофа [29], а также развитие теории КАМ. Изучение стохастичности тоже было обусловлено попыткой понять хаотическое поведение траекторий вблизи гомоклинных точек (см., например, [374, 310]). В одном из вариантов ограниченной задачи трех тел Ситников [379] и Алексеев [6] показали, что в окрестности сепаратрисы (параболической траектории легкого тела) существуют траектории с произвольно большими и случайными временами возврата. Аналогичные результаты более абстрактного топологического характера были получены также Смейлом [381].

Для изучения движения на больших интервалах времени использовались различные численные (иногда в сочетании с аналитическими) методы. Примером может служить задача Хенона и Хей-

---

[1]) Теорема Пуанкаре о несуществовании дополнительных *аналитических* интегралов служила в течение длительного времени источником различных недоразумений, в частности, из нее делался неправильный вывод об эргодичности движения. Вопрос был выяснен Колмогоровым [559] в связи с созданием новой теории устойчивости, которая впоследствии получила название теории КАМ.— *Прим. ред.*

леса [188] (см. § 1.4). Обзор обширной литературы по этой плодотворной задаче дан Чарчиллом и др. [78]. Контопулос и сотр. [88], Форд и сотр. [423], Куммер [245], а также другие авторы с помощью численных и аналитических методов изучали простые системы связанных осцилляторов с целью выяснения общих свойств нелинейных колебаний, существенных и для задачи трех тел. Как отмечалось в предыдущих главах, эти исследования вместе с математическими результатами относительно поведения траекторий вблизи гомоклинных точек и теорией КАМ привели (в том числе и для ограниченной задачи трех тел) к сложной картине движения в фазовом пространстве, подобно показанной на рис. 3.5 или 3.6.

Полная задача о движении планет с учетом их взаимных возмущений относится к очень специальной области, выходящей за рамки этой книги. Хотя принято считать, что результаты изучения простых моделей позволяют делать качественные предсказания о поведении более сложных физических систем, остается еще много нерешенных вопросов по части устойчивости последних. Для ознакомления с соответствующей обширной литературой следует обратиться к монографиям Уинтнера [433], Жебехели [400], Зигеля и Мозера [374] и Хигихары [172, 173]. Недавние работы в этой области обсуждаются Мозером [311] и Контопулосом [90]. Контопулос и сотр. [92] использовали упомянутые методы для исследования других космических систем, в частности резонансов в галактике.

Весьма интересный аспект проблемы длительной устойчивости Солнечной системы связан с учетом ее многомерности, вследствие чего инвариантные поверхности не являются изолирующими. Возможно, что этим же объясняются и щели в кольцах Сатурна вблизи резонансов с его внутренними спутниками. Чириков [68] изучал подобную возможность для родственной проблемы «люков» в поясе астероидов вблизи их резонансов с движением Юпитера [1]). Его предварительное заключение сводится к тому, что скорость диффузии Арнольда достаточна для того, чтобы «очистить» люки за время жизни Солнечной системы.

А.2. Ускорители и встречные пучки

Изучение динамики пучков в ускорителях и накопителях значительно содействовало пониманию адиабатических процессов и нелинейных эффектов и дало ряд интересных примеров. Исследования начались здесь главным образом после открытия принципа жесткой фокусировки [95]. К сожалению, многие результаты этих

[1]) Несмотря на некоторое внешнее сходство, первая задача является, по-видимому, значительно более сложной из-за возможного влияния собственного гравитационного поля колец Сатурна (см., например, работу [553]), тогда как динамика астероида — это типичная ограниченная задача трех тел.— *Прим. ред.*

работ появились в изданиях, известных лишь узкому кругу специалистов.

Первые исследования резонансов в сильнофокусирующих синхротронах были представлены на конференции в ЦЕРНе [160, 193]. Теоретический анализ обычно проводился в то время в линейном приближении с использованием точного интеграла движения (п. 1.3б) и матричного формализма (§ 3.3) (см., например, [94, 258]) [1]).

Всегда присутствующие нескомпенсированные нелинейности вызывают обычные искажения фазовой картины движения вблизи основных резонансов. Эти нелинейности особенно существенны в кольцевых фазотронах [398] [2]). Пример исследования такого резонанса с помощью нерезонансной (§ 2.2) и резонансной (§. 2.4) теории возмущений содержится в обзоре Ласлета [255]. Обсуждение этого круга вопросов можно найти также у Грина и Куранта [162], Коломенского и Лебедева [232] и Лихтенберга [265].

Другой подход к ускорительным проблемам, имеющий лишь косвенное отношение к предмету настоящей книги, связан с изучением динамики конечных областей фазового пространства, заполненных большим числом частиц. Движение таких областей не является квазипериодическим, а обладает свойством *расслоения* [3]) начальной области. При использовании крупноструктурной функции распределения это приводит к увеличению эффективного фазового объема частиц [4]). Некоторые аспекты этой проблемы изучались Херевордом и др. [189] и Лихтенбергом [264]. Сюда же относится вопрос о многооборотной инжекции в кольцевой фазотрон [399] и в накопительные кольца. Эти приложения и их связь с различными системами транспортировки пучков заряженных частиц подробно рассмотрены Лихтенбергом [265].

Поскольку накопительные кольца должны удерживать частицы на протяжении чрезвычайно большого числа оборотов и время

---

[1]) Линейные резонансы колебаний частицы в ускорителе, по-видимому, впервые рассматривались Фурсовым и Будкером в 1947 г. (см. работу [509], с. 230). Говард, Хайн и др. провели численное моделирование нелинейных колебаний частицы в жесткофокусирующем синхротроне. Они фактически наблюдали стохастические колебания и получили правильный эмпирический критерий их возникновения.— *Прим. ред.*

[2]) В оригинале — Fixed Field Alternating Gradient Synchrotrons (синхротроны с постоянным полем и переменным градиентом). Мы используем термин, принятый в отечественной литературе для ускорителей этого типа, впервые предложенных Коломенским, Петуховым и Рабиновичем [549].— *Прим. перев.*

[3]) В оригинале filamentation (нитеобразование).— *Прим. перев.*

[4]) Это означает, что спектр движения области является смешанным, т. е. имеет как дискретную, так и непрерывную компоненты, даже если спектр отдельной траектории является чисто дискретным. Отметим также, что изучение динамики области, точнее произвольной функции в фазовом пространстве, является одним из основных методов в эргодической теории (см., например, работу [486] и § 5.2).— *Прим. ред.*

жизни пучка составляет часы или даже дни, то успевают проявиться очень тонкие резонансные эффекты и, в частности, диффузия Арнольда (см. гл. 6). Это обстоятельство может оказаться особенно важным в экспериментах на встречных пучках, когда частицы испытывают возмущение по крайней мере один раз за оборот при столкновении пучков (так называемые *эффекты встречи*). Оценки скорости диффузии Арнольда для такого возмущения были сделаны Чириковым [68], который показал возможность существенного сокращения времени жизни пучка, особенно при наличии связи с синхротронными колебаниями (см. также [207]). Другими механизмами, исследованными в связи с попытками объяснить уменьшение времени жизни пучка, являются модуляционная диффузия [404] и резонансное каналирование [405]. Проблема эффектов встречи стимулировала численные исследования диффузии Арнольда (см., например, [190]). Сокращение времени жизни пучка действительно наблюдалось на электрон-позитронном накопителе, но детального сравнения экспериментальных данных с теорией пока не проведено. Поскольку число оборотов частиц в накопителях превышает, как правило, 10^8, то обычное численное моделирование даже с использованием отображений оказывается практически неосуществимым. Обзор современного состояния проблемы эффектов встречи и ряд других интересных результатов содержатся в трудах конференции [304].

А.3. Магнитные ловушки

Мы уже обсуждали значение задачи об удержании заряженной частицы в магнитной ловушке для развития теории адиабатических инвариантов нелинейных систем (§ 2.3). После пионерских работ Альфвена [7] и Нортропа и Теллера [320], которые получили приближенное решение для движения частицы в магнитном поле Земли, был разработан ряд других методов асимптотического разложения, которые более точно учитывают геометрию реального магнитного поля. Отметим здесь работы Лакины [247, 248] и Крилина [236, 237] по аксиально симметричным магнитным ловушкам, а также работу Драгта [106] по аксиально симметричному диполю. Общие методы получения решений в любом порядке по параметру разложения были разработаны Боголюбовым и Митропольским [33] и Крускалом [238, 239]. Детальные вычисления во втором порядке выполнены Нортропом и др. [321].

Однако, как выяснилось, получающиеся при таких разложениях ряды оказываются расходящимися, а магнитный момент частицы изменяется на экспоненциально малую величину при каждом отражении от магнитной пробки. Оценки такого изменения были сделаны Хертвеком и Шлютером [191] и Чандрасекаром [53] [1]).

[1]) См. также работу [244].— *Прим. ред.*

Более подробные расчеты выполнены Хастье и др. [176] и Ховардом [201], которые использовали контурное интегрирование и метод перевала [1]). Дальнейшее развитие этих методов, а также сравнение с результатами численного моделирования можно найти в работе Коэна и др. [81].

В случае аксиально симметричной магнитной ловушки задача сводится к двум степеням свободы и, несмотря на изменение магнитного момента, возможно вечное удержание частицы [2]). Это является следствием того, что инвариантные кривые изолируют при малом возмущении стохастические слои резонансов между ларморовским вращением и продольными колебаниями частицы, которые рассматривались в работе [67]. Эти резонансы можно описать с помощью отображения, как это было сделано Чириковым [68—70], который исследовал условия адиабатичности движения. В некотором диапазоне параметров магнитный момент испытывает колебания, значительно более медленные, чем продольные колебания частицы. Это явление было названо Розенблютом *сверхадиабатичностью*. Потеря сверхадиабатичности, что с физической точки зрения связано с исчезновением фазовых корреляций при последовательных прохождениях средней плоскости ловушки, эквивалентна разрушению инвариантных кривых отображения.

Переход к глобальной стохастичности, когда частицы вылетают из ловушки, можно грубо определить с помощью численного моделирования. Это было сделано Гарреном и др. [149] для аксиально симметричной прямой ловушки, Драгтом [106] для аксиально симметричного диполя и Сиамбисом [372] для несимметричной ловушки. Однако численное моделирование не может решить вопрос о длительном удержании частиц в ловушке. Поэтому были поставлены специальные эксперименты в аксиально симметричных ловушках при низкой плотности частиц, когда их взаимодействие пренебрежимо мало (см., например, [154, 338]). Эти эксперименты показали, что в достаточно сильном магнитном поле время жизни частиц определяется классическим рассеянием на остаточном газе [3]). Однако при умеренных полях имеется переходная область, где время удержания частицы все еще большое, но зависит от поля. В последнем случае механизм потерь частиц оставался необъясненным. Наконец, при слабых полях сверхадиабатичность нарушается и частицы быстро покидают ловушку. Обсуждая

---

[1]) Первые аккуратные вычисления экспоненциально малого изменения магнитного момента частицы в ловушке были проведены в работе [550].— *Прим. ред.*

[2]) Этот важный и строгий результат получен Арнольдом [11].— *Прим. ред.*

[3]) Возможность длительного удержания частицы как в аксиально симметричной, так и в слабо асимметричной ловушке с достаточно сильным полем была установлена в опытах Родионова [551] (см. также работу [552]).— *Прим. ред.*

результаты этих экспериментов, Чириков [68—70] предложил два возможных объяснения: 1) существование слабой остаточной стохастичности при возмущении, большем некоторой строгой границы теории КАМ, но значительно меньшем, чем по критериям гл. 4; 2) наличие диффузии Арнольда вследствие слабой аксиальной асимметрии или зависимости магнитного поля от времени. Оценив скорость диффузии Арнольда, Чириков показал, что она достаточна для объяснения наблюдаемого эффекта. Однако детальное сравнение теории с экспериментом проведено не было. Мы согласны с заключением Чирикова о том, что второе объяснение представляется гораздо более правдоподобным, хотя вопрос и остается открытым.

Аналогичная задача возникает в связи с радиальной диффузией в амбиполярных ловушках с аксиально несимметричными пробками. Для аксиально симметричных систем сохранение углового момента препятствует радиальной диффузии. Асимметрия, вносимая стабилизирующими квадрупольными обмотками, нарушает сохранение момента. Для амбиполярных ловушек этот эффект усугубляется наличием длинной центральной секции, что приводит к возникновению резонансов низкого порядка между продольным и дрейфовым движением и большим радиальным колебанием частиц даже в отсутствие диффузии. В целом эта задача оказывается весьма сложной и читателю следует обратиться к оригинальным работам [79, 80, 357] [1]).

А.4. Нагрев плазмы

Взаимодействие двух резонансов, которое изменяет или разрушает интегралы движения, можно ввести в систему специально для получения желаемого эффекта, например для нагрева частиц. В электронном циклотронном резонансном нагреве (ЭЦРН) это достигается за счет резонанса между ларморовским вращением и электромагнитной волной. Один из методов расчета ЭЦРН в ловушке заключается в определении величины изменения энергии при однократном прохождении резонанса, причем предполагается отсутствие корреляций фазы между последовательными прохождениями [115, 161, 243]. Такой подход правилен выше порога стохастичности и совершенно непригоден ниже его, как это описано в § 3.4. Сейдл [367] впервые показал, что слабое резонансное электрическое поле приводит к возникновению сверхадиабатических колебаний, а не к стохастическому нагреву. Переход от адиабатического движения к стохастическому с использованием метода Сейдла и общего критерия перекрытия резонансов изучался Некрасовым [315], Егером и др. [213], Либерманом и Лихтенбергом [275]. Недавно Бернштейн и Бэкстер [23] провели вычисление с учетом релятивистских эффектов. Численные исследования Спротта и Эд-

[1]) См. также работы [71, 517].— *Прим. ред.*

мондса [390], а также эксперименты Уайеса и др. [435] и Бардета и др. [15] дали результаты, неплохо согласующиеся с теорией. Аналогичные расчеты перехода от сверхадиабатичности к стохастичности были выполнены также в случае взаимодействия частицы в ловушке с высокочастотным полем волн, возбуждаемых в самой плазме [1, 348, 407].

Нелинейные взаимодействия описанных выше типов могут иметь место даже в однородном магнитном поле. Возникающая из-за конечной величины ларморовского радиуса нелинейность приводит к появлению многих гармоник в спектре движения. Мы уже рассматривали подобный пример в п. 2.4в. Отметим, что диапазон энергии частиц определяется гармониками, амплитуды которых достаточно велики. Детальное исследование ионного циклотронного нагрева содержится в работах [220, 221].

Недавние эксперименты [257] по нагреву плазмы с помощью двух волн разной частоты стимулировали теоретические разработки в этой области. Ховард и др. [202] и Ронлин [347] показали, что определяемый, согласно теории КАМ, порог нагрева по энергии можно повысить примерно вдвое, если использовать волны одинаковой мощности. С физической точки зрения это объясняется, по-видимому, образованием большего числа резонансов, перекрытие которых возможно и при более высокой энергии. Было найдено, что максимальный эффект достигается, когда разность частот сравнима с частотой продольных колебаний частицы. Важность резонанса с продольным движением отмечалась уже в работе Смита и др. [384]. Другое объяснение эффективности нагрева двумя частотами было предложено Самеком и др. [360]. В случае одной частоты проходящие через резонанс частицы получают два быстро следующих один за другим «толчка», которые могут компенсировать друг друга. Введение второй частоты нарушает эту компенсацию и увеличивает достижимую энергию.

Во всех описанных выше случаях рассматривались не самосогласованные волны в плазме. Для экспериментов по ЭЦРН такое приближение, как правило, справедливо, если только плазменная частота меньше электронной циклотронной частоты, что обычно также имеет место. Однако для ионного циклотронного нагрева это уже не так, что существенно ограничивает теоретический анализ. Кроме того, обычно не учитывается сложное пространственное распределение высокочастотного поля.

Эти трудности указывают на одну из фундаментальных проблем теоретического подхода, в котором гамильтониан системы требуется знать заранее. Тем не менее был достигнут значительный прогресс в согласовании теории стохастического ионного циклотронного нагрева с экспериментами на токамаках [159].

Имеется ряд заслуживающих упоминания проблем, родственных проблеме резонансного нагрева плазмы. Мы уже видели в п. 2.5в (подробнее см. работы [51, 52, 312]), что пространственно

неоднородное высокочастотное поле (а также высокочастотное поле в пространственно неоднородном стационарном магнитном поле [52]) действует на частицу с некоторой средней силой. Это может быть использовано для высокочастотного удержания плазмы и снижения потерь частиц через магнитные пробки. Однако, как мы видели, движение частиц в этом случае не обязательно является адиабатическим. Лихтенберг и Берк, изучая этот вопрос, показали, что именно неадиабатичность определяет предел, который может быть достигнут при высокочастотном удержании [268]. Аналогичные вычисления были выполнены Хатори и Ватанабе [177] для ловушек со встречными пробками [1]). Хотя высокочастотное поле вряд ли можно использовать для удержания основной плазмы в термоядерных установках, оно может оказаться полезным для удержания и нагрева теплой плазмы, необходимой для стабилизации плазменных неустойчивостей. Задача о самосогласованном высокочастотном удержании рассматривалась также в работах [312, 425], но не в той области параметров, где существенны стохастические эффекты.

А.5. Химическая динамика

В § 7.4 отмечалось, что одной из основных целей изучения диссипативных систем является гидродинамическая турбулентность. Другая чрезвычайно интересная область связана с «турбулентностью» в химических реакциях. Закон действующих масс, определяющий временну́ю эволюцию однородной химической системы, приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям первого порядка [2]). Каждому веществу соответствует одно уравнение, так что для M веществ получается M-мерный поток типа, рассмотренного в § 7.1. Поэтому неудивительно, что мы встречаем здесь все виды движения, описанные в гл. 7, включая простые и странные аттракторы.

