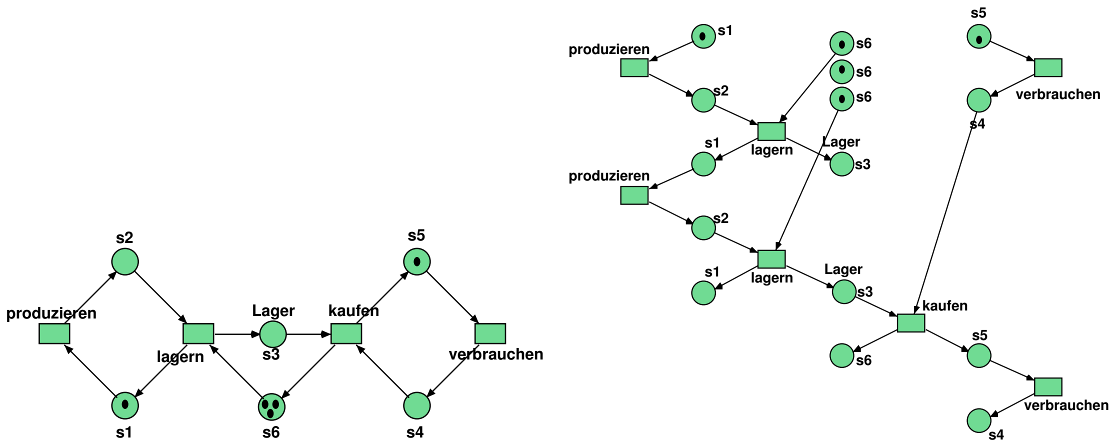
Überblick Blatt 3: Eigenschaften von P/T-Netzen

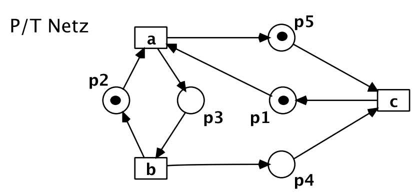
Aufgabe 3.1 Betrachte die beiden Darstellungen des *Producer/Consumer* Szenarios.

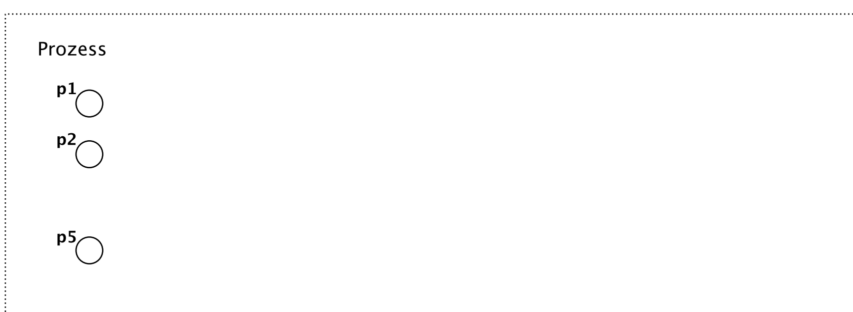


1. Was bedeuten die Anschriften an Plätzen und Transition an der rechten Abbildungen? Beachte, dass sie mehrfach vorkommen!
2. Welchen Prozess beschreibt das Netz?
3. Wieso ist das rechte Netz zyklenfrei?
4. Wenn das rechte Netz bis zum „Schluß“ schaltet, welche Markierung beschreibt es?
5. Kann man sagen, dass beide Netze das gleiche Szenario beschreiben, wenn auch anders?

Aufgabe 3.2 Prozesse von P/T-Netzen.

1. Konstruieren Sie zu folgendem P/T Netz einen Prozess, der die Schaltfolge $w = abca$ beschreibt! Zeichnen Sie den Prozess in den vorgegebenen Kasten!

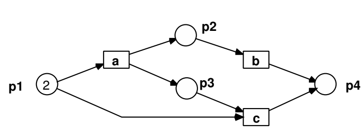


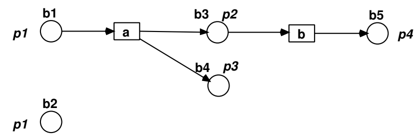


2. Zeichnen Sie in Ihre Graphik einen Stellen-Schnitt ein!
3. Zeichnen Sie in Ihre Graphik eine Linie des Prozesses ein!

4. Ist der Prozess zu dieser Schaltfolge $w = abca$ eindeutig festgelegt?
   Wenn „Ja“, dann geben Sie eine Begründung an!
   Wenn „Nein“, dann beschreiben Sie, wie ein weiterer Prozess aussieht!