На практике большинство однородных химических систем просто релаксирует к стационарному состоянию (устойчивый фокус). В 1958 г. Белоусов обнаружил периодические колебания в химической реакции. Дальнейшие исследования были проведены Жаботинским и сотр. [439], и эта реакция называется теперь реакцией Белоусова—Жаботинского. Колебания цвета раствора с периодом около минуты возникают в ходе реакции окисления лимонной кислоты броматом и могут продолжаться более часа, пока не будут израсходованы исходные вещества. Сейчас известно много других осциллирующих химических реакций (популярное изложение см.,

---

[1]) Cusp field — геометрия прямой магнитной ловушки, в которой магнитное поле имеет противоположное направление в двух пробках.— *Прим. перев.*

[2]) Подробнее см. книгу [554], где кратко описана также история возникновения химической динамики.— *Прим. ред.*

например, в работах [422, 432]) [1]). Хотя первые модели реакции Белоусова—Жаботинского включали одиннадцать химических веществ, Филд и Нойес [128] показали, что для описания достаточно всего трех веществ, т. е. такую реакцию можно представить как трехмерный поток в пространстве концентраций.

В гл. 7 обсуждалось возникновение странных аттракторов в трехмерных потоках. Рюэль [353] предположил, что реакция Белоусова—Жаботинского, как и другие химические реакции, может протекать хаотически (иногда это называется химической турбулентностью). В настоящее время существование химической турбулентности надежно установлено как теоретически, так и численно [351, 410, 413]. Проведено также много экспериментов [101, 206, 365, 418, 426], которые со всей очевидностью выявляют этот режим. Например, Вайдал и др. [418], измеряя фурье-спектр концентраций при возрастании скорости протекания реакции, наблюдали бифуркацию удвоения периода, а затем и переход к химической турбулентности.

Еще более сложные и удивительные процессы происходят в неоднородных системах Белоусова—Жаботинского. В тонком (около 2 мм) слое раствора спонтанно возникают окрашенные структуры высокой степени сложности (спирали, дуги, окружности), которые движутся вдоль слоя и исчезают при столкновениях [234, 432, 439]. При этом раствор в целом не движется, а изменяются концентрации веществ вследствие реакций между ними и диффузии. Такие реактивно-диффузионные системы должны описываться уравнениями в частных производных, и изучение их намного сложнее, чем однородных. Копель [233] аналитически установил существование плоских волн и разрывов, а также периодических во времени и нерегулярных в пространстве решений простой модельной задачи. Еще раньше хаотическое поведение было обнаружено в подобной системе численно [246]. При этом выяснилось, что хаос является следствием диффузии, тогда как в однородной системе происходят только периодические колебания. Недавние эксперименты [437], по-видимому, подтверждают, что именно диффузия приводит к турбулентности. Переход к турбулентности выглядит в экспериментах плавным без какой-либо резкой границы.

А.6. Квантовые системы

Как упоминалось во введении, появление квантовой механики дало новый мощный импульс для развития классической теории возмущений [34]. С другой стороны, современные успехи в понимании поведения классических динамических систем возродили интерес к изучению квантовых систем в квазиклассическом приближении $\hbar \to 0$. Особенно важно установить соответствие между классиче-

[1]) См. работу [555].— *Прим. перев.*

скими решениями (фазовые траектории) и квантовыми решениями (волновые функции). Квантовую формулировку задачи можно получить из классической [1]), однако квантовомеханическое решение не следует непосредственно из классического. Неизвестно какое-либо общее соответствие между обоими решениями, за исключением полностью интегрируемых систем [2]). В последнем случае движение по каждой из N степеней свободы является независимым как в классической, так и в квантовой формулировке и правила квазиклассического квантования [3]) хорошо известны (см., например, [226, 329]). Каждая из N переменных действия принимает дискретные значения $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\alpha}/4)\,\hbar$, где $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ — целочисленные векторы квантовых чисел и индексов Маслова соответственно. Квантовые уровни энергии $E_{\boldsymbol{n}} = H(I_{\boldsymbol{n}})$ могут совпадать и пересекаться при изменении параметров системы. Квазиклассическая волновая функция имеет *каустики* в конфигурационном пространстве, соответствующие точкам поворота классического движения.

Для близких к интегрируемым классических систем, в которых регулярные и стохастические траектории сосуществуют в сколь угодно малых масштабах, квантовые аналоги не ясны. Некоторое понимание достигнуто в отношении квантования классических систем с полностью стохастическим поведением (K-систем). Примерами являются отображение Арнольда [27] и бильярд Синая, в частности «стадион», образованный двумя параллельными прямыми, замкнутыми полуокружностями [59, 287]. Берри [24, 25] и Заславский [440] предположили, что уровни энергии стохастической системы должны отталкиваться, так что распределение расстояний между ними имеет максимум при некотором конечном значении, а не в нуле, как для интегрируемой системы [4]). Отталкивание наблюдалось в численном моделировании для бильярда Синая и стадиона [27, 28, 59, 80, 287] и иногда принимается в качестве определения квантовой стохастичности.

Ситуация с близкими к интегрируемым системами не так ясна. Считается, что классическая иерархия резонансов с их стохастическими слоями и инвариантными торами «замазывается» при любом конечном $\hbar$. Квантовое фазовое пространство оказывается,

---

[1]) По-видимому, имеется в виду переход от классических величин к квантовым операторам.— *Прим. ред.*

[2]) Это не совсем так, см., например, работу [556].— *Прим. ред.*

[3]) В оригинале редко употребляемый термин — квантование по Эйнштейну—Бриллюэну—Келлеру [329]; общепринятое название — правило квантования Бора—Зоммерфельда (см., например, книгу [557]).— *Прим. ред.*

[4]) В указанных работах Берри этот вопрос не рассматривался; по-видимому, имеется в виду статья [28]. В работе Заславского [440] (*см. также* работу [442]) сделана попытка связать хорошо известное явление отталкивания уровней сложных атомов и ядер (см., например, книгу [558]) с динамическими характеристиками системы (*обсуждение см. в работе* [28]).— *Прим. ред.*

таким образом, «крупноструктурным», так что можно пренебречь почти всеми классическими областями (регулярными и стохастическими), размер которых много меньше $\hbar$ [329]. При этом квантовое поведение может быть регулярным, даже если соответствующая классическая система стохастична. Это подтверждается численными экспериментами Казати и др. [56] для квантового стандартного отображения и Маркуса [294] для квантовой задачи Хенона и Хейлеса. Последний четко показал, что нестохастические квантовомеханические состояния имеют место при таких значениях энергии, для которых классическое движение является существенно стохастическим; он же дал обзор результатов применения обсуждаемых методов в молекулярной динамике. Еще одним следствием крупноструктурности является то, что при конечном $\hbar$ инвариантные торы оказываются неизолирующими. Отт и др. [325] продемонстрировали дифракцию волновой функции из классически регулярной области в стохастическую. Другие исследования обсуждаемой проблемы представлены в работах Бермана и Заславского [21], Чирикова и др. [77], Шепелянского [370], а также в трудах конференции [58]. Обзор этого направления дан Заславским [442] [1]).

Дополнение Б

ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

Для гамильтонова отображения [$B = 1$ в (7.3.2)]

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2Cx_n + 2x_n^2 \tag{Б.1}$$

соотношения (7.3.5) — (7.3.17) остаются справедливыми. Однако из (7.3.10а) следует

$$B' = B^2 = B_\infty = 1,$$

и, подставляя $C' = C = C_\infty$ в (7.3.10б), находим точку накопления

$$-2C_\infty^2 + 4C_\infty + 7 = C_\infty,$$

или

$$C_\infty = (3 - \sqrt{65})/4 \approx -1{,}2656. \tag{Б.2}$$

Это близко к найденной численно величине[2]) — 1,2663 и отличается от значения для диссипативных отображений $C_\infty \approx -0{,}78$.

Предполагая, что C_k сходится к C_∞ по закону

$$C_k - C_\infty \approx A\delta^{-k},$$

и подставляя это в (7.3.10б) при $B = 1$

[1]) См. также [488].— *Прим. ред.*

[2]) Точная теория ренормализации для двумерных гамильтоновых отображений [113] дает значения параметров подобия, которые очень хорошо согласуются с численными результатами.

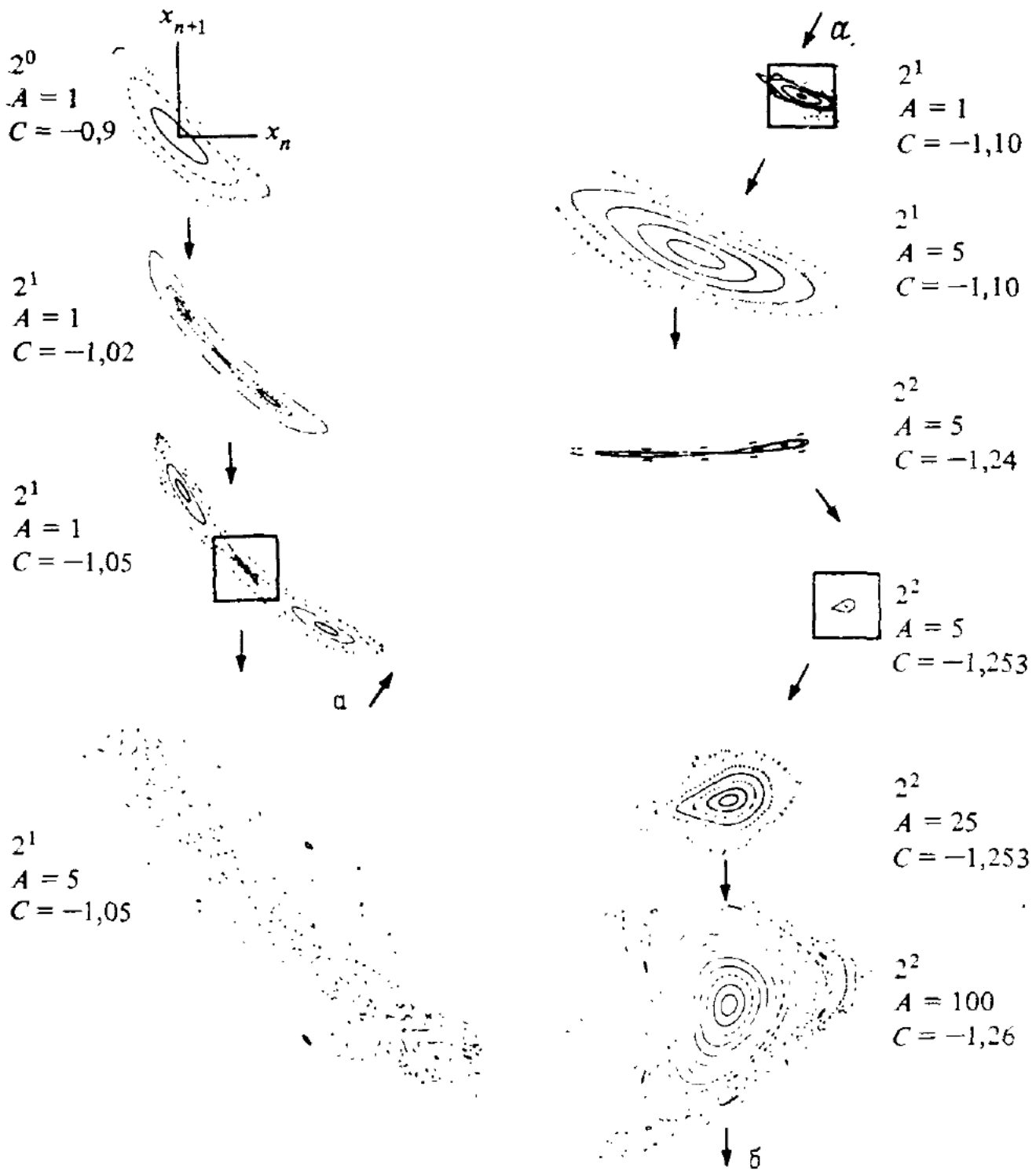


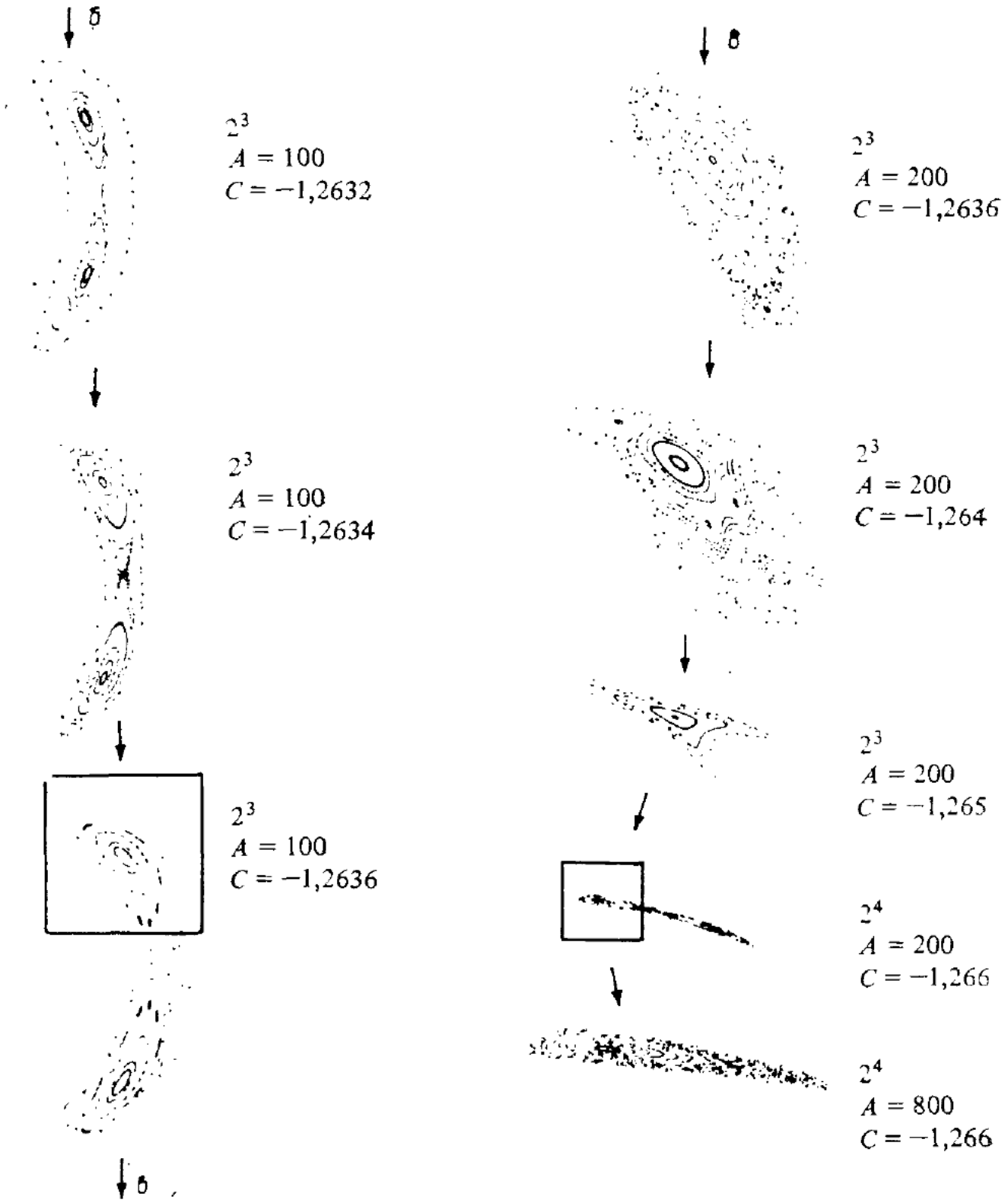
Рис. Б.1. Бифуркации удвоения периода ($T = 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$) для гамиль
Величина A указывает линейное увеличение масштаба. Буквы *а*, *б* и *в* и стрелки показывают

$$C_k = -2C_{k+1}^2 + 4C_{k+1} + 7,$$

находим

$$\delta = 4C_\infty + 4 = 1 + \sqrt{65} \approx 9{,}06. \qquad (Б.3)$$

Численное значение $\delta \approx 8{,}72$ для гамильтоновых отображений отличается от параметра диссипативных отображений $\delta \approx 4{,}66$.



тонова отображения (Б.1) на плоскости (x_{n+1}, x_n) (по данным работы[417]). **последовательность бифуркаций** при уменьшении параметра C.

Наконец, параметр подобия α в (7.3.15) определяется выражением (7.3.17) при $B = 1$

$$\alpha = e + \frac{1}{2} d^2.$$

Используя e и d из (7.3.8), а также a и b из (7.3.6), находим

$$\alpha \approx -4{,}096, \qquad (Б.4)$$

тогда как численный результат $\alpha \approx -4{,}018$. Это значение α также заметно отличается от величины $\alpha \approx -2{,}5$ для диссипативных систем.

На рис. Б.1 представлена последовательность бифуркаций отображения (Б.1) на плоскости (x_{n+1}, x_n) вблизи неподвижной точки (0, 0) при изменении параметра C. Величина A показывает увеличение масштаба соответствующей картинки. Ясно видны бифуркации с $k = 1, 2, 3, 4$.

Более подробное исследование двумерных гамильтоновых отображений обнаруживает дополнительный параметр подобия β [84, 167]. Следуя Грину и др. [167], мы покажем это, представив (Б.1) в форме квадратичного отображения Вогелара

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -y_n + g(x_n), \\ y_{n+1} &= x_n - g(x_{n+1}), \end{aligned} \tag{Б.5}$$

где[1]) $g = Cx + x^2$. Такое представление отображения позволяет выявить симметрию в бифуркациях. Неподвижная точка (0, 0) в (Б.5) становится неустойчивой при $C = -1$, приводя к образованию показанного на рис. Б.2 бифуркационного дерева. Численно последовательные бифуркации сходятся по закону геометрической прогрессии с показателем $\delta \approx 8{,}72$, что приближенно согласуется с (Б.3); точка накопления $C_\infty = -1{,}2663$ хорошо согласуется с (Б.2).

Дополнительное измерение (по y) также должно иметь параметр подобия. Это видно, например, из рис. Б.3. Здесь кружки представляют траекторию периода 2, возникающую при потере устойчивости неподвижной точки (квадрат); треугольники — траекторию периода 4 и точки — траекторию периода 8. Нетрудно заметить подобие в расположении периодических точек: картина вокруг квадрата повторяется в уменьшенном масштабе вокруг левого кружка (с отражением). Обе картины можно совместить, увеличив масштаб по оси x в $\alpha \approx -4{,}018$ раза [что хорошо согласуется с (Б.4)], а по оси y в $\beta \approx 16{,}36$ раза. Фактически эти параметры принимают точные значения лишь в ренормализационном пределе. Оказывается, что при $C = C_\infty$ подобие распространяется не только на периодические точки, но и на все отображение T_∞, если применить его дважды и изменить масштабы [167]:

$$\mathsf{T}_\infty = \mathsf{S} \cdot \mathsf{T}_\infty^2 \cdot \mathsf{S}^{-1},$$

где

$$\mathsf{S} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

---

[1]) В работе [167] исследовалось несколько иное отображение с функцией $g = Cx - (1-C)\,x^2$, которое приводится к (Б.1) заменой $-(1-C)\,x \to x$. — *Прим. ред.*

Мы уже нашли выражения для C_∞, δ и α с помощью приближенной квадратичной ренормализации. Аналогичным образом можно вычислить и второй коэффициент подобия β. Это было сделано Мак-Кайем (см. работу [182], приложение С), и мы используем здесь его метод. Представленное в форме Вогелара отображение (Б.1)

$$x_{n+1} = -y_n + Cx_n + x_n^2, \tag{Б.6а}$$

$$y_{n+1} = x_n - Cx_{n+1} - x_{n+1}^2 \tag{Б.6б}$$

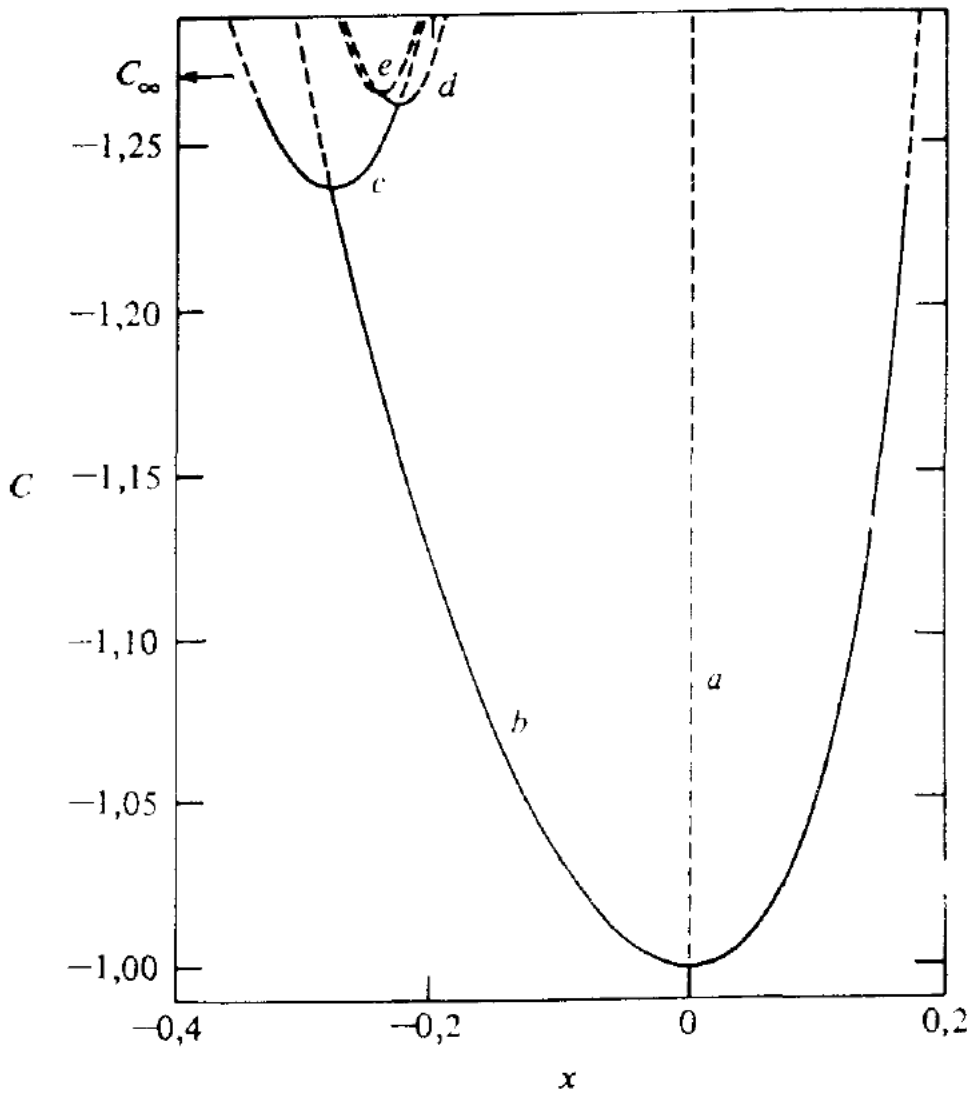


Рис. Б.2. Сечение бифуркационного дерева (в плоскости $y = 0$) для квадратичного отображения Вогелара (по данным работы [167]).

Сплошные линии — устойчивые неподвижные точки; пунктирные линии — неустойчивые.

имеет неподвижную точку $x_{10} = y_{10} = 0$. Возникающие из нее точки периода 2 с координатами $y_{2\pm} = 0$ и $x_{2\pm}$ определяются, как и прежде, из (7.3.6). Подставляя

$$x = x_{2\pm} + \Delta x,$$

$$y = y_{2\pm} + \Delta y$$

в выражение (Б.6), находим

$$\Delta x_{n+1} = -\Delta y_n + \frac{d}{2}\Delta x_n + (\Delta x_n)^2, \tag{Б.7а}$$

$$\Delta y_{n+1} = \Delta x_n - \frac{e}{2}\Delta x_{n+1} - (\Delta x_{n+1})^2, \tag{Б.7б}$$

где d и e по-прежнему определяются согласно (7.3.8). После однократной итерации (Б.7а) находим

$$\Delta x_{n+2} = -\Delta y_{n+1} + \frac{e}{2}\Delta x_{n+1} + (\Delta x_{n+1})^2. \tag{Б.8}$$

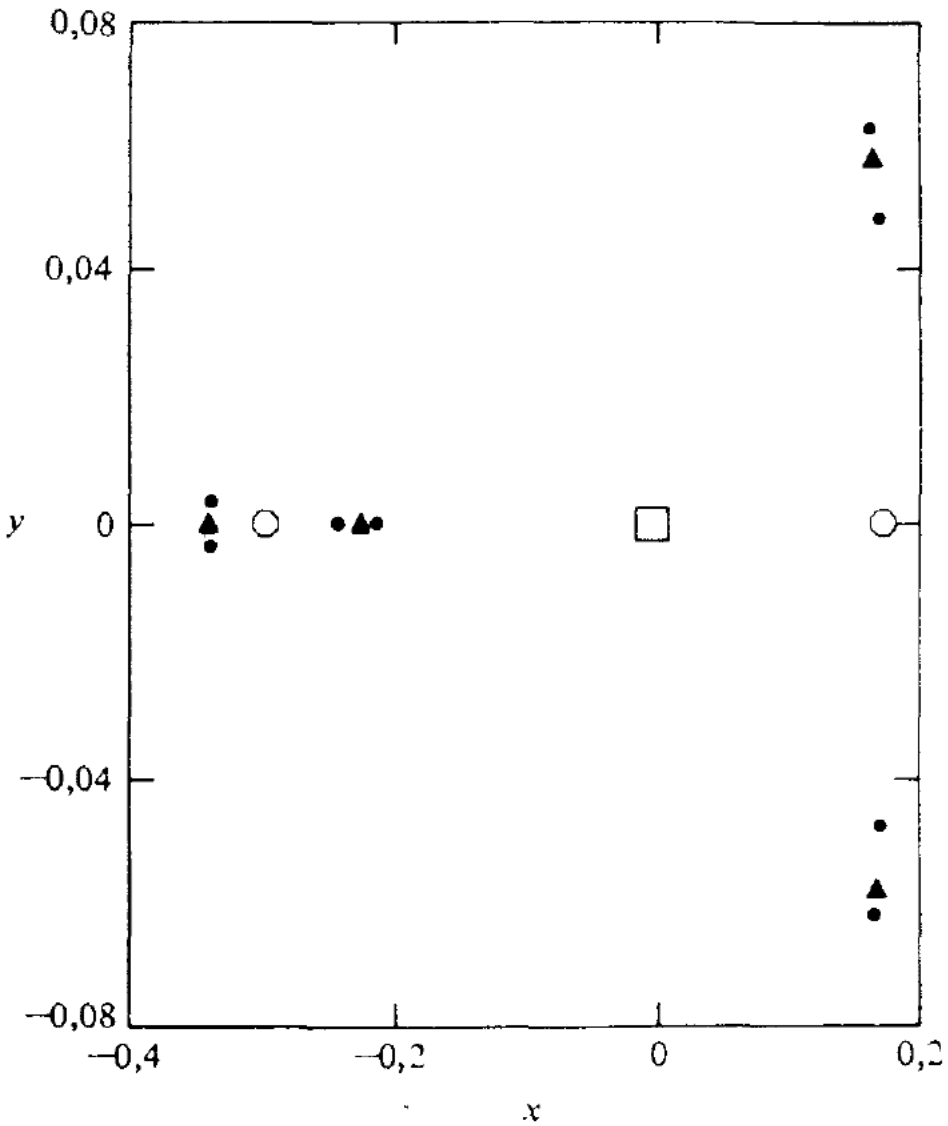


Рис. Б.3. Расположение (неустойчивых) неподвижных точек при $C = C_\infty$ (по данным работы [167]).

Вычитая (Б.8) из (Б.7б), получаем

$$\Delta x_{n+2} = -\Delta x_n + e\Delta x_{n+1} + 2(\Delta x_{n+1})^2. \tag{Б.9}$$

Исключая Δx_{n+1} в (Б.9) с помощью (Б.7а) и удерживая линейные члены Δx_n, Δy_n и квадратичный член $(\Delta x_n)^2$, имеем

$$\Delta x_{n+2} = -e\Delta y_n + C'\Delta x_n + \alpha(\Delta x_n)^2, \tag{Б.10}$$

где

$$C' = \frac{1}{2}de - 1 \tag{Б.11}$$

как в (7.3.10б) при $B=1$ и

$$\alpha = e + \frac{1}{2} d^2 \tag{Б.12}$$

как в (7.3.17) при $B=1$. Изменяя масштабы

$$x' = \alpha \Delta x, \tag{Б.13}$$

$$y' = \alpha e \Delta y, \tag{Б.14}$$

находим

$$x'_{n+2} = -y'_n + C' x'_n + (x'_n)^2, \tag{Б.15}$$

т. е. уравнение того же вида, что и (Б.6а) с новым коэффициентом C'. Аналогичный результат нетрудно получить и при ренормализации (Б.6б). Из (Б.14) второй параметр подобия

$$\beta = \alpha e = e^2 + \frac{1}{2} e d^2 \approx 16{,}91, \tag{Б.16}$$

что близко к численному результату $\beta \approx 16{,}36$.

Описанные закономерности были в основном подтверждены численным моделированием многих двумерных канонических отображений. В соответствующих переменных все эти отображения вблизи точки накопления выглядят одинаково (см. работу [167]).

В принципе методы ренормализации можно использовать для анализа и других свойств отображений. В п. 4.3а, следуя Лихтенбергу [267], мы обсуждали идею такой ренормализации для определения величины возмущения, при которой структура резонансов становится подобной во всех порядках. Это было сделано для приближенного определения границы глобальной стохастичности. С той же целью в § 4.5, следуя Эсканде и Довейлу [117], был описан более сложный метод ренормализации. В настоящее время теория ренормализации широко используется при изучении как гамильтоновых, так и диссипативных систем (см., например, работы [119, 167, 369, 446]).

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ниже приведены только обозначения, употребляемые на протяжении всей книги. Скалярные величины печатаются светлым курсивом, векторы — полужирным курсивом, а матрицы и тензоры — прямым жирным шрифтом (рубленым).

$\boldsymbol{A}$ — векторный потенциал
A — матрица линейного преобразования
$\mathscr{A}_m$ — интеграл Мельникова—Арнольда
$\boldsymbol{B}$ — магнитное поле
c — скорость света
D — коэффициент диффузии
E — энергия
$\mathscr{E}$ — полный эллиптический интеграл второго рода
F — производящая функция
$\mathscr{F}$ — эллиптический интеграл первого рода
G — коэффициент нелинейности
h — КС-энтропия
$\hbar$ — постоянная Планка
H — гамильтониан
H_0 — невозмущенный гамильтониан
I — единичная матрица
$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ — переменные действия
$\mathscr{J}$ — функция Бесселя первого рода
$\boldsymbol{k}$ — волновой вектор
K — параметр стохастичности
$\mathscr{K}$ — полный эллиптический интеграл первого рода
L — лагранжиан
$\hat{L}$ — оператор Ли
$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ — целочисленные векторы
M — матрица Якоби
$\mathscr{M}$ — мера
N — число степеней свободы
$\mathscr{N}$ — мощность шума
$\boldsymbol{p}$ — импульс
P — распределение вероятностей
$\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор
t — время
T — период
$\hat{T}$ — эволюционный оператор Ли
u, v — скорость
U, V — потенциальная энергия
w — производящая функция Ли
W — вероятность перехода
x, y, z — координаты
X — матрица собственных векторов
α — число вращения
ε — параметр возмущения

θ — вектор угловых переменных, канонически сопряженных переменным действия
$\varkappa$ — аргумент эллиптических функций
λ — собственное значение
$\boldsymbol{\lambda}$ — матрица собственных значений
μ — магнитный момент
ν — частота столкновений
ρ — ларморовский радиус
σ — показатель Ляпунова
τ — время
φ, ψ — угловые переменные
Φ — электрический потенциал
ω — частота колебаний
Ω — ларморовская частота
$[\ ,\ ]$ — скобки Пуассона
$\sim$ — знак порядка
$\propto$ — знак пропорциональности
$\check{x}$, $\check{e}$ — орты
$\hat{T}$, $\hat{L}$ — операторы
$\det \mathbf{M}$ — детерминант матрицы
$\mathrm{Sp}\ \mathbf{M}$ — след матрицы

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aamodt R. E., Byers J. A.*— Phys. Rev. Letters, 1972, v. 29, p. 1305.
2. *Abarbanel H. D. I.*— Physica, 1981, v. 4D, p. 89.
3. *Abarbanel H. D. I., Crawford J. D.*— Phys. Letters, 1981, v. 82A, p. 378; Physica, 1982, v. 5D, p. 307.
4. *Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H.*—J. Math. Phys., 1980, v. 21, p. 715.
5. *Ahlers G., Behringer R. P.*— Phys. Rev. Letters, 1978, v. 40, p. 712.
6. *Алексеев В. М.* — УМН, 1981, т. 36, № 4, с. 161.
7. *Alfven H.* Cosmical Electrodynamics.— Oxford: Oxford University Press, 1950. [Имеется перевод: *Альфвен Х.* Космическая электродинамика.— М.: ИЛ, 1952.]
8. *Аносов Д. В.*— ДАН СССР, 1962, т. 145, с. 707.
9. *Аносов Д. В.*— ДАН СССР, 1963, т. 151, с. 1250.
10. *Арнольд В. И.*— УМН, 1963, т. 18, № 5, с. 13.
11. *Арнольд В. И.*— УМН, 1963, т. 18, № 6, с. 91.
12. *Арнольд В. И.*— ДАН СССР, 1964, т. 156, с. 9.
13. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1979.
14. *Arnold V. I., Avez A.* Ergodic Problems of Classical Mechanics.— N. Y.: Benjamin, 1968.
15. *Bardet R., Briand P., Dupas L. et al.*— Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 865.
16. *Bellman R.* Perturbation Techniques in Mathematics, Physics, and Engineering.— N. Y.: Holt, Rinehart, and Winston, 1964.
17. *Benettin G., Casartelli M., Galgani L., et al.*— Nuovo Cimento, 1978, v. 44B, p. 183; 1979, v. 50B, p. 211.
18. *Benettin G., Galgani L.*— in: Intrinsic Stochasticity in Plasmas/Eds. Laval, Gressillon.— Orsay: Les Editions de Physique, Courtaboeuf, 1979, p. 93.
19. *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M.*— Phys. Rev., 1976, v. A14, p. 2338.
20. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M.*— Meccanica, 1980, March, p. 21.
21. *Berman G. P., Zaslavskiy G. M.*— Physica, 1979, v. 97A, p. 367.
22. *Berman R. H.* Transition to Stochastic Behavior in a Deterministic System.— Res. Lab. Elec. M. I. T. Report PRR 80/10, 1980.
23. *Bernstein J. B., Baxter D. C.*— Phys. Fluids, 1981, v. 24, p. 108.
24. *Berry M. V.*— Philos. Trans. R. Soc., 1977, v. A287, p. 237.
25. *Berry M. V.*— J. Phys., 1977, v. A10, p. 2083.
26. *Berry M. V.*— in: Topics in Nonlinear Dynamics/Ed. Jorna.— N. Y.: American Institute of Physics, 1978, v. 46, p. 16.
27. *Berry M. Y.*— in: Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman.— N. Y.: Ann. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 183.
28. *Berry M. Y.*— Ann. Phys., 1981, v. 131, p. 163.
29. *Birkhoff G. D.* Dynamical Systems.— N. Y.: American Mathematical Society, 1927. [Имеется перевод: *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы.— М.: Гостехиздат, 1941.]
30. *Birkhoff G. D.*— Mem. Pont. Acad. Sci. Novi. Lyncaei, 1935, v. 1, p. 85.