Aufgabe 3.3 Gegeben ein Petrinetz $N = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$ sowie ein dazu passender Prozess: $R = (B, E, \lessdot)$:

N: 

R: 

1. Geben Sie die Abbildung ϕ an, die dem Prozess R zugrunde liegt.

2. Bestimmen Sie die Mengen $^\circ R$ (Menge der Minima) und R° (Menge der Maxima). Diese Mengen sind wie folgt definiert:

$$^\circ R := \{b \in B \mid {}^\bullet b = \emptyset\}$$
$$R^\circ := \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\}$$

3. Geben Sie eine Fortsetzung R' des Prozesses R an. Gibt es mehrere mögliche Fortsetzungen?

4. Bestimmen Sie für den um die Transition c verlängerten Prozess R' die Relationen $\lessdot$, $<$, **li** und **co**.

   Stellen Sie die Relationen $\lessdot$ und $<$ jeweils als gerichtete und die Relationen **li** und **co** als ungerichtete Graphen dar.

5. Geben Sie je einen möglichst großen P-Schnitt und T-Schnitt für R' an.

6. Zeichnen Sie alle konstruierbaren Prozesse des Netzes.

Aufgabe 3.4 Sei $N = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$ ein beliebiges P/T-Netz und $f : P \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft:

$$\forall t \in T : \sum_{p \in {}^\bullet t} f(p) \cdot W(p,t) = \sum_{p \in t^\bullet} f(p) \cdot W(t,p) \qquad (*)$$

1. Zeige für solches N und f, dass eine Konstante $c_{N,f} \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt:

$$\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathbf{m}_0) : \sum_{p \in P} f(p) \cdot \mathbf{m}(p) = c_{N,f} \qquad (**)$$

2. Bestimme den Wert von $c_{N,f}$!

3. Zeige für solches N und f, dass – unabhängig wie die Initialmarkierung $\mathbf{m}_0$ beschaffen ist – die Markierung aller Stellen beschränkt sind, d.h.

$$\exists k \in \mathbb{N} : \forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathbf{m}_0) : \forall p \in P : \mathbf{m}(p) \leq k$$

Aufgabe 3.5 Eine Transition t heißt *quasilebendig*, wenn eine Markierung $\mathbf{m} \in \mathcal{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$ mit $\mathbf{m} \xrightarrow{t}$ existiert.

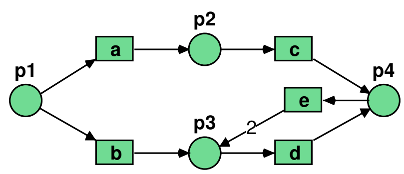
Zeigen Sie, dass man diese Eigenschaft mit Hilfe der Algorithmen für Markierungs- bzw Lebendigkeitsinvarianz entscheiden kann!

Aufgabe 3.6 Ein P/T-Netz $\mathcal{N}\rangle$ heißt *T-fortsetzbar*, wenn zu jeder Markierung $\mathbf{m} \in \mathcal{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$ eine unendliche Schaltfolge aktviert ist, in der jede Transition $t \in T$ unendlich oft vorkommt.

Zeigen Sie, dass man diese Eigenschaft mit Hilfe der Algorithmen für Markierungs- bzw Lebendigkeitsinvarianz entscheiden kann!

Aufgabe 3.7 Der Algorithmus zur Erzeugung des Überdeckungsgraphen arbeitet nichtdeterministisch. Der erzeugte Überdeckungsgraph hängt von der Auswahl der unbearbeiteten Knoten ab.

Betrachte das folgende Petrinetz N in der Initialmarkierung $m_0 = (1, 0, 0, 0)$.



1. Zeige, dass die Markierung $m = (0, 0, 1, 0)$ erreichbar ist.
2. Konstruiere den Überdeckungsgraphen, und wähle im Algorithmus die Markierung $m = (0, 0, 1, 0)$ so früh wie möglich zur Bearbeitung aus. Dokumentiere beim Einfügen von ω-Komponenten, welche Markierung überdeckt wurde!
3. Das gleiche wie oben, nur wähle $m = (0, 0, 1, 0)$ so spät wie möglich.
4. Bestimme die unbeschränkten Plätze!

Aufgabe 3.8 Nach einem Satz der VL gilt für den Überdeckungsgraphen $G(N)$ eines P/T Netzes N folgendes:

Gilt $m_0 \xrightarrow{w} m$ im Netz, so existiert diese Schaltfolge als Pfad w in $G(N)$, so dass (der Pfad w in $G(N)$ von m_0 nach m_1 existiert) $m_0 \xrightarrow[w]{*} m_1$ und $m \leq m_1$.

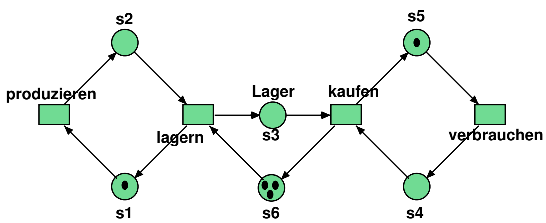
Wir können $m \leq m_1$ hier sogar noch konkretisieren: Es gilt $\forall p : m_1(p) = m(p) \vee m_1(p) = \omega$. Beweise dies!

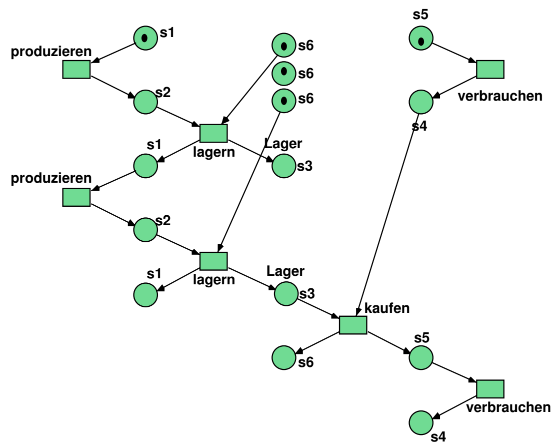
Teamnr.

	Vorname (lesbar!)	Name (lesbar!)
1		
2		
3		

Selbsteinschätzung: Wie gut ist Ihre Lösung? (Zutreffendes einkreisen) - - / - / + / + +

Übungsaufgabe 3.1 Betrachte die beiden Darstellungen des *Producer/Consumer* Szenarios.





1. Was bedeuten die Anschriften an Plätzen und Transition an der rechten Abbildungen? Beachte, dass sie mehrfach vorkommen!
2. Welchen Prozess beschreibt das Netz?
3. Wieso ist das rechte Netz zyklenfrei?
4. Wenn das rechte Netz bis zum „Schluß“ schaltet, welche Markierung beschreibt es?
5. Kann man sagen, dass beide Netze das gleiche Szenario beschreiben, wenn auch anders?

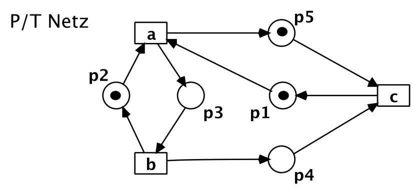
Teamnr.

	Vorname (lesbar!)	Name (lesbar!)
1		
2		
3		

Selbsteinschätzung: Wie gut ist Ihre Lösung? (Zutreffendes einkreisen) - - / - / + / + +

Übungsaufgabe 3.2 Prozesse von P/T-Netzen.

1. Konstruieren Sie zu folgendem P/T Netz einen Prozess, der die Schaltfolge $w = abca$ beschreibt! Zeichnen Sie den Prozess in den vorgegebenen Kasten!



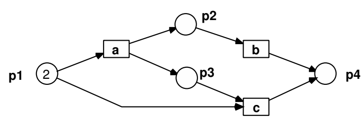
2. Zeichnen Sie in Ihre Graphik einen Stellen-Schnitt ein!
3. Zeichnen Sie in Ihre Graphik eine Linie des Prozesses ein!
4. Ist der Prozess zu dieser Schaltfolge $w = abca$ eindeutig festgelegt?
   Wenn „Ja“, dann geben Sie eine Begründung an!
   Wenn „Nein“, dann beschreiben Sie, wie ein weiterer Prozess aussieht!