31. *Bivins R. L., Metropolis N., Pasta J. R.*— J. Comput. Phys., 1973, v. 12, p. 65.
32. *Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н.*— Укр. мат. ж., 1955, т. VII, с. 5.
33. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.
34. *Born M.* The Mechanics of the Atom.— London: Bell, 1927. (Имеется перевод: *Макс Борн.* Лекции по атомной механике.— Киев: ГНТИ Украины, 1934.)
35. *Bountis T. C.* Nonlinear Models in Hamiltonian Mechanics and Statistical Mechanics, Ph. D. Thesis.— N. Y.: University of Rochester, Rochester, 1978.
36. *Bountis T. C.*— Physica, 1981, v. 3D, p. 577.
37. *Bountis T. C., Segur H., Vivaldi F.*— Phys. Rev., 1982, v. A25, p. 1257.
38. *Brahic A.*— Astron. Astrophys., 1971, v. 12, p. 98.
39. *Brambilla M., Lichtenberg A. J.*— Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 517.
40. *Bridges R., Rowlands G.*— Phys. Letters, 1977, v. 63A, p. 189.
41. *Brillouin L.*— Compt. Rend., 1927, v. 183, p. 24.
42. *Brillouin L.* Wave Propagation in Periodic Structures.— N. Y.: Dover, 1953. [Имеется перевод: *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах.— М.: ИЛ, 1959.]
43. *Brouwer D., Clemence G. M.*— in: The Solar System III; Planets and Satellites/Eds. Kuiper, Middlehurst.— Chicago: Chicago University Press, 1961, p. 31.
44. *Brumer P., Duff J. W.*— J. Chem. Phys., 1976, v. 65, p. 3566.
45. *Bruns H.*— Berichte der Kgl. Sächs. Ges. der Wiss., 1887, pp. 1,55; Acta Math., 1887, v. XI, p. 25.
46. *Bunimovich L. A., Sinai Ya. G.*— Commun. Math. Phys., 1980. v. 78, p. 247.
47. *Callen J. D.*— Phys. Rev. Letters, 1977, v. 39, p. 1540.
48. *Carreras B., Hicks H. R., Lee D. K.*— Phys. Fluids, 1981, v. 24, p. 66.
49. *Cary J. R.* Lie Transforms and Their Use in Hamiltonian Perturbation Theory.— Lawrence Berkeley Laboratory Report 6350, 1978; Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, California, 1979.
50. *Cary J. R.*— Phys. Reports, 1981, v. 79, p. 129.
51. *Cary J. R., Kaufman A. N.*— Phys. Rev. Letters, 1977, v. 39, p. 402.
52. *Cary J. R., Kaufman A. N.*— Phys. Fluids, 1981, v. 24, p. 1238.
53. *Cary J. R., Meiss J. D.*— Phys. Rev., 1981, v. A24, p. 2664.
54. *Cary J. R., Meiss J. D., Bhattacharee A.*— Phys. Rev., 1981, v. A23, p. 2744.
55. *Casati G.*— Letters Nuovo Cimento, 1975, v. 14, p. 311.
56. *Casati G., Chirikov B. V., Izrailev F. M., Ford J.*— in: Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems/Eds. Casati, Ford.— N. Y.: Springer-Verlag, Lectures Notes in Physics, 1979, v. 93, p. 334.
57. *Casati G., Chirikov B. V., Ford J.* — Phys. Letters, 1980, v. 77A, p. 91.
58. *Casati G., Ford J.*, (Eds). Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems.— N. Y.: Springer-Verlag, Lectures Notes in Physics, 1979, v. 93.
59. *Casati G., Guarneri I., Valz-Gris F.* On the Connection between Quantization of Nonintegrable Systems and the Statistical Theory of Spectra, preprint.— Milano: Universitá di Milano, 1980.
60. *Casati G., Valz-Gris F., Guarneri I.*— Physica, 1981, v. 3D, p. 644.
61. *Chaitin G. J.*— Sci. Am., 1975, May.
62. *Chandrasekhar S.*— Rev. Mod. Phys., 1943, v. 15, p. 1. [Имеется перевод: *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии.— М.: ИЛ, 1947.]
63. *Chandrasekhar S.*— in: The Plasma in a Magnetic Field/Ed. Landshof.— Palo Alto: Stanford University Press, 1958.

64. *Chandrasekhar S., Trehan S. K.* Plasma Physics.— Chicago: University of Chicago Press, 1960.
65. *Chen F.* Introduction to Plasma Physics.— N. Y.: Plenum Press, 1974.
66. *Chillingworth D. R. J.* Differential Topology with a View to Applications.— London: Pitman, 1976.
67. *Чириков Б. В.*— Атомная Энергия, 1959, т. 6, с. 630.
68. *Чириков Б. В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности.— Новосибирск: препринт ИЯФ СО АН СССР, № 267, 1969.
69. *Чириков Б. В.*— Физика плазмы, 1978, т. 4, № 3, с. 521.
70. *Chirikov B. V.*— Phys. Reports, 1979, v. 52, p. 265.
71. *Чириков Б. В.*— Физика плазмы, 1979, т. 5, № 4, с. 880.
72. *Chirikov B. V., Ford J., Vivaldi F.*— in: Nonlinear Dynamics and the Beam — Beam Interaction/Eds. Month, Herrera.—N. Y.: American Iistitute of Physics, AIP Conference Proceedings, 1979, v. 57, p. 323.
73. *Chirikov B. V., Izrailev F. M.* Colloques Internationaux du C. N. R. S., N 229 (Toulouse, 1973).— Paris: C. N. R. S., 1976, p. 409.
74. *Chirikov B. V., Izrailev F. M.*— Physica, 1981, v. 2D, p. 30.
75. *Chirikov B. V., Izrailev F. M., Tayursky V. A.*— Comput. Phys. Commun., 1973, v. 5, p. 11.
76. *Израйлев Ф. М., Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.* Динамическая стохастичность в классической механике.— Новосибирск: препринт ИЯФ СО АН СССР, 80—209, 1980.
77. *Израйлев Ф. М., Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.* Переходная стохастичность в квантовой механике.— Новосибирск: препринт ИЯФ СО АН СССР, 80—210, 1980.
78. *Churchill R. C., Pecelli G., Rod D. L.*— in: Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems/Eds. Casati, Ford.— N. Y.: Springer-Verlag, Lecture Notes in Physics. 1979, v. 93, p. 76.
79. *Cohen R. H.*— Nucl. Fusion, 1979, v. 19, p. 1579.
80. *Cohen R. H., Rowlands G.*— Phys Fluids, 1981, v. 24, p. 2295.
81. *Cohen R. H., Rowalnds G., Foote J. H.*— Phys Fluids, 1978, v. 21, p. 627.
82. *Collet P., Eckmann J. P.* Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems.— Basel: Birkhäuser Verlag, Progress in Physics, 1980, v. 1.
83. *Collet P., Eckmann J. P., Lanford O. E.*— Commun. Math. Phys., 1980, v. 76, p. 211.
84. *Collet P., Eckmann J. P., Koch H.*— Physica, 1981, v. 3D, p. 457.
85. *Collet P., Eckmann J. P., Koch H.*— J. Stat. Phys., v. 25, p. 1. 1981.
86. *Contopoulos G.*— Zeits. für Astrophys., 1960, v. 49, p. 273.
87. *Contopoulos G.*— J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 788.
88. *Contopoulos G.*— in: Dynamics of Stellar Systems/Ed. Hayli.— Int. Astr. Union, 1975, p. 209.
89. *Contopoulos G.*— Cel. Mech., 1978, v. 17, p. 167.
90. *Contopoulos G.*— in: Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems/Eds. Casati, Ford.— N. Y.: Springer Verlag, Lecture Notes in Physics, 1979, v. 93, p. 1.
91. *Contopoulos G., Montsoulas M.*— Astron. J., 1965, v. 70, p. 817.
92. *Contopoulos G., Papayannopoulos Th.* — Astron. Astrophys., 1980, v. 92, p. 33.
93. *Contopoulos G., Galgani L., Giorgilli A.*— Phys. Rev., 1978, v. A18, p. 1183
94. *Courant E. D., Snyder H. S.*— Ann. Phys., 1958, v. 3, p. 1. [Имеется перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 4, 1958.]
95. *Courant E. D., Livingston M. S., Snyder H. S.*— Phys. Rev., 1952,, v. 88, p. 1190. [Имеется перевод в сб.: Проблемы современной физики, вып. 11, 1954.]
96. *Crutchfield J. P., Huberman B. A.*— Phys. Letters, 1980, v. 77A, p. 407.
97. *Crutchfield J. P., Farmer D., Packard N. et al.*— Phys. Letters, 1980, v. 76A, p. 1.
98. *Curry J. H.*— Commun. Math. Phys., 1978, v. 60, p. 193.
99. *Curry J. H.*— Commun. Math. Phys., 1979, v. 68, p. 129.

100. *Curry J. H., Yorke J. A.*— in: Lecture Notes in Mathematics 668, 1978, p. 48.— Berlin: Springer-Verlag.
101. *Degn H., Olsen L. F., Perran J. W.*— Ann. N. Y. Acad. Sci., 1979, v. 316, p. 625.
102. *Deprit A.*— Cel. Mech., 1969, v. 1, p. 12.
103. *Derrido B., Gervois A., Pomeau Y.*— J. Phys., 1979, v. A12, p. 269.
104. *De Uogelaere R.*— in: Contributions to Theory of Nonlinear Oscillations/Ed. Lefschetz.— New Jersey: Princeton University Press, Princeton, 1958, v. 4, p. 53.
105. *Dewar R. L.*— J. Phys., 1976, v. A9, p. 2043.
106. *Dragt A. J.*— Rev. Geophys., 1965, v. 3, p. 255.
107. *Dragt A. J., Finn J. M.*— J. Geophys. Res., 1976, v. 81, p. 2327.
108. *Dragt A. J., Finn J. M.*— J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 2215.
109. *Дубинина А. Н., Юдин Ю. Н.*— ЖЭТФ, 1968, т. 26, с. 707.
110. *Dunnett D. A., Laing E. W., Roberts S. J., Robson A. E.*— Plasma Phys. (J. N. E. Pt. C), 1965, v. 7, p. 359.
111. *Dunnett D. A., Laing E. W., Taylor J. B.*— J. *Math.* Phys., 1968, v. 9, p. 1819.
112. *Eckmann J. P.*— Rev. Mod. Phys., 1981, v. 53, p. 643.
113. *Eckmann J. P., Koch H., Wittwer P.* A computer assisted proof of universality for area-preserving maps.— Preprint UGVA-DPT-1981/04-345, Theoretical Physics, University de Genéve, 1981.
114. *Эйнштейн А.* К современному состоянию проблемы теплоемкости.— Собр. научн. тр.—М.: Наука, 1966, т. 3, с. 277.
115. *Eldridge O.*— Phys. Fluids, 1972, v. 15, p. 676.
116. *Eminhizer C. R., Helleman R. H. G., Montroll E. W.*— J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 121.
117. *Escande D. F., Doveil F.*— J. Stat. Phys., 1981, v. 26, p. 257.
118. *Escande D. F., Doveil F.*— Phys. Letters, 1981, v. 83A, p. 307; Phys. Letters, 1981, v. 84A, p. 399.
119. *Escande D. F.*— in: Long-Time Prediction in Dynamics/Eds. Horton, Reichl, Szebehely.— N. Y.: Wiley, 1983, p. 149.
120. *Farmer J. D.*— Physica, 1982, v. 4D, p. 336.
121. *Farmer J. D., Crutchfield H., Froehling et al.*— in: Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman.— N. Y.: Ann.N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 453.
122. *Feigenbaum M. J.*— J. Stat. Phys., 1978, v. 19, p. 25; 1979, v. 21, p. 669.
123. *Feigenbaum M. J.*— Phys. Letters, 1979, v. 74A, p. 375.
124. *Feit S. D.*— Commun. Math. Phys., 1978, v. 61, p. 249.
125. *Fenstermacher R., Swinney H. L., Gollub J. P.*— J. Fluid Mech., 1978, v. 94, p. 103.
126. *Fermi E.*— Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1169.
127. *Fermi E., Pasta J. R., Ulam S.* Studies of Nonlinear Problems. Los Alamos Rept. LA-1940, 1955. [Имеется перевод: *Энрико Ферми.* Научные труды.— М.: Наука, 1972, т. II, с. 645.]
128. *Field R. J., Noyes R. M.*— J. Chem. Phys., 1974, v. 60, p. 1877.
129. *Filonenko N. N., Sagdeev R. Z., Zaslavskiy G. M.*— Nucl. Fusion, 1967, v. 7, p. 253.
130. *Finn J. M.*— Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 1749.
131. *Foias C., Prodi G.*— Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1967, v. 39, p. 1.
132. *Foias C., Treve Y.*— Phys. Letters, 1981, v. 85*A*, p. 35.
133. *Ford J.*— in: Fundamental Problems in Statistical Mechanics, vol. 3/Ed. Cohen.— North Holland, Netherlands, 1975.
134. *Ford J., Lunsford G. H.*— Phys. Rev., 1970, v. A1, p. 59.
135. *Ford J., Waters J.*— J. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 1293.
136. *Ford J., Stoddard S. D., Turner J. S.*— Prog. Theor. Phys., 1973, v. 50, p. 1547.
137. *Freis R. P., Hartman C. W., Hamzeh F. M., Lichtenberg A. J.*— Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 533.

138. *Froehling H., Crutchfield J. P., Farmer D. et al.*— Physica, 1981, v. 3D, p. 605.
139. *Froeschlé C.*— Astrophys. Space Sci., 1971, v. 14, p. 110.
140. *Froeschlé C.*— Astron. Astrophys., 1972, v. 16, p. 172.
141. *Froeschlé C., Scheidecker J.-P.*— Astrophys. Space Sci., 1973, v. 25, p. 373.
142. *Froeschlé C., Scheidecker J. P.*— Astron. Astrophys., 1973, v. 22, p. 431.
143. *Froeschlé C., Scheidecker J. P.*— J. Comput. Phys., 1973, v. 11, 423.
144. *Froeschlé C., Scheidecker J. P.*— Phys. Rev., 1975, v. A12, p. 2137.
145. *Fukuyama A., Mamota H., Itatani R.*— in: Proceedings, 3rd Symposium on Plasma Heating in Toroidal Devices/Ed. Sindoni.— Bologna: Editrice Compositori, 1976; Phys. Rev. Letters, 1977, v. 38, p. 701.
146. *Гадияк Г. В., Израйлев Ф. М., Чириков Б. В.*— В сб.: Труды 7-й Междунар. конфер. по нелинейным колебаниям (Берлин, 1975).— Berlin: Akademie-Verlag, 1977, Band II-1, S. 315.
147. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.*— В сб.: Вопросы теории плазмы/Ред. Леонтович.— М.: Атомиздат, вып. 7, 1973, с. 3.
148. *Galgani L., Lo Vecchio G.*— Nuovo Cimento, 1979, v. B52, p. 1.
149. *Garren A., Riddel R. J., Smith L. et al.*— Proc. 2nd UN Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, 1958, v. 31, p. 65.
150. *Garrido L. M.*— J. Math. Phys., 1968, v. 10, p. 1054.
151. *Geisal T., Nierwetberg J.*— Phys. Rev. Letters, 1981, v. 47, p. 1975.
152. *Gell Y., Harte J., Lichtenberg A. J., Nevins W. M.*— Phys. Rev. Letters, 1975, v. 35, p. 1642.
153. *Giacaglia G. E. O.* Perturbation Methods in Nonlinear Systems. Appl. Math. Sci. No. 8.— N. Y.: Springer-Verlag, 1971. [Имеется перевод *Джакалья Г. Е. О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем.— М.: Наука, 1979).
154. *Gibson G. W., Jordan W., Lauer E.*,— Phys. Fluids, 1963, v. 6, p. 116.
155. *Giglio G., Musazzi S., Perini U.*— Phys. Rev. Letters, 1981, v. 42, p. 243.
156. *Goldstein H.* Classical Mechanics.— Cambridge: Addison—Wesley Press, Inc., 1951. [Имеется перевод: *Голдстейн Г.* Классическая механика.— М.: Наука, 1975.]
157. *Gollub J. P., Benson S. V., Steinman J.*— in: Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman.— N. Y.: Ann. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 22.
158. *Gorman M., Reith L. A., Swinney H. L.*— in: Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman.— N. Y.: Ann. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 10.
159. *Gormezano C., Hess W., Ichtchenko G. et al.*— Nucl. Fusion, 1981, v. 21, p. 1047.
160. *Goward F. R.*— in: Lectures on the Theory and Design of an AG Proton Synchrotron.— Geneva: CERN, 1953, p. 19.
161. *Grawe H.*— Plasma Phys., 1969, v. 11, p. 151.
162. *Green G. K., Courant E. D.*— Handbuch der Physik, 1959, v. 44, p. 336. [Имеется перевод в кн.: Ускорители/Ред. Яблоков.— М.: Атомиздат, 1962, с. 292.]
163. *Green G.*— Cambridge Philos. Trans., 1837, v. 6, p. 457.
164. *Greene J.*— J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 760.
165. *Greene J.*— J. Math. Phys., 1979, v. 20, p. 1183.
166. *Greene J.*— in: Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction/Eds. Month, Herrera.— N. Y.: American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings, 1979, v. 57, p. 257.
167. *Greene J., MacKay R. S., Vivaldi F., Feigenbaum M. J.*— Physica, 1981, v. 3D, p. 468.
168. *Greenspan B., Holmes P.*— in: Nonlinear Dynamics and Turbulence/Eds. Berenblatt, Looss, Joseph.— London: Pitman, 1981.
169. *Grieger G., Ohlendorf W., Packer H. D. et al.*— in: Proceed. of the IVth IAEA Conf. on Plasma Phys. and Contr. Fusion.— Vienna: IAEA, 1971, v. III, p. 37.
170. *Grossmann S., Thomae S.*— Z. Naturforsch., 1977, v. 32A, p. 1353.