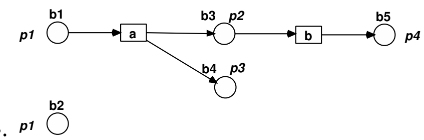
Teamnr.

	Vorname (lesbar!)	Name (lesbar!)
1		
2		
3		

Selbsteinschätzung: Wie gut ist Ihre Lösung? (Zutreffendes einkreisen) - - / - / + / + +

Übungsaufgabe 3.3 Gegeben ein Petrinetz $N = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$ sowie ein dazu passender Prozess: $R = (B, E, \lessdot)$:

N: 

R: 

1. Geben Sie die Abbildung ϕ an, die dem Prozess R zugrunde liegt.
2. Bestimmen Sie die Mengen $^\circ R$ (Menge der Minima) und R° (Menge der Maxima). Diese Mengen sind wie folgt definiert:

$$^\circ R := \{b \in B \mid {}^\bullet b = \emptyset\}$$
$$R^\circ := \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\}$$

3. Geben Sie eine Fortsetzung R' des Prozesses R an. Gibt es mehrere mögliche Fortsetzungen?
4. Bestimmen Sie für den um die Transition c verlängerten Prozess R' die Relationen $\lessdot$, $<$, **li** und **co**.

   Stellen Sie die Relationen $\lessdot$ und $<$ jeweils als gerichtete und die Relationen **li** und **co** als ungerichtete Graphen dar.
5. Geben Sie je einen möglichst großen P-Schnitt und T-Schnitt für R' an.
6. Zeichnen Sie alle konstruierbaren Prozesse des Netzes.

Teamnr.		Vorname (lesbar!)	Name (lesbar!)
	1		
	2		
	3		

Selbsteinschätzung: Wie gut ist Ihre Lösung? (Zutreffendes einkreisen) - - / - / + / + +

Übungsaufgabe 3.4 Sei $N = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$ ein beliebiges P/T-Netz und $f : P \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft:

$$\forall t \in T : \sum_{p \in {}^\bullet t} f(p) \cdot W(p,t) = \sum_{p \in t^\bullet} f(p) \cdot W(t,p) \qquad (*)$$

1. Zeige für solches N und f, dass eine Konstante $c_{N,f} \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt:

$$\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathbf{m}_0) : \sum_{p \in P} f(p) \cdot \mathbf{m}(p) = c_{N,f} \qquad (**)$$

2. Bestimme den Wert von $c_{N,f}$!

3. Zeige für solches N und f, dass – unabhängig wie die Initialmarkierung $\mathbf{m}_0$ beschaffen ist – die Markierung aller Stellen beschränkt sind, d.h.

$$\exists k \in \mathbb{N} : \forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathbf{m}_0) : \forall p \in P : \mathbf{m}(p) \leq k$$

Teamnr.

	Vorname (lesbar!)	Name (lesbar!)
1		
2		
3		

Selbsteinschätzung: Wie gut ist Ihre Lösung? (Zutreffendes einkreisen) - - / - / + / + +

Übungsaufgabe 3.5 Eine Transition t heißt *quasilebendig*, wenn eine Markierung $\mathbf{m} \in \mathcal{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$ mit $\mathbf{m} \xrightarrow{t}$ existiert.

Zeigen Sie, dass man diese Eigenschaft mit Hilfe der Algorithmen für Markierungs- bzw Lebendigkeitsinvarianz entscheiden kann!

Teamnr.

	Vorname (lesbar!)	Name (lesbar!)
1		
2		
3		

Selbsteinschätzung: Wie gut ist Ihre Lösung? (Zutreffendes einkreisen) - - / - / + / + +

Übungsaufgabe 3.6 Ein P/T-Netz $\mathcal{N}\rangle$ heißt *T-fortsetzbar*, wenn zu jeder Markierung $\mathbf{m} \in \mathcal{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$ eine unendliche Schaltfolge aktviert ist, in der jede Transition $t \in T$ unendlich oft vorkommt.

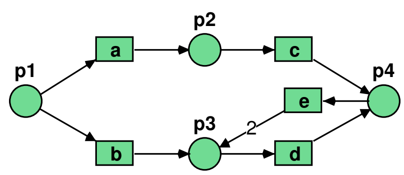
Zeigen Sie, dass man diese Eigenschaft mit Hilfe der Algorithmen für Markierungs- bzw Lebendigkeitsinvarianz entscheiden kann!

Teamnr.		Vorname (lesbar!)	Name (lesbar!)
	1		
	2		
	3		

Selbsteinschätzung: Wie gut ist Ihre Lösung? (Zutreffendes einkreisen) - - / - / + / + +

Übungsaufgabe 3.7 Der Algorithmus zur Erzeugung des Überdeckungsgraphen arbeitet nichtdeterministisch. Der erzeugte Überdeckungsgraph hängt von der Auswahl der unbearbeiteten Knoten ab.

Betrachte das folgende Petrinetz N in der Initialmarkierung $m_0 = (1, 0, 0, 0)$.



1. Zeige, dass die Markierung $m = (0, 0, 1, 0)$ erreichbar ist.
2. Konstruiere den Überdeckungsgraphen, und wähle im Algorithmus die Markierung $m = (0, 0, 1, 0)$ so früh wie möglich zur Bearbeitung aus. Dokumentiere beim Einfügen von ω-Komponenten, welche Markierung überdeckt wurde!

3. Das gleiche wie oben, nur wähle $m = (0, 0, 1, 0)$ so spät wie möglich.
4. Bestimme die unbeschränkten Plätze!

Teamnr.

	Vorname (lesbar!)	Name (lesbar!)
1		
2		
3		

Selbsteinschätzung: Wie gut ist Ihre Lösung? (Zutreffendes einkreisen) - - / - / + / + +

Übungsaufgabe 3.8 Nach einem Satz der VL gilt für den Überdeckungsgraphen $G(N)$ eines P/T Netzes N folgendes:

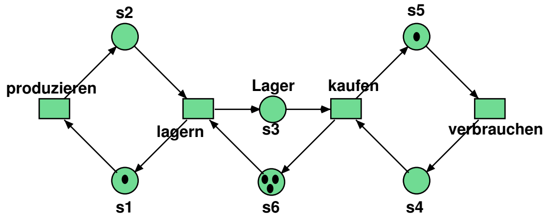
Gilt $m_0 \xrightarrow{w} m$ *im Netz, so existiert diese Schaltfolge als Pfad* w *in* $G(N)$*, so dass (der Pfad* w *in* $G(N)$ *von* m_0 *nach* m_1 *existiert)* $m_0 \xrightarrow[w]{*} m_1$ *und* $m \leq m_1$*.*

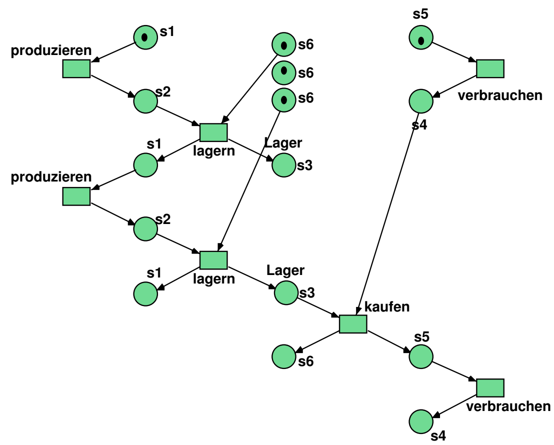
Wir können $m \leq m_1$ hier sogar noch konkretisieren: Es gilt $\forall p : m_1(p) = m(p) \vee m_1(p) = \omega$. Beweise dies!

Teilnehmer der Diskussionsgruppe: Namen und- Teamnummern

1		Team:	2		Team:
3		Team:	4		Team:

Übungsaufgabe 3.1: Betrachte die beiden Darstellungen des *Producer/Consumer* Szenarios.