171. *Gustavson F.*— Astron. J., 1966, v. 21, p. 670.
172. *Hagihara Y.*— in: The Solar System III; Planets and Satellites/Eds. Kuiper, Middlehurst.— Chicago: Chicago University Press, 1961, p. 95.
173. *Hagihara Y.* Celestial Mechanics.— Cambridge: MIT Press. Massachusetts, 1970—1976.
174. *Hall L.* On the Existence of a Last Invariant of Conservative Motion. Preprint UCID 18980, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California.
175. *Hastie R. J., Taylor J. B., Haas F. A.*— Ann. Phys., 1967, v. 41, p. 302.
176. *Hastie R. J., Hobbs G. D., Taylor J. B.*— in: Proceed. of the 3rd IAEA Conf. on Plasma Phys. and Contr. Fusion.— Vienna: IAEA, 1969, v. I, p. 389.
177. *Hatori T., Watanabe T.*— Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 143.
178. *Helleman R. H. G.*— in: Statistical Mechanics and Statistical Methods/Ed. Landman.— N. Y.: Plenum Press, 1977.
179. *Helleman R. H. G.*— in: Topics in Nonlinear Dynamics/Ed. Jorna.— N. Y.: American Institute of Physics, 1978, v. 46, p. 264.
180. *Helleman R. H. G.*— in: Fundamental Ploblems in Statistical Mechanics, v. 5/Ed. Cohen.— Amsterdam: North Holland Publ., 1980, p. 165.
181. *Helleman R. H. G.* (Ed.). Nonlinear Dynamics.— N. Y.: Am. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357.
182. *Helleman R. H. G.*— in: Long-Time Prediction in Dynsmics/Eds. Horton, Reichl, Szebehely.— N. Y.: Wiley, 1983, p. 95.
183. *Helleman R. H. G., Bountis T.*— in: Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems/Eds. Casati, Ford.— N. Y.: Springer-Verlag, Lectures Notes in Physice, 1979, v. 93, p. 353.
184. *Helleman R. H. G., Montroll E. W.*— Physica, 1974, v. 74, p. 22.
185. *Henon M.*— Q. Appl. Math., 1969, v. 27, p. 291.
186. *Henon M.*— Phys. Rev., 1974, v. B9, p. 1925.
187. *Henon M.*— Commun. Math. Phys., 1976, v. 50, p. 69. [Имеется перевод в сб.: Странные аттракторы/Ред. Синай, Шильников.— М.: Мир, 1981, с. 152.]
188. *Henon M., Heiles C.*— Astron. J., 1964, v. 69, p. 73.
189. *Hereward H. G., Johnsen K., Lapostolle P.*— in: Proc. CERN Symp. on High-Energy Accelerators.— Geneva: CERN, 1956, p. 179.
190. *Herrera J. C., Month M., Peierls R. F.*— in: Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction/Eds. Month, Herrera.— N. Y.: American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings: 1979, v. 57, p. 202.
191. *Hertweck F., Schlüter A.*— Z. Naturforsch., 1957, v. 12a, p. 844.
192. *Hilderbrand F. B.* Advanced Calculus for Engineers.— N. Y.: Prentice-Hall, 1948.
193. *Hine M. G. N.*— in: Lectures on the Theory and Design of an A. G. Proton Synchrotron.— Geneva: CERN, 1953, p. 69.
194. *Holmes P. J.*— Appl. Math. Modeling, 1977, v. 1, p. 362.
195. *Holmes P. J.*— Philos. Trans. R. Soc., 1979, v. 292, p. 41.
196. *Holmes P. J.*— SIAM J. Appl. Math., 1980, v. 38, p. 65.
197. *Holmes P. J., Marsden J.*— J. Math. Phys., 1982, v. 23, p. 669.
198. *Holt C. R.* Construction of Integrable Hamiltonians. Ph. D. Thesis, University of Colorado, Boulder, Colorado, 1981.
199. *Hori G.*— Astron. Soc. Japan, 1966, v. 18, p. 287.
200. *Howard J. E.*— Phys. Fluids 1970, v. 13, p. 2407.
201. *Howard J. E.*— Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 2373.
202. *Howard J. E., Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.*— Physica, 1982, v. 5D, p. 243.
203. *Howland R. A.*— Cel. Mech., 1977, v. 17, p. 327.
204. *Huberman B. A., Rudnick J.*— Phys. Rev. Letters, 1980, v. 45, p. 154.
205. *Huberman B. A., Zisook A. B.*— Phys Rev. Letters, 1981, v. 46, p. 626.
206. *Hudson J. L., Hart M., Marinko D.*—J. Chem. Phys., 1979, v. 71, p. 1601.
207. *Izrailev F. M.*— Physica, 1980, v. 1D, p. 243.

208. *Израйлев Ф. М., Чириков Б. В.*— ДАН СССР, 1966, т. 166, стр. 57.
209. *Израйлев Ф. М., Жданова Т. А.* К вопросу о статистическом ускорении Ферми.— Новосибирск: препринт ИЯФ СО АН СССР, № 121, 1974.
210. *Израйлев Ф. М., Рабинович М. И., Угодников А. Д.* О приближенном описании диссипативных систем со стохастическим поведением.— Горький: препринт ИПФ АН СССР, № 17, 1981.
211. *Израйлев Л. М., Мишнев С. И., Тумайкин Г. М.* Численные эксперименты по определению критерия стохастичности при взаимодействии встречных пучков (одномерная модель). — Новосибирск: препринт ИЯФ СО АН СССР, № 77—43, 1977.
212. *Jaeger F., Lichtenberg A. J.*— Ann. Phys., 1972, v. 71, p. 319.
213. *Jaeger F., Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.*— Plasma Phys., 1972, v. 14, p. 1073.
214. *Johnston S., Kaufman A. N.*— Phys, Rev. Letters, 1978, v. 40, p. 1266.
215. *Jorna S.* (Ed). Topics in Nonlinear Dynamics.— N. Y.: American Institute of Physics, 1978, v. 46.
216. *Кадомцев Б. Б.*— Физика плазмы, 1975, т. 1, № 5. с. 710.
217. *Kadomtsev B. B., Pogutse O. P.*— Nucl. Fusion, 1971, v. 11, p. 67.
218. *Kaplan J., Yorke J.*— in: Lecture Notes in Mathematics.— Berlin: Springer-Verlag, 1979, v. 730, p. 204.
219. *Karney C. F. F.* Stochastic Heating of Ions in a Tokamak by RF Power. Ph. D. Thesis, 1977, MIT, Cambridge, Massachusetts.
220. *Karney C. F. F.*— Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 1584.
221. *Karney C. F. F.*— Phys. Fluids, 1979, v. 22, p. 2188.
222. *Karney C. F. F., Bers A.*— Phys. Rev. Letters, 1977, v. 39, p. 550.
223. *Karney C. F. F., Rechester A. B., White R. B.*— Physica, 1982, v. 4D, p. 425.
224. *Kaufman A. N.*— in: Topics in Nonlinear Dynamics/Ed. Jorna — N. Y.: American Institute of Physics, 1978, v. 46, п. 286.
225. *Kaufman A. N., Cary J., Pereira N.*— Phys. Fluids, 1979, v. 22, p. 790.
226. *Keller J., Rubinov S.*— Ann. Phys. N. Y., 1960, v. 9, p. 24.
227. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби.— М.: Физматгиз, 1961.
228. *Klein A., Li C. T.*— J. Math. Phys., 1979, v. 20, p. 572.
229. *Колмогоров А. Н.*— ДАН СССР, 1954, т. 98, с. 527.
230. *Колмогоров А. Н.*— ДАН СССР, 1959, т. 124, с. 754.
231. *Колмогоров А. Н.*— Проблемы передачи информации, 1965, т. I, № 1, с. 3.
232. *Коломенский А. А., Лебедев А. Н.* Теория циклических ускорителей.— М.: ГИФМЛ, 1962.
233. *Kopell N.*— in: Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman.— N. Y.: Am. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 397.
234. *Kopell N., Howard L. N.*— Stud. Appl. Math., 1973, v. 52, p. 291.
235. *Kramers H. A.*— Z. Physik, 1926, v. 39, p. 828.
236. *Krilin L.*— Czech. J. Phys., 1967, v. B17, p. 112.
237. *Krilin L.*— Czech. J. Phys., 1967, v. B17, p. 124.
238. *Kruskal M. D.*— in: Proceedings of the 3rd Conference on Ionized Gases.— Venice.: 1957.
239. *Kruskal M. D.*— Nucl. Fusion, 1962, Suppl., Pt 2, p. 775. [Имеется перевод: *Крускал М.* Адиабатические инварианты.— М.: ИЛ, 1962.]
240. *Kruskal M. D., Zabusky N. J.*— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 231.
241. *Крылов Н. С.* Работы по обоснованию статистической физики.— М.: изд-во АН СССР, 1950.
242. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— Киев: изд-во АН УССР, 1937.
243. *Kuckes A.* — Plasma Phys., 1968, v. 10, p. 367.
244. *Kulsrud R. M.*— Phys. Rev., 1957, v. 106, p. 205.
245. *Kummer M.*— Commun. Math. Phys., 1978, v. 55, p. 85.
246. *Kuramoto Y., Yamada T.*— Prog. Theor. Phys., 1976, v. 56, p. 679.
247. *Lacina J.*— Czech. J. Phys., 1963, v. B13, p. 401.

248. *Lacina J.*— Plasma Phys. (J. N. E. Pt. C), 1966, v. 8, p. 515.
249. *Lamb G.* Elements of Soliton Theory.— N. Y.: Wiley, 1980. [Имеется перевод: *Лэм Дж.-мл.* Введение в теорию солитонов.— М.: МИР, 1983.]
250. *Ландау Л. Д.*— ЖЭТФ, 1937, т. 7, с. 203.
251. *Ландау Л. Д.*— ДАН СССР, 1944, т. 44, № 8, с. 339.
252. *Lanford O.* Qualitative and Statistical Theory of Dissipative Systems. 1976 SIME School of Statistical Mechanics.— Napoli: Liguori Editore, 1976.
253. *Lanford O.*— in: Turbulence Seminar/Eds. Bernard, Rativ.— Springer Lecture Notes in Mathematics 615, 1977, p. 114.
254. *Lanford O.*— in: Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence/Eds. Swinney, Gollub.— N. Y.: Springer-Verlag, 1981. Chapter 2.
255. *Laslett L. J.*— in: Focusing of Charged Particles/Ed. Septier.— N. Y.: Academic Press, 1967, p. 355.
256. *Laval G., Gresillon D.* (Eds).— Intrinsic Stochasticity in Plasmas.— Orsay: Les Editions de Physique, Coutraboeuf, 1979.
257. *Lasar N., Barter J., Dandl R. et al.*— in: Proceedings of the 2nd Workshop on Hot Electron Ring Physics/Ed. Uckan.— Oak Ridge: Oak Ridge National Laboratory, Tennessee, 1980.
258. *Lewis H. R., Jr.*— Phys. Rev. Letters, 1967, v. 18, p. 510.
259. *Lewis H. R., Jr.*— J. Math. Phys., 1968, v. 9, 1976.
260. *Lewis H. R., Leach P. G. L.* A Generalisation of the Invariant for the Time-Dependent Linear Oscillator. Preprint LA-UR 80-68, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, 1980.
261. *Li T. Y., Yorke J. A.*— Am. Math. Monthly, 1975, v. 82, p. 985.
262. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений, т. 1 и 2.— М.: изд-во АН СССР, 1954—1956.
263. *Libhaber A., Maurer J.*— J. de Physique, 1980, v. 41, pt. C3.
264. *Lichtenberg A. J.*— Rev. Sci. Instr., 1964, v. 54, p. 1196.
265. *Lichtenberg A. J.* Phase Space Dynamics of Particles.— N. Y.: Wiley, 1969. [Имеется перевод: *Лихтенберг А.* Динамика частиц в фазовом пространстве.— М.: Атомиздат, 1972.]
266. *Lichtenberg A. J.*— in: Intrinsic Stochasticity in Plasmas/Eds. Laval, Gressillon.— Orsay: Les Editions de Physique, Courtaboeuf, 1979, p. 13.
267. *Lichtenberg A. J.*— in: Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems/Eds. Casati, Ford.— N. Y.: Springer-Verlag, Lectures Notes in Physics, 1979, v. 93, p. 18.
268. *Lichtenberg A. J., Berk H. I.*— Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 999.
269. *Lichtenberg A. J., Jaeger F. W.*— Phys. Fluids, 1970, v. 13, p. 392.
270. *Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.*—Nucl. Fusion, 1976, v. 16, p. 532.
271. *Lichtenberg A. J., Melin G.*— Phys. Fluids, 1972, v. 16, p. 1660.
272. *Lichtenberg A. J., Lieberman M. A., Cohen R. H.*— Physica, 1980, v. 1D, p. 291.
273. *Lieberman M. A.*— in: Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman.— N. Y.: Am. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 119.
274. *Lieberman M. A., Lichtenberg A. J.*— Phys. Rev., 1972, v. A5, p. 1852.
275. *Lieberman M. A., Lichtenberg A. J.*— Plasma Phys., 1973, v. 15, p. 125.
276. *Lieberman M. A., Tennyson J. L.*— in: Long-Time Prediction in Dynamics/Eds. Horton, Reichl, Szebehely.— N. Y.: Wiley, 1983, p. 179.
277. *Lieberman M. A., Tsang K.*— Bull. Am. Phys. Soc., 1981, v. 26, p. 1013.
278. *Lindstedt M.*— Astron. Nach., 1882, v. 103, p. 211.
279. *Liouville J.*— J. Math. Pures Appl., 1837, v. 2, p. 16.
280. *Littlejohn R.* Lawrence Berkeley Laboratory Report UCID-8091, 1978, Berkeley, California.
281. *Littlejohn R.*— J. Math. Phys., 1979, v. 20, p. 2445.
282. *Littlewood J. E.*— Ann. Phys., 1963, v. 21, p. 233.
283. *Lorenz E. N.*— J. Atmos. Sci., 1963, v. 20, p. 130. [Имеется перевод

в сб: Странные аттракторы/Ред. Синай, Шильников.— М.: Мир, 1981, с. 88.]
284. *Lorenz E. N.*— in: Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman.— N. Y.: Am. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 282.
285. *Lozi R.*— J. Phys., 1978, v. 39, pt. C5-9.
286. *Lunsford G. H., Ford J.*— J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 700.
287. *McDonald S. W., Kaufman A. N.*— Phys. Rev. Letters, 1979, v. 42, p. 1189.
288. *McLaughlin J. B.*— Phys. Rev., 1979, v. A20, p. 2114.
289. *McLaughlin J. B.*— J. Stat. Phys., 1981, v. 24, p. 375.
290. *McNamara B.*— J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 2154.
291. *McNamara B., Whiteman R. I.* Invariants of Nearly Periodic Hamiltonian Systems. Culham Laboratory Report CLM P111, 1966, Culham, England.
292. *McNamara B., Whiteman K. I.*— J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 2029.
293. *Manneville P., Pomeau Y.*— Physica, 1980, v. 1D, p. 219.
294. *Marcus R. A.*— in: Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman.— N. Y.: Am. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 169.
295. *Matthaeus W. H., Montgomery D.*— in: Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman.— N. Y.: Am. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 203.
296. *May R. M.*— Nature, 1976, v. 261, p. 459.
297. *May R. M., Oster G. F.*— Am. Natur., 1976, v. 110, p. 573.
298. *Мельников В. К.*—ДАН СССР, 1962, т. 144, с. 747; 1963, т. 148, с. 1257.
299. *Мельников В. К.* — Труды Моск. мат. общ., 1963, т. 12, с. 3.
300. *Metropolis N., Stein M. L., Stein P. R.*— J. Combinatorial Theory, 1973, v. 15A, p. 25.
301. *Misiurewics M.*— in: Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman.— N. Y.: Am. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 348.
302. *Mo K. C.*— Physica, 1972, v. 57, p. 445.
303. *Molchanov A. M.*— Icarus, 1968, v. 8, p. 203.
304. *Month M., Herrera J. C.*, (Eds.) Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction.— N. Y.: American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings, 1979, v. 57.
305. *Морозов А. Д.*— Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1973, т. 13, № 5, с. 1134.
306. *Морозов А. Д.*— Диффер. уравнения, 1976, т. 12, № 2, с. 241.
307. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.* Движение заряженных частиц в электромагнитных полях.— В кн.: Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1963, т. 2, с. 177.
308. *Moser J.*— Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Kl., 1962, p. 1.
309. *Moser J.*— Ann. Scuola Normale Sup. Pisa Ser. III, 1966, v. 20, p. 499. [Имеется перевод: УМН, 1968, т. 23, № 4, с. 179.]
310. *Moser J.* Stable and Random Motions in Dynamical Systems.— Princeton: Princeton University Press, New Jersey, 1973.
311. *Moser J.*— Math. Intelligencer, 1978, v. 1, p. 65.
312. *Motz H., Watson C. J. H.*— Adv. Electron Phys., 1967, v. 23, p. 153.
313. *Nayfeh A.* Perturbation Methods.— N. Y.: Wiley, 1973. [Имеется перевод: *Найфэ А.* Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.]
314. *Нехорошев Н. Н.*— УМН. 1977, т. 32, № 6, с. 5.
315. *Nekrasov A. R.*— Nucl. Fusion, 1970, v. 10, p. 387.
316. *Nevins W. M., Harte J., Gell Y.*— Phys. Fluids, 1979, v. 22, p. 2108.
317. *Newhouse S., Ruelle D., Takens F.* — Commun. Math. Phys., 1978, v. 64, p. 35.
318. *Noid D. W., Koszykowski, Marens R. A.*— J. Chem. Phys., 1977, v. 67, p. 404.
319. *Northrop T. G.* The Adiabatic Motion of Charged Particles.— N. Y.: Wiley, 1963. [Имеется перевод: *Нортрон Т.* Адиабатическая теория движения заряженных частиц.— М.: Атомиздат, 1967.]
320. *Northrop T. G., Teller E.*— Phys. Rev., 1960, v. 117, p. 215.

321. *Northrop T. G., Liu C. S., Kruskal M. D.*— Phys. Fluids, 1966, v. 9, p. 1503.
322. *Okuda H., Dawson J.*— Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 2336.
323. *Оселедец В. И.*— Труды Моск. мат. общ. 1968, т. 19, с. 179.
324. *Ott E.*— Rev. Mod. Phys., 1981, v. 53, p. 655.
325. *Ott E., Hanson J. D., Antonsen T. M., Jr.*— Bull. Am. Phys. Soc., 1981, v. 26, p. 1013.
326. *Packard N. H., Crutchfield J. P., Fanner J. D., Shaw R. S.*— Phys. Rev. Letters, 1980, v. 45, p. 712.
327. *Penrose O.* Foundations of Statistical Mechanics.— Oxford: Pergamon press, 1970.
328. *Percival I. C.*— J. Phys., 1974, v. A7, p. 794.
329. *Percival I. C.*— Adv. Chem. Phys., 1977, v. 36, p. 1.
330. *Percival I. C.*— J. Phys., 1979, v. A12, L57.
331. *Percival I. C.*— in: Nonlinear Dynamics and the Beam—Beam Interaction/Eds. Month, Herrera.— N. Y.: American Institute of Physics, AIP Conference Proceed., 1979, v. 57, p. 302.
332. *Percival I. C., Pomphrey N.*— Mol. Phys., 1976, v. 31, p. 97.
333. *Percival I. C., Pomphrey N.*— Mol. Phys., 1978, v. 35, p. 649.
334. *Песин Ю. Б.*— ДАН СССР, 1976, т. 226, № 4, с. 774.
335. *Песин Ю. Б.*— УМН, 1977, т. 32, № 4, с. 55.
336. *Poguste O. P.*— Nucl. Fusion, 1972, v. 12, p. 39.
337. *Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. — Paris: Gauthier-Villars, 1892. [Имеется перевод: Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. т. 1, 2. Избран. труды.— М.: Наука, 1971—1972.]
338. *Пономаренко В. Г., Трайнин Л. Я., Юрченко В. И., Яснецкий А. Н.*— ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 3.
339. *Пустыльников Л. Д.*— ДАН СССР, 1978, т. 241, № 5, с. 1035.
340. *Рабинович М. И.*— УФН, 1978, т. 125, вып. 1, с. 123.
341. *Rannou F.*— Astron. Astrophys., 1974, v. 31, p. 289.
342. *Rechester A. B., Rosenbluth M. N.*— Phys. Rev. Letters, 1978, v. 40, p. 38.
343. *Rechester A. B., Stix T. H.*— Phys. Rev. Letters, 1976, v. 36, p. 587.
344. *Rechester A. B., Stix T. H.*— Phys. Rev., 1979, v. A19, p. 1656.
345. *Rechester A. B., White R. B.*— Phys. Rev. Letters, 1980, v. 44, p. 1586.
346. *Rechester A. B., Rosenbluth M. N., White R. B.*— Phys. Rev., 1981, v. A23, p. 2664.
347. *Rognlien T. D.*— in: Proceedings of the 2nd Workshop on Hot Electron Ring Physics./Ed. Uckan.— Oak Ridge: Oak Ridge National Laboratory, Tennessee, 1982, v. 2, p. 545.
348. *Rosenbluth M. N.*— Phys. Rev. Letters, 1972, v. 29, p. 408.
349. *Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z., Taylor J. B., Zaslavskiy G. M.*— Nucl. Fusion, 1966, v. 6, p. 297.
350. *Rössler O. E.*— Phys. Letters, 1976, v. 57A, p. 397.
351. *Rössler O. E.*— Z. Naturforsch., 1976, v. 31a, pp. 259, 1168.
352. *Roux J. C., Rossi A., Bochelart S., Vidal C.*— Phys. Letters, 1980, v. 77A, p. 391.
353. *Ruelle D.*— Trans. N. Y. Acad. Sci., 1973, v. 35, p. 66.
354. *Ruelle D.*— Math. Intellegencer, 1980, v. 2, p. 126.
355. *Ruelle D., Takens F.*— Commun. Math. Phys., 1971, v. 20, p. 167. [Имеется перевод в сб.: Странные аттракторы/Ред. Синай, Шальников.— М.: Мир, 1981, с. 117.]
356. *Russell D. A., Hanson J. D., Ott E.*— Phys. Rev. Letters, 1980, v. 45, p. 1175.
357. *Рютов Д. Д., Ступаков Г. В.*— ДАН СССР, 1978, т. 240, № 5, с. 1086.
358. *Sagdeev R. Z., Galeev A. A.* Nonlinear Plasma Theory.— N. Y.: Benjamin, 1969. [См. также в сб.: Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1973, вып. 7, с. 205.]
359. *Saltzman B.*— J. Atmos. Sci., 1962, v. 19, p. 329.

360. *Samec T. K., Hauss B. L., Guest G.*— in: Proceedings of the 2nd Workshop on Hot Electron Ring Physics/Ed. Uckan.— Oak Ridge: Oak Ridge National Laboratory, Tennesse, 1982, v. 2, p. 531.
361. *Schmidt G.*— Phys. Fluids, 1962, v. 5, p. 994.
362. *Schmidt G.* Physics of High Temperatupe Plasmas.— N. Y.: Academic Press, 2nd ed., 1979.
363. *Schmidt G.*— Phys. Rev., 1980, v. A22, p. 2849.
364. *Schmidt G., Bialek J.*— Physica, 1982, v. 5D, p. 397.
365. *Schmits R. A., Graziani K. R., Hudson J. L.*— J. Chem. Phys., 1977, v. 67, p. 3040.
366. *Segur H.* Lectures given at the International School of Physics (Enrico Fermi), Varenna, Italy, unpublished.
367. *Seidl M.*— Plasma Phys. (J. N. E. Pt. C), 1964, v. 6, p. 597.
368. *Shaw R.*— Z. Naturforsch., 1981, v. 36a, p. 80.
369. *Shenker S. J., Kadanoff L. P.*— J. Stat. Phys., 1982, v. 4, p. 631.
370. *Shepelyansky D. L.*— Physica, 1983, v. 8D, p. 208.
371. *Shimada I., Nagashima T.*— Prog. Theor. Phys., 1979, v. 61, p. 1605.
372. *Siambis J.* Guiding Center Motion of Charged Particles in Combined Mirror Multipole Cusp Magnetic Fields. Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, California, 1965.]
373. *Siambis J., Northrop T. G.*— Phys. F uids, 1966, v. 6, p. 2001.
374. *Siegel C. L., Moser J.* Lectures on Celestial Mechanics. Grund. d. Math. Wiss Bd. 187, Springer-Verlag, 1971. [Имеется сокращенный перевод в кн.: *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах.— М.: Мир, 1973.]
375. *Simó C.*— J. Stat. Phys., 1980, v. 21, p. 465.
376. *Синай Я. Г.*— В кн.: Proceed. of the Intern. Congress of Mathematicians, 15-22 August, 1962.— Uppsala: Almquist and Wiksells, 1963, p. 540, Sweden.
377. *Синай Я. Г.*— ДАН СССР, 1963, т. 153, с. 1261.
378. *Синай Я. Г.*— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1966, т. 30, № 1, с. 15.
379. *Ситников К. Н.*— ДАН СССР, 1960, т. 133, № 2, с. 303.
380. *Slater J. C.*— Rev. Mod. Phys., 1948, v. 20, p. 473.
381. *Smale S.*— in: Differential and Combinatorial Topology/Ed. Cairns.— Princeton: Princeton University Press, New Jersey, 1965.
382. *Smale S.*— Bull. Am. Math. Soc., 1967, v. 73, p. 747.
383. *Smith G. R.* Stochastic Acceleration by a Single Wave in a Magnetized Plasma. Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, California, 1977 (Lawrence Berkeley Lab. Report LBL-6824).
384. *Smith G. R., Byers J. A., LoDestro L. L.*— Phys. Fluids, 1980, v. 23, p. 278.
385. *Smith G. R., Kaufman A. N.*— Phys. Rev. Letters, 1975, v. 34, p. 1613.
386. *Smith G. R., Kaufman A. N.*— Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 2230.
387. *Smith G. R., Pereira N.*— Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 2253.
388. *Solomonoff R. J.*— Information Control, 1964, v. 7, p. 1.
389. *Соловьев Л. С., Шафранов В. Д.*— В сб.: Вопросы теории плазмы/Ред. Леонтович.— М.: Атомиздат, 1967, вып. 5, с. 3.
390. *Sprott J. C., Edmonds P. H.*— Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 2703.
391. *Stern D.*— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 2771.
392. *Stern D.*— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 2776.
393. *Stix T. H.*— Phys. Rev. Letters, 1973, v. 30, p. 833.
394. *Stoddard S. D., Ford J.*— Phys. Rev., 1973, v. A3, p. 1504.
395. *Stoker J. J.* Nonlinear Vibrations.— N. Y.: Interscience, 1950. [Имеется перевод: *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах.— М.: ИЛ, 1953.]
396. *Swinney H. L., Gollub J. P.*— Phys. Today, 1978, v. 31 (August), p. 41.
397. *Symon K. R.*— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 1320.
398. *Symon K. R., Kerst D. W., Jones L. W. et al.*— Phys. Rev., 1956, v. 103, p. 1837.

399. *Symon K. R., Sessler A. M.*— in: Proc. CERN Symp. High-Energy Accelerators.— Geneva: CERN, 1956, v. 1, p. 44. [Имеется перевод в сб.: Накопление релятивистских частиц/Ред. Лебедев.— М.: Атомиздат, 1963, с. 48.]
400. *Szebehely V.* Theory of Orbits.— N. Y.: Academic Press, 1967.
401. *Tabor M.*— Adv. Chem. Phys., 1981, v. 46, p. 73.
402. *Takens F.*— Indag. Math., 1971, v. 33, p. 379.
403. *Taylor J. B., Laing E. W.*— Phys. Rev. Letters, 1975, v. 35, p. 1306.
404. *Tennyson J. L.*— in: Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction/Eds. Month, Herrera. — N. Y.: American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings No. 57, 1979, p. 158.
405. *Tennyson J. L.*— Physica, 1982, v. 5D, p. 123.
406. *Tennyson J. L., Lieberman M. A., Lichtenberg A. J.*— in: Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction/Eds. Month, Herrera.— N. Y.: American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings No. 57, 1979, p. 272.
407. *Timofeev A. V.*— Nucl. Fusion, 1974, v. 14, p. 165.
408. *Toda M.*— Prog. Theor. Phys. Suppl., 1970, v. 45, p. 174.
409. *Toda M.*— Phys. Letters, 1974, v. 48A, p. 335.
410. *Tomita K., Tsuda I.*— Phys. Letters, 1979, v. A71, p. 489.
411. *Treve Y.*— in: Topics in Nonlinear Dynamics/Ed. Jorna.— N. Y.: American Institute of Physics, 1978, v. 46, p. 147.
412. *Treve Y.*— J. Comput. Phys., 1981, v. 41, p. 217.
413. *Tyson J. J.*— J. Math. Biol., 1978, v. 5, p. 351.
414. *Uckan N. A.* (Ed). Proceedings of the 2nd Workshop on Hot Electron Ring Physics.— Oak Ridge: Oak Ridge National Laboratory, Tennessee, 1982.
415. *Ulam S. M.*— in: Proceedings of the 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability. University of California Press, 1961, v. 3, p. 315. [Имеется перевод в сб: Математика, 1963, т. 7, № 5, с. 137.]
416. *Ulam S. M., Von Neumann J.*— Bull. Am. Math. Soc., 1947, v. 53, p. 1120.
417. *Van Zeijts J. B. J.*— Internal D-1 Report, Theoretical Physics Group, Twente University of Technology, Enschede, Netherlands, 1980—1981.
418. *Vidal C., Roux J.-C., Bachelert S., Rossi A.*— in: Nonlinear Dynamics/Ed. Helleman.— N. Y.: Ann. N. Y. Acad. Sci., 1980, v. 357, p. 377.
419. *Von Zeipel H.*— Ark. Astron. Mat. Fys., 1916, v. 11, No. 1.
420. *Waddell B. V., Rosenbluth M. N., Monticello D. A., White R. B.*— Nucl. Fusion, 1976, v. 16, p. 528.
421. *Waddell B. V., Carreras B., Hicks H. R. et al.*— Phys. Rev. Letters, 1978, v. 41, p. 1386.
422. *Walker J.*— Sci. Am., 1978, v. 239, No. 1, p. 152.
423. *Walker J., Ford J.*— Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 416.
424. *Wang M. C., Uhlenbeck G. E.*— Rev. Mod. Phys., 1945, v. 17, p. 523.
425. *Watari T., Hiroe S., Sato T., Ichimaru S.*— Phys. Fluids, 1974, v. 17, p. 2107.
426. *Wegmann K., Rössler O. E.*— Z. Naturforsch., 1978, v. 33a, p. 1179.
427. *Wentzel G.*— Z. Phys., 1926, v. 38, p. 518.
428. *White R. B., Monticello D. A., Rosenbluth M. N., Waddell B. V.*— in: Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion.— Vienna: Int. Atom Energy Agency, 1977, v. 1, p. 569.
429. *Whiteman K. J., McNamara B.*— J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 1385.
430. *Whittaker E. T.* A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies.— Cambridge: Cambridge University Press, 1964. (Имеется перевод: *Уиттекер Е.* Аналитическая динамика.— М.: ОНТИ, 1937.)
431. *Wiedemann H.*— in: Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction/Eds. Month, Herrera.— N. Y.: American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings, No. 57, 1979, p. 84.
432. *Winfree A.*— Sci. Am., 1974, v. 230, No. 6, p. 82.

433. *Wintner A.* Analytical Foundations of Celestial Mechanics.— Princeton: Princeton University Press, New Jersey, 1947.
434. *Wolf A., Swift J.*— Phys. Letters, 1981, v. 83A, p. 184.
435. *Wyeth N. C., Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.*— Plasma Phys., 1975, v. 17, p. 679.
436. *Yamada T., Kuramoto Y.*— Prog. Theor. Phys., 1976, v. 56, p. 681.
437. *Yamazaki H., Oono Y., Hirakawa K.*— J. Phys. Soc. Jpn., 1978, v. 44, p. 335; J. Phys. Soc. Jpn., 1979, v. 46, p. 721.
438. *Zabusky N. J.*— J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 1028.
439. *Zaiken A. N., Zhabotinsky A. M.*— Nature, 1970, v. 225, p. 535.
440. *Заславский Г. М.*— ЖЭТФ, 1977, т. 73, № 12, с. 2089.
441. *Zaslavsky G. M.*— Phys. Letters, 1978, v. 69A, p. 145.
442. *Zaslavsky G. M.*— Phys. Reports, 1981, v. 80, p. 157.
443. *Заславский Г. М., Чириков Б. В.*— ДАН СССР, 1964, т. 159, с. 306.
444. *Заславский Г. М., Чириков Б. В.*— УФН, 1971, т. 105, вып. 1, с. 3.
445. *Заславский Г. М., Рачко Х. Я.*— ЖЭТФ, 1979, т. 76, № 5, с. 2052.
446. *Zisook A. B., Shenker S. J.*— Phys. Rev., 1982, v. A25, p. 2824.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

447. *Боголюбов Н. Н.* Избранные труды.— Киев: Наукова думка, 1969.
448. *Алексеев В. М., Якобсон М. В.* Символическая динамика и гиперболические динамические системы. Добавление в книге: Боуэн Р. Методы символической динамики.— М.: Мир, 1979.
449. *Ford J.*— Physics Today, 1983, v. 36, No. 4, p. 40.
450. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.*— Природа, 1981, № 2, с. 54.
451. *Синай Я. Г.*— там же, № 3, с. 72.
452. *Чириков Б. В.*— там же, 1982, № 7, с. 15.
453. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика.— М.: Наука, 1973.
454. *Toda M.*— Phys. Rep., 1975, v. 18, p. 1.
455. *Манаков С. В.*— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 543.
456. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.*— Phys. Rev. Letters, 1967, v. 19, p. 1095.
457. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов.— М.: Наука, 1980.
458. *Hall L. S.* A Theory of Exact and Approximate Configurational Invariants.— Preprint UCRL-87094, Lawrence Livermore National Laboratory, 1982.
459. *Machankov V. G.*— Phys. Rep., 1978, v. 35, p. 1.
460. *Ramani A., Dorizzi B., Grammaticos B.*— Phys. Rev. Letters, 1982, v. 49, p. 1539.
461. *Bountis T., Segur H.* Logarithmic Singularities and Chaotic Behavior in Hamiltonian Systems.— A. I. P. Conf. Proc., 1982, v. 88.
462. *Арнольд В. И.* Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем.— Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966).— М.: Мир, 1968, с. 387.
463. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1969.
464. *Чириков Б. В.* Динамика частиц в магнитных ловушках.— Вопросы теории плазмы, вып. 13.— М.: Энергоиздат, 1983.
465. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения.— М.: Физматгиз, 1962.
466. *Чириков Б. В.*— ДАН СССР, 1959, т. 125, с. 1015.
467. *Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.*— ЖТФ, 1982, т. 52, с. 238.
468. *Ступаков Г. В.*— Письма в ЖЭТФ, 1982, т. 36, с. 318.
469. *Schoch A.* Theory of Linear and Non-Linear Perturbations of Betatron Oscillations in Alternating Gradient Synchrotrons.— Geneve: CERN 57-23, 1958.

470. *Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.*— Ядерная физика, 1982, т. 36, с. 1563.
471. *Чириков Б. В.* Нелинейный резонанс.— Новосибирск: НГУ, 1977.
472. *Wimmel H. K.* Lagrangian Formulation of a Consistent Relativistic Guiding Center Theory.— Preprint IPP 6/218. Garching bei München: Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 1983.
473. *Vecheslavov V. V.*— Physica, 1982, v. 5D, p. 387.
474. *Menyuk C. R.* Some Properties of the Discrete Hamiltonian Method.— Physica D, в печати.
475. *Chirikov B. V., Keil E., Sessler A. M.*— J. Stat. Phys., 1971, v. 3, p. 307.
476. *Katok A.*— Lecture Notes in Physics, 1983, v. 179, p. 47.
477. *Чириков Б. В.* Природа и свойства динамического хаоса. Труды международного семинара «Теоретико-групповые методы в физике (Звенигород, 1982). — М.: Наука, 1983, т. II, с. 389.
478. *Cushman R.*— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, v. 238, p. 45.
479. *Зиглин С. Л.*— ДАН СССР, 1980, т. 251, с. 786.
480. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела.— М.: МГУ, 1980.
481. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах.— М.: Наука, 1970.
482. *Чириков Б. В.* Взаимодействие нелинейных резонансов.— Новосибирск: НГУ, 1978.
483. *Holmes P.*— Physica, 1982, v. 5D, p. 335.
484. *Sanders J. A.*— Celestial Mechanics, 1982, v. 28, p. 171.
485. *Chirikov B. V.*— Lecture Notes in Physics, 1983, v. 179, p. 29.
486. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.
487. *MacKay R. S.* Renormalization in Area Preserving Maps. Thesis, Princeton University, 1982.
488. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1983.
489. *Poincaré H.* Science et methode.— Paris: Flammarion, 1908. (Имеется русский перевод: Пуанкаре А. Наука и метод.— Одесса, 1910.]
490. *Hedlund G. A.*— Bull. Amer. Math. Soc., 1939, v. 45, No. 4, p. 241.
491. *Hopf E.*— Math. Ann., 1940, v. 117, p. 590.
492. *Звонкин А. К., Левин Л. А.*— УМН, 1970, т. 25, № 6, с. 85.
493. *Martin-Löf P.*— Information and Control, 1966, v. 9, p. 602.
494. *Брудно А. А.*— УМН, 1978, т. 33, № 1, с. 207.
495. Машины Тьюринга и рекурсивные функции. — М.: Мир, 1972.
496. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова.— М.: Наука, 1966.
497. *Алексеев В. М.* Символическая динамика.— Киев: Институт математики, 1976.
498. *Бунимович Л. А.*— Изв. АН СССР, сер. матем. 1974, т. 38, № 1, с. 213.
499. *Орнстейн Д.* Эргодическая теория, случайность и динамические системы.— М.: Мир, 1978.
500. *Schnorr C. P.*— Math. Syst. Theory, 1971, v. 5, No. 3, p. 246. [Имеется перевод в сб.: Сложность вычислений и алгоритмов.— М.: Мир, 1974.]
501. *Алексеев В. М.*— Мат. сборник, 1968, т. 76, № 1, с. 72.
502. *Shimada I., Nagashima T.*— Prog. Theor. Phys., 1979, v. 61, p. 1605.
503. *Kolmogorov A. N.*— Math. Ann., 1931, Bd. 104, s. 415. [Имеется перевод: УМН, 1938, № 5, с. 5.]
504. *Kolmogorov A. N.*— Math. Ann., 1936, Bd. 113, s. 766.
505. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
506. *Беляев С. Т.* Кинетическое уравнение для разреженных газов в сильных полях.— В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций.— М.: изд-во АН СССР, 1959, т. III, с. 50.
507. *Karney C. F. F.*— Physica, 1983, v. 8D, p. 360.