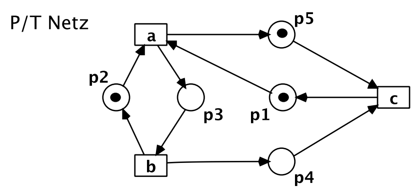
1. Was bedeuten die Anschriften an Plätzen und Transition an der rechten Abbildungen? Beachte, dass sie mehrfach vorkommen!
2. Welchen Prozess beschreibt das Netz?
3. Wieso ist das rechte Netz zyklenfrei?
4. Wenn das rechte Netz bis zum „Schluß“ schaltet, welche Markierung beschreibt es?
5. Kann man sagen, dass beide Netze das gleiche Szenario beschreiben, wenn auch anders?

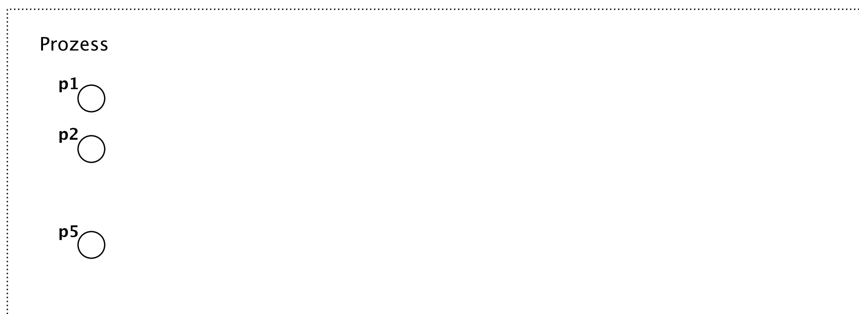
Teilnehmer der Diskussionsgruppe: Namen und- Teamnummern

1		Team:	2		Team:
3		Team:	4		Team:

Übungsaufgabe 3.2: Prozesse von P/T-Netzen.

1. Konstruieren Sie zu folgendem P/T Netz einen Prozess, der die Schaltfolge $w = abca$ beschreibt! Zeichnen Sie den Prozess in den vorgegebenen Kasten!





2. Zeichnen Sie in Ihre Graphik einen Stellen-Schnitt ein!

3. Zeichnen Sie in Ihre Graphik eine Linie des Prozesses ein!

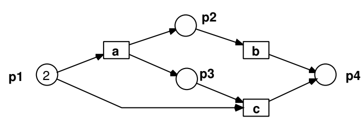
4. Ist der Prozess zu dieser Schaltfolge $w = abca$ eindeutig festgelegt?
Wenn „Ja“, dann geben Sie eine Begründung an!
Wenn „Nein“, dann beschreiben Sie, wie ein weiterer Prozess aussieht!

Teilnehmer der Diskussionsgruppe: Namen und- Teamnummern

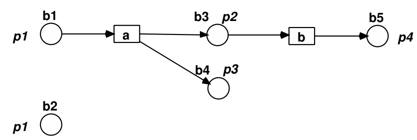
1		Team:	2		Team:
3		Team:	4		Team:

Übungsaufgabe 3.3: Gegeben ein Petrinetz $N = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$ sowie ein dazu passender Prozess: $R = (B, E, \lessdot)$:

N:



R:



1. Geben Sie die Abbildung ϕ an, die dem Prozess R zugrunde liegt.
2. Bestimmen Sie die Mengen $^\circ R$ (Menge der Minima) und R° (Menge der Maxima). Diese Mengen sind wie folgt definiert:

$$^\circ R := \{b \in B \mid {}^\bullet b = \emptyset\}$$
$$R^\circ := \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\}$$

3. Geben Sie eine Fortsetzung R' des Prozesses R an. Gibt es mehrere mögliche Fortsetzungen?
4. Bestimmen Sie für den um die Transition c verlängerten Prozess R' die Relationen $\lessdot$, $<$, **li** und **co**.

   Stellen Sie die Relationen $\lessdot$ und $<$ jeweils als gerichtete und die Relationen **li** und **co** als ungerichtete Graphen dar.
5. Geben Sie je einen möglichst großen P-Schnitt und T-Schnitt für R' an.
6. Zeichnen Sie alle konstruierbaren Prozesse des Netzes.