508. *Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.* Статистика возвратов Пуанкаре и структура стохастического слоя нелинейного резонанса.— В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям (Киев, 1981), т. II.— Киев: Наукова думка, 1983.
509. *Будкер Г. И.* Собрание трудов.— М.: Наука, 1982.
510. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.*— ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 348.
511. *Николаевский Е. С., Щур Л. К.*— Письма в ЖЭТФ, 1982, т. 36, с. 176.
512. *Нехорошев Н. Н.* Метод последовательных канонических замен переменных.— Добавление в книге: *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах.— М.: Мир, 1973, с. 150.
513. *Вивальди Ф., Форд Дж., Израйлев Ф. М., Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.* Модуляционная диффузия в нелинейных колебательных системах.— В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям (Киев, 1981), т. II — Киев: Наукова думка, 1983.
514. *Чириков Б. В.*— ДАН СССР, 1967, т. 174, с. 1313.
515. *Сивухин Д. В.*— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1.— М.: Госатомиздат, 1963, с. 7.
516. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.*— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2.— М.: Госатомиздат, 1963, с. 177.
517. *Kishinevskij M. E., Lysyanskij P. B., Ryutov D. D. et al.*— in: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1978. Vol. II.— Vienna: IAEA, 1979, p. 411.
518. *Zabusky N. J.*— Journal of Computational Physics, 1981, v. 43, No. 2, p. 195.
519. *Харкевич А. А.* Спектры и анализ.— М.: Физматгиз, 1962.
520. *Thomae S., Grossmann S.*— Phys. Letters, 1981, v. 83A, p. 181.
521. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* — УМН, 1959, т. 14, № 2, с. 3.
522. *Farmer J. D., Ott E., Yorke J. A.*— Physica, 1983, v. 7D, p. 153.
523. *Штерн В. Н.*— ДАН СССР, 1983, т. 270, с. 582.
524. *Feigenbaum M. J.*— Comm. Math. Phys., 1980, v. 77, p. 65.
525. *Pogutse O. P.*— Nucl. Fusion, 1972, v. 12, p. 39.
526. *Шарковский А. И.*— Укр. мат. журн., 1964, т. 16, с. 61.
527. *Бунимович Л. А.*— Мат. заметки, 1970, т. 8, вып. 2, с. 205.
528. *Jakobson M. V.*— Comm. Math. Phys., 1981, v. 81, p. 39.
529. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.*— Тр. Моск. мат. общ-ва, 1982, т. 44, с. 150.
530. *Израйлев Ф. М., Чириков Б. В.*— В кн.: Труды совещания по программированию и математическим методам решения физических задач.— Дубна: ОИЯИ, 1974, с. 266.
531. *Израйлев Ф. М., Рабинович М. И., Угодников А. Д.* Препринт ИЯФ СО АН СССР, 82—70, Новосибирск, 1982.
532. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
533. *Плыкин Р. В.*— Матем. сб., 1974, т. 94, с. 243.
534. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой жидкости.— М.: Наука, 1970.
535. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1965 (ч. 1), 1967 (ч. 2).
536. *Монин А. С.*— УФН, 1978, т. 125, с. 97.
537. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.*— ДАН СССР, 1981, т. 257, с. 1319.
538. Структурная турбулентность./Ред. Гольдштик.— Новосибирск, Институт теплофизики СО АН СССР, 1982.
539. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1953.
540. *Neuenberg N., Rudnik J.*— Phys. Rev., 1981, v. B24, p. 493.
541. *Gollub J. P., Benson S. V.*— J. Fluid Mech., 1980, v. 100, p. 449.
542. *Мирабель А. П., Монин А. С.*— Успехи механики, 1979, т. 2, с. 47.
543. *Kraichnan R. H., Montgomery D.*— Rep. Prog. Phys., 1980, v. 43, p. 547.
544. *Sinai Ya. G.*— J. Stat. Phys., 1982, v. 29, p. 401.

545. *Ладыженская О. А.*— ДАН СССР, 1972, т. 205, с. 318.
546. *Hopf E.*— Comm. Pure Appl. Math., 1948, v. 1, p. 303.
547. *Ни В.*— Physics Reports, 1982, v. 91, p. 233.
548. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.— М.: Физматгиз, 1961.
549. *Коломенский А. А., Петухов В. А., Рабинович М. С.*— В сб.: Некоторые вопросы теории циклических ускорителей.— М.: изд-во АН СССР, 1955, с. 7.
550. *Дыхне А. М., Чаплик А. В.*— ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 666.
551. *Родионов С. Н.*— Атомная энергия, 1959, т. 6, с. 623.
552. *Gibson G., Jordan W., Lauer E.*— Phys. Rev. Letters, 1960, v. 5, p. 141.
553. *Кадомцев Б. Б.*— Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 33, с. 361.
554. *Жаботинский А. М.* Концентрационные автоколебания.— М.: Наука, 1974.
555. *Шноль С. Э., Смирнов Б. Р., Задонский Г. Н., Ровинский А. Б.*— Химия и жизнь, 1982, № 7, с. 68.
556. *Шнирельман А. И.*— УМН, 1974, т. 29, № 6, с. 181.
557. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика.— М.: Наука, 1974.
558. *Дайсон Ф.* Статистическая теория энергетических уровней сложных систем.— М.: ИЛ, 1963.
559. *Колмогоров А. Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика.— В кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме 1954 г.— М.: Физматгиз, 1961, с. 187.
560. *Бабин А. В., Вишик М. И.*— УМН, 1983, т. 38, № 4, с. 133.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абловиц (Ablowitz) 57
Авез (Avez) 199, 200, 290
Алексеев В. М. 307, 487
Альфвен (Alfven) 490
Аносов Д. В. 19, 302
Арнольд В. И. 15, 18, 186, 190, 199, 200, 290, 341, 364, 465, 491

Бардет (Bardet) 493
Баунтис (Bountis) 58, 171, 172, 174, 271
Белоусов Б. П. 494
Бенеттин (Benettin) 294, 295, 297, 308, 313, 315, 317
Берк (Berk) 494
Берман Г. П. 497
Бернштейн (Bernestein) 492
Берри (Berry) 162, 290, 299, 496
Берс (Bers) 98, 139
Бивинс (Bivins) 407
Билек (Bialek) 253, 273
Биркгоф (Birkhoff) 14, 15, 104, 199, 487
Боголюбов Н. Н. 13, 104, 114, 115, 317, 319, 444, 490
Борн (Born) 92
Брамбилла (Brambilla) 394
Брахич (Brahič) 220, 221, 228
Бриджес (Bridges) 467
Брудно А. А. 307
Брунс (Bruns) 487
Будкер Г. И. 336, 395, 489
Бэкстер (Baxter) 492

Вайдал (Vidal) 495
Ватанабе (Watanabe) 494

Галеев А. А. 336, 381, 395
Гальгани (Galgani) 408
Гаррен (Garren) 491
Гарридо (Garrido) 147, 487
Гейзал (Geisal) 442
Гелл (Gell) 395)
Голдстейн (Goldstein) 20
Голуб (Gollub) 481
Грин (Green G.) 181, 247, 489
Грин (Greene J.) 194, 214, 220, 247, 252, 269, 273, 274, 279, 308, 500
Гроссман (Grossmann) 449
Густавсон (Gustavson) 65, 487

Депри (Deprit) 147, 487
Джакалья (Giacaglia) 92, 104, 147, 154
Довейл (Doveil) 248, 277, 503
Драгт (Dragt) 199, 200, 490, 491
Дуннет (Dunnett) 122, 142
Дьюар (Dewar) 147, 149

Егер (Jaeger) 247, 325, 492

Жаботинский А. М. 494
Жданова Т. А. 324
Жебехели (Szebehely) 488

Забуский (Zabusky) 407
Зальцман (Saltzman) 476
Заславский Г. М. 220, 221, 294, 425, 496, 497
Зигель (Siegel) 488
Зисок (Zisook) 450, 451
Зубарев Д. Н. 114

Израйлев Ф. М. 324, 467, 469

Казати (Casati) 497
Кари (Cary) 147, 164, 165, 332
Карни (Karney) 98, 103, 139, 142, 332
Кауфман (Kaufman) 98, 139, 147
Клейн (Klein) 248
Колле (Collet) 448
Колмогоров А. Н. 15, 82, 162, 168, 186, 300, 318, 406, 487
Коломенский А. А. 489
Контопулос (Contopoulos) 190, 317, 487, 488
Копель (Kopell) 495
Коэн (Cohen) 375, 381, 382, 386, 491
Кратчфилд (Crutchfield) 418, 484
Крилин (Krilin) 490
Крускал (Kruskal) 13, 88, 104, 114, 490
Крылов Н. М. 13, 114, 319, 444
Крылов Н. С. 294, 300
Кулсруд (Kulsrud) 88
Куммер (Kummer) 488
Курант (Courant) 46, 489

Лакина (Lacina) 490
Ландау Л. Д. 20, 319, 478, 479
Лансфорд (Lunsford) 142, 190, 273, 279
Ласлет (Laslett) 489
Лебедев А. Н. 489
Левис (Lewis) 46
Лейнг (Laing) 142
Ли (Li) 248
Либерман (Lieberman) 111, 220, 221, 231, 291, 324, 325, 335, 353, 359, 473, 492
Линдштедт (Lindstedt) 82, 85
Литлджон (Littlejohn) 115, 147
Лифшиц Е. М. 478
Лихтенберг (Lichtenberg) 111, 126, 220, 221, 222, 231, 235, 247, 252, 291, 324, 325, 335, 394, 489, 492, 494, 503
Лич (Leach) 46
Лози (Lozi) 422
Лоренц (Lorenz) 19, 20, 76, 77, 79, 448, 476, 480
Лэнфорд (Lanford) 414
Ляпунов А. М. 294

Мак-Кай (MacKay) 501
Мак-Лафлин (McLaughlin) 457
Мак-Намара (McNamara) 65, 104, 142, 147, 148, 154, 160, 164, 487
Манневиль (Manneville) 484
Маркус (Marcus) 497
Марсден (Marsden) 348
Мартин-Лёф (Martin-Löf) 306
Мейс (Meiss) 332
Мельников В. К. 199, 240, 348, 457, 459
Метрополис (Metropolis) 442
Мисюревич (Misiurewicz) 422
Митропольский Ю. А. 13, 114
Мозер (Moser) 15, 162, 186, 190, 193, 199, 227, 488
Морозов А. Д. 457

Найфе (Neyfeh) 147
Невинс (Nevins) 395, 399
Некрасов А. К. 492
Нехорошев Н. Н. 73, 364, 365
Нирветберг (Nierwetberg) 442
Нойес (Noyes) 495
Нортроп (Northrop) 121, 154, 490

Оселедец В. И. 294, 297
Отт (Ott) 422, 478, 497

Паста (Pasta) 14, 56, 348, 406
Перейра (Pereira) 267, 268
Персиваль (Percival) 248, 287, 288
Песин Я. Б. 294, 301
Петухов В. А. 489
Погуце О. П. 395
Помо (Pomeau) 484
Пуанкаре (Poincaré) 13, 15, 16, 28, 82, 87, 90, 104, 197, 200, 240, 294, 348, 487
Пустыльников Л. Д. 221

Рабинович М. С. 489
Рассел (Russel) 424
Раулэндс (Rowlands) 375, 381, 382, 385, 467
Ренно (Rannou) 308
Речестер (Rechester) 326, 331, 336, 338, 392
Рёслер (Rössler) 416
Родионов С. Н. 491
Розенблют (Rosenbluth) 247, 392, 491
Ронлин (Rognlien) 493
Рудник (Rudnick) 443
Рютов Д. Д. 385
Рюэль (Ruelle), 19, 478, 480, 495

Сагдеев Р. З. 336, 381, 395
Саймон (Symon) 46
Самек (Samec) 493
Сегур (Segur) 57
Сейдл (Seidl) 492
Снамбис (Siambis) 491
Синай Я. Г. 17, 71, 300, 496
Ситников К. Н. 487
Смейл (Smale) 199, 487
Смит (Smith) 98, 139, 267, 268, 493
Снайдер (Snyder) 46
Спротт (Sprott) 492
Стикс (Stix) 392
Стоддард (Stoddard) 408
Ступаков Г. В. 385
Суинни (Swinney) 481

Табор (Tabor) 249
Тейлор (Taylor) 142
Теллер (Teller) 490
Теннисон (Tennyson) 73, 341, 342, 353, 368, 375, 379, 381
Тода (Toda) 51
Томае (Thomae) 449
Треве (Treve) 422, 478
Тэкенс (Takens) 19, 193, 478, 480

Уайес (Wyeth) 493
Уайт (White) 326, 331, 336
Уайтмен (Whiteman) 65, 104, 154, 487
Уинтиер (Wintner) 488
Уиттекер (Whittaker) 20, 55, 154, 486, 487
Улам (Ulam) 14, 56, 68, 220, 348, 406
Уотерс (Waters) 407

Фармер (Farmer) 424, 425
Фейгенбаум (Feigenbaum) 20, 434, 438, 452, 481
Ферми (Fermi) 14, 56, 68, 204, 220, 348, 406
Филд (Field) 495
Филоненко Н. Н. 392
Финн (Finn) 147, 199, 200, 392
Форд (Ford) 54, 190, 247, 273, 279, 294, 299, 407, 408
Фрёлинг (Froehling) 425
Фрёшле (Froeschlé) 294, 348, 407
Фукуяма (Fukuyama) 98, 139, 269
Фурсов В. С. 489

Хагихара (Hagihara) 488
Хастье (Hastie) 491
Хатори (Hatori) 494
Хаулэнд (Howland) 147, 164
Хедлунд (Hedlund) 294
Хейлес (Heiles) 54, 64, 290, 294, 314
Хеллеман (Helleman) 165, 171, 270, 290, 433, 448, 453, 478, 486
Хенон (Henon) 16, 54, 64, 204, 290, 294, 314, 416, 419, 421
Хереворд (Hereward) 489
Хертвек (Hertweck) 490
Ховард (Howard) 405, 491, 493
Холл (Hall) 56, 58
Холмс (Holmes) 348, 457, 461, 463
Хольт (Holt) 57
Хопф (Hopf) 294, 478
Хори (Hori) 147, 487
Хьюберман (Huberman) 443, 450, 451, 484

Цанг (Tsang) 473
Цейпель (Von Zeipel) 13, 87, 90

Чандрасекар (Chandrasekhar) 490
Чарчилл (Churchill) 488
Чириков Б. В. 17, 43, 68, 73, 111, 121, 122, 127, 164, 181, 193—195, 220, 221, 246, 247, 249, 252, 257, 262, 294, 311, 332, 342, 353, 360, 365, 366, 375, 381, 382, 386, 469, 486, 488, 490, 491, 492, 497

Шарковский А. И. 440
Шейдекер (Scheidecker) 294, 407
Шепелянский Д. Л. 497
Шлютер (Schlüter) 490
Шмидт (Schmidt) 252, 253, 273
Штерн (Stern) 104, 154

Эдмондс (Edmonds) 492
Экман (Eckmann) 448, 478, 484
Эминицер (Eminhizer) 165
Эсканде (Escande) 248, 277, 503

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адиабатический инвариант 13, 17, 31, 37, 88, 104, 124, 134, 154
— процесс 87, 111, 112, 349
Адиабатическое возмущение 106, 107, 154, 367
Аносова системы 302—305, 308
Аттрактор, геометрия 74, 75, 78, 417—422
— *Лоренца* 78—80, 177
— область притяжения 414
— простой 19, 73, 74, 76—80, 413, 414, 440—442, 464
— странный (хаотический) 19, 20, 74—76, 78, 80, 416—425, 463, 464, 469
— — размерность 19, 74, 422—425
— *Хенона* 419—422

Бернулли свойство 304
— сдвиг 303, 304
— система 303—305
Бильярдная модель 348 353
Бифуркации 77, 78, 232, 415, 416, 430—432, 440, 442, 453
— обратные 416, 448, 449
— теория 415, 416, 433—438, 454—457, 497

Вырождение 126, 129, 130, 137, 138, 189—191
Вычет 269
— средний 271

Газ твердых шариков 70, 305
Гальтона доска 305
Гамильтониан автономный 23, 24, 59, 100, 148, 292, 298
— канонические преобразования 90—98, 132—134, 147, 180, 189, 259—261
— неавтономный 97, 98, 110, 111, 154, 184, 235, 236, 255, 259, 354