Teilnehmer der Diskussionsgruppe: Namen und- Teamnummern

1		Team:	2		Team:
3		Team:	4		Team:

Übungsaufgabe 3.4: Sei $N = (P, T, F, W, \mathbf{m}_0)$ ein beliebiges P/T-Netz und $f : P \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft:

$$\forall t \in T : \sum_{p \in {}^\bullet t} f(p) \cdot W(p,t) = \sum_{p \in t^\bullet} f(p) \cdot W(t,p) \tag{$*$}$$

1. Zeige für solches N und f, dass eine Konstante $c_{N,f} \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt:

$$\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathbf{m}_0) : \sum_{p \in P} f(p) \cdot \mathbf{m}(p) = c_{N,f} \tag{$**$}$$

2. Bestimme den Wert von $c_{N,f}$!

3. Zeige für solches N und f, dass – unabhängig wie die Initialmarkierung $\mathbf{m}_0$ beschaffen ist – die Markierung aller Stellen beschränkt sind, d.h.

$$\exists k \in \mathbb{N} : \forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathbf{m}_0) : \forall p \in P : \mathbf{m}(p) \leq k$$

Teilnehmer der Diskussionsgruppe: Namen und- Teamnummern

1		Team:	2		Team:
3		Team:	4		Team:

Übungsaufgabe 3.5: Eine Transition t heißt *quasilebendig*, wenn eine Markierung $\mathbf{m} \in \mathcal{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$ mit $\mathbf{m} \xrightarrow{t}$ existiert.

Zeigen Sie, dass man diese Eigenschaft mit Hilfe der Algorithmen für Markierungs- bzw Lebendigkeitsinvarianz entscheiden kann!

Teilnehmer der Diskussionsgruppe: Namen und- Teamnummern

1		Team:	2		Team:
3		Team:	4		Team:

Übungsaufgabe 3.6: Ein P/T-Netz $\mathcal{N}\rangle$ heißt *T-fortsetzbar*, wenn zu jeder Markierung $\mathbf{m} \in \mathcal{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$ eine unendliche Schaltfolge aktviert ist, in der jede Transition $t \in T$ unendlich oft vorkommt.

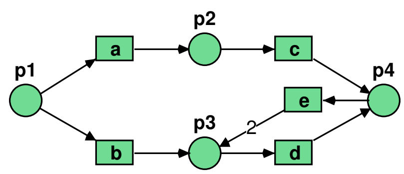
Zeigen Sie, dass man diese Eigenschaft mit Hilfe der Algorithmen für Markierungs- bzw Lebendigkeitsinvarianz entscheiden kann!

Teilnehmer der Diskussionsgruppe: Namen und- Teamnummern

1		Team:	2		Team:
3		Team:	4		Team:

Übungsaufgabe 3.7: Der Algorithmus zur Erzeugung des Überdeckungsgraphen arbeitet nichtdeterministisch. Der erzeugte Überdeckungsgraph hängt von der Auswahl der unbearbeiteten Knoten ab.

Betrachte das folgende Petrinetz N in der Initialmarkierung $m_0 = (1, 0, 0, 0)$.



1. Zeige, dass die Markierung $m = (0, 0, 1, 0)$ erreichbar ist.
2. Konstruiere den Überdeckungsgraphen, und wähle im Algorithmus die Markierung $m = (0, 0, 1, 0)$ so früh wie möglich zur Bearbeitung aus. Dokumentiere beim Einfügen von ω-Komponenten, welche Markierung überdeckt wurde!

3. Das gleiche wie oben, nur wähle $m = (0, 0, 1, 0)$ so spät wie möglich.
4. Bestimme die unbeschränkten Plätze!

Teilnehmer der Diskussionsgruppe: Namen und- Teamnummern

1		Team:	2		Team:
3		Team:	4		Team:

Übungsaufgabe 3.8: Nach einem Satz der VL gilt für den Überdeckungsgraphen $G(N)$ eines P/T Netzes N folgendes:

Gilt $m_0 \xrightarrow{w} m$ *im Netz, so existiert diese Schaltfolge als Pfad* w *in* $G(N)$*, so dass (der Pfad* w *in* $G(N)$ *von* m_0 *nach* m_1 *existiert)* $m_0 \xrightarrow[w]{*} m_1$ *und* $m \leq m_1$*.*

Wir können $m \leq m_1$ hier sogar noch konkretisieren: Es gilt $\forall p : m_1(p) = m(p) \vee m_1(p) = \omega$. Beweise dies!