— переход к отображению 182, 183
— стандартный 43, 127, 236
— фурье-разложение 92, 95, 97, 98, 123, 124, 132, 144 189, 235, 236, 281, 474—476
Гармонический осциллятор 36, 89, 129
— — медленно изменяющийся 87, 111, 119, 121, 156, 157
Гетероклинные точки 199—201
Гиперболические точки (траектории) 40, 196—201, 204, 206, 218, 219, 230, 232, 254, 458—460, 462
Гомоклинные точки 198—201, 306, 307, 458
Грина критическое значение 275—277
Грубость *см.* Устойчивость структурная

Депри ряды 149, 259
Диссипативные системы 73, 410
Диффузия *Арнольда* 18, 19, 59, 71—73, 249, 292, 317, 341, 346, 347, 350—352, 357—365, 367
— внешняя 332, 337, 338, 375
— в пространстве действий 317
— модуляционная 18, 19, 342, 366
— неоклассическая 336, 395
— по резонансам 335, 353
— резонанса 382
— резонансное каналирование 375, 385, 386
— скорость 331, 337, 340, 353, 372, 373, 377, 378, 399—402
— — квазилинейная 326, 383
— тензор 377—379
— уравнение 291, 319—321
— частиц в ловушке 386

Золотое сечение *см.* Число вращения

Иерархия инвариантов 110, 111
— резонансов 62, 203, 204
Инвариант *см.* Интеграл движения
Инвариантная кривая (поверхность) 17, 18, 33, 60—69, 72, 102, 103, 178, 185—200 .215, 231, 232, 247, 248, 272, 273, 279—281, 350
Инвариантное распределение (мера) 291, 444—448, 466
— — на аттракторе 444—448, 466
Интеграл действия 13, 20, 31
Интегралы движения 33, 34, 48, 55, 60, 98, 176, 203
— — адиабатические *см.* Адиабатический инвариант
— — глобальные 38, 47, 52, 60, 98, 143—146
— — изолирующие 348, 487
— — инволюция 38
— — локальные 124, 200

К-системы 300, 301, 303, 305
Канторово множество 76, 422—424
Касательный вектор 295, 296
Квазипериодические колебания 35, 49, 74, 178, 294, 305
Компонента движения 232, 292, 294, 301, 311, 312, 314
Корреляции 332
— связь с коэффициентами переноса 321, 325, 326
— убывание 244, 332
Коэффициенты переноса 291, 319, 321, 325
Крупноструктурное разбиение («огрубление») 97, 299, 300

Ляпунова показатели 244, 294, 301, 442—444, 448
— — вычисление 310
— — обобщенные 297

Магнитные ловушки 110, 111, 386, 490
Малые знаменатели *см.* Резонансные знаменатели
Марковский процесс 318
Матрицы 207—209, 214—220, 296
— симплектические 209—212
Маятник 39, 42, 93, 95, 152—154, 237, 238, 263—269
— как модель резонанса 42, 127, 236, 255
— точное решение 39—42, 267
Мельникова—Арнольда интеграл 239—241 465
Метод *Венцеля—Крамерса—Бриллюэна* (ВКБ) 13
— *Грина* 247, 248, 269
— *Дуннета—Лейнга—Тейлора* (ДЛТ) 142—146
— касательных *Ньютона* 163, 181, 213
— *Уиттекера* конструирования интегрируемых систем 55, 58
— усреднения *см.* Теория возмущений асимптотическая
— фурье-траекторий 326—332
Методы вариационные 287
— — в теории возмущений 168—174
Модель *Контопулоса* 316, 317
— *Леннарда-Джонса* 408
— *Лоренца* 20, 57, 76, 77, 475—477, 484
— *Ферми—Паста—Улама* 14, 405—407
— *Хенона—Хейлеса* 16, 54, 58, 59, 63—67, 171—174, 313

Нелинейность колебаний 86, 187—191
— — параметр 127, 189
— — умеренная 194, 195
Неподвижные (периодические) точки 125, 127, 130, 195, 214, 215, 228, 229, 232—234, 242, 250—253, 276, 277, 430
Непрерывная дробь 271—273, 277

Округления ошибки 290, 308, 309, 335
Отображение *Арнольда* 302, 305
— *Вогелара* 500, 501
— в сечении *Пуанкаре* 79, 179, 180, 238, 241, 242, 411
— гамильтониан 183, 184, 235, 236, 255, 256
— диссипативное 464, 465, 468
— *Заславского* 425
— инволюции 181, 213, 214, 233, 242
— каноническое 179—182, 184, 228
— *Каплана—Йорке* 425
— квадратичное 204, 427—429
— линеаризованное 207, 214—220, 229, 296, 298, 321
— логистическое 428, 429, 447, 448
— необратимое 76, 426
— обратимое 411
— одномерное 76, 79, 80, 233, 234, 426,
— поворота 179—182, 195, 204, 293, 333, 382
— *Пуанкаре* 79, 179, 235, 238, 298, 348, 411, 453
— сепаратрисное 241, 250
— стандартное 181, 331, 338, 382
— *Улама* 222—224, 227, 242, 249, 250, 321, 325, 334, 468

Параметры подобия 433—438, 451, 456, 457, 497—503
Пенлеве свойство 47—59
Перекрытие резонансов 71, 257, 367—369, 405
— — критерии 17, 68, 246, 247, 289, 367
— — простое 257
— — улучшенное 258—262
Перемежаемость 484, 485
Переменные действие — угол (фаза) 31, 34, 36, 37, 41, 90, 95, 107, 342, 361, 389
— дрейфовые 99, 100

— канонические 107, 178, 222, 223, 300, 323, 324
— обобщенные 22, 148, 154
— разделение 38, 115
— смешанные 147
Перемешивание 17, 70, 298—300, 305, 448
Переход к стохастичности 245
— — турбулентности 478
Периодическая δ-функция 184, 235
Периодические траектории 60, 74, 125, 167, 178, 179, 207
Правило двух третей 256, 288
Предельный цикл 74, 416, 464, 480—482
Преобразование каноническое 95, 107, 123, 148, 149, 162, 354, 362, 378, 389
— пекаря (отображение) 71, 299, 305
Производящая функция 90, 182, 362, 378
— — *Ли* 25, 148, 180, 259
— — смешанных переменных 95, 123
— — фурье-разложение 92, 95—98, 101, 109, 259, 369
Пространство действий 344—347
Пуанкаре сечение 15, 31—34, 53, 60, 61, 65—67, 69, 102, 103, 140, 141, 177, 411

Резонанс волна—частица 98—104, 135, 144—146, 161, 162, 280
— вторичный 61, 62, 130, 138, 139, 192, 202, 203, 205, 237, 263, 281
— высших гармоник 125, 269—274, 365
— — порядков 109
— дрейфовый 394—397
— многомерный 341
— первичный 61, 62, 126—130, 146, 186, 195, 200—205, 225, 228, 236, 237, 257—260
— прохождение 112, 113, 367
— связи 359, 375, 379, 390
— центр 127—129, 132, 134, 263, 397
Резонанса два 279—281
Резонансные знаменатели 83, 87, 89, 96, 98, 109, 187
— — устранение 123, 160
— — — глобальное 142
— поверхности 343—346, 379
Резонансов взаимодействие 360, 364
— уровни 139, 168
Ренормализация 135, 248, 277—279, 433—438, 455—457, 501—503
— в стохастическом слое 257, 269
— *Грина* 269—277
— для двух резонансов 248, 279—287
— точная теория 433—435, 440, 453, 497
Рэлея—Бенара конвекция 20, 67, 475, 476

Сверхадиабатичность 491
Секулярные члены 82, 85
Сепаратриса 39, 41, 42, 49, 61—64, 67, 73, 128, 191, 197—200, 206, 234, 237, 267
Символическая траектория 304
Системы, близкие к интегрируемым 24, 36, 42, 59, 62, 89, 90, 180, 305, 310
— интегрируемые 38, 51, 54, 55, 70, 125, 176—180, 310, 315
— — конструирование 55
— — примеры 39, 51, 177
— квантовые 307, 309, 495
Сложность алгоритмическая 306, 307
Случайность 290, 294, 299, 305, 307
— связь со сложностью 306, 307
Случайные последовательности 306, 307
— фазы (приближение) 70, 71, 291, 322
Собственные векторы 207, 215—220, 296, 297, 303
— значения 207, 215—220, 230, 297, 303
Спектр мощности 79, 438—440, 449—453
Стохастическая накачка 353
Стохастический слой 61—63, 65, 71—73, 237, 238, 242, 243, 261—263, 347
— — модуляционный 366—371
— — толстый 349—352, 354
— — тонкий 350—352, 357
Стохастичность глобальная 70, 71, 194, 245, 246, 248, 249, 254, 290
— граница 226, 231, 242, 246, 253—256
— критерии 200, 244, 246, 257, 291, 310, 312, 315
— локальная 69, 245, 246, 254
— области 74, 201—206, 245
— параметр 181, 249
— свойства 291, 298, 442, 449

Теорема *Алексеева—Брудно* 307
— *Лиувилля* 27, 412
— *Пуанкаре—Бендиксона* 413, 416
— *Пуанкаре—Биркгофа* 195
Теория возмущений асимптотическая 13, 87, 104, 105, 114—118, 203, 235, 236
— — вариационная *см.* Вариационные методы
— — каноническая 81, 107, 369
— — классическая 89
— — *Ли* 145
— — неканоническая 114
— — резонансная 17, 43, 121, 203, 235, 262, 263, 390
— — сверхсходящаяся 82, 162
— *Колмогорова—Арнольда—Мозера* (КАМ) 38, 60, 68, 165, 184, 185, 203, 224
Тоды цепочка 47, 51—54, 57
Тор *см.* Инвариантная поверхность
Турбулентность гидродинамическая 474
— химическая 494

Удвоение периода 76, 430—432, 453—457, 498
Уравнение *Дюффинга* 461—465
— *Фоккера—Планка—Колмогорова* (ФПК) 318, 468—472
У-системы *см. Аносова* системы
Ускорение *Ферми* 59, 68, 69, 220, 262, 263, 468
Устойчивость движения, граница 231, 245
— — линейная 127—130, 207, 215, 228, 242, 247, 252, 253
— — островки 224, 225, 232, 245, 251—254, 469
— структурная 302, 308

Фазовая траектория 128, 129, 131, 178, 254, 414, 462
Фазовое пространство 18, 19, 25—27, 32, 58, 254, 255, 299, 307, 458
— — разбиение 245, 246, 251, 300
— — расширенное 28—30, 95, 223
— — сокращенное 29, 33
Фазовые колебания 130, 134, 226, 236
— — частота 136, 130, 236, 384
Фокус 74, 414—416, 463, 464, 468
Фрактальная размерность *см.* Аттракторы
Фрактальные диаграммы 277—279

Хаос *см.* Стохастичность, Случайность

Число вращения 179, 180, 241, 256, 281
— — золотое сечение 194, 272, 275—277
— — иррациональное 185
— — рациональное 195, 272, 279

Эллиптические точки (траектории) 39, 42, 197, 201, 204, 216—218, 224 232, 254
Энергетическая поверхность 292, 297, 343—346, 375, 376, 379, 385
Энтропия (КС-энтропия) 244, 300, 301, 303—305, 307, 513
— вычисление 301, 311, 315
— связь с показателями *Ляпунова* 301
Эргодичность 14, 17, 70, 291, 299, 305, 487

ОГЛАВЛЕНИЕ [1])

Предисловие редактора перевода 5

Предисловие 11

Глава 1. Общий обзор и основные представления 13

§ 1.1. Вводные замечания 13

* § 1.2. Теория преобразований в механике 20

* 1.2а. Канонические преобразования 21

* 1.2б. Движение в фазовом пространстве 25

* 1.2в. Переменные действие — угол 34

§ 1.3. Интегрируемые системы 38

* 1.3а. Одна степень свободы 38

* 1.3б. Линейные дифференциальные уравнения 43

1.3в. Несколько степеней свободы 47

* § 1.4. Системы, близкие к интегрируемым 59

* 1.4а. Две степени свободы 59

* 1.4б. Более чем две степени свободы 71

§ 1.5. Диссипативные системы 73

1.5а. Странные аттракторы 74

1.5б. Модель Лоренца 76

Глава 2. Каноническая теория возмущений 81

§ 2.1. Введение 81

2.1а. Степенные ряды 84

2.1б. Асимптотические ряды и малые знаменатели 87

2.1в. Влияние резонансов 89

* § 2.2. Классическая теория возмущений 89

* 2.2а. Одна степень свободы 90

* 2.2б. Несколько степеней свободы 95

§ 2.3. Адиабатическая инвариантность 104

* 2.3а. Введение и основные понятия 104

* 2.3б. Каноническая адиабатическая теория 107

* 2.3в. Медленно изменяющийся гармонический осциллятор . 111

2.3г. Неканонические методы 114

§ 2.4. Резонансная теория возмущений 121

* 2.4а. Устранение резонансных знаменателей 123

* 2.4б. Вторичные резонансы 130

* 2.4в. Резонансное взаимодействие волны и частицы 135

2.4г. Глобальное устранение резонансных знаменателей . . 142

§ 2.5. Метод преобразований Ли 146

2.5а. Общая теория 148

2.5б. Ряды Депри 149

2.5в. Адиабатические инварианты 154

§ 2.6. Сверхсходимость 162

2.6а. Метод Колмогорова 165

2.6б. Периодические траектории 167

---

[1]) Звездочкой отмечены параграфы и пункты, содержащие основной материал.

Глава 3. Отображения и линейная устойчивость 175

* § 3.1. Гамильтоновы системы как канонические отображения . . . 176
* 3.1а. Интегрируемые системы 176
* 3.1б. Системы, близкие к интегрируемым 180
* 3.1в. Уравнения Гамильтона и отображения 182
* § 3.2. Типичное поведение канонических отображений 184
* 3.2а. Иррациональные числа вращения и теория КАМ 185
* 3.2б. Рациональные числа вращения и структура резонансов 195
* 3.2в. Полное описание нелинейного отображения 200
* 3.2г. Численный пример 204
§ 3.3. Линеаризованные уравнения 206
3.3а. Собственные значения и собственные векторы 207
* 3.3б. Двумерные отображения 212
* 3.3в. Линейная устойчивость и инвариантные кривые 215
* § 3.4. Ускорение Ферми 220
* 3.4а. Физические задачи и их модели 221
* 3.4б. Численное моделирование 224
* 3.4в. Периодические точки и их линейная устойчивость . . . 228
* 3.4г. Бифуркации 232
* 3.4д. Уравнения Гамильтона 235
* § 3.5. Движение в окрестности сепаратрисы 236
* 3.5а. Вынужденные колебания маятника 238
* 3.5б. Сепаратрисное отображение 241

Глава 4. Переход к глобальной стохастичности 244

* § 4.1. Введение 244
* 4.1а. Качественное описание критериев перехода 246
* 4.1б. Стандартное отображение 249
* § 4.2. Перекрытие резонансов 257
* 4.2а. Схема получения критериев 257
* 4.2б. Вычисление критериев перекрытия 257
§ 4.3. Вторичные резонансы 263
4.3а. Центр резонанса 263
4.3б. Сепаратриса 267
* § 4.4. Резонансы высоких гармоник 269
* 4.4а. Основы метода Грина 269
* 4.4б. Численные эксперименты 274
§ 4.5. Метод ренормализации для двух резонансов 279
§ 4.6. Вариационные методы 287
* § 4.7. Заключение 288

Глава 5. Стохастическое движение и диффузия 290

§ 5.1. Введение 290
§ 5.2. Основные понятия 291
* 5.2а. Эргодичность 291
* 5.2б. Характеристические показатели Ляпунова 294
5.2в. Основные свойства стохастичности 298
5.2г. Случайность и ее численное моделирование 306
§ 5.3. Определение показателей Ляпунова и КС-энтропии 310
5.3а. Аналитические оценки 311
5.3б. Численные методы 312
§ 5.4. Диффузия в пространстве действий 317
* 5.4а. Уравнение Фоккера—Планка 318
* 5.4б. Коэффициенты переноса 321
* 5.4в. Стационарные и нестационарные решения 324
5.4г. Корреляционные поправки к коэффициентам переноса . 325
§ 5.5. Влияние внешнего шума 332
5.5а. Введение 332

5.5б. Диффузия в присутствии резонансов 335

Глава 6. Многомерные колебания 341

* § 6.1. Резонанс многомерных колебаний 341
* 6.1а. Геометрия резонансов 342
* 6.1б. Примеры диффузии Арнольда 347
§ 6.2. Скорость диффузии вдоль резонансов 353
* 6.2а. Расчет диффузии в модели стохастической накачки . . . 353
6.2б. Диффузия по резонансу связи 359
6.2в. Много резонансов 364
6.2г. Модуляционная диффузия 366
§ 6.3. Внешняя диффузия 375
6.3а. Резонансное каналирование диффузии 375
6.3б. Диффузия резонанса 382
§ 6.4. Диффузия в тороидальных магнитных ловушках 386
6.4а. Динамика магнитных линий 386
6.4б. Дрейфовые поверхности и диффузия в статических полях 392
6.4в. Диффузия в нестационарных полях 395
6.4г. Самосогласованная задача 402
§ 6.5. Системы со многими степенями свободы 404

Глава 7. Диссипативные системы 410

§ 7.1. Простые и странные аттракторы 410
7.1а. Основные свойства 411
7.1б. Примеры странных аттракторов 416
7.1в. Геометрия странных аттракторов 422
§ 7.2. Одномерные необратимые отображения 426
7.2а. Основные свойства 426
7.2б. Периодическое движение 430
7.2в. Хаотическое движение 442
§ 7.3. Двумерные отображения и связанные с ними потоки 453
7.3а. Бифуркации удвоения периода 453
7.3б. Движение вблизи сепаратрисы 457
7.3в. Вычисление инвариантных распределений 466
§ 7.4. Проблема турбулентности 474
7.4а. Представление Фурье 474
7.4б. Переход к турбулентности 478

Дополнение А. Некоторые приложения 486
А.1. Небесная механика 486
А.2. Ускорители и встречные пучки 488
А.3. Магнитные ловушки 490
А.4. Нагрев плазмы 492
А.5. Химическая динамика 494
А.6. Квантовые системы 495

Дополнение Б. Теория бифуркаций в гамильтоновых системах . . . 497

Список основных обозначений 504

Литература 506
Именной указатель 522
Предметный указатель 